БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ЕНДОМОРФИЗМИ В СВОБОДНАТА АСОЦИАТИВНА АЛГЕБРА

Стефан Копрински

В тази работа ще използваме следните означения:

P — фиксирано поле с нулева характеристика;

X — изброимо множество от букви $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$;

$F=P\langle X\rangle$ — свободната P-алгебра върху множеството X [1];

Φ — съвкупността от ендоморфизмите на алгебрата F, които изобразяват само краен брой от образуващите x_i в ненулеви елементи.

Понеже $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ са свободни образуващи на F, то всеки елемент $\varphi\in\Phi$ се определя напълно от образите $x_i\varphi\in F$, $i=1, 2, \ldots, n, \ldots$; и обратно, ако си зададем произволни елементи $a_i=a_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i})\in F$, то съществува единствен ендоморфизъм $\varphi\in\Phi$ такъв, че $x_i\varphi=a_i$, $i=1, 2, \ldots, n, \ldots$

Въвеждаме следните операции във Φ:

$$x_i(\varphi+\psi)=x_i\varphi+x_i\psi,$$

$$x_i(\lambda\varphi)=\lambda(x_i\varphi),$$

$$x_i(\varphi\psi)=(x_i\varphi)\psi,$$

където $\varphi, \psi\in\Phi$, $i=1, 2, \ldots, n, \ldots$

Нека обърнем внимание на това, че при така въведеното събиране на ендоморфизми равенството $a(\varphi+\psi)=a\varphi+a\psi$ е нарушено за някои елементи $a\in F$. Наистина, нека $a=x_1 . x_2+x_1$ и нека $x_1\varphi=a_1$, $x_2\varphi=a_2$, $x_1\psi=b_1$, $x_2\psi=b_2$. Имаме

$$a(\varphi+\psi)=(x_1 . x_2+x_1)(\varphi+\psi)=x_1(\varphi+\psi) . x_2(\varphi+\psi)+x_1(\varphi+\psi)$$

$$=(x_1\varphi+x_1\psi) . (x_2\varphi+x_2\psi)+x_1\varphi+x_1\psi=(a_1+b_1) . (a_2+b_2)+a_1+b_1.$$

От друга страна, имаме

$$a\varphi+a\psi=(x_1 . x_2+x_1)\varphi+(x_1 . x_2+x_1)\psi$$

$$=x_1\varphi . x_2\varphi+x_1\varphi+x_1\psi . x_2\psi+x_1\psi=a_1 . a_2+a_1+b_1 . b_2+b_1.$$

Ясно е, че в общия случай разликата $a(\varphi+\psi)-(a\varphi+a\psi)=a_1 . b_2+b_1 . a_2$ е различна от нула, т. е. $a(\varphi+\psi)\neq a\varphi+a\psi$ за разгледаното a.

Лесно се проверява верността на следната

Теорема 1. По отношение на въведените операции събиране и умножение Φ е почти-пръстен [2], т. е.

а) Φ е комутативна (Абелева) група по отношение на операцията събиране;

в) Φ е полугрупа по отношение на операцията умножение;

с) Φ удовлетворява десния дистрибутивен закон.

Проверката на съответните аксиоми е тривиална. Ще проверим само, че е в сила десният дистрибутивен закон и не е в сила левият.

Нека φ, ψ, $\theta\in\Phi$. Имаме

$$x_i[(\varphi+\psi)\theta]=[x_i(\varphi+\psi)]\theta=(x_i\varphi+x_i\psi)\theta=(x_i\varphi)\theta+(x_i\psi)\theta$$

$$=x_i(\varphi\theta)+x_i(\psi\theta)=x_i(\varphi\theta+\psi\theta),$$

т. е. десният дистрибутивен закон е изпълнен.

От друга страна, ако изберем φ, ψ и θ по-такъв начин, че $x_1\varphi=x_1.x_2$, $x_1\psi=x_1$, $x_2\psi=x_2$, $x_1\theta=x_1$, $x_2\theta=x_2$, то

$$x_1[\varphi(\psi+\theta)]=(x_1\varphi)(\psi+\theta)=x_1\,.\,x_2(\psi+\theta)=x_1(\psi+\theta)\,.\,x_2(\psi+\theta)$$

$$=(x_1\psi+x_1\theta)\,.\,(x_2\psi+x_2\theta)=(x_1+x_1)\,.\,(x_2+x_2)=4x_1\,.\,x_2;$$

но

$$x_1(\varphi\psi+\varphi\theta)=x_1(\varphi\psi)+x_1(\varphi\theta)=(x_1\varphi)\psi+(x_1\varphi)\theta$$

$$=(x_1\,.\,x_2)\psi+(x_1\,.\,x_2)\theta=x_1\psi\,.\,x_2\psi+x_1\theta\,.\,x_2\theta=x_1\,.\,x_2+x_1\,.\,x_2=2x_1\,.\,x_2.$$

Тъй като x_1, x_2 са свободни образуващи на F и P има характеристика 0, то $4x_1\,.\,x_2\neq 2x_1\,.\,x_2$, т. е. $\varphi(\psi+\theta)\neq\varphi\psi+\varphi\theta$.

Това впрочем следва и от провереното по-горе, че $(x_1\varphi)(\psi+\theta)$ не винаги е равно на $(x_1\varphi)\psi+(x_1\varphi)\theta$ за $x_1\varphi\in F$.

Разбира се, има тройки елементи на Φ, за които е верен и левият дистрибутивен закон. Например, ако ε_i^k е ендоморфизмът, определен чрез $x_i\varepsilon_i^k=x_k$, $x_j\varepsilon_i^k=0$ при $j\neq i$, то $\varepsilon_i^k(\varphi+\psi)=\varepsilon_i^k\varphi+\varepsilon_i^k\psi$ за всички натурални числа i, k и всеки два ендоморфизма φ, ψ.

Подмножеството I на Φ наричаме **идеал**, ако:

1) I е подгрупа на адитивната група на Φ;

2) за всяко $\varphi\in\Phi$ са в сила $\varphi I\subset I$ и $I\varphi\subset I$;

3) ако $\theta\in I$, то $\lambda\theta\in I$ за всеки елемент $\lambda\in P$.

Теорема 2. Съществува еднозначно и обратимо съответствие τ между съвкупността от напълно характеристичните подалгебри на свободната алгебра F и идеалите в почти-пръстена Φ.

Доказателство.

Нека A е напълно характеристична подалгебра на свободната асоциативна алгебра F. Под $A\tau=I$ ще разбираме съвкупността от ендоморфизмите $\varphi\in\Phi$, за които $F\varphi\subset A$. Ще докажем, че I е идеал във Φ.

Нека φ, $\psi\in\Phi$. Тъй като $F\varphi\subset A$ и $F\psi\subset A$, то $x_i(\varphi+\psi)=x_i\varphi+x_i\psi\in A$ и следователно за всяко $a=a(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in F$ ще имаме $a(\varphi+\psi)\in A$, т. е. $\varphi+\psi\in I$. Ясно е освен това, че нулевият ендоморфизъм (т. е. този ендоморфизъм 0, за който $x_i0=0$) и противоположният ендоморфизъм $-\varphi$ на $\varphi\in I$ са също елементи на I, т. е. I е подгрупа на адитивната група на Φ. От друга страна, тъй като A е напълно характеристична подалгебра на F, то $A\theta\subset A$ за всяко $\theta\in\Phi$. Следователно за всяко $i=1, 2, \ldots, n$, . и всяко $\varphi\in\Phi$ ще имаме $x_i(\varphi\theta)=(x_i\varphi)\theta\in A$, $\varphi\theta\in I$. Освен това от дефиницията на I следва, че $(x_i\theta)\varphi\in A$, т. е $\theta\varphi\in I$.

С това доказахме, че I е идеал във Φ и следователно на всяка напълно характеристична подалгебра A на F сме съпоставили идеал $I = A\tau$ на Φ. Ще докажем, че съответствието τ е обратимо.

Нека A_1 и A_2 са две различни напълно характеристични подалгебри на F и нека $a \in A_1$, $a \bar{\in} A_2$. Да разгледаме ендоморфизма $\alpha \in \Phi$, определен чрез полагането $x_1\alpha = a$, $x_i\alpha = 0$ за $i = 2, 3, \ldots, n, \ldots$ Ясно е, че $F\alpha \subset A_1$ и следователно $\alpha \in A_1\tau$. От друга страна, $x_1\alpha = a \bar{\in} A_2$, т. е. $\alpha \bar{\in} A_2\tau$. Остава само да проверим, че всеки идеал във Φ е образ на някаква напълно характеристична подалгебра при съответствието τ. Нека I е идеал във Φ. Да разгледаме подмножеството $A = FI = \{a\varphi \colon a \in F, \varphi \in I\}$, т. е. подмножеството от всевъзможните образи на елементи от F при всичките ендоморфизми от I. Ще докажем, че $A = FI$ е напълно характеристична подалгебра на свободната алгебра F и $A\tau = I$.

Ще проверим най-напред, че сума на два образа $a\varphi + b\psi$; $a, b \in F$; $\varphi, \psi \in I$ е пак образ на елемент от F при ендоморфизъм от I. Нека най-напред a, b нямат общи образуващи,

$$a = a(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}), \quad b = b(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}).$$

Да разгледаме ендоморфизмите $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_m}$, дефинирани чрез равенствата

$$x_i\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} x_i & \text{при} \quad i = i_1, i_2, \ldots, i_n; \\ 0 & \text{при} \quad i \neq i_1, i_2, \ldots, i_n. \end{cases}$$

$$x_i\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_m} = \begin{cases} x_i & \text{при} \quad i = j_1, j_2, \ldots, j_m; \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j_1, j_2, \ldots, j_m. \end{cases}$$

Тогава $(a+b)(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}\varphi + \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_m}\psi) = a\varphi + b\psi$ и тъй като $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}\varphi + \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_m}\psi \in I$, то $a\varphi + b\psi \in A$.

Нека a, b имат общи образуващи с индекси $i_1, i_2, \ldots, i_p$. Да означим с ν_i^k ендоморфизма, дефиниран чрез равенствата

$x_i\nu_i^k = x_k$ при $i = i_1, i_2, \ldots, i_p$;

$x_i\nu_i^k = x_i$, ако x_i участвува в записа на b, но $i \neq i_1, i_2, \ldots, i_p$;

$x_j\nu_i^k = 0$ в останалите случаи.

Тогава, ако $k_1, k_2, \ldots, k_p$ са различни индекси, несрещащи се в a и b, то

$$a\varphi + b\psi = a\varphi + (b\nu_{i_1}^{k_1}\nu_{i_2}^{k_2} \quad \nu_{i_p}^{k_p})(\nu_{k_1}^{i_1}\nu_{k_2}^{i_2} \ldots \nu_{k_p}^{i_p}\psi),$$

т. е. сведохме случая до този, когато a и b нямат общи образуващи.

Нека сега $a\varphi \in A$, $\varphi \in I$. Да представим a във вида $a = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k}$, където a_{n_i} е хомогенната част на a от степен n_i. Тогава, тъй като $\lambda\varphi \in I$, ще получим

$$\begin{aligned} \lambda(a\varphi) &= \lambda a_{n_1}\varphi + \lambda a_{n_2}\varphi + \quad + \lambda a_{n_k}\varphi \\ &= \left(\frac{1}{\lambda^{n_1-1}}a_{n_1} + \frac{1}{\lambda^{n_2-1}}a_{n_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda^{n_k-1}}a_{n_k}\right)(\lambda\varphi) \in A. \end{aligned}$$

Следователно $A = FI$ е линейно подпространство на F.

Нека $a\varphi \in A$, $b\varphi \in B$. Да допуснем, че елементите

$$a=a(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}), \quad b=b(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m})$$

са записани с различни образуващи и да разгледаме ендоморфизма θ, дефиниран чрез равенствата:

$x_i\theta = x_i\varphi$ при $i=i_1, i_2, \ldots i_n$;
$x_j\theta = x_j\psi$ при $j=j_1, j_2, \ldots, j_m$;
$x_j\theta = 0$ в останалите случаи.

Тогава

$$a\varphi . b\psi = a(x_{i_1}\varphi, x_{i_2}\varphi, \ldots, x_{i_n}\varphi) . b(x_{j_1}\psi, x_{j_2}\psi, \ldots, x_{j_m}\psi)$$

$$=[a(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) . b(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m})]\theta \in A.$$

Ако елементите a, b имат общи образуващи x_{p_1}, x_{p_2} x_{p_s}, то

$$\text{(1)} \qquad a\varphi . b\psi = a\varphi(b\nu_{p_1}^{k_1}\nu_{p_2}^{k_2} \ldots \nu_{p_s}^{k_s})\nu_{k_1}^{p_1}\nu_{k_2}^{p_2} \ldots \nu_{k_s}^{p_s}\psi,$$

където $\nu_{p_i}^{k_i}$ изпраща образуващата x_{p_i} в x_{k_i} и оставя всички срещащи се до този момент образуващи в b на място, а $\nu_{k_i}^{p_i}$ връща обратно x_{k_i} в x_{p_i} и оставя останалите образуващи x_{i_r}, x_{j_r}, x_{k_r} на място. За всички останали образуващи, различни от x_{i_r}, x_{j_r}, x_{k_r}, x_{p_s}, полагаме $x_q\nu_{p_i}^{k_i} = x_q\nu_{k_i}^{p_i}$ 0. Числата $k_1, k_2, \ldots, k_s$ считаме различни и несрещащи се като индекси на образуващи в $a.b$. Равенството (1) ни дава възможност да сведем и този случай към случая, когато a и b нямат общи образуващи. С това доказахме, че $A=FI$ е подалгебра на F.

Накрая да отбележим, че $A\varphi=(FI)\varphi \subset F(I\varphi) \subset FI=A$. С това теоремата е доказана.

Под произведение A_1A_2 на две напълно характеристични подалгебри A_1 и A_2 разбираме съвкупността от елементите от вида $a(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, където $a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_1$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ са елементи от A_2. Тази дефиниция е аналогична на съответната дефиниция за умножение на вербални подгрупи на свободната група [2] и на дефиницията за умножение на T-идеали във F.

Като се има пред вид дефиницията на съответствието τ от теорема 2, лесно се проверява, че τ има следните свойства:

1. Ако $A_1 \subset A_2$, то $A_1\tau \subset A_2\tau$.
2. $(A_1A_2)\tau=(A_1\tau)(A_2\tau)=I_1I_2$.

Тук под произведение на два идеала I_1, I_2 от Φ се разбира, както обикновено, съвкупността от всевъзможните крайни суми на елементи от вида $\varphi_1\varphi_2$, където $\varphi_1 \in I_1$, $\varphi_2 \in I_2$. Лесно се проверява, че I_1I_2 е пак идеал, като вземем пред вид, че $\lambda(\varphi\psi)=(\lambda\varphi)\psi$.

Теорема 3. Произведението I_1I_2 на двата идеала I_1, I_2 съвпада със съвкупността от елементите от вида $\varphi_1\varphi_2$, където $\varphi_1 \in I_1$, $\varphi_2 \in I_2$.

Доказателство. Нека $\varphi_1 \in I_1$, $\psi_1 \in I_1$, $\varphi_2 \in I_2$, $\psi_2 \in I_2$. Ще докажем, че съществуват елементи $\theta_1 \in I_1$, $\theta_2 \in I_2$ такива, че $\varphi_1\varphi_2+\psi_1\psi_2=\theta_1\theta_2$.

Да разгледаме ендоморфизмите σ_n и τ_n, дефинирани чрез равенствата:

$$x_i\sigma_n = x_{i+n},\ i=1,\ 2, \ldots,\ n;$$
$$x_i\sigma_n = 0,\ i>n;$$
$$x_i\tau_n = 0,\ i=1,\ 2, \ldots,\ n;$$
$$x_i\tau_n = x_{i-n},\ i=n+1,\ n+2, \ldots,\ 2n;$$
$$x_i\tau_n = 0,\ i>2n.$$

Нека n е най-малкото число, за което $x_i\varphi_1$, $x_i\varphi_2$, $x_i\psi_1$, $x_i\psi_2$ се изразяват чрез $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогава

$$\varphi_1\varphi_2+\psi_1\psi_2=(\varphi_1+\psi_1\sigma_n)(\varphi_2+\tau_n\psi_2).$$

Наистина, нека $x_i\varphi_1=a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i\psi_1=b_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогава

$$\begin{aligned}
x_i[(\varphi_1+\psi_1\sigma_n)(\varphi_2+\tau_n\psi_2)] &= [x_i(\varphi_1+\psi_1\sigma_n)](\varphi_2+\tau_n\psi_2)\\
&= [x_i\varphi_1+(x_i\psi_1)\sigma_n](\varphi_2+\tau_n\psi_2)\\
&= [a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)+b_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\sigma_n](\varphi_2+\tau_n\psi_2)\\
& [a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)+b_i(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n})](\varphi_2+\tau_n\psi_2)\\
&= a_i[x_1(\varphi_2+\tau_n\psi_2), x_2(\varphi_2+\tau_n\psi_2), \ldots\ x_n(\varphi_2+\tau_n\psi_2)]\\
& +b_i[x_{n+1}(\varphi_2+\tau_n\psi_2), x_{n+2}(\varphi_2+\tau_n\psi_2), \ldots, x_{2n}(\varphi_2+\tau_n\psi_2)]\\
&= a_i(x_1\varphi_2, x_2\varphi_2, \ldots, x_n\varphi_2)+b_i(x_1\psi_2, x_2\psi_2, \ldots, x_n\psi_2)\\
&= a_i\varphi_2+b_i\psi_2=(x_i\varphi_1)\varphi_2+(x_i\psi_1)\psi_2=x_i(\varphi_1\varphi_2)+x_i(\psi_1\psi_2)\\
&= x_i(\varphi_1\varphi_2+\psi_1\psi_2).
\end{aligned}$$

С това доказателството на теорема 3 е завършено.

(Може да се покаже, че се получава подгрупа по отношение на въведеното умножение.)

Забележка. Ако с F бяхме означили свободния пръстен над множеството X, т. е. свободната Z-алгебра (Z е пръстенът на целите числа), бихме могли по същия начин да докажем три теореми, аналогични на горните. Дори в този случай дефиницията на идеал би била по-естествена — от нея би липсвало третото условие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cohn, P. M. Free Associative Algebras. — Bull. London Math. Soc. 1, 1969, 1—39.
2. Neumann, H. On Varieties of Groups and Their Associated Near-rings. — Math. Z., 65, 1956, 36—69.

Постъпила на 30. III. 1971 г.

ЭНДОМОРФИЗМЫ В СВОБОДНОЙ АССОЦИАТИВНОЙ АЛГЕБРЕ

Стефан Копрински

(*Резюме*)

Устанавливается однозначное и обратимое соответствие между совокупностью вполне характеристических подалгебр свободной алгебры F и идеалами в почти-кольце эндоморфизмов F. Установленное соответствие сохраняет включение и умножение, причем под произведением A_1A_2 двух вполне характеристических подалгебр понимается совокупность всевозможных элементов вида $a(b_1, b_2, \ldots b_m)$, где $a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_1$; $b_1, \ldots, b_m \in A_2$.

Доказывается, что произведение I_1I_2 двух идеалов I_1, I_2 почти-кольца эндоморфизмов F состоит из всевозможных элементов вида $\varphi_1\varphi_2$, где $\varphi_1 \in I_1$, $\varphi_2 \in I_2$.

ENDOMORPHISMS IN THE FREE ASSOCIATIVE ALGEBRA

Stefan Koprinski

(*Summary*)

In this paper one-to-one correspondence between the set of the fully characteristic subalgebras of the free algebra F and the ideals in the endomorphism near-ring of F is established.

The established correspondence conserve the inclusion and multiplication the product A_1A_2 of two fully characteristic subalgebras being the set of all possible elements of the form $a(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, where $a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_1$; $b_1, b_2, \ldots, b_m \in A_2$.

It is proved that the product I_1I_2 of two ideals I_1 and I_2 of the endomorphism near-ring of F consists of all possible elements of the sort $\varphi_1\varphi_2$, $\varphi_1 \in I_1$, $\varphi_2 \in I_2$.