БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ИНТЕГРИРАНЕ НА СЛУЧАЙНА ФУНКЦИЯ СПРЯМО СЛУЧАЙНА СПЕКТРАЛНА МЯРКА

Елисавета Панчева

В настоящата работа е построен интеграл от случайна функция спрямо случайна спектрална мярка, намерено е необходимо и достатъчно условие за съществуването му, доказано е едно негово свойство (теорема 3). Необходимостта от въвеждането на такива интеграли се породи във връзка с някои изследвания по слабо стационарни случайни функции и се използува в [2].

Нека $\xi(t)$ е комплексна случайна функция във вероятностното пространство $[\Omega, \mathbf{A}, P]$ с $M|\xi(t)|^2<\infty$ за всяко реално t, а $\mu(\Delta)$ е случайна спектрална мярка, независима от $\xi(t)$ и удовлетворяваща изискванията $M|\mu(\Delta)|^2=F(\Delta)<\infty$, $\Delta\in \mathbf{B}_1$ ($\mathbf{B}_1$ е σ-алгебрата на бореловите множества от R_1) и

$$M[\mu(\Delta_1)\cdot\overline{\mu(\Delta_2)}]=0, \quad \Delta_1\cap \Delta_2=\emptyset.$$

Интеграли от вида

$$\int\xi(t)dt, \quad \int f(t)\mu(dt),$$

където $f(t)$ е неслучайна функция от L^2_F, са изследвани от Розанов [1, стр. 10]. В настоящата работа ще дадем дефиниция на μ-интегрируема случайна функция, ще се занимаем с условията за съществуването на μ-интеграла

$$\int\xi(t)\mu(dt) \tag{1}$$

и ще докажем някои негови свойства.

Отначало нека припомним следните две дефиниции, използвани по-долу:

Дефиниция. С H_ξ да означим затворената линейна обвивка на $\xi(t)$ в L^2. Случайната функция $\xi(t)$ се нарича *сепарабелна в широк смисъл*, ако H_ξ е сепарабелно пространство.

Дефиниция. Случайната функция $\xi(t)$ наричаме *измерима в широк смисъл*, ако за всеки елемент $h\in H_\xi$ функциите $M(\xi(t)\cdot\bar{h})$ са измерими.

За построяването на интеграла (1) основна се оказва следната теорема, доказана в [1, с. 18].

Теорема 1. Нека корелационната функция $R(t, s)$ на една сепарабелна случайна функция $\xi(t)$ е измерима. Тогава и $\xi(t)$ е измерима и дори съществува редица от елементарни случайни функции $\xi_n(t)$, $n=1, 2, \ldots$, която клони равномерно по t към $\xi(t)$.

Нека първоначално $\xi(t)$ е изброима елементарна случайна функция, т. е.

$$\xi(t) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k I_{\Delta_k}(t),$$

където $M|\xi_k|^2 < \infty$, а

$$I_{\Delta_k}(t) \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \notin \Delta_k. \end{cases}$$

Случайната функция $\xi(t)$ ще наречем μ-интегрируема, ако съществува границата

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mu(\Delta_k),$$

която ще наричаме интеграл на $\xi(t)$ спрямо μ и ще бележим с

$$\int \xi(t)\mu(dt).$$

Необходимо и достатъчно условие за съществуването на този интеграл дава следната

Лема 1. Елементарната случайна функция $\xi(t)$ е μ-интегрируема тогава и само тогава, когато съществува

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_{k=1}^{n} M|\xi_k|^2 F(\Delta_k).$$

Доказателство. То следва от равенството

$$M\left|\sum_{k=m}^{n} \xi_k u(\Delta_k)\right|^2 = \sum_{k,j=m}^{n} M[\xi_k \cdot \bar{\xi}_j] \cdot M[\mu(\Delta_k) \cdot \overline{\mu(\Delta_j)}] = \sum_{k=m}^{n} M|\xi_k|^2 F(\Delta_k).$$

Да разгледаме сега случая, когато случайната функция $\xi(t)$ е произволна, и да намерим необходимо и достатъчно условие за съществуването на (1). За тази цел предварително ще докажем следната

Лема 2. Нека $\xi(t)$ е граница на равномерно сходяща редица от μ-интегрируеми елементарни функции $\xi_n(t)$, $n=1, 2, \ldots$, т. е. $M|\xi(t) - \xi_n(t)|^2 \to 0$. Тогава границата

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int \xi_n(t)\mu(dt)$$

съществува и не зависи от избора на редицата $\xi_n(t)$.

Доказателство. Първо трябва да покажем, че $\int \xi_n(t)\mu(dt)$ има средна квадратична граница за $n \to \infty$.

Имаме

$$M\left|\int (\xi_m - \xi_n)(t) \cdot \mu(dt)\right|^2 = \int M|\xi_m - \xi_n|^2 F(dt), \tag{2}$$

откъдето

$$M\left|\int \xi_m(t)\mu(dt)-\int \xi_n(t)\mu(dt)\right|^2 \to 0,$$

за $m, n \to \infty$, тъй като редицата $\xi_n(t)$ е равномерно сходяща. Че границата на $\int \xi_n(t)\mu(dt)$ не зависи от редицата ξ_n, се убеждаваме, когато в (2) заменим ξ_m с някоя друга редица ξ'_n, също клоняща към $\xi(t)$. С това е доказана и втората част на лемата.

Лема 2 ни позволява да дадем дефиниция на μ-интегрируема случайна функция.

Д е ф и н и ц и я. Случайната функция $\xi(t)$ ще наречем μ-и н т е г р и р у е м а, ако може да се представи като граница на равномерно сходяща редица от елементарни μ-интегрируеми функции $\xi_n(t)$, $n=1, 2, \ldots$ Границата

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int \xi_n(t)\mu(dt)$$

ще наречем μ-интеграл на $\xi(t)$ и ще означаваме с

$$\int \xi(t)\mu(dt).$$

С помощта на всичко казано дотук може лесно да се докаже следната

Т е о р е м а 2. Сепарабелната случайна функция $\xi(t)$ с измерима корелационна функция $R(t, s)$ е тогава и само тогава μ-интегрируема, когато удовлетворява условието $\int M|\xi(t)|^2F(dt)<\infty$.

Доказателство. Според теорема 1 при дадените условия съществува редица от елементарни случайни функции $\xi_n(t)$, $n=1, 2, \ldots$, която клони равномерно към $\xi(t)$. Да докажем първо необходимостта. Ако $\xi(t)$ е μ-интегрируема, то $\xi_n(t)$, $n=1, 2, \ldots$, според третата дефиниция са също μ-интегрируеми, от което следва

$$\int M|\xi_n(t)|^2F(dt)<\infty.$$

Тогава за всяко n е в сила

$$\int M|\xi(t)|^2F(dt)=\int M|\xi(t)-\xi_n(t)+\xi_n(t)|^2F(dt)=\int M|\xi(t)-\xi_n(t)|^2F(dt)$$
$$+\int M|\xi_n(t)|^2F(dt)+\int 2M[(\xi(t)-\xi_n(t))\xi_n(t)]F(dt)\leq\int M|\xi(t)$$
$$-\xi_n(t)|^2F(dt)+\int M|\xi_n(t)|^2F(dt)+2\int\sqrt{M|\xi(t)-\xi_n(t)|^2\,.\,M|\xi_n(t)|^2}\,.\,F(dt)<\infty.$$

Достатъчността се получава, като в горните разсъждения заменим $\xi(t)$ с $\xi_n(t)$.

Така дефинираният интеграл има следните свойства, които тук ще дадем без доказателство:

1. $\int[\alpha\xi_1(t)+\beta\xi_2(t)]\mu(dt)=\alpha\int\xi_1(t)\mu(dt)+\beta\int\xi_2(t)\mu(dt)$,

2. $\int\xi(t)\mu(dt)\geq 0$ п. н. за $P(\xi(t)\geq 0)=1$,

3. $M\left|\int\xi(t)\mu(dt)\right|^2=\int M|\xi(t)|^2F(dt)$,

4. $M[\int f(t)\mu(dt)\,.\,\int \overline{g(t)\mu(dt)}]=\int f(t)\overline{g(t)}F(dt)$,

където $\xi(t)$ е μ-интегрируема, независима от μ случайна функция, а μ е спектрална случайна мярка; $f(t)$ и $g(t)$ са неслучайни функции от L_F^2.

Следващата теорема съдържа основния резултат на настоящата работа.

Теорема 3. Нека μ е случайна спектрална мярка и (χ_x), $x \in R_1$, е семейство от случайни спектрални мерки, удовлетворяващи:

а) χ_x, $x \in R_1$, са независими от μ;

б) за всяко $A \in B_1$ $\chi_x(A)$ е μ-интегруема случайна функция.

Тогава

1) $\int \chi_x(A)\mu(dx) = \varphi(A)$ е случайна спектрална мярка и

2) $\int f(t)\varphi(dt) = \int [\int f(t)\chi_x(dt)]\mu(dx)$,

където $f \in L^2_{|\varphi|^2}$.

Доказателство. Първо трябва да покажем, че φ притежава следните свойства:

$$\alpha)\ M[\varphi(\Delta_1)\cdot\overline{\varphi(\Delta_2)}] = 0,\quad \Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$$

$$\beta)\ \varphi\left(\bigcup_1^\infty A_k\right) = \lim_{n\to\infty}\varphi\left(\bigcup_1^n A_k\right),\ A_i \cap A_k = \emptyset,\ i \neq k,\ A_i \in B_1.$$

При доказателството на α) се използва фактът, че

$$M(\chi_x(\Delta_1)\cdot\overline{\chi_x(\Delta_2)}) = 0,$$

откъдето следва

$$M(\varphi(\Delta_1)\cdot\overline{\varphi(\Delta_2)}) = M[\int \chi_x(\Delta_1)\mu(dx)\cdot\overline{\int \chi_x(\Delta_2)\mu(dx)}] = \int M(\chi_x(\Delta_1)\cdot\overline{\chi_x(\Delta_2)})F(dx) = 0.$$

σ-адитивността на φ следва от това, че $S_n = \bigcup_n^\infty A_k$ образуват монотонно намаляваща редица и $M|\chi_x(\cdot)|^2$, като σ-адитивна мярка е непрекъсната в нулата.

$$M\left|\varphi\left(\bigcup_1^\infty A_k\right) - \varphi\left(\bigcup_1^n A_k\right)\right|^2 = M|\varphi(S_n)|^2 =$$

$$= \int M|\chi_x(S_n)|^2F(dx) \longrightarrow 0 \text{ за } n \to \infty.$$

С това е доказано 1).

Второто твърдение на теоремата ще бъде смислено, ако функцията $f(\lambda)$ от L^2_φ принадлежи също на пространството $L^2_{|\chi_x|}$, т. е. ако тя е χ_x-интегрируема за почти всички x спрямо F. Наистина

$$(3)\qquad \int |f(\lambda)|^2M|\varphi(d\lambda)|^2 = \int\int |f(\lambda)|^2M|\chi_x(d\lambda)|^2F(dx)$$

$$= \int [\int |f(\lambda)|^2M|\chi_x(d\lambda)|^2]F(dx).$$

Смяната на реда на интегриране е оправдана въз основа на теоремата на Фубини.

От друга страна, поради условието

$$\int |f(\lambda)|^2M|\varphi(d\lambda)|^2 < \infty$$

от (3) можем да заключим, че

$$\int|f(\lambda)|^2 M|\chi_x(d\lambda)|^2<\infty$$

почти навсякъде спрямо F.

Нека отначало $f(\lambda)$ от $L^2_{\|\varphi\|^2}$ е елементарна неотрицателна функция, т. е. $f(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot I_{\Lambda_k}(\lambda)$. Парциалните суми $f_n(\lambda)=\sum_{k=1}^{n} f_k \cdot I_{\Lambda_k}(\lambda)$ образуват монотонно растяща, клоняща към $f(\lambda)$ редица. За $f_n(\lambda)$ е в сила твърдението 2), понеже

$$\int \sum_{k=1}^{n} f_k I_{\Lambda_k}(\lambda)\varphi(d\lambda)=\sum_{k=1}^{n} f_k \int I_{\Lambda_k}(\lambda)\varphi(d\lambda)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f_k \int\int I_{\Lambda_k}(\lambda)\chi_x(d\lambda)\mu(dx)=\int[\int f(\lambda)\chi_x(d\lambda)]\mu(dx).$$

При това преобразуване е използвано, че

$$\int\varphi(d\lambda)=\int[\int\chi_x(d\lambda\mu)](dx),$$

което следва непосредствено от дефиницията на спектрална мярка. Използвайки горния резултат, имаме неравенствата

$$M\left|\int f(\lambda)\varphi(d\lambda)-\int\int f(\lambda)\chi_x(d\lambda)\mu(dx)\right|^2$$

$$=M\left|\int f(\lambda)\varphi(d\lambda)-\int f_n(\lambda)\varphi(d\lambda)+\int\int f_n(\lambda)\chi_x(d\lambda)\mu(dx)-\int\int f(\lambda)\chi_x(d\lambda)\mu(dx)\right|^2$$

$$=M\left|\int(f(\lambda)-f_n(\lambda))\varphi(d\lambda)-\int\int(f(\lambda)-f_n(\lambda))\chi_x(d\lambda)\mu(dx)\right|^2$$

$$\leq M\left|\int(f(\lambda)-f_n(\lambda))\varphi(d\lambda)\right|^2+M\left|\int\int(f(\lambda)-f_n(\lambda))\chi_x(d\lambda)\mu(dx)\right|^2$$

$$=\int|f(\lambda)-f_n(\lambda)|^2 M|\varphi(d\lambda)|^2+\int\int|f(\lambda)-f_n(\lambda)|^2 M|\chi_x(d\lambda)|^2 F(dx).$$

Функциите $|f(\lambda)-f_n(\lambda)|$ образуват нулева редица и по теоремата на Лебег можем да заключим, че за $n\to\infty$ и двата интеграла клонят към нула, а с тях и разглежданата разлика. Така равенството

$$\int f(\lambda)\varphi(d\lambda)=\int\int f(\lambda)\chi_x(d\lambda)\mu(dx)$$

бе доказано за елементарна неотрицателна функция $f(\lambda)$.

Нека сега $f(\lambda)$ от $L^2_{\|\varphi\|^2}$ е произволна неотрицателна функция. Известно е, че една такава функция се апроксимира от монотонно растяща редица от елементарни неотрицателни функции $f_n(\lambda)$, $n=1, 2, \ldots$ Подобни разсъждения показват, че и разликата

$$M\left|\int f(\lambda)\varphi(d\lambda)-\int\int f(\lambda)\chi_x(d\lambda)\mu(dx)\right|^2$$

е равна на нула. С това теоремата е напълно доказана, тъй като всяка функция $f(\lambda)$ може да се представи като

$$f(\lambda)=f^+(\lambda)-f^-(\lambda),$$

където

$$f^+(\lambda)=\sup\{0, f\}\geqq 0,$$
$$f^-(\lambda)=\sup\{0, -f\}\geqq 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Розанов, Ю. А. Стационарные случайные процессы. Москва, 1963.
2. Панчева, Е. И. Приложение на Шенон-Котелниковата теорема в случай на случайно изместени моменти на наблюдение. Известия на Мат. инст. на БАН, **14**, 1472.

Постъпила на 6. I. 1971 г.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО СЛУЧАЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ МЕРЫ

Елисавета Панчева

(Резюме)

Конструирован интеграл случайной функции относительно случайной спектральной меры, найдено необходимое и достаточное условие его существования. Доказывается следующая

Теорема 3. Пусть μ является случайной спектральной мерой и (χ_x), $x \in R_1$ — семейство случайных спектральных мер, удовлетворяющих следующим условиям:

а) χ_x, $x \in R_1$, независимы от μ;

б) для любых $A \in B_1$, $\chi_x(A)$ является μ-интегрируемой случайной функцией.

Тогда

$$\int \chi_x(A)\mu(dx) = \varphi(A)$$

является случайной спектральной мерой и

$$\int f(\lambda)\varphi(d\lambda) = \int [f(\lambda)\chi_x(d\lambda)]\mu(dx),$$

где $f \in L^2_{||\varphi||^2}$.

Необходимость определения интеграла данного вида возникла в связи с некоторыми исследованиями в области слабо стационарных случайных функций.

DAS INTEGRIEREN EINER ZUFÄLLIGEN FUNKTION NACH EINEM ZUFÄLLIGEN SPEKTRALMASS

Elisaveta Pančeva

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit betrachtet man das Integrieren einer zufälligen Funktion bezüglich eines zufälligen Spektralmasses. Für das konstruierte Integral, das die gewöhnlichen Eigenschaften besitzt, wird folgender Satz bewiesen:

Satz 3. Es sei μ ein zufälliges Spektralmass und (χ_x), $x \in R_1$, eine Familie von zufälligen Spektralmassen mit:

a) χ_x sind unabhängig von μ $(x \in R_1)$;

b) für alle A aus B_1 ist $\chi_x(A)$ μ-integrierbar.

Dann gilt:

$$\int \chi_x(A)\mu(dx) = \varphi(A) \tag{1}$$

ist ein zufälliges Spektralmass und

$$\int f(\lambda)\varphi(d\lambda) = \int [\int f(\lambda)\chi_x(d\lambda)]\mu(dx) \tag{2}$$

für $f \in L^2_{||\varphi||^2}$.

Dieser Satz erweist sich als nützlich bei Untersuchungen über schwach stationäre zufällige Prozesse [2].