БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ВЪРХУ АПРОКСИМИРАНЕТО НА ЕДИН КЛАС КОМПЛЕКСНИ ФУНКЦИИ ОТНОСНО ЕДНА МЕТРИКА ОТ ХАУСДОРФОВ ТИП

Михаил Касчиев

В тази работа ще дефинираме хаусдорфово разстояние между комплексни аналитични функции и ще разгледаме някои негови свойства.

Нека S е единичният кръг в комплексната равнина (z) и с $C(S)$ да означим множеството от всички аналитични в $|z|<1$ функции, които са ограничени. Нека функциите $f(z)$ и $g(z)$ имат за образи точковите множества F и G с граници съответно Γ_F и Γ_G.

Хаусдорфовото разстояние $r(f, g)$ между функциите $f(z)$ и $g(z)$ се определя като хаусдорфовото разстояние между границите Γ_F и Γ_G на образите им: $r(f, g)=r(\Gamma_F, \Gamma_G)$, където

$$r(\Gamma_F, \Gamma_G)=\max\{\max_{a\in\Gamma_F}\min_{b\in\Gamma_G}|a-b|,\ \max_{a\in\Gamma_G}\min_{b\in\Gamma_F}|a-b|\}, \tag{1}$$

или по еквивалентен начин

$$r(\Gamma_F, \Gamma_G)=\inf_{\substack{\Gamma_F\subset U(\alpha,\,\Gamma_G)\\ \Gamma_G\subset U(\alpha,\,\Gamma_F)}}\alpha,$$

където $U(\alpha, \Gamma)$ означава α-околността на множеството Γ в комплексната равнина.

Лесно се показва, че дефинираното хаусдорфово разстояние между функциите $f(z)$ и $g(z)$ не надминава равномерното разстояние между тях:

$$r(f, g)\leqq R(f, g), \text{ където } R(f, g)=\max_{z\in S}|f(z)-g(z)|.$$

Като вземем пред вид, че за аналитични функции са в сила равенствата $f(z)|_{|z|=1}=f(e^{i\theta})$ и $g(z)|_{|z|=1}=g(e^{i\alpha})$, $\theta, \alpha\in[0, 2\pi]=\Delta$, (1) добива вида

$$r(f, g)=\max\{\max_{\theta\in\Delta}\min_{\alpha\in\Delta}|f(e^{i\theta})-g(e^{i\alpha})|,\ \max_{\theta\in\Delta}\min_{\alpha\in\Delta}|f(e^{i\alpha})-g(e^{i\theta})|\}. \tag{2}$$

По този начин въпросът за намиране на хаусдорфовото разстояние между двете аналитични комплексни функции $f(z)$ и $g(z)$, дефинирани в областта $|z|<1$, се сведе до намиране хаусдорфовото разстояние между стойностите им по контура на единичния кръг, т. е. до намиране хаусдорфовото разстояние между непрекъснати комплекснозначни функции, дефинирани в интервала Δ.

След тези предварителни бележки ще намерим оценка за хаусдорфовото разстояние между две класи комплекснозначни функции.

Нека $f(\theta)\in C_{2\pi}$, т. е. $f(\theta)$ е комплексна, непрекъсната и 2π-периодична, $f(\theta)=f_1(\theta)+if(\theta)$. Нека $K(t)$ е реално ядро, за което са изпълнени условията

$$(3)\qquad K(t)\geqq 0,\quad K(t)=K(-t),\quad \int_{-\pi}^{\pi}K(t)dt=1.$$

Нека $\varphi(\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)K(t)dt$. Очевидно $\varphi(\theta)\in C_{2\pi}$. Целта на настоящата работа е да се даде оценка за хаусдорфовото разстояние между функциите $f(\theta)$ и $\varphi(\theta)$.

МОДУЛ НА ПРАВОЛИНЕЙНОСТ

Нека $f(\theta)$ е комплексна функция, а $\delta>0$. Модул на праволинейност на функцията $f(\theta)$ ще наричаме числото

$$(4)\qquad \tau_f(\delta)=\sup_{|\theta_1-\theta_2|\leqq\delta}\{\sup_{\theta_1\leqq\theta\leqq\theta_2}[\inf_{0\leqq\lambda\leqq 1}|(1-\lambda)f(\theta_1)+\lambda f(\theta_2)-f(\theta)|]\},$$

където $\theta_1<\theta_2$, $|\theta_1-\theta_2|\leqq\delta$ и $\theta_1\leqq\theta\leqq\theta_2$.

Друго еквивалентно представяне на модула на праволинейност е следното:

$$(5)\qquad \tau_f(\delta)=\sup_{|\theta_1-\theta_2|\leqq\delta}\left\{\sup_{\theta_1\leqq\theta\leqq\theta_2}\frac{|[f_1(\theta)-f_1(\theta_1)][f_2(\theta_1)-f_2(\theta_2)]-[f_2(\theta)-f_2(\theta_1)][f_1(\theta_1)-f_1(\theta_2)]|}{|f(\theta_1)-f(\theta_2)|}\right\}.$$

Модул на непрекъснатост на функцията $f(\theta)$ ще наричаме

$$\omega_f(\delta)=\sup_{|\theta_1-\theta_2|\leqq\delta}|f(\theta_1)-f(\theta_2)|.$$

Л е м а 1. Модулът на праволинейност на функцията $f(\theta)$ не надминава два пъти модула на непрекъснатост на $f(\theta)$.

Доказателство. Нека $\delta>0$, $\theta_1<\theta_2$, $|\theta_1-\theta_2|\leqq\delta$ и $\theta_1\leqq\theta\leqq\theta_2$.

$$|(1-\lambda)f(\theta_1)+\lambda f(\theta_2)-f(\theta)|\leqq|f(\theta_1)-f(\theta)|+|f(\theta_1)-f(\theta_2)|$$

$$\leqq\sup_{|\theta_1-\theta|\leqq\delta}|f(\theta_1)-f(\theta)|+\sup_{|\theta_1-\theta_2|\leqq\delta}|f(\theta_1)-f(\theta_2)|=2\omega_f(\delta).$$

Следователно $\tau_f(\delta)\leqq 2\omega_f(\delta)$.

От лема 1 следва непосредствено, че $\lim_{\delta\to 0}\tau_f(\delta)=\tau_f(0)=0$.

Л е м а 2. $\tau_f(\delta)$ е монотонно растяща функция на δ.

Доказателство. Нека $0<\delta_1<\delta_2$. Ако в (5) вземем sup по $|\theta_1-\theta_2|\leqq\delta_1$ и $|\theta_1-\theta_2|\leqq\delta_2$, веднага получаваме, че $\tau_f(\delta_1)\leqq\tau_f(\delta_2)$.

Също като в [2] се доказва следната

Л е м а 3. Нека $\tau(\delta)$ е монотонно растяща функция на δ, за която $\lim_{\delta\to 0}\tau(\delta)=\tau(0)=0$. Тогава съществува комплексна функция $f(\theta)$, за която $\tau_f(\delta)=\tau(\delta)$.

Лема 4. Нека $f(\theta)$ е комплексна функция, за която $\lim_{\delta\to 0} \tau_f(\delta)=\tau(0)=0$. Ако Δ е дефиниционната област на $f(\theta)$, $\theta_0\in\Delta$ е произволна, за $f(\theta_0)$ съществуват $f(\theta_0+0)$ и $f(\theta_0-0)$.

Доказателство. Нека $\delta>0$, $\theta_1<\theta_2$, $|\theta_1-\theta_2|\leqq\delta$ и $\theta_1\leqq\theta\geqq\theta_2$. Очевидно е следното неравенство:

(6) $$|f(\theta_1)-f(\theta)| - |f(\theta_1)-f(\theta_2)| \quad |(1-\lambda)f(\theta_1)+\lambda f(\theta_2)-f(\theta)|.$$

Да си изберем една редица от точки

$$\theta_1\geqq\theta_2\geqq \quad \geqq\theta_n \quad \geqq\theta_0, \quad \lim_{n\to\infty}\theta_n=\theta_0,$$

за които редицата $\{f(\theta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е разходяща. От (6), приложено за точките θ_0, θ_n и θ_1 за всяко n, получаваме

$$f(\theta_1)-f(\theta_n) - |f(\theta_1)-f(\theta_0)| \leqq \inf_{0\leqq\lambda\leqq 1} f|(1-\lambda)f(\theta_1)+\lambda f(\theta_0)-f(\theta_n)| \geqq \tau_f(\theta_1-\theta_0),$$

$$f(\theta_1)-f(\theta_n) \quad |f(\theta_1)-f(\theta_0)| + \tau_f(\theta_1-\theta_0).$$

Следователно редицата $\{f(\theta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена. Да допуснем, че $A\neq B$ са две точки на сгъстяване на редицата $\{f(\theta_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Съществуват две подредици $\{f(\theta'_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{f(\theta''_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ на редицата $\{f(\theta_n)\}_{n=1}^{\infty}$, за които $\lim_{k\to\infty} f(\theta'_{n_k})=A$ $\lim_{k\to\infty} f(\theta)''_{n_k})=B$ и $\theta'_{n_k}\geqq\theta''_{n_k}\geqq\theta'_{n_{k+1}}$.

Пак от (6), приложено за точките $\theta'_{n_{k+1}}$, θ''_{n_k} и θ'_{n_k}, получаваме

$$|f(\theta'_{n_{k+1}})-f(\theta''_{n_k})| \leqq \tau_f(\theta'_{n_k}-\theta'_{n_{k+1}})+|f(\theta'_{n_k})-f(\theta'_{n_{k+1}})|.$$

Нека $\varepsilon>0$; за $n>N(\varepsilon)$ имаме

$$0<|A-B|<\varepsilon+\tau_f(\theta'_{n_k}-\theta'_{n_{k+1}}),$$

което противоречи на $\lim_{\delta\to 0}\tau_f(\delta)=\delta(0)=0$.

Следователно за точката $f(\theta_0)$ съществува $f(\theta_0+0)$. Аналогично се показа съществуването и на $f(\theta_0-0)$.

Лема 5. Нека $f(\theta)$ е комплексна функция, за която $\lim_{\delta\to 0}\tau_f(\delta)=\tau_f(0)=0$. Тогава точката $f(\theta)$ лежи на отсечката, определена от точките $f(\theta-0)$ и $f(\theta+0)$.

Доказателство. Нека $\delta>0$, а $\theta\in\Delta$.

$$0\leqq\left|\begin{vmatrix} f_1(\theta)-f_1(\theta-\delta) & f_2(\theta)-f_2(\theta-\delta) \\ f_1(\theta-\delta)-f_1(\theta+\delta) & f_2(\theta_1-\delta)-f_2(\theta_2+\delta)\end{vmatrix}\right|\leqq\tau_f(2\delta)\,|f(\theta-\delta)-f(\theta+\delta)|.$$

Нека да оставим δ да клони към нула. Така получаваме

$$\begin{vmatrix} f_1(\theta)-f_1(\theta-0) & f_2(\theta)-f_2(\theta-0) \\ f_1(\theta-0)-f_1(\theta+0) & f_2(\theta-0)-f_2(\theta+0)\end{vmatrix} \quad 0,$$

което е достатъчно да твърдим, че точката $f(\theta)$ се намира върху отсечката, определена от точките $f(\theta-0)$ и $f(\theta+0)$.

Можем да считаме за известна следната

Лема 6. Нека комплексната функция $f(\theta)\in C_{2\pi}$, а $\varphi(\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)K(t)dt$, където ядрото $K(t)$ удовлетворява условията (3). Тогава графиката на функцията $\varphi(\theta)$ се съдържа в изпъкналата обвивка на функцията $f(\theta)$.

Лема 7. Нека комплексната функция $f(\theta)\in C_{2\pi}$, $\varphi(\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)K(t)dt$ и $\delta>0$. Ако $\varphi(\theta_0)$ е произволна точка от графиката на $\varphi(\theta)$, то съществува точка $f(\theta_1)$ от графиката на $f(\theta)$, така че

$$|\varphi(\theta_0)-f(\theta_1)|\leq 2\tau_f(\delta)+4B\int_{\delta}^{\pi}K(t)dt,$$

където $|\theta_0-\theta_1|\leq\delta$, а $B=\max_{\theta\in[0,2\pi]}|f(\theta)|$.

Доказателство. Имаме

$$\left|\varphi(\theta_0)-\int_{-\delta}^{\delta}f(\theta_0+t)K(t)dt\right|\leq 2B\int_{\delta}^{\pi}K(t)dt. \tag{7}$$

Да разгледаме функцията $g(\theta)=\int_{-\delta}^{\delta}f(\theta+t)\frac{K(t)dt}{1-2\int_{\delta}^{\pi}K(t)dt}$ за $(\theta-\theta_0)\leq\delta$. Да означим с $K_1(t)$ ядрото

$$K_1(t)=\frac{K(t)}{1-2\int_{\delta}^{\pi}K(t)dt}.$$

Очевидно $K_1(t)\geq 0$, $K_1(t)=K_1(-t)$ и $\int_{-\delta}^{\delta}K_1(t)dt=1$. Следователно по лема 6 функцията $g(\theta)$ се съдържа в изпъкналата обвивка на $f(\theta)$, когато $|\theta-\theta_0|\leq\delta$. Като използваме това, че функциите $g(\theta)$ и $f(\theta)$ при $|\theta-\theta_0|\leq\delta$ са непрекъснати, получаваме, че за всяка точка $g(\theta)$, $|\theta-\theta_0|\leq\delta$, съществува точка $f(\theta')$, $|\theta'-\theta|<\delta$, така че

$$|g(\theta)-f(\theta')|<2\tau_f(\delta).$$

Специално за точката $g(\theta_0)$ съществува точка $f(\theta_1)$, $|\theta_0-\theta_1|\leq\delta$, тъй че

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}f(\theta_0+t)K(t)dt-f(\theta_1)\right|\leq 2\tau_f(\delta). \tag{8}$$

От (7) и (8) получаваме

$$|\varphi(\theta_0)-f(\theta_1)|\le 2\tau_f(\delta)+4B\int\limits_{\delta}^{\pi}K(t)dt, \text{ като } |\theta_0-\theta_1|\le\delta.$$

Лема 8. Нека комплексната функция $f(\theta)\in C_{2\pi}$, $\varphi(\theta)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)K(t)dt$, а $f(\theta_0)$ е произволна точка от графиката на функцията $f(\theta)$. Съществува точка $\varphi(\theta_1)$ от графиката на функцията, така че

$$|\varphi(\theta_1)-f(\theta_0)|\le 5\tau_f(4\delta)+4B\int\limits_{\delta}^{\pi}K(t)dt, \text{ като } |\theta_1-\theta_0|\le\delta.$$

Доказателство. Нека $\delta>0$. Да разгледаме точките $f(\theta_0)$, $f(\theta_0-2\delta)$ и $(\theta_0+2\delta)$. Ще въведем следните означения:

$$A=[f(\theta_0-2\delta),\ f(\theta_0)],\ B=[f(\theta_0),\ f(\theta_0+2\delta)],\ C=[f(\theta_0-2\delta), f(\theta_0+2\delta)].$$

За всяка точка $\varphi(\theta)$ съществува точка $f(\theta')$ от графиката на $f(\theta)$, така че

$$|\varphi(\theta)-f(\theta')|=2\tau_f(\delta)+4B\int\limits_{\delta}^{\pi}K(t)dt.$$

Да означим още

$$a=2\tau_f(\delta)+4B\int\limits_{\delta}^{\pi}K(t)dt.$$

За разстоянието от точките $\varphi(\theta_0-\delta)$, $\varphi(\theta_0+\delta)$ и $f(\theta')$ съответно до отсечките A, B и C имаме неравенствата

$$\varrho(\varphi(\theta_0-\delta),\ A)\le a+\tau_f(2\delta),$$
$$\varrho(\varphi(\theta_0+\delta),\ B)\le a+\tau_f(2\delta),$$
$$\varrho(f(\theta'),\ C)\le\tau_f(4\delta).$$

Нека $a\in A$ и $b\in B$ са тези точки, за които

$$\varrho(\varphi(\theta_0-\delta),\ A)=\varrho(\varphi(\theta_0-\delta),\ a),\quad \varrho(\varphi(\theta_0+\delta),\ B)=\varrho(\varphi(\theta_0+\delta),\ b).$$

Да означим още с D отсечката $D=[a,\ b]$. Очевидно

$$\varrho(f(\theta_0),\ D)\le\tau_f(4\delta),$$
$$\varrho(\varphi(\theta), D)\le\varrho(\varphi(\theta),\ f(\theta'))+\varrho(f(\theta'),\ C)+\varrho(C,\ D)\le a+2\tau_f(4\delta),\quad |\theta-\theta_0|\le\delta.$$

Сега ще докажем следното твърдение. Нека $\varrho(\varphi(\theta), D)\le a+2\tau_f(4\delta)$, $\varrho(\varphi(\theta_0-\delta),\ a)\le a+\tau_f(2\delta)$ и $\varrho(\varphi(\theta_0+\delta),\ b)\le a+\tau_f(2\delta)$. Тогава за всяка точка $d\in D$ съществува точка θ_d, $|\theta_d-\theta_0|\le\delta$, така че $|d-\varphi(\theta_d)|\le a+2\tau_f(4\delta)$.

Ще използваме, че функцията $\varphi(\theta)$ е непрекъсната. От точката d издигаме перпендикуляр l към отсечката D. Възможни са следните два случая:

1. l пресича графиката на функцията $\varphi(\theta)(|\theta-\theta_0|\le\delta)$ в точката $\varphi(\theta_d)(|\theta_0-\theta_d|\le\delta)$, която е между точките $\varphi(\theta_0-\delta)$ и $\varphi(\theta_0+\delta)$. Тогава от $\varrho(\varphi(\theta), D)\le a+2\tau_f(4\delta)$ следва, че

$$|d-\varphi(\theta_d)|\le a+2\tau_f(4\delta).$$

2. l не пресича графиката на функцията $\varphi(\theta)(|\theta-\theta_0|\le\delta)$. Очевидно

$$\varrho(\varphi(\theta_0-\delta), d)\le\max\{\varrho(\varphi(\theta_0-\delta), a),\ \varrho(\varphi(\theta_0+\delta), b)\}\le a+2\tau_f(2\delta).$$

Следователно и в този случай $|d-\varphi(\theta_d)|\le a+2\tau_f(4\delta)$; $\theta_d=\theta_0-\delta$.

Нека сега $d_0\in D$ е определена чрез $|d_0-f(\theta_0)|=\varrho(f(\theta_0), D)$. Тогава съществува точка $\theta_{d_0}=\theta_1$, $|\theta_1-\theta_0|\le\delta$, така че $|\varphi(\theta_1)-d_0|\le a+2\delta_f(4\delta)$ и следователно

$$|\varphi(\theta_1)-f(\theta_0)|\le 5\tau_f(4\delta)+4B\int_\delta^\pi K(t)dt.$$

Теорема 1. Нека комплексната функция $f(\theta)\in C_{2\pi}$. Нека $K(t)$ е реално ядро, за което са в сила условията (3), а $\varphi(\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)K(t)dt$. Тогава за хаусдорфовото разстояние между функциите $f(\theta)$ и $\varphi(\theta)$ е в сила следната оценка:

$$r(f, \varphi)\le\inf_{\delta>0}\left\{5\tau_f(4\delta)+4B\int_\delta^\pi K(t)dt\right\},$$

където $\tau_f(\delta)$ е модулът на праволинейност на функцията $f(\theta)$ и се задава с (4) или (5).

Доказателство. Нека $\delta>0$ е произволно. Съгласно лема 7 за произволна точка $\varphi(\theta_0)$ от графиката на функцията $\varphi(\theta)$ съществува точка (θ_1) от графиката на $f(\theta)$, $|\theta_1-\theta_0|\le\delta$, тъй че

$$(9)\qquad |\varphi(\theta_0)-f(\theta_1)|\le 2\tau_f(\delta)+4B\int_\delta^\pi K(t)dt.$$

По лема 8 за произволна точка $f(\theta_0)$ от образа на функцията $f(\theta)$ съществува точка $\varphi(\theta_0)$ от образа на функцията $\varphi(\theta)$, $|\theta_1-\theta_0|\le\delta$, така че

$$(10)\qquad |f(\theta_0)-\varphi(\theta_1)|\le 5\tau_f(4\delta)+4B\int_\delta^\pi K(t)dt.$$

Според една теорема, доказана в [1], следва, че

$$r(f, \varphi)\le\max\left\{2\tau_f(\delta)+4B\int_\delta^\pi K(t)dt,\ 5\tau_f(4\delta)+4B\int_\delta^\pi K(t)dt\right\},$$

$$(11)\qquad r(f, \varphi)\le\inf_{\delta>0}\left\{5\tau_f(4\delta)+4B\int_\delta^\pi K(t)dt\right\}.$$

Сега ще направим едно приложение на теорема 1 за намиране оценка за хаусдорфовото разстояние между една аналитична в единичния кръг функция и нейните стойности по контура му.

Нека $f(\xi)=f(e^{i\theta})=f(\theta)$ са стойностите на една аналитична в кръга $|z|<1$ функция върху окръжността $|z|=1$. Тогава

$$f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\alpha)+r^2}d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\alpha)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\alpha}d\alpha$$

е една функция, аналитична в кръга $|z|<1$ и приемаща върху окръжността $|z|=1$ стойности $f(\theta)$. Очевидно $f(\theta)\in C_{2\pi}$. С $f_r(\theta)$ да означим стойностите на функцията $f(\theta)$ при фиксирано $0<r<1$, а с $\Pi_r(\alpha)$ — ядрото на Поасон за същото r.

Теорема 2.

$$r(f,f_r)\leq 5\tau_f(\sqrt{1-r})+O(\sqrt{1-r}),$$

където $\tau_f(\delta)$ е модулът на праволинейност на функцията $f(\theta)$, зададен чрез (4) или (5).

Доказателство. За ядрото на Поасон са известни следните свойства:

$$\Pi_r(\alpha)\geqq 0,\quad \Pi_r(\alpha)=\Pi_r(-\alpha),\quad \int_{-\pi}^{\pi}\Pi_r(\alpha)d\alpha=1.$$

Според теорема 1

$$(12)\qquad r(f,f_r)\leq\inf_{\delta>0}\left\{5\tau_f(4\delta)+4B\int_{\delta}^{\pi}\Pi_r(\alpha)d\alpha\right\},$$

където $B=\max_{\theta\in[0,2\pi]}|f(\theta)|$, а $\tau_f(\delta)$ е модулът на праволинейност на функцията $f(\theta)$. От (12) лесно се получава, като минимизираме по δ, че

$$r(f,f_r)\leq 5\tau_f(\sqrt{1-r})+O(\sqrt{1-r}).$$

Следствие. Ако $\tau_f(\delta)\leqq K\delta$, $K=\text{const}$, оценката (12) добива вида

$$r(f,f_r)=O(\sqrt{1-r}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в метрике Хаусдорфа. — Успехи матем. наук, **24**, 1969, 5, 141—178.
2. Сендов, Бл. Върху някои линейни методи за апроксимиране на периодични функции относно хаусдорфово разстояние. — Год. на Соф. унив., Мат. фак., **58**, 1965, 107—140.
3. Касчиев, М. Върху апроксимирането на един клас комплексни функции относно една метрика от хаусдорфов тип. Соф. унив., Мат. фак. (Дипломна работа). 1970.

Постъпила на 5. II. 1971 г.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОГО КЛАССА КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОЙ МЕТРИКИ ХАУСДОРФОВОГО ТИПА

Михаил Касчиев

(Резюме)

Пусть $C(S)$ является множеством всех аналитических комплексных и ограниченных функций в круге $|z|<1$. Если $f(z)$ и $g(z)$ представляют собой две такие функции, хаусдорфовое расстояние между ними дефинируется как хаусдорфовое расстояние между границами их образов

$$r(f,g)=\max\{\max_{\theta\in[0,2\pi]}\min_{\alpha\in[0,2\pi]}|f(\theta)-g(\alpha)|,\ \max_{\theta\in[0,2\pi]}\min_{\alpha\in[0,2\pi]}|f(\alpha)-g(\theta)|\}.$$

Модулем прямолинейности одной комплексной функции назовем

$$\tau_f(\delta)=\sup_{|\theta_1-\theta_2|\leq\delta}\{\sup_{\theta_1\leq\theta\leq\theta_2}[\inf_{0\leq\lambda\leq1}|(1-\lambda)f(\theta_1)+\lambda f(\theta_2)-f(\theta)|]\},$$

где $\delta>0$, $\theta_1<\theta_2$, $|\theta_1-\theta_2|\leq\delta$ и $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$.

Другое эквивалентное представление $\tau_f(\delta)$ следующее:

$$\tau_f(\delta)=\sup_{|\theta_1-\theta_2|\leq\delta}\{\sup_{\theta_1\leq\theta\leq\theta_2}\frac{|[f_1(\theta)-f_1(\theta_1)][f_2(\theta_1)-f_2(\theta_2)]-[f_2(\theta)-f_2(\theta_1)][f_1(\theta_1)-f_1(\theta_2)]|}{|f(\theta_1)-f(\theta_2)|}\}.$$

Доказывается следующая

Теорема 1. Пусть комплексная функция $f(\theta)\in C_{2\pi}$ и $K(t)$ является действительным ядром, для которого $K(t)\geq 0, K(t)=K(-t), \int_{-\pi}^{\pi}K(t)dt=1$, а

$$\varphi(\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)K(t)dt.$$

Тогда

$$r(f,\varphi)\leq\inf_{\delta>0}\left\{5\tau_f(4\delta)+4B\int_{\delta}^{\pi}K(t)dt\right\},$$

где $\tau_f(\delta)$ — модуль прямолинейности функции $f(\theta)$.

Пусть $f(r)$ является аналитической в круге $|z|<1$ и $f(r)\xrightarrow[r\to1]{} f(e^{i\theta})=f(\theta)$. Если через $f_r(\theta)$ обозначим значения $f(r)$ при фиксированном $0<r<1$, доказывается

Теорема 2.

$$r(f,f_r)\leq5\tau_f(\sqrt{1-r})+O(\sqrt{1-r}).$$

Следствие. Если $\tau_f(\delta)\leq k\delta$, $k=\text{const}$, то

$$r(f,f_r)=O(\sqrt{1-r}).$$

UBER DIE APPROXIMIERUNG EINER KLASSE KOMPLEXER FUNKTIONEN IN BEZUG AUF EINE METRIK VOM HAUSDORFF'SCHEN TYP

Michail Kasčiev

(Zusammenfassung)

Es sei $C(S)$ die Menge aller analytischen Funktionen im Kreise $|z|<1$. Wenn $f(z)$ und $g(z)$ zwei solche Funktionen sind, dann ist die Hausdorff'sche Entfernung dazwischen als die Hausdorff'sche Entfernung zwischen den Rädern ihrer Bilder definiert

$$r(f,g)=\max\{\max_{\theta\in[0,2\pi]}\min_{a\in[0,2\pi]}|f(\theta)-g(a)|,\ \max_{\theta\in[0,2\pi)}\min_{a\in[0,2\pi)}|f(a)-g(\theta)|\}.$$

Als Modul der Geradlinigkeit einer komplexen Funktion $f(z)$ bezeichnen wir

$$\tau_f(\delta)=\sup_{|\theta_1-\theta_2|\leq\delta}\{\sup_{\theta_1\leq\theta\leq\theta_2}[\inf_{0\leq\lambda\leq 1}(1-\lambda)f(\theta_1)+\lambda f(\theta_2)-f(\theta)|]\},$$

wo $\delta<0$, $\theta_1<\theta_2$, $|\theta_1-\theta_2|\leq\delta$ und $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$ sind.

Eine andere äquivalente Darstellung von $\tau_f(\delta)$ ist:

$$\tau_f(\delta)=\sup_{|\theta_1-\theta_2|\leq\delta}\{\sup_{\theta_1\leq\theta\leq\theta_1}\frac{|[f_1(\theta)-f_1(\theta_1)][f_2(\theta_1)-f_2(\theta_2)]-[f_2(\theta)-f_2(\theta_1)][f_1(\theta_1)-f_1(\theta_2)]|}{|f(\theta_1)-f(\theta_2)|}.$$

Es wird bewiesen:

Theorem 1. Es sei die komplexe Funktion $f(\theta)\in C_{2\pi}$ gegeben. $K(t)$ möge ein reeller Kern sein, wofür $K(t)\geq 0$, $K(t)=K(-t)$, $\int_{-\pi}^{\pi}K(t)dt=1$ und

$$\varphi(\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)K(t)dt.$$

Dann ist

$$r(f,\varphi)\leq\inf_{\delta>0}\left\{5\tau_f(4\delta)+4B\int_{\delta}^{\pi}K(t)dt\right\},$$

wo $\tau_f(\delta)$ der Modul der Geradlinigkeit der Funktion $f(\theta)$ ist.

Es sei $f(z)$ analytisch im Kreis $|z|<1$ und $f(z)|_{|r|=1}=f(e^{i\theta})=f(\theta)$. Wenn wir mit $f_r(\theta)$ die Werte von $f(z)$ bei fixiertem $z=re^{i\theta}$ bezeichnen, dann gilt

Theorem 2.

$$r(f,f_r)\leq 5\tau_f(\sqrt{1-r})+O(\sqrt{1-r}).$$

Folgerung. Wenn $\tau_f(\delta)\leq k\delta$, $k=\mathrm{const}$, dann ist

$$r(f,f_r)=0(\sqrt{1-r}).$$