БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ВЪРХУ НЕСЪЩЕСТВУВАНЕТО НА НЯКОИ ЛЕНЦ-БАРЛОТИЕВИ ТИПОВЕ ПРОЕКТИВНИ РАВНИНИ

Никола Мартинов

Някои недезаргови проективни равнини допускат частично реализиране на теоремата на Дезарг, в някои от тях съществуват, но само част от възможните хомологии. Например в една проективна равнина γ може да съществуват всички възможни хомологии с център дадена точка A и ос дадена права a (γ може да е $A-a$ транзитивна) и в γ да не съществуват други хомологии. Има проективни равнини, които допускат съществуването на хомологиите относно повече центрове и съответните им оси. Броят и разположението на двойките точка — права A_i-a_i, за които разглежданата проективна равнина е A_i-a_i транзитивна, могат да бъдат твърде разнообразни. Според това (според броя и разположението на тези двойки) Ленц [1] и Барлоти [2] разделят проективните равнини на 53 типа (недезарговите проективни равнини на 52 типа). Това са възможни типове — за тях не е установено съществуване. След изследванията на редица алгебристи върху алтернативните тела се установява, че типовете VI^a и VI^b не съществуват. Известни са и други изследвания върху съществуването на отделни типове от тази класификация. Люнебург [3] е доказал, че не съществуват крайни проективни равнини с нечетен порядък, които да принадлежат към тип I-6. Якуб [4] е доказал, че не съществуват крайни проективни равнини, които да принадлежат към тип III-2.

В настоящата статия се разглеждат типовете I-5, I-7, I-8, IV^a-3 и IV^b-3 съгласно класификацията на Ленц — Барлоти. Тези типове проективни равнини в [2] се определят по следния начин.

Проективната равнина π принадлежи към тип I-5 точно тогава, когато съществуват неинцидентни точка R и права r и еднозначно обратимо инволюторно изображение $X \to X'$ върху реда точки r, така че за всяка точка X от r равнината π е $X-RX'$ транзитивна. При това не съществува друга двойка $A-a$ такава, че π да е $A-a$ транзитивна.

Проективната равнина π точно тогава принадлежи към тип I-7, когато както при тип I-5 тя е $X-RX'$ транзитивна за точките от r и съответните им прави през R, но освен това тя е и $R-r$ транзитивна.

Проективната равнина π точно тогава принадлежи към тип I-8, когато, съществува еднозначно обратимо изображение φ на точките върху правите на π такова, че за всяка точка X е изпълнено $X \in (X)\varphi$ и π е

$X-(X)\varphi$ транзитивна. Разбира се, не съществува права $x \neq (X)\varphi$, за която π е $X-x$ транзитивна.

Проективната равнина π принадлежи към тип IV^a-3 точно тогава, когато съществува еднозначно обратимо и инволюторно изображение φ върху реда точки r, така че за всяка точка X от r равнината π е $X-x$ транзитивна, където x е произволна права през $(X)\varphi$. И сега не съществува друга двойка $A-a$ такава, че π да е $A-a$ транзитивна.

Тип IV^b-3 се определя дуално на тип IV^a-3.

Ще докажем по геометричен път, че типовете I-7 и I-8 не съществуват; ще установим още, че ако типовете I-5, IV^a-3 и IV^b-3 съществуват, те съдържат само крайни равнини с ред 9. В [5] е дадено резюме на част от тези резултати.

Ще започнем с някои общи свойства на проективните равнини, които по-нататък често се прилагат. Съгласно с [6, стр. 105, т. 49] имаме

Лема 1. Ако една проективна равнина е $A-a$ и $B-b$ транзитивна, като за точките A, B и правите a, b е изпълнено $A \in b$, $A \bar{\in} a$ $B \bar{\in} b$, $B \bar{\in} a$, то тя е дезаргова.

Също така от [6, стр. 66, т. 7] имаме

Лема 2. Ако проективната равнина γ е $A-a$ транзитивна и φ е колинеация в γ, то γ е $(A)\varphi-(a)\varphi$ транзитивна.

За колинеациите в една проективна равнина γ е в сила и

Лема 3. Ако колинеациите φ и ψ трансформират правата g и нележащите на нея точки A и B по един и същи начин, като между g и образа ѝ възбуждат едно и също съответствие, то $\varphi = \psi$.

Наистина колинеацията $\varphi\psi^{-1}$ запазва реда точки g, а следователно и сноповете прави A и B; съгласно [6, стр. 64, т. 2] $\varphi\psi^{-1}$ е идентитетът в γ, т. е. $\varphi = \psi$.

Нека R и r са неинцидентни точка и права от недезарговата проективна равнина π. Ще казваме, че π е $R-r$ равнина, ако съществуват различни точки A, B от r и различни прави a, b от снопа R, поне една от които не минава през никоя от A, B и такива, че π е $A-a$ и $B-b$ транзитивна.

Непосредствено се вижда, че ако π е $R-r$ равнина, то дуалната на π равнина е също $R-r$ равнина, по-точно тя е $r-R$ равнина.

Лема 4. Всяка проективна равнина, която принадлежи към кой да е от типовете I-5, I-7, I-8, IV^a-3 и IV^b-3, е $R-r$ равнина.

Доказателство. Непосредствено от определенията на типовете I-5, I-7 и IV^a-3 следва, че те съдържат само $R-r$ равнини. Тип IV^b-3 е дуален на тип IV^a-3, съдържа дуалните равнини на равнините от тип IV^a-3. Следователно и тип IV^b-3 съдържа само $R-r$ равнини. Остава да разгледаме тип I-8. Нека π е проективна равнина от този тип. Съгласно с определението съществува еднозначно обратимо съответствие φ между точките и правите на π такова, че за произволна точка X е изпълнено $X \in (X)\varphi$ и π е $X-(X)\varphi$ транзитивна.

Нека A е произволна точка, а B е точка, нележаща на правата $a = (A)\varphi$ и $b = (B)\varphi$. Достатъчно е да докажем, че точката $R = a \cap b$ не лежи на правата $r = AB$.

Да допуснем, че $R \in r$. Тогава $R_1 = (r)\varphi^{-1} \neq R$ (защото $R_1 \bar{\in} r$) и следователно поне една от правите a, b не минава през R_1. Оттук, като приложим лема 1 за двойката R_1, r и едната от двойките A, a или B, b, ще получим, че π е дезаргова проективна равнина. Това противоречие изключва възможността $R \in r$. Следователно $R \overline{\in} r$. С това лемата е доказана.

По-нататък ще разглеждаме една недезаргова $R-r$ равнина π. С Ω ще означаваме съвкупността от хомологиите, на които центровете лежат върху r, а осите минават през R.

Лема 5. За всяка точка $S \in r$ съществува точно една права $s \in R$, такава, че π е $S-s$ транзитивна. Съответствието $\omega: S \rightarrow \overline{S} = s \cap r$ е еднозначно обратимо, елиптично и инволюторно.

Доказателство. Ако π принадлежи към някой от типовете I-5, I-7 и IV^a-3 (при подходящ избор на R и r), твърдението е очевидно. Ние ще дадем общо доказателство.

Съгласно с определението на $R-r$ равнина ще има точки A и B от r и прави a и b от снопа R такива, че $a \overline{\in} A$, $a \overline{\in} B$ и π е $A-a$ и $B-b$ транзитивна. Тъй като π е недезаргова проективна равнина, съгласно лема 1 $A \in b$. Нека C е произволна точка от r, различна от A и B. Поне една от a и b не минава през C; нека $C \overline{\in} a$. Да означим с α хомологията, която има център A, ос a и трансформира B в C. Съгласно с лема 2 π е $C-(b)\alpha$ транзитивна. Ако $C \in a$, вместо α ще разгледаме хомологията β, която има център B, ос b и трансформира A в C; тогава ще бъде $C-(a)\beta$ транзитивна. Следователно получихме, че за произволна точка $S z r$ има поне една права s през R (и неминаваща през S) такава, че π е $S-s$ транзитивна.

Да допуснем, че за някоя точка $D \in r$ има две прави d_1 и d_2 (минаващи през R), за които π е $D-d_1$ и $D-d_2$ транзитивна. Без ограничение можем да предположим, че $D \neq A$ и $D \overline{\in} a$ (в противен случай в следващите разсъждения ще разменим ролите на A и a с B и b); можем да предположим още, че $D \overline{\in} d_1$. Съгласно допускането съществува хомология с център D и ос d_2, която трансформира d_1 в $d=AR$. Тази хомология трансформира двойката D, d_1 в двойката D, d и съгласно с лема 2 π е $D-d$ транзитивна. Тогава, като приложим лема 1 за двойките A, a и D, d, ще получим противоречието, че π е дезаргова проективна равнина.

Следователно за всяка точка $S \in r$ има точно една права s през R такава, че π е $S-s$ транзитивна. С принципа на дуалността получаваме и обратното — за всяка права s през R има само една точка $S \in r$ такава, че π е $S-s$ транзитивна.

И така съответствието $S \rightarrow s$ е еднозначно обратимо; при това $S \overline{\in} s$. Оттук получаваме, че съответствието $\omega: S \rightarrow \overline{S} = s \cap r$ еднозначно обратимо и елиптично. Остава да докажем, че ω е инволюторно съответствие в r.

Да допуснем, че ω не е инволюторно съответствие. Тогава за някоя точка $S \in r$ ще имаме $(S)\omega = \overline{S}$ и $(\overline{S})\omega = S' \neq S$, като π е $S-R\overline{S}$ и $\overline{S}-RS'$ транзитивна. Нека φ е хомология с център $\overline{S}$ и ос RS'. От $S \neq \overline{S}$ и $S \overline{\in} RS'$ следва $(S)\varphi = S_1$ S; но $(R\overline{S})\varphi = R\overline{S}$. Оттук съгласно с лема 2 получаваме, че π е $S_1 - R\overline{S}$ транзитивна. Получихме противоречието, че за правата $s = R\overline{S}$ съществуват две точки S и S_1 такива, че π е $S-s$ и S_1-s

транзитивна. Следователно ω е инволюторно съответствие. С това лемата е доказана.

Следствие. Ако хомологията φ с център S и ос s принадлежи на Ω, то $(S)\omega = \bar{S} \in s$.

Наистина, ако $\bar{S} \notin s$, като приложим лема 2, ще получим противоречието, че π е $S-R\bar{S}$ и $S-(R\bar{S})\varphi$ транзитивна.

Лема 6. Ако хомология от Ω трансформира поне една точка от r така както ω, то хомологията е инволюторна.

Доказателство. Нека S_1 и S_2 са различни точки от r, като $(S_1)\omega = \bar{S}_1 \neq S_2$. Нека още ψ_1 е хомология от Ω, която има център S_1 (ос $R\bar{S}_1$ и трансформира S_2 в $\bar{S}_2 = (S_2)\omega$. Ще докажем, че ψ_1 е инволюторна хомология. Да означим с φ_2 произволна хомология от Ω, която има център S_2 (и ос $R\bar{S}_2$). Хомологията $\varphi = \psi_1^{-1}\varphi_2\psi_1$ има център $(S_2)\psi_1 = \bar{S}_2$ и ос $(R\bar{S}_2)\psi_1$. Но $\varphi \in \Omega$ и следователно оста ѝ $(R\bar{S}_2)\psi_1$ минава през $(\bar{S}_2)\omega = S_2$. Това означава, че $(\bar{S}_2)\psi_1 = S_2$, т. е. че точката S_2, която е различна от центъра и не лежи на оста на ψ_1, е двойна за ψ_1^2. Следователно ψ_1^2 е идентитетът, т. е. ψ_1 е инволюторна хомология. С това лемата е доказана.

Естествен е въпросът: може ли разгледаната инволюторна хомология ψ_1 вместо с точките S_2 и $\bar{S}_2$ да бъде определена с друга двойка съответни за ω точки? Или по-общо: с даден център върху r колко инволюторни хомологии има, които да принадлежат на Ω. Отговорът на този въпрос се дава с

Лема 7. Всяка точка от r е център точно на една инволюторна хомология от Ω. Тази хомология трансформира всички точки от r с изключение на центъра и пресечната точка на r с оста така, както ω.

Доказателство. Да допуснем, че с център точката $S \in r$ има две инволюторни хомологии ψ' и ψ'', които принадлежат на Ω. Тези хомологии ще имат обща ос — правата $s = R\bar{S}$, където $\bar{S} = (S)\omega$. Съгласно с лема 6 има инволюторна хомология $\bar{\psi}$ с център $\bar{S}$ и принадлежаща на Ω. (Ос на $\bar{\psi}$ е правата $\bar{s} = RS$.) Нека M е точка, нележаща на никоя от правите RS, $R\bar{S}$ и r. Нека още

$$(1) \qquad (M)\bar{\psi} = N, \quad (M, N)\psi' = M', N', \quad (M, N)\psi'' = M'', N''.$$

Тъй като $S \in MN$, то $S \in M'N'$ и $S \in M''N''$. Освен това точките S, M, M', M'' и S, N, N', N'' лежат съответно върху две прави, спрегнати за $\bar{\psi}$. Оттук получаваме

$$(1) \qquad (M', M'')\bar{\psi} = N', N''.$$

От (1) и (2) следва, че всяка от хомологиите $\bar{\psi}$ и ψ' трансформира правата MN' в правата $M'N$. Следователно пресечната точка на тези прави ще лежи както на оста $\bar{s}$, така и на оста s, т. е.

$$(3) \qquad R = MN' \cap M'N.$$

Аналогично всяка от хомологиите $\overline{\psi}$ и ψ'' трансформира правата MN'' в правата $M''N$, т. е.

$$R = MN'' \cap M''N. \tag{4}$$

От (1), (3) и (4) получаваме, че всяка от точките M' и M'' лежи както на правата SM, така и на правата RN. Но тези прави са различни. Следователно

$$M' = M''.$$

От съвпадането на $M' = (M)\psi'$ и $M'' = (M)\psi''$ следва съвпадането на ψ' и ψ''. С това лемата е доказана.

Лема 8. Ако φ е хомология от Ω с център S, която довежда точката A в точката B ($A \in r$, $B \in r$), и α и β са инволюторните хомологии от Ω с центрове съответно A и B, то колинеацията $\alpha\beta$ и хомологията φ възбуждат върху правата RS едно и също съответствие.

Доказателство. Оста на хомологията φ е правата $R\overline{S}$, където $\overline{S} = (S)\omega$. Нека M е точка от правата RS. Образа M' на M при φ можем да построим по следния начин (фиг. 1):

$$MA \cap R\overline{S} = N, \quad NB \cap RS = M',$$

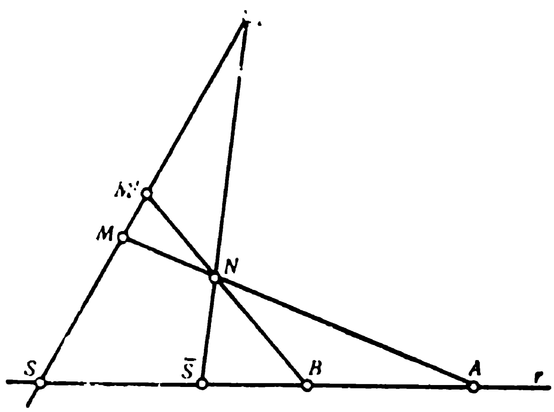
защото $(A)\varphi = B$, а $R\overline{S}$ е оста на φ. За образа на M при колинеацията $\alpha\beta$ ще имаме

$$(M)\alpha = MA \cap R\overline{S} = N, \quad (N)\beta = NB \cap RS = M',$$

защото $(S)\alpha = (S)\omega = \overline{S}$, $(\overline{S})\beta = (\overline{S})\omega = S$. Следователно

$$(M)\alpha\beta = M' = (M)\varphi.$$

С това лемата е доказана.



Фиг. 1

Лема 9. Съвкупността Ω съдържа и неинволюторни хомологии. Всяка неинволюторна хомология на Ω е периодична с период 4.

Доказателство. Както е известно [6, стр. 302], всяка крайна проективна равнина с ред $n < 8$ е дезаргова. Понеже разглежданата равнина π е недезаргова, то върху r има повече от 6 точки. Следователно върху r можем да изберем точки A, B и C, никои две от които не са спрегнати за ω. Тогава съгласно с лема 7 хомологията от Ω, която има център A и трансформира B в C, няма да бъде инволюторна.

Нека φ е неинволюторна хомология от Ω. Да означим с S центъра на φ. Нека S_1 е точка от r, различна от S и $\bar{S} = (S)\omega$, а $S_2=(S_1)\varphi$, $S_3=(S_2)\varphi = (S_1)\varphi^2$. Инволюторните хомологии на Ω с центрове S_1, S_2 и S_3 да означим съответно с ψ_1, ψ_2 и ψ_3. Съгласно лема 8 колинеациите $\psi_1\psi_2$ и $\psi_2\psi_3$ възбуждат върху правата RS едно и също съответствие — съответствието, което възбужда хомологията φ. Освен това съгласно с лема 7

$$(\bar{S}, S_2)\psi_1\psi_2=(S,\bar{S}_2)\psi_2 = S, \bar{S}_2,$$

$$(S, S_2)\psi_2\psi_3=(S, S_2)\,\psi_3 = S, \bar{S}_2,$$

където $\bar{S}_2=(S_2)\omega$. Като вземем пред вид, че точките $\bar{S}$ и S_2 не лежат на правата RS, съгласно лема 3 получаваме, че $\psi_1\psi_2=\psi_2\psi_3$, т. е. $\psi_3=\psi_2\psi_1\psi_2$. Но хомологията $\psi_2\psi_1\psi_2$ има център $(S_1)\psi_2=(S_1)\omega=\bar{S}_1$. Това означава, че S_3, центърът на ψ_3, съвпада с $\bar{S}_1$. Окончателно получихме

$$(S_1)\varphi^2=(S_2)\varphi=S_3=\bar{S}_1 = (S_1)\omega.$$

Това съгласно с лема 6 означава, че хомологията φ^2 е инволюторна, т. е. че φ е периодична с период 4. С това лемата е доказана.

Теорема 1. Всяка $R-r$ равнина е крайна и има ред 9.

Доказателство. Нека π е $R-r$ равнина. Съгласно с лема 8 Ω съдържа хомологии с период 4. Една такава хомология ще запазва две точки от r, а останалите точки (от r) ще разделя на четворки (като точките от всяка четворка циклично преминават една в друга). Следователно, ако π има краен ред n, броят на точките върху r ще бъде $n+1=2+4k$ (k — естествено число). Но както споменахме, $n>6$. Оттук получаваме $k>1$, т. е. върху r има поне 10 точки.

Да допуснем, че върху r има повече от 10 точки. Нека S_i и $\bar{S}_i=(S_i)\omega$, $i=1,\ldots,6$, са 12 от точките върху r. Да означим с ψ_i инволюторните хомологии от Ω, центрове на които са точките S_i. Нека φ_1 е неинволюторна хомология от Ω, която има център S_1 (ос $R\bar{S}_1$) и трансформира S_2 в S_3. Можем да предположим означенията така въведени, че $(S_4)\varphi_1=S_5$.

Съгласно с лема 8 колинеациите $\psi_2\psi_3$ и $\psi_4\psi_5$ възбуждат върху правата RS_1 едно и също съответствие. Освен това

$$(S_1, S_6)\psi_2\psi_3=(S_1,\bar{S}_6)\psi_3 = \bar{S}_1, S_6,$$

$$(\bar{S}_1, S_6)\psi_4\psi_5=(S_1,\bar{S}_6)\psi_5 = \bar{S}_1, S_6.$$

Оттук съгласно с лема 3 получаваме

$$\psi_2\psi_3=\psi_4\psi_5.$$

Но $(S_2)\psi_2\psi_3 = (S_2)\psi_3 = S_2$. $(S_2)\psi_4\psi_5=(S_2)\psi_5 = S_2$. Това противоречие изключва възможността върху r да има повече от 10 точки. С това теоремата е доказана.

От тази теорема получаваме съгласно с лема 4

Следствие 1. Ако една проективна равнина принадлежи към някой от типовете I-5, I-7, I-8, IV^a-3 или IV^b-3, тя е крайна и има ред 9.

Теорема 2. Не съществува $R-r$ равнина, която да е $R-r$ транзитивна.

Доказателство. Нека π е $R-r$ равнина. Съгласно с теорема 1 върху r има 10 точки. Да означим тези точки с S_i и $\bar{S}_i=(S_i)\omega$, $i=1, 2, 3, 4, 5$, а инволюторните хомологии от Ω с центрове тези точки да означим съответно с ψ_i и $\bar{\psi}_i$.

Нека φ_1 е хомологията от Ω, която има център S_1 (ос RS_1) и трансформира S_2 в S_3. Тъй като $S_3 \neq \bar{S}_2$, съгласно с лема 7 φ_1 е неинволюторна хомология. От $(S_2)\varphi_1=S_3$ съгласно с лема 9 и лема 8 получаваме $(S_3)\varphi_1=\bar{S}_2$, $(\bar{S}_2)\varphi_1=\bar{S}_3$. Можем да предположим означенията въведени така, че $(S_4)\varphi_1=S_5$. Тогава (от леми 7 и 9) получаваме $(S_5)\varphi_1=\bar{S}_4$, $(\bar{S}_4)\varphi_1=\bar{S}_5$. Следователно десетте точки върху r се трансформират от φ_1 по следния начин:

$$\varphi_1: \begin{cases} S_1 \to S_1, \ \bar{S}_1 \to \bar{S}_1, \\ S_2 \to S_3 \to \bar{S}_2 \to \bar{S}_3, \ S_4 \to S_5 \to \bar{S}_4 \to \bar{S}_5. \end{cases}$$

Нека $\bar{\varphi}_1$ е хомологията от Ω, която има център $\bar{S}_1$ (ос RS_1) и трансформира S_2 в S_3. Аналогично на φ_1 (от леми 7 и 9) имаме

$$\bar{\varphi}_1: S_2 \to S_3 \to \bar{S}_2 \to \bar{S}_3.$$

Ще определим как $\bar{\varphi}_1$ трансформира останалите точки от r.

Съгласно лема 8 колинеациите $\bar{\varphi}_1$ и $\psi_2\psi_3$ възбуждат върху правата RS_1 едно и също съответствие. Същото съответствие възбужда и колинеацията $\varphi_1\bar{\varphi}_1$. Освен това

$$(S_2, S_3)\psi_2\psi_3=(S_2, \bar{S}_3)\psi_3=\bar{S}_2, \bar{S}_3,$$

$$(S_2, S_3)\varphi_1\bar{\varphi}_1=(S_3, \bar{S}_2)\bar{\varphi}_1=\bar{S}_2, \bar{S}_3.$$

Оттук съгласно лема 3 получаваме $\psi_2\psi_3=\varphi_1\bar{\varphi}_1$, т. е.

$$\bar{\varphi}_1=\varphi_1^{-1}\psi_2\psi_3.$$

От това представяне на $\bar{\varphi}_1$ намираме

$$\bar{\varphi}_1: \begin{cases} S_2 \to S_3 \to \bar{S}_2 \to \bar{S}_3, \\ S_4 \to S_5 \to \bar{S}_4 \to \bar{S}_5. \end{cases} \tag{6}$$

Да допуснем, че π е $R-r$ транзитивна. Нека M е точка от правата RS_1, $M \neq R$, $M \neq S_1$. С ϱ да означим хомологията, която има център R, ос r и трансформира M в $M'=(M)\bar{\varphi}_1$. От (5) и (6) следва, че колинеацията $\varrho_1=\varphi_1\varrho^{-1}\bar{\varphi}_1$ запазва върху r само следните шест точки: S_4, S_5, $\bar{S}_4$, $\bar{S}_5$, S_1 и $\bar{S}_1$. Освен това тази колинеация запазва и точките R и M, които са извън r. Следователно двойните елементи на ϱ_1 ще образуват проективна равнина π_1, подравнина на π. Проективната равнина π_1 има ред n_1 5. Съгласно с теоремата на Брук [7] за реда n_1 на π_1 и n на π трябва да е в сила

$$n=n_1^2 \quad \text{или} \quad n \geqq n_1^2+n_1.$$

Но никоя от тези зависимости не е изпълнена за $n=9$ и $n_1=5$. Това противоречие изключва възможността π да е $R-r$ транзитивна. С това теоремата е доказана.

От тази теорема съгласно с определението на тип I-7 (и лема 4) получаваме

Следствие 2. Не съществува проективна равнина, която да принадлежи към тип I-7.

Ще докажем

Лема 10. Ако π е $R-r$ равнина, не съществува точка $R_0 \in r$, за която π е R_0-r транзитивна.

Доказателство. Да предположим, че за точката $R_0 \bar{\in} r$ равнината π е R_0-r транзитивна. Нека s е права през R, но неминаваща през R_0, $S=s \cap r$, $\bar{S}=(S)\omega$. Тогава π е $\bar{S}-s$ транзитивна. Като приложим лема 1 за двойките $\bar{S}$, s и R_0, r, ще получим, че π е дезаргова проективна равнина. Това противоречие изключва възможността π да бъде R_0-r транзитивна. С това лемата е доказана.

Следствие 3. Не съществува проективна равнина, която да принадлежи към тип I-8.

Доказателство. Да допуснем, че проективната равнина π принадлежи към тип I-8. Съгласно с лема 4 π е $R-r$ равнина. От друга страна, според определението на тип I-8 съществува еднозначно обратимо съответствие φ между точките и правите на π такова, че за всяка точка X е изпълнено $X \bar{\in} (X)\varphi$ и π е $X-(X)\varphi$ транзитивна. Тогава, ако $R_0=(r)\varphi^{-1}$, π трябва да бъде R_0-r транзитивна, а това противоречи на лема 10. С това следствието е доказано.

От типовете, споменати в следствие 1, остава недоизяснен въпросът за съществуването (или несъществуването) на типовете I-5, IV^a-3 и IV^b-3. Оказва се, че тип IV^a-3 съдържа единствена проективна равнина (единствена до изоморфизъм). Същото се отнася и за тип IV^b-3. Този резултат ще бъде изложен подробно в следваща статия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lenz, H. Kleiner desarguescher Satz und Dualität in projektiven Ebenen. — Jahresber Dtsch. Math.-Ver., **57**, Heft 1, 20—31.
2. Barlotti, A. Le posibili configurazioni del sistema delle coppile punto-retta (A, a) per cui un piano grafico risulta (A, a)-transitivo. — Boll. Un. Mat. Ital. (3) **12**, 1957, 212—226.
3. Lüneburg, H. Endliche projektive Ebenen von Lenz — Barlotti Typ I b. — Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, **27**, 1964, No 1—2, 75—79.
4. Jaqub, J. C. D. S. The non-existence of finite projective planes of Lenz — Barlotti class III 2. — Arch. Math., **18**, 1967, No. 3, 308—312.

5. Мартинов, Н. О существовании гомологии в недезарговых проективных плоскостях. — Доклады Болг. Акад. наук, 23, 1970, 1469—1471.
6. Pickert, G. Projektive Ebenen. Berlin, 1955.
7. Bruck, R. H., H. J. Reyser. The non-existence of finite projective planes. — Canad. J. Math., 1, 1949, 88—93.

Постъпила на 25. III. 1971 г.

О НЕСУЩЕСТВОВАНИИ НЕКОТОРЫХ ЛЕНЦ-БАРЛОТТИЕВЫХ ТИПОВ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Никола Мартинов

(*Резюме*)

Рассматриваются типы проективных плоскостей I-5, I-7, I-8, IV^a-3 и IV^b-3 согласно классификации Ленца — Барлотти. Если проективная плоскость π принадлежит к плоскости любого из этих типов, она обладает следующим свойством: существуют неинцидентные точка R и прямая r и однозначно обратимое и инволюторное соответствие ω для ряда точек r, таких, что для любой точки $X \in r\ \pi$ является $X-RX'$-транзитивной, где $X'=(X)\omega$. Устанавливается, что если какая-нибудь недезарговая проективная плоскость обладает вышеописанным свойством, она является конечной и имеет порядок 9. Отсюда следует, что если типы, о которых идет речь, существуют, они содержат только крайние конечные проективные плоскости порядка 9. Дальше устанавливается, что типы I-7 и I-8 не сушествуют.

ON THE NON-EXISTENCE OF SOME LENZ-BARLOTTI TYPES OF PROJECTIVE PLANES

Nikola Martinov

(*Summary*)

The following types of projective planes I-5, I-7, I-8, IV^a-3 and IV^b-3 according to the classification of Lenz-Barlotti are considered. If a projective plane π belongs to one of these types it has the property: there exist a point R and a line r that are non-incident and an one-to-one and involutory correspondence ω on the range of points r, such that for every point $X \in r\ \pi$ is $X-RX'$ transitive where $X'=(X)\omega$. It is established that if one non-Desargues projective plane has the above mentioned property, it is finite and of order 9. It follows from this that if the types mentioned exist, they contain only finite projective planes of order 9. Then it is established that the types I-7, I-8 do not exist.