БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ВЪРХУ ВЕКОВИТЕ ЧЛЕНОВЕ НА ЕДИН КЛАС РЕШЕНИЯ ПРИ ПОЛИНОМНИ НЕЛИНЕЙНОСТИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН НА АВТОНОМНА СИСТЕМА ОТ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Маунг Таунг Мийнт

В настоящата работа се доказва, че коефициентите пред вековите членове, които участвуват във функциите $\xi_{i,1}(\tau)$ от [1], се анулират. По такъв начин ще бъде потвърден методът за конструиране на периодичните решения и техните периоди на системи диференциални уравнения

$$\psi = c\psi + \lambda^2 f(\lambda^2, \psi, \dot{\psi}). \tag{1}$$

Функциите $\varepsilon_{i,1}(\tau)$ имат вида

$$\varepsilon_{i,1}(\tau) = Q_i(\tau) + \bar{\varepsilon}_{i,1}(\tau), \tag{2}$$

където са валидни следните формули:

$$Q_i(\tau) = \frac{\lambda_{1i}}{\Delta k k_2}\int_0^\tau [\lambda_{21} g_{21}(u) - \lambda_{22} g_{11}(u)] \sin k k_2(u-\tau)\, du \tag{3}$$

$$+ \frac{\lambda_{2i}}{\Delta k_2}\int_0^\tau [\lambda_{12} g_{11}(u) - \lambda_{11} g_{21}(u)] \sin k_2(u-\tau)\, du,$$

$$\bar{\varepsilon}_{i,1}(\tau) = \frac{2\lambda_{1i} a_1}{\Delta k k_2}\int_0^\tau [\lambda_{21}(c_{21}\Psi_{10} + c_{22}\Psi_{20}) - \lambda_{22}(c_{11}\Psi_{10} + c_{12}\Psi_{20})] \sin k k_2(u-\tau)\, du \tag{4}$$

$$+ \frac{2\lambda_{2i} a_1}{\Delta k_2}\int_0^\tau [\lambda_{12}(c_{11}\Psi_{10} + c_{12}\Psi_{20}) - \lambda_{11}(c_{21}\Psi_{10} + c_{22}\Psi_{20})] \sin k_2(u-\tau)\, du.$$

Тук важат релациите

$$a_1 = \frac{Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)}{\pi(s_i - \varepsilon k r_i)}, \qquad i = 1, 2; \tag{5}$$

$$(c_{11} + k^2 k_2^2)\lambda_{11} + c_{12}\lambda_{12} = 0, \quad c_{21}\lambda_{11} + (c_{22} + k^2 k_2^2)\lambda_{12} = 0; \tag{6}$$

$$(7) \qquad (c_{11}+k_2^2)\lambda_{21}+c_{12}\lambda_{22}=0, \qquad c_{21}\lambda_{21}+(c_{22}+k_2^2)\lambda_{22}=0;$$

$$(8) \qquad \begin{array}{lll} \text{I.} & r_i=\frac{1}{kk_2}\lambda_{1i}, & s_i=\frac{kN}{k_2}\lambda_{2i}; \\ \text{II.} & r_i=\frac{N}{k_2}\lambda_{1i}, & s_i=\frac{1}{k_2}\lambda_{2i}; \\ \text{III.} & r_i=\frac{1}{kk_2}\lambda_{1i}, & s_i=\frac{N}{kk_2}\lambda_{2i}; \\ \text{IV.} & r_i=\frac{N}{k^2k_2}\lambda_{1i}, & s_i=\frac{1}{k_2}\lambda_{2i}; \end{array}$$

$$(9) \qquad \Psi_{i0}(\tau)=r_i\sin kk_2\tau+s_i\sin k_2\tau, \quad i=1, 2,$$

и условията за периодичност

$$(10) \qquad (\varepsilon kr_1-s_1)Q_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)-(\varepsilon kr_2-s_2)Q_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=0.$$

Подробно описание и доказателство на горните формули и условия може да се намери в [1].

Сега ще използваме релациите (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), за да докажем анулирането на коефициентите пред вековите членове, които пречат на конструирането на периодичните решения и периодите им в системата (1).

Ако използуваме свойствата за полунечетност

$$(11) \qquad g_{j\gamma}(-\psi, \dot{\psi})=-g_{j\gamma}(\psi, \dot{\psi}),$$

намираме функциите $g_{i,1}$ в полиномен вид:

$$(12) \qquad \begin{aligned} g_{11}(u)&=a_{13}\psi_1\dot{\psi}_1+a_{14}\psi_1\psi_2+a_{23}\psi_2\psi_1+a_{24}\psi_2\dot{\psi}_2+a_1\psi_1+a_2\psi_2, \\ g_{21}(u)&=b_{13}\psi_1\dot{\psi}_1+b_{14}\psi_1\psi_2+b_{23}\psi_2\psi_1+b_{24}\psi_2\psi_2+b_1\psi_1+b_2\psi_2. \end{aligned}$$

Функциите $Q_i(\tau)$ могат да се намерят от формулите (3) и равенствата (9) и (12). От $Q_i(\tau)$ следва

$$(13) \qquad Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=(A-B)\frac{\pi}{k_2},$$

където $k=2$ и

$$(14) \qquad \begin{aligned} A&=\frac{\lambda_{1i}}{8\Delta k_2}[\lambda_{21}(b_{13}s_1^2+b_{14}s_1s_2+b_{23}s_1s_2+b_{24}s_2^2)-\lambda_{22}(a_{13}s_1^2+a_{14}s_1s_2+a_{23}s_1s_2+a_{24}s_2^2)] \\ &\quad+\frac{\lambda_{1i}}{4\Delta k_2}[\lambda_{21}(b_1r_1+b_2r_2)-\lambda_{22}(a_1r_1+a_2r_2)], \\ B&=\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta}[\lambda_{12}(a_{13}r_1s_1+a_{14}r_2s_1+a_{23}r_1s_2+a_{24}r_2s_2)-\lambda_{11}(b_{13}r_1s_1+b_{14}r_2s_1+b_{23}r_1s_2+ \\ &\quad b_{24}r_2s_2)]-\frac{\lambda_{2i}}{4\Delta}[\lambda_{12}(a_{13}r_1s_1+a_{14}r_1s_2+a_{23}r_2s_1+a_{24}r_2s_2)-\lambda_{11}(b_{13}r_1s_1+b_{14}r_1s_2+ \\ &\quad +b_{23}r_2s_1+b_{24}r_2s_2)]-\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta k_2}[\lambda_{12}(a_1s_1+a_2s_2)-\lambda_{11}(b_1s_1+b_2s_2)]. \end{aligned}$$

Ако приложим (13) и (8) и условието (10), намираме условието за периодичност за случай I:

$$A2N\lambda_{2i} - B\lambda_{1i} = 0. \tag{15}$$

По аналогия намираме условието за периодичност за случай III:

$$AN\lambda_{2i} - B2\lambda_{1i} = 0. \tag{16}$$

Сега ще пресметнем коефициента a_1 от формула (5). Ако заместим (8) и (13) в (5), намираме за случай I

$$a_1 = \frac{A-B}{2N\lambda_{2i} - \lambda_{1i}}. \tag{17}$$

По аналогичен начин намираме и за случай III

$$a_1 = \frac{A-B}{\frac{N}{2}\lambda_{2i} - \lambda_{1i}} \tag{18}$$

За намирането на втория член $\bar{\varepsilon}_{i,1}(\tau)$ от равенствата (2) могат да се използват формулите и релациите (4), (6) и (7), (9).

Ако положим намерените функции $Q_i(\tau)$ и $\bar{\varepsilon}_{i,1}(\tau)$ в равенствата (2), намираме за случай I

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,1}(\tau) &= A\tau\cos 2k_2\tau + B\tau\cos k_2\tau + C_1\sin 2k_2\tau\cos k_2\tau + C_2\sin 2k_2\tau\cos k_2\tau \\ &+ C_3\sin k_2\tau\cos 2k_2\tau + C_4\sin k_2\tau + C_5\sin 2k_2\tau + C_6\sin 3k_2\tau + C_7\sin 4k_2\tau \\ &+ \left(\tau\cos 2k_2\tau - \frac{1}{2k_2}\sin 2k_2\tau\right)\lambda_{1i}a_1 + \left(\tau\cos k_2\tau - \frac{1}{k_2}\sin k_2\tau\right)2N\lambda_{2i}a_1, \end{aligned} \tag{19}$$

където $C_1, C_2, \ldots, C_7$ са константи и могат да се намерят, а A и B се дават от равенствата (14).

Аналогично намираме и за случай III

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,1}(\tau) &= A\tau\cos 2k_2\tau + B\tau\cos k_2\tau + (C_1 + C_2)\sin 2k_2\tau\cos k_2\tau \\ &+ C_3\sin k_2\tau\cos 2k_2\tau + C_4\sin k_2\tau + C_5\sin 2k_2\tau + C_6\sin 3k_2\tau \\ &+ C_7\sin 4k_2\tau + \left(\tau\cos 2k_2\tau - \frac{1}{2k_2}\sin 2k_2\tau\right)\lambda_{1i}a_1 \\ &+ \frac{1}{2}N\lambda_{2i}a_1\left(\tau\cos k_2\tau - \frac{1}{k_2}\sin k_2\tau\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Сега ще анулираме коефициентите пред вековите членове $\tau\cos 2k_2\tau$ и $\tau\cos k_2\tau$ за случай I.

От (17) и (19) намираме коефициента пред вековия член $\tau\cos 2k_2\tau$:

$$A + \lambda_{1i}a_1 = \frac{A2N\lambda_{2i} - B\lambda_{1i}}{2N\lambda_{2i} - \lambda_{1i}} \tag{21}$$

Ако приложим намереното по-рано от нас условие (15), лесно можем да установим, че горното равенство е равно на нула.

По аналогичен начин намираме за вековия член $\tau\cos k_2\tau$

$$2N\lambda_{2i}a_1 + B = \frac{1}{2N\lambda_{2i} - \lambda_{1i}}(A2N\lambda_{2i} - B\lambda_{1i}). \tag{22}$$

Използувайки отново условието за периодичност (15), намираме, че дясната страна на равенството (22) е равна на нула.

Тук ще разгледаме случай III за коефициента пред вековия член $\tau \cos 2k_2\tau$; тогава от равенства (18) и (20) намираме

$$A+\lambda_{1i}a_1-\frac{1}{N\lambda_{2i}-2\lambda_{1i}}(AN\lambda_{2i}-B2\lambda_{1i}), \tag{23}$$

стойността на които е равна на нула по силата на намереното от нас условие (16).

По аналогия намираме коефициента пред вековия член $\tau \cos k_2\tau$:

$$B+\frac{1}{2}N\lambda_{2i}a_1-\frac{1}{N\lambda_{2i}-2\lambda_{1i}}(AN\lambda_{2i}-2B\lambda_{1i}). \tag{24}$$

Ако приложим условието за периодичност (16) към (24), можем да установим, че дясната страна на (24) е равна на нула.

Дотук е доказано, че коефициентите пред вековите членове $\tau \cos 2k_2\tau$ и $\tau \cos k_2\tau$ от функцията $\varepsilon_{i,1}(\tau)$ се анулират при резонансна характеристика $k=2$ за случаите I и III.

По същия начин могат да се докажат останалите случаи II и IV за полиномите от втора степен при $k=2$.

По-точно могат да се анулират коефициентите пред вековите членове, които се появиха във функцията $\varepsilon_{i,m}(\tau)$ при конструирането на периодични решения и периодите им в системата (1) за полиномни нелинейности от различните степени и за различните резонансни характеристики.

С други думи, методът за конструирането на периодични решения и техните периоди от [1] е напълно обоснован.

Накрая благодаря на проф. Сп. Манолов за поставената тема и дадените консултации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Манолов, Сп. Периодични решения при една класа от автономни нелинейни системи и някои приложения. — Годишник на ВТУЗ, Математика, **2**, 1967, кн. 2, 69—104.
2. Брадистилов, Г. Съществуване и свойства на периодични движения на последователно свързани физични махала в една равнина. Годишник на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **38**, кн. 1, 249—278.
3. Брадистилов, Г. Върху периодични движения на двойно махало, лежащо във вертикална равнина при кратни корени на характеристичното уравнение. — Годишник на МЕИ, **2**, 1955, 1—13.
4. Брадистилов, Г. Върху съществуването на периодични движения на двойното физично махало в равнината при кратни корени на характеристичното уравнение. — Известия на Мат. инст. на БАН, **2**, 1957, кн. 2, 73—85.
5. Манолов, Сп. Върху съществуването и построяването на периодични решения на една класа от нелинейни автономни системи от диференциални уравнения. — Годишник на Соф. унив., Мат. фак., **57**, 265—280.
6. Манолов. Сп. Особый случай существования малых периодических движений двух маятников, подверженных равномерному вращению. — Прикл. матем. и мех., **22**, 1958, 139—142.
7. Манолов, Сп. Върху периодичните решения на един клас от автономни системи с малък параметър при нелинейност от даден вид. —Известия на Мат. инст. на БАН, **10**, 1969, 169—182.

8. Манолов, Сп., Някои случаи за съществуване и конструиране на периодични решения на един клас от нелинейни системи с малък параметър, свързани с полиноми от определен вид. — Известия на Мат. инст. на БАН, 11, 1970, 197 212.
9. Чурин, Ю. В. О поведении периодических решений системы дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными правыми частями. — Дифф. уравнения, 4, 1968, № 10, 1821—1834.

Постъпила на 21. VI. 1971 г.

О ВЕКОВЫХ ЧЛЕНАХ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЯХ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Маунг Таунг Мийнт

(*Резюме*)

Показана корректность метода С. Манолова построения периодичных решений системы двух уравнений

$$\dot{\psi} = C\psi + \lambda^2 f(\lambda^2, \psi, \dot{\psi}),$$

где C является реальной 2×2 матрицей в случае резонанса. Устанавливается, что коэффициенты вековых членов полученного решения равны нулю.

ON THE SECULAR TERMS OF A CLASS OF SOLUTIONS OF AN AUTONOMIC SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN CASE OF POLYNOMIAL NON-LINEARITIES OF SECOND DEGREE

Maung Taung Meent

(*Summary*)

The correctness of the method of S. Manolov for finding the periodic solutions of a system of two equations

$$\dot{\psi} = C\psi + \lambda^2 f(\lambda^2, \psi, \dot{\psi}),$$

where C is a real 2×2 matrix in case of a resonance, is shown. More precisely it is established that the coefficients of the secular terms in the solution obtained are equal to zero.