БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ВЪРХУ ХАРАКТЕРИСТИКИТЕ НА НЯКОИ ОРТОГОНАЛНИ МРЕЖИ

Г. Марков

Една повърхнина се нарича изотермична, ако мрежата от линиите на кривината ѝ е изотермична. Градиентността на чебишовския вектор на мрежата на линиите на кривината е инвариантна характеристика за изотермичните повърхнини [1].

Ако приемем асимптотичната мрежа за мрежа $\underset{1}{A}$, мрежата на линиите на кривината за мрежа $\underset{2}{A}$ и характеристичната мрежа за мрежа $\underset{3}{A}$, то от триъгълната схема 1 [1] следва, че вектор

$$-\underset{3}{a}_i = c_i - h_i = \mathrm{grad}.$$

Следователно изотермичните повърхнини се характеризират с това, че в метриката на сферичното им изображение $\underset{1}{\Gamma}$ мрежата на линиите на кривината им допуска две аполярни на нея и аполярни помежду си кодациеви мрежи. По такъв начин построяването на изотермичните повърхнини по зададено сферично изображение на мрежата на линиите на кривината им се свежда до търсенето на такива ортогонални мрежи върху единичната сфера, които допускат две аполярни на тях и аполярни помежду си кодациеви мрежи.

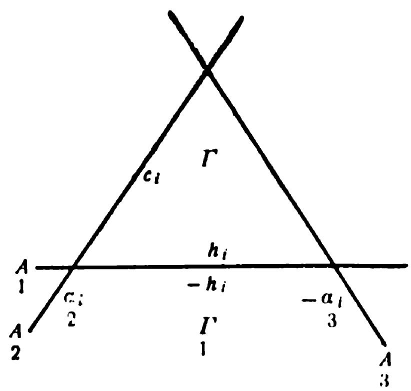

Схема 1

Тази задача е частен случай от следната по-обща задача:

Да се намерят условията, при които дадена ортогонална мрежа в произволно двумерно риманово пространство V_2 допуска две аполярни на нея и аполярни помежду си кодациеви мрежи.

Нека в V_2 е зададена ортогоналната мрежа $a_{is} = 2v_{(i}w_{s)}$ и нека $\underset{1}{A}{}_i^s = ia_i^s$ е нейният приведен афинор. Допълваме дадената мрежа $\underset{1}{A}$ до нормална тройка мрежи: $\underset{2}{A}{}_i^s = -ia_i^s$ и $\underset{3}{A}{}_i^s = g_i^s$ (g_i^s е афинорът на изотропната мрежа в V_2, $i = \sqrt{-1}$, а $\tilde{a}_i^s = g_i^k a_k^s$).

Както е известно от [1], мрежите, аполярни на мрежата $\underset{1}{A}$ и аполярна между себе си, се задават с помощта на една функция на два аргументи ω по следните формули:

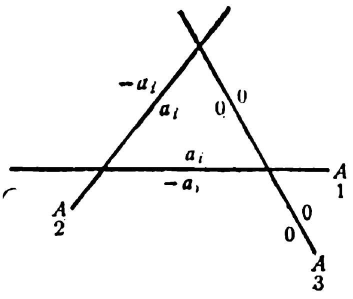

Схема 2

$$(1)\qquad \begin{aligned} \underset{1}{B}{}_i^s &= \underset{2}{A}{}_i^s \cos\omega + \underset{3}{A}{}_i^s \sin\omega, \\ \underset{2}{B}{}_i^s &\;\; \underset{2}{A}{}_i^s \cos\omega \;\; \underset{3}{A}{}_i^s \sin\omega, \end{aligned}$$

където $\omega \;\; -\omega + \;\; 2$

Чебишовският вектор $\underset{k}{b}$ на мрежата B_i^s се определя по формулата

$$(2)\qquad 2b_k = \underset{2}{a}_k + \underset{3}{a}_k + \underset{1}{a}_k \cos 2\omega + \underset{1}{A}{}_k^s \underset{1}{a}_s \sin 2\omega + \underset{1}{A}{}_k^s \omega_s,$$

където $\underset{2}{a}_k$ и $\underset{3}{a}_k$ са чебишовските вектори на мрежите $\underset{2}{A}$ и $\underset{3}{A}$, а $\underset{1}{a}_k$ е геодезичният вектор на мрежата $\underset{1}{A}$ относно мрежата $\underset{3}{A}$. Когато заместим в (1) значенията на $\underset{2}{A}$ и $\underset{3}{A}$, получаваме

$$(3)\qquad \begin{aligned} \underset{1}{B}{}_i^s &= -i\tilde{a}_i^s \cos\omega + g_i^s \sin\omega, \\ \underset{2}{B}{}_i^s &= i a_i^s \sin\omega + g_i^s \cos\omega. \end{aligned}$$

От схема 2 намираме следните зависимости между чебишовските вектори на мрежите $\underset{1}{A}$, $\underset{2}{A}$, $\underset{3}{A}$:

$$(4)\qquad \underset{1}{a}_i = a_i,\quad \underset{2}{a}_i = a_i,\quad \underset{3}{a}_i = 0.$$

Тогава от (2) и (4), изразявайки, че мрежите $\underset{1}{B}$ и B_2 са кодациеви, т. е. $\underset{1}{b}_k$ grad и $\underset{2}{b}_k$ grad, получаваме

$$(5)\qquad \begin{aligned} 2\underset{1}{b}_k &= a_k + (a_k \cos 2\omega + i a_k^s a_s \sin 2\omega) + i a_k^s \omega_s \quad \text{grad}, \\ 2\underset{2}{b}_k &= a - (a_k \cos 2\omega + i a_k^s a_s \sin 2\omega) + i a_k^s \omega_s = \text{grad}. \end{aligned}$$

Преминавайки към реални функции, като положим $\varphi = i\omega$ и заменим $\operatorname{sh} x = -i \sin ix$, $\operatorname{ch} x = \cos ix$, уравненията (5) ще приемат вида

$$(6)\qquad \begin{aligned} a_k + (a_k \operatorname{ch} 2\varphi - \bar{a}_k \operatorname{sh} 2\varphi) - \bar{\varphi}_k &= \text{grad}, \\ a_k - (a_k \operatorname{ch} 2\varphi - \bar{a}_k \operatorname{sh} 2\varphi) - \bar{\varphi}_k &= \text{grad}, \end{aligned}$$

където с $\bar{x}_k$ обозначаваме вектор, получен от вектора x_k след завъртането му на прав ъгъл в метриката на тензора $\underset{1}{A}$ ($\bar{x}_k = \underset{1}{A}{}_k^s x_s$).

В резултат от събирането и изваждането на уравненията на системата (6) получаваме еквивалентната ѝ система:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &2a_k-2\bar{\varphi}_k=\mathrm{grad},\\ &v_k=a_k\,\mathrm{ch}\,2\varphi-\bar{a}_k\,\mathrm{sh}\,2\varphi=\mathrm{grad}. \end{aligned}$$

От ротацията на тази система получаваме

$$(8)\qquad \begin{aligned} &a_k{}^k_{|.}-\bar{\varphi}_k{}^k_{|.}=0,\\ &a_k{}^k_{|.}\,\mathrm{ch}\,2\varphi-\bar{a}_k{}^k_{|.}\,\mathrm{sh}\,2\varphi+2(a_k\,\mathrm{sh}\,2\varphi-\bar{a}_k\,\mathrm{ch}\,2\varphi)\varphi^k=0. \end{aligned}$$

Да разгледаме най-напред случая, когато мрежата a_{is} не съдържа геодезични семейства. В този случай векторите a_k и $\bar{a}_k$ са единични и ортогонални в нормалната метрика $V_2(H_{is})$ [2] на мрежата a_{is} с метричен тензор $H_{is}=\bar{a}_i\bar{a}_s-a_ia_s$ и бивектор $\varepsilon_{is}=2a_{[i}\bar{a}_{s]}$.

Следователно векторът v_k, определен от второто уравнение на (7), е единичен във $V_2(H_{is})$ и тъй като е градиентен, определя поле геодезични паралели. Направляващият единичен вектор на геодезичното поле следователно ще бъде

$$(9)\qquad \bar{v}_k=\bar{a}_k\,\mathrm{ch}2\varphi-a_k\,\mathrm{sh}\,2\varphi.$$

Ако с $\underset{v}{t_i}$ обозначим общия трансверзален вектор на полетата v_k и $\bar{v}_k$, а с $\underset{a}{t_i}$—общия трансверзален вектор на полетата a_k и $\bar{a}_k$, от свойството на трансверзалните вектори (вж. например [1] или [3]) получаваме

$$(10)\qquad \underset{v}{t_s}=\underset{a}{t_s}-2\varphi_s.$$

Тъй като полето $\bar{v}_k$ е геодезично, то

$$(11)\qquad \underset{v}{t_s}=-\sigma\bar{v}_s,$$

където σ е геодезичната кривина на полето линии (v). Отчитайки, че $v_k{}^k_{|.}=0$ и $\bar{v}_k{}^k_{|.}=v_k\underset{v}{t^k}=-\sigma$, от ротацията $\underset{v}{t_k}{}^k_{|.}=K$ (K е гаусовата кривина на нормалната метрика $V_2(H_{is})$) от уравнение (11) получаваме уравнение за определянето на градиента на функцията σ:

$$(12)\qquad \bar{v}^s\sigma_s=K-\sigma^2.$$

В резултат от сравняването на (10) и (11) намираме

$$(13)\qquad 2\varphi_s=\underset{a}{t_s}+\sigma\bar{v}_s,$$

откъдето

$$(14)\qquad 2\bar{\varphi}_s=\underset{a}{\bar{t}_s}+\sigma v_s.$$

С помощта на уравнение (14) първото уравнение на системата (7) може да се напише във вида

$$(15)\qquad 2a_s-\underset{a}{\bar{t}_s}-\sigma v_s=0.$$

От ротацията на това уравнение получаваме второ уравнение за определянето на градиента на функцията σ:

(16) $$v^s \sigma_s = A,$$

където

(17) $$A = -2a_{s|.}^{\ s} + \underset{a}{\overline{t}_{s|.}^{\ s}}.$$

От уравнения (12) и (16) определяме

(18) $$\sigma_s = (K - \sigma^2) v_s - A \overline{v}_s.$$

Така за определянето на функцията σ получаваме уравнения в пълни диференциали. От условието за интегрируемост $\sigma_s{}^s = 0$ на тази система, изключвайки σ_s с помощта на (18), намираме следното уравнение:

(19) $$3A\sigma = -A(\overline{A}^s + K^s) v_s.$$

Ако $A \neq 0$, това уравнение записваме във вида

(20) $$\sigma = T^s v_s,$$

където

$$T_s = -\frac{\overline{A}_s + K_s}{3A}.$$

След като заместим σ от (20) в (18), намираме следното векторно уравнение за определянето на вектора v_k:

$$T^i_{.|s} v_i + T^i \underset{v}{\overline{v}_i t_s} = (K - T_i v^i T_k v^k) v_s - A \overline{v}_s,$$

от което, след като контрактираме последователно с v^s и $\overline{v}^s$, получаваме скаларната система

(21) $$\begin{aligned} &(T_{i|s} + \overline{T}_i T_s + A H_{is}) v^i v^s = 0,\\ &[\overline{T}_{i|s} + T_i T_s - (K + T_{k|.}^{k}) H_{is}] v^i v^s = 0. \end{aligned}$$

Ако въведем означенията

$$P_{is} = T_{i|s} + \overline{T}_i T_s + A H_{is}, \quad Q_{is} = \overline{T}_{i|s} + T_i T_s - (K + T_{k|.}^{k}) H_{is},$$

тази система се записва във вида

(22) $$\begin{aligned} &P_{is} v^i v^s = 0,\\ &Q_{is} v^i v^s = 0. \end{aligned}$$

Така въпросът за определянето на вектора v_i се свежда до намиране на общите решения на системата квадратни уравнения (22).

Ако $P_{(is)} \neq 0$ и $Q_{(is)} \neq 0$, за мрежите с тези тензори имаме следните възможности: а) нямат общо семейство, б) имат едно общо семейство и в) съотвестват една на друга.

За тези три случая получаваме съответно, че системата (22) няма решения, а следователно и поставената задача няма решение, има едно решение и има две решения за v_i. Решенията v_i, заместени във второто уравнение на системата (7), определят едно или съответно две значения за функцията φ.

В резултат от заместването на полученото φ в системата (8) намираме инвариантна характеристика за мрежата a_{is}, допускаща една или две двойки аполярни на нея и аполярни помежду си кодациеви мрежи.

Ако $P_{(is)}=0$, то и $Q_{(is)}=0$. Действително от първото уравнение на (21) получаваме

$$T_{i|s}+\overline{T}_i T_s+AH_{is}=\lambda\varepsilon_{is}. \tag{23}$$

Като контрактираме това уравнение с H_i^k и получения израз заместим във второто уравнение на (22), намираме

$$[\lambda-(K+T_{k|.}^{k})]H_{is}v^i v^s=0. \tag{24}$$

Тъй като мрежата $(a, \overline{a})$ на съдържа геодезични семейства, то

$$H_{is}v^i v^s \neq 0, \ \lambda=K+T_{k|.}^{k}$$

и уравнение (23) приема вида

$$T_{i|s}+\overline{T}_i T_s+AH_{is}=(K+T_{k|.}^{k})\varepsilon_{is}.$$

След контрактиране на това уравнение с $H_{i|.}^{kk}$ получаваме

$$\overline{T}_{i|s}+T_i T_s-(K+T_{k|.}^{k})H_{is}=-A\varepsilon_{is}.$$

Следователно

$$T_{(i|s)}+T_{(i}T_{s)}-(K+T_{k|.}^{k})H_{is}=0,$$

т. е. $Q_{(is)}=0$.

В този случай системата (22) допуска ∞^1 за v_i. За да определим φ, записваме (20) по следния начин:

$$(-T_s+\underset{v}{t_s})v^s=0.$$

В резултат от заместването на $\underset{v}{t_s}$ от (10) и на v_k от второто уравнение на (7) получаваме

$$(-T_s+\underset{a}{t_s}-2\varphi_s)(a^s \operatorname{ch} 2\varphi-\overline{a}^s \operatorname{sh} 2\varphi)=0. \tag{25}$$

От това уравнение с частни производни от първи ред определяме φ с точност до произволна функция на един аргумент. Тъй като в този случай уравнение (20) е удовлетворено, а уравнение (18) след заместването на σ се обръща в тъждество, уравненията (12) и (16) са удовлетворени. Следователно полученото решение за φ от (25) ще удовлетворява системата (7). В резултат от заместването на полученото φ в система (8) намираме инвариантна характеристика за ортогоналната мрежа a_{is}, допускаща двойки аполярни на нея и аполярни между себе си кодациеви мрежи.

Ако A 0, то от (19) следва

$$K^s v_s = 0. \tag{26}$$

От уравнение (16) получаваме $v^s \sigma_s = 0$, т. е.

$$\sigma = \sigma(v). \tag{27}$$

Следователно чебишовският вектор b_i на мрежата (v, v) е

$$b_i = \underset{v}{\overline{t}_i} = -\sigma v_i = \text{grad}, \tag{28}$$

а ортогоналната мрежа (v, v) като полугеодезична и изотермична е мрежа на въртенето, а метриката $V_2(H_{is})$ — метрика на въртенето.

В този случай единственото решение за v_s от (26) при $K \neq$ const и произволно решение за v_s при $K =$ const, заместени във второто уравнение на системата (7), определят едно или значения за функцията φ.

В резултат от заместването на полученото φ в системата (8) при $A = 0$ получаваме инвариантната характеристика за мрежа a_{is}, допускаща една или двойки аполярни на нея и аполярни помежду си кодациеви мрежи.

Така доказахме, че ако ротацията от разликата $A_i = \underset{a}{\overline{t}_i} - 2a_i$ на удвоения чебишовски вектор a_i на дадена ортогонална мрежа a_{is} и допълнителния в нормалната метрика на мрежата трансверзален вектор на полето е отлична от нула, мрежата a_{is} допуска нула, една, две или аполярни на нея и аполярни помежду си двойки кодациеви мрежи, а ако $A_{i}{}^{i} = 0$, то мрежата a_{is} допуска една аполярни на нея двойки мрежи с указаното свойство.

Да разгледаме случая, когато мрежата a_{is} е полугеодезична. Нека за конкретност линиите на полето (w) са геодезични. В този случай $a_i = \overline{a}_i$ и системата (7) се написва във вида

$$(29)\qquad \begin{aligned} &a_s - a_s^k \varphi_k = \text{grad}, \\ &a_s \operatorname{ch} 2\varphi - a_s \operatorname{sh} 2\varphi = \text{grad}. \end{aligned}$$

Като извършим замяната

$$\operatorname{ch} x \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

получаваме еквивалентната ѝ система

$$(30)\qquad \begin{aligned} &a_s \quad a_s^k \varphi_k = \text{grad}, \\ &e^{-2\varphi} a_s = \text{grad}. \end{aligned}$$

От ротацията на уравненията на системата (30) намираме

$$(31)\qquad \begin{aligned} &2a_{s|.}^{s} + a^{sk} \varphi_{s|k} = 0, \\ &a_{s|.}^{s} + 2a^s \varphi_s = 0. \end{aligned}$$

Следователно решението на поставената задача в този случай се свежда до намирането на условията за съвместимост на системата (31). Ако g_i^s е афинорът на метричния тензор на римановата геометрия V_2, векторите a_s и $\widetilde{a}_s = g_s^k a_k$ са независими. Разлагаме градиент φ_s по векторите a_s и $\widetilde{a}_s$:

(32) $$\varphi_s = x a_s + y \widetilde{a}_s.$$

От заместването на φ_s от това уравнение във второто уравнение на системата (31) определяме

$$y = \frac{a_{s|.}^{\ s}}{2\Delta_1 a},$$

където $\Delta_1 a = g^{is} a_i a_s$, а (32) приема вида

(33) $$\varphi_s = x a_s + \frac{a_{k|.}^{\ k}}{2\Delta_1 a} \widetilde{a}_s.$$

От ротацията на това уравнение получаваме уравнение за определянето на коефициента x:

(34) $$\varphi_{s|.}^{\ s} = -a^s x_s + x a_{s|.}^{\ s} + \left(\frac{a_{k|.}^{\ k}}{2\Delta_1 a}\right)^s \widetilde{a}_s + \frac{a_{k|.}^{\ k}}{2\Delta_1 a} \widetilde{a}_{s|.}^{\ s} = 0.$$

Второ уравнение за определянето на коефициента x получаваме, като заместим φ_s от (33) в първото уравнение на (31):

(35) $$a^s x_s + (2-x) a_{s|.}^{\ s} + a^{is} \left[\left(\frac{a_{k|.}^{\ k}}{2\Delta_1 a}\right)_i \widetilde{a}_s + \frac{a_{k|.}^{\ k}}{2\Delta_1 a} \widetilde{a}_{i|s}\right] = 0.$$

Като съберем уравнения (34) и (35), намираме

(36) $$2a_{s}^{\ s} + (\varepsilon^{is} + a^{is}) \left[\widetilde{a}_i \left(\frac{a_{k|.}^{\ k}}{2\Delta_1 a}\right)_s + \widetilde{a}_{i|s} \frac{a_{k|.}^{\ k}}{2\Delta_1 a}\right] = 0,$$

което, ако отчетем, че $a^{is} = 2v^{(i} W^{s)}$ и $\varepsilon^{is} = 2v^{[i} W^{s]}$, можем да напишем още във вида

(37) $$a_{s|.}^{\ s} + v^i W^s \left[\widetilde{a}_i \left(\frac{a_{k|.}^{\ k}}{2\Delta_1 a}\right)_s + \widetilde{a}_{i|s} \frac{a_{k|.}^{\ k}}{2\Delta_1 a}\right] = 0.$$

Следователно, ако уравнение (37) е изпълнено, всяко решение за x на (34) или (35), заместено в (33), определя за φ напълно интегрируема система в пълни диференциали, чието решение зависи от произволна константа.

Така получаваме, че всяка ортогонална полугеодезична мрежа във V_2, чиито чебишовски вектор и направляващи вектори удовлетворяват (37), допуска ∞^1 аполярни на нея и аполярни помежду си двойки кодациеви мрежи.

Условие (37) дава инвариантна характеристика за такава мрежа.

Специален случай получаваме, ако приемем, че V_2 е геометрия на единичната сфера, т. е. гаусовата ѝ кривина е $K=1$.

Ако приемем ортогоналната мрежа a_{is} за координатна на сферата, то линейният ѝ елемент има вида

(38) $$ds^2=A^2du^2+dv^2.$$

От това, че $K=1$, получаваме

(39) $$A_{vv}+A=0,$$

където $A_{vv}=\partial^2 A/\partial v^2$. От (38) намираме:

координатите на направляващите вектори на мрежата

$$v^i\left\{\frac{1}{A},\ 0\right\},\quad w^i\{0,\ 1\};$$

координатите на метричния тензор и версора

$$g_{11}=A^2,\ g_{12}=0,\ g_{22}=1,$$

$$g_1^1=g_2^2=0,\ g_2^1=\frac{1}{A},\ g_1^2=-A;$$

координатите на чебишовския вектор и неговия допълнителен

$$a_1=0,\ a_2=-\frac{A_v}{A},\ \tilde{a}_1=A_v,\ \ \tilde{a}_2=0.$$

С помощта на така получените координати на чебишовския вектор и направляващите вектори на мрежата от (37) получаваме второ уравнение за коефициента A:

(40) $$AA_v^2A_{uv}-A_uA_v^3+A^3A_{uv}-A^2A_uA_v=0,$$

което може да се запише още във вида

$$(AA_{uv}-A_uA_v)(A_v^2+A^2)=0.$$

Тъй като $A\neq 0$, от това уравнение следва, че

(41) $$AA_{uv}-A_uA_v=0.$$

Общото решение на (39) има вида

(42) $$A=C_1(u)\cos v+C_2(u)\sin v,$$

където $C_1(u)$ и $C_2(u)$ са произволни функции на аргумента u. Като заместим (42) в (41), намираме

$$C_1C_2'-C_1'C_2=0$$

или

$$\frac{C_1}{C_2}=\mathrm{const}.$$

Следователно

(43) $$C_1=pU(u),\ C_2=qU(u),$$

където $U(u)$ е произволна функция от аргумента u, а p и q са произволни постоянни.

Ако положим $p=k\cos v_0$ и $q=k\sin v_0$, получаваме

$$A=kU(u)\cos(v-v_0),$$

а следователно линейният елемент (38) ще бъде

$$ds^2=k^2U^2(u)\cos^2(v-v_0)\,du^2+dv^2.$$

Изменяйки по подходящ начин параметрите u и v, линейният елемент може да се напише във вида

$$ds^2=\cos^2 v\,du^2+dv^2. \tag{44}$$

Следователно, ако дадена ортогонална полугеодезична мрежа на сферата допуска ∞^1 аполярни на нея и аполярни помежду си двойки кодациеви мрежи, тя съвпада с географската мрежа на сферата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шуликовский, В. И. Классическая дифференциальная геометрия. Москва, 1963.
2. Шуликовский, В. И. Проективная теория сетей. Казань, 1964.
3. Норден, А. П. Теория поверхностей. Москва, 1956.

Постъпила на 1. VI. 1971 г.

О СФЕРИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Г. Марков

(*Резюме*)

Задача нахождения изотермических поверхностей по данному сферическому отображению сети их линий кривизны является частным случаем следующей более общей задачи: в произвольном V_2 найти такую ортогональную сеть, которая допускает две аполярных с ней и аполярных между собой кодацциевых сети.

Найдена инвариантная характеристика такой ортогональной сети, а также исследованы возникающие частные случаи.

Исследован случай, когда ортогональная сеть полугеодезична и в частности доказано, что ортогональная сеть сферы, допускающая ∞^1 аполярных с ней и аполярных между собой пар кодацциевых сетей, совпадает с географической сетью на сфере.

SUR LA REPRESENTATION SPHERIQUE DES SURFACES ISOTHERMIQUES

G. Markov

(*Résumé*)

Le problème de trouver des surfaces isothermiques d'après la représentation sphérique donnée du réseau de leurs lignes de courbure apparaît comme un cas particulier du problème suivant plus général: trouver dans un arbitraire V_2 un réseau orthogonal qui admette deux réseaux de Codazzi qui sont apolaires à lui et apolaires entre eux.

On a trouvé une caractéristique invariante pour un tel réseau orthogonal, et on a de même examiné les cas particuliers qui sont apparus.

On a examiné le cas où le réseau orthogonal est semi-géodésique et en particulier on démontre que le réseau orthogonal semi-géodésique de la sphère admettant ∞^1 réseaux de Codazzi apolaires à lui et apolaires entre eux, coïncide avec le réseau géographique de la sphère.