БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ЗА ЛОГИЧЕСКИТЕ ЗНАЦИ В ИНТЕРПОЛАЦИОННИТЕ ФОРМУЛИ НА ШЮТЕ

Надежда Георгиева

В [1] се доказва следната интерполационна теорема за интуиционистkото предикатно смятане S:

Ако от изводимата в S формула $C_1 \to (C_2 \to (\quad \to (C_n \to C) \ldots))$ отстраним някои C_i, $1 \leq i \leq n$, съвкупността на които да означим с Φ, а останалата формула — с F^*, съществува формула u със следните свойства:

а) U съдържа само такива свободни променливи (индивидни, съждителни и предикатни), които влизат както във Φ, така и в F^*.

б) $\Phi \to U$ и $U \to F^*$ са изводими в S. Изразът $\Phi \to U$, ако Φ означава съвкупността от формули $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$, е съкратено означение на $C_{i_1} \to (C_{i_2} \to (\ldots \to (C_{i_k} \to U)). \quad .))$

Всяка формула U със свойствата а) и б) се нарича интерполационна формула на Φ и F^*.

Не за всяка формула $\Phi \to F^*$ интерполационната формула U, намерена в [1], съдържа логически знаци само измежду принадлежащите на $\Phi \to F^*$. Ние ще разгледаме някои случаи, при които всяка интерполационна формула на Φ и F^* е длъжна да съдържа логически знак $Л$, $\wedge$ или $\exists$, въпреки че той не влиза във $\Phi \to F^*$

§ 1. ФОРМАЛНА СИСТЕМА

S от [1] е логическа система със следните логически знаци: $Л$ („лъжа"), $\wedge$ („и"), $\vee$ („или"), $\to$ („влече"), $\forall$ („за всяко") и $\exists$ („съществува"). Формулите на S се построяват по известния начин. Елементарни формули са: $Л$, отделно взети съждителни променливи и изрази от вида $p(a_1, \ldots, a_n)$, където p е n-местна предикатна променлива, а $a_1, \ldots, a_n$ са индивидни променливи. $\vdash F$ означава, че F е изводима.

Аксиоми на S са:

$P \to P$

$Л \to P$, където P е елементарна формула.

Правилата за извод са:

$$\frac{\Gamma \to (A \to (B \to C))}{\Gamma \to (B \to (A \to C))}, \qquad \frac{\Gamma \to A,\ \Gamma \to B}{\Gamma \to (A \wedge B)},$$

$$\frac{A \to (A \to C)}{A \to C}, \qquad \frac{A \to C,\ B \to C}{(A \vee B) \to C},$$

$$\frac{C}{A \to C}, \qquad \frac{\Gamma \to A,\ B \to C}{\Gamma \to ((A \to B) \to C)},$$

$$\frac{A \to C}{(A \wedge B) \to C}, \qquad \frac{\Gamma \to A(a)}{\Gamma \to \exists x A(x)},$$

$$\frac{B \to C}{(A \wedge B) \to C}, \qquad \frac{A(a) \to C}{\forall x A(x) \to C},$$

$$\frac{\Gamma \to A}{\Gamma \to (A \vee B)}, \qquad \left.\begin{array}{c} \dfrac{\Gamma \to A(a)}{\Gamma \to \forall x A(x)} \\ \dfrac{A(a) \to C}{\exists x A(x) \to C} \end{array}\right\} \text{с ограничение на променливите}$$

$$\frac{\Gamma \to B}{\Gamma \to (A \vee B)},$$

Ограничението на променливите в последните две правила е свободната индивидна променлива a да не се среща в заключението.

A, B и C са формули, а Γ е крайна редица от формули, която може да е празна.

§ 2. ЛЕМИ

Пфсс (присъединена формула на съждителното смятане) F_1 на формулата F, както в [3], ще наричаме формулата, получена от F чрез премахване на кванторите, т. е. премахване на $\forall x$ и $\exists x$ (x е индивидна променлива) и заместване на всички изрази от вида $p(a_1 \ldots a_n)$, където p е предикатна променлива, а $a_1, \ldots, a_n$ са индивидните ѝ променливи, с неизползвани още съждителни променливи по следното правило: два израза $p_1(a_1, \ldots, a_n)$ и $p_2(b_1, \ldots, b_m)$ се заместват с една и съща съждителна променлива тогава и само тогава, когато p_1 и p_2 са една и съща предикатна променлива.

С математична индукция по дължината на извода се доказва, че:

1. Ако $\vdash F$ в S и F_1 е пфсс на F, то $\vdash F_1$ в интуиционисткото съждително смятане I.

$\vdash F \equiv C$ е кратко означение на $\vdash F \to C$ и $\vdash C \to F$.

2. $\wedge$ не може да се изрази чрез $\to$, Л, $\vee$, $\forall$ и $\exists$ в S.

Допускаме, че има формула F, на която логическите знаци са измежду $\to$, Л, $\vee$, $\forall$ и $\exists$ и за която $\vdash (p \wedge g) \equiv F$ в S, където p и q са различни съждителни променливи. Тогава за пфсс F_1 на F се получава, че $\vdash (p \wedge q) \equiv F_1$ в I. Според теоремата на Вайсберг за независимостта на $\to$, Л, $\wedge$ и $\vee$ в I това не е възможно.

3. Нека $\vdash A \equiv B$ в S и $F(A)$ е формула, която съдържа A. $F(B)$ се получава от $F(A)$ чрез замяна на A с B на нула или повече срещания на A в $F(A)$. Тогава $\vdash F(A) \equiv F(B)$ в S.

Доказателството се извършва с индукция по броя на логическите знаци на $F(A)$, в областта на действие на които влиза разглежданото A.

4. Ако F съдържа $Л \to Л$, то $\vdash F \equiv (Л \to Л)$ или $\vdash F \equiv F'$ в S, където свободните променливи и логическите знаци на F' са такива и в F и $Л \to Л$ не се среща в F'. Ако F съдържа $Л$, което не е от $Л \to Л$, то $\vdash F \equiv Л$ или $\vdash F \equiv F^*$ в S и свободните променливи и логически знаци на F^* влизат в F и $Л$ се среща в F^* само посредством формули от вида $A \to Л$.

4. следва от 3. и от

$$\vdash ((Л \to Л) \wedge U) \equiv U, \qquad \vdash (Л \wedge U) \equiv Л,$$

$$\vdash ((Л \to Л) \vee U) \equiv (Л \to Л), \qquad \vdash (Л \vee U) \equiv U,$$

$$\vdash ((Л \to Л) \to U) \equiv U, \qquad \vdash (Л \to U) \equiv (U \to U),$$

$$\vdash (U \to (Л \to Л)) \equiv (Л \to Л), \qquad \vdash \forall x Л \equiv Л,$$

$$\vdash \forall x (Л \to Л) \equiv (Л \to Л), \qquad \vdash \exists x Л \equiv Л.$$

$$\vdash \exists x (Л \to Л) \equiv (Л \to Л),$$

Понятието „подформула“ на дадена формула определяме, както в [2], по следния начин: Ако A е формула, то A е подформула на A. 2) Ако A и B са формули, то подформулите на A и B са подформули на $A \to B$, $A \wedge B$ и $A \vee B$. 3) Ако a и x са индивидни променливи, $A(x)$ — формула и x в $A(x)$ не влиза в областта на действие на $\forall a$ и $\exists a$, то подформулите на $A(a)$ са подформули на $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$.

5. От всеки извод в S може да се намери друг, в който да се прилагат същите правила като в дадения, без да се промени последната формула, и всяка подформула $C_1, \ldots, C_n$, C на формулите $C_1 \to (C_2$ $(\ldots \to (C_n \to C) \ldots))$ от новия извод да е подформула на последната формула.

Доказателството се извършва с индукция по дължината на извода. Ние ще разглеждаме изводи от този вид.

6. Ако $p(a)$ е едноместна предикатна променлива със свободна индивидна променлива a, U е формула с единствена свободна променлива p и $\vdash U \equiv \exists x p(x)$ в S, то U съдържа $\exists$.

Допускаме, че U не съдържа $\exists$. Тогава изводът на $U \to \exists x p(x)$ няма да съдържа правилото $\frac{A(a) \to C}{\exists x A(x) \to C}$. В него, ако заместим $\frac{\Gamma \to A(a)}{\Gamma \to \exists x A(x)}$ с $\frac{\Gamma \to A(a)}{\Gamma \to A(a)}$, ще получим извод на $U \to p(a)$ в S. Но $\vdash \exists x p(x) \to U$ в S също. Следователно $\vdash \exists x p(x) \to p(a)$, което не е вярно според [3].

§ 3. СРЕЩАНЕ НА НЯКОИ ЛОГИЧЕСКИ ЗНАЦИ В ИНТЕРПОЛАЦИОННИТЕ ФОРМУЛИ

От [1] следва, че интерполационните формули на Φ и F^* са формули от вида: P (елементарна формула), $Л \to Л$, U_1, $U_1 \wedge U_2$, $U_1 \vee U_2$, $U_1 \to U_2$, $\exists x U_1$ или $\forall x U_1$, където U_1 и U_2 са интерполационните формули на предпоставките в последното правило от доказателството на $\Phi \to F^*$.

Нека U е интерполационна формула на Φ и F^*, намерена както в [1], която съдържа $Л$. От 3 и 4 на § 2 U е еквивалентна на $Л$, $Л \to Л$ или на U^*, несъдържащо $Л \to Л$, в което, ако $Л$ влиза, то е само посредством подформули на U^* от вида $A \to Л$, където A е формула, различна от $Л$.

Ако U съдържа $Л$, което не е в $Л \to Л$, то според [1] някоя аксиома от извода на $\Phi \to F^*$ съдържа $Л$. Тогава по 5 от § 2 $\Phi \to F^*$ също съдържа $Л$. Ако U е $Л \to Л$, то F^* е изводима. Да допуснем, че p е съждителна променлива, която влиза както във Φ, така и във F^*. Формулата $p\ \ p$ е интерполационна формула на Φ и F^*, несъдържаща $Л$. Аналогично се построява интерполационна формула на Φ и F^*, несъдържаща $Л$, и тогава, когато Φ и F^* имат обща предикатна променлива.

От това следва, че в позитивното предикатно смятане за Φ и F^* не може да се намери интерполационна формула само ако $\vdash F^*$ и Φ и F^* нямат общи свободни съждителни или предикатни променливи.

Намерените в [1] интерполационни формули могат да съдържат логически знаци, непринадлежащи на $\Phi \to F^*$ освен в разгледаните вече случаи, но и когато в извода на $\Phi \to F^*$ се прилагат някои от правилата $\dfrac{\Gamma \to A, B \to C}{\Gamma \to ((A \to B) \to C)}$, $\dfrac{A \to C, B \to C}{(A \vee B) \to C}$ или $\dfrac{A(a) \to C}{\forall x A(x) \to C}$ и Φ не съдържа формулите $A \to B$, $A \vee B$ и $\forall x A(x)$ съответно. Ние ще покажем, че за всеки от тези случаи има примери, при които не може да се намери интерполационна формула, на която логическите знаци да се съдържат във $\Phi\ \ F^*$

Нека p, q и r са различни съждителни променливи.

1. $\vdash (q \to (p \to r)) \to (q \to (p \to r))$ в S.

Ако Φ е q, p, а F^*—$(q \to (p \to r)) \to r$, то според [1] една интерполационна формула U е $q \wedge p$. Допускаме, че U^* е коя да е друга интерполационна формула на Φ и F^* За нея е изпълнено $\vdash q \to (p \to U^*)$ и $\vdash U^* \to ((q \to (p \to r)) \to r)$, откъдето получаваме $\vdash (q \wedge p) \to U^*$ и $\vdash U^* \to (q \wedge p)$ или $\vdash U^*\ \ (q \wedge p)$. От теоремата на Вайсберг и 1 на § 2 следва, че U^* съдържа $\wedge$ — логически знак, който не се среща във $\Phi \to F^*$.

Това показва, че не винаги, когато $\vdash \Phi \to F^*$, в ампликативното предикатно смятане може да се намери интерполационна формула от него за Φ и F^*.

2. $\vdash ((q \to r) \vee (p \to r)) \to (q \to (p \to r))$ в S.

Нека Φ е q, p, а F^* е $((q \to r) \vee (p \to r)) \to r$. По [1] едно U е $q \wedge p$. За всяко друго U^* е изпълнено $\vdash U^*\ \ (q \wedge p)$ в S. Както в първия случай се доказва, че U^* трябва да съдържа $\wedge$.

3. $\vdash \forall x(p(x) \to r) \to (p(a) \to r)$ в S. r е съждителна променлива, а $p(a)$ е предикатна променлива с индивидна променлива a.

Ако Φ е $p(a)$, а $F^* - \forall x(p(x) \to r) \to r$, то една интерполационна формула на Φ и F^* е $\exists x p(x)$. За всяка друга U^* се получава, че $\vdash U^*$ $\exists x p(x)$ в S. От 6 на § 2 следва, че U^* съдържа логически знак $\exists$, който не влиза във $\Phi \to F^*$.

От $\vdash (p(a) \to r) \to (p(a) \to r)$ може да се изведе $\vdash \forall x(p(x) \to r) \to (p(a) \to r)$ в S чрез прилагане само на правилото $\dfrac{A(a) \to C}{\forall x A(x) \to C}$. Една интерполационна формула на $p(a)$ и $(p(a) \to r) \to r$ е $p(a)$. След прилагане на

$\frac{A(a) \to C}{\forall x A(x) \to C}$ интерполационната формула на $p(a)$ и $\forall x(p(x) \to r) \to r$ по [1] е $\exists x p(x)$. От това и от доказаното по-горе следва, че при прилагане на $\frac{A(a) \to C}{\forall x A(x) \to C}$ има случаи, при които не могат да се намерят интерполационни формули, които да не съдържат логическия знак $\exists$, въпреки че той не влиза в $\forall x A(x) \to C$.

Аналогични твърдения са в сила за пример 1 и $\frac{\Gamma \to A, B \to C}{\Gamma \to ((A \to B) \to C)}$, пример 2 и $\frac{A \to C, B \to C}{(A \vee B) \to C}$ и логическия знак $\wedge$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шютте, К. Интерполяционная теорема для интуиционистской логики предикатов. В сб. Математическая теория логического вывода. Москва, 1967, 285—295.
2. Клини, С. Введение в метаматематику. Москва, 1957.
3. Черч, А. Введение в математическую логику. т. 1. Москва, 1960.

Постъпила на 20. I. 1971 г

О ЛОГИЧЕСКИХ ЗНАКАХ В ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛАХ ШЮТТЕ

Надежда Георгиева

(Резюме)

Рассматриваются формулы Φ и F^*, для которых $\Phi \to F^*$ выводится в интуиционистском предикатном исчислении, и каждая интерполяционная формула Φ и F^* должна содержать логические знаки Λ, $\wedge$ или $\exists$ несмотря на то, что они не входят в $\Phi \to F^*$.

ON THE LOGICAL SIGNS IN SCHÜTTE'S INTERPOLATION FORMULAE

Nadežda Georgieva

(*Summary*)

The formulae Φ and F^* are considered for which $\Phi \to F^*$ can be derived in the intuitionistic predicate calculus and every interpolation formula of Φ and F^* should contain the logical signs Λ, $\wedge$ or $\exists$ in spite of the fact that they are not included in $\Phi \to F^*$.