БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ЗА КОНФОРМНИТЕ СВОЙСТВА НА АНАЛИТИЧНИТЕ КВАТЕРНИОННИ ИЗОБРАЖЕНИЯ

М. Власакова

Алгебрата (хиперкомплексната система) от ранг 4 над полето на реалните числа със закон на умножение, зададен с таблицата

	i_0	i_1	i_2	i_3
i_0	i_0	i_1	i_2	i_3
i_1	i_1	$-i_0$	i_3	$-i_2$
i_2	i_2	$-i_3$	$-i_0$	i_1
i_3	i_3	i_2	$-i_1$	$-i_0$

се нарича алгебра на реалните кватерниони (или просто алгебра на кватернионите) [1]; елементите ѝ наричаме кватерниони.

Алгебрата на кватернионите е асоциативна, проста и некомутативна, и притежава главна единица.

Приети са следните означения за единиците: $i_0=1$ — главната единица, $i_1=i$, $i_2=j$, $i_3=k$. Базата 1, i, j, k ще наричаме канонична; съответно алгебрата означаваме с $R(i, j, k)$.

Всеки елемент $A \in R(i, j, k)$ при посочения базис има вида

$$A = a + ib + jc + kd; \tag{1}$$

$\bar{A} = a - ib - jc - kd$ се нарича спрегнат или конюгован кватернион [1] на кватерниона A.

От закона за умножение следва, че $A\bar{A}=\bar{A}A=a^2+b^2+c^2+d^2$. Реалното неотрицателно число $(A\bar{A})=a^2+b^2+c^2+d^2$ се нарича норма на кватерниона A (или на $\bar{A}$).

Алгебрата на кватернионите може да се разглежда като 4-мерно векторно пространство с дефинирана операция умножение, кватернионите като вектори, а нормата на кватерниона като скаларен квадрат на вектор.

Известно е, че това ни дава възможност да въведем евклидова метрика във векторното пространство [2], въз основа на което скаларно произведение наричаме израза

$$(x, y)=\frac{1}{2}[(x, y)+(y, y)-(x-y, x-y)],$$

а за ъгъла между два вектора (кватерниона) получаваме

$$\cos(x, y)=\frac{(x, y)}{\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y, y)}}. \tag{2}$$

Представяне на една алгебра A_m се нарича всеки хомоморфизъм на алгебрата A_m в матричната алгебра $L(B_n)$ в n-мерното векторно пространство B_n.

Ако измеренията на алгебрата A_m и векторното пространство са равни, то представянето е регулярно. Оказва се, че всяка асоциативна и унитарна алгебра има две регулярни представяния, които са изоморфни на A_m. Тези две регулярни представяния се задават чрез следните формули:

$\underset{i}{R}{}_j^k = C_{ik}^j$ — първо регулярно представяне;

$\underset{i}{S}{}_j^k = C_{ji}^k$ — второ регулярно представяне.

И така за алгебрата на кватернионите $R(i, j, k)$ при каноническия базис за елемента (1) съществува изоморфизъм; за първото регулярно представяне

$$a+ib+jc+ud\sim\left(\begin{array}{cc|cc} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ \hline c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{array}\right)\equiv R \tag{3}$$

и за второто регулярно представяне

$$a+ib+jc+ud\sim\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ \hline -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{array}\right)\equiv S. \tag{4}$$

С матричната алгебра S е свързано и понятието първа производна алгебра D на алгебрата S. Това е алгебрата от най-малък ред, съдържаща S и $\bar{S}=R^T$ сред своите подалгебри. Като такава алгебра може да се вземе матричната алгебра, породена от матриците $(\underset{i}{S}\underset{j}{\bar{S}})$ [3].

Матрицата на алгебрата D има вида

$$D=(a_i^j),$$

където

$$\begin{array}{ll} a_1^1=aa_1-bb_1-cc_1-dd_1, & a_2^1=ab_1+ba_1-cd_1+dc_1, \\ a_1^2=-ba_1-ab_1-cd_1+dc_1, & a_2^2=-bb_1+aa_1+cc_1+dd_1, \\ a_1^3=-ca_1-db_1-ac_1+bd_1, & a_2^3=-cb_1+da_1-ad_1-bc_1, \\ a_1^4=-da_1+cb_1-bc_1-ad_1, & a_2^4=db_1-ca_1-bd_1+ac_1, \\ a_3^1=ac_1+bd_1+ca_1-db_1, & a_4^1=ad_1-bc_1+cb_1+da_1, \end{array} \tag{5}$$

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
a_3^2 &= -bc_1+ad_1-da_1-cb_1, & a_4^2 &= ca_1-bd_1-ac_1-db_1,\\
a_3^3 &= -cc_1+dd_1+aa_1+bb_1, & a_4^3 &= -d_1c-dc_1+ab_1-ba_1,\\
a_3^4 &= -dc_1-cd_1+ba_1-ab_1, & a_4^4 &= -dd_1+aa_1+bb_1+cc_1,
\end{aligned}
$$

Между елементите на матрицата (5) съществуват следните девет зависимости:

$$
(6)\qquad
\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{4}(a_1^j)^2=\sum_{j=1}^{4}(a_2^j)^2=\sum_{j=1}^{4}(a_3^j)^2=\sum_{j=1}^{4}(a_4^j)^2,\\
\sum_{j=1}^{4}a_1^ja_2^j=\sum_{j=1}^{4}a_1^ja_3^j=\sum_{j=1}^{4}a_1^ja_4^j=\sum_{j=1}^{4}a_2^ja_3^j=\sum_{j=1}^{4}a_2^ja_4^j=\sum_{j=1}^{4}a_3^ja_4^j,
\end{gathered}
$$

където j е номер на ред, а i е номер на стълб.

Ако умножим две матрици, които удовлетворяват условията (6), получава се матрица, която също удовлетворява условията (6). Следователно матрицата (5) действително определя алгебра, която се явява подалгебра на пълната матрична алгебра от ред 16. Вследствие съотношенията (6) рангът на матрицата D е 7.

Зависимостите (6) са изпълнени както по редове, така и по стълбове за матрицата D, т. е. налице са същите съотношения и за транспонираната на D матрица.

§ 1. КОНФОРМНО ИЗОБРАЖЕНИЕ НАД АЛГЕБРАТА НА КВАТЕРНИОНИТЕ

В алгебрата $R(i, j, k)$ да разгледаме

$$F=f^1+if^2+jf^3+kf^4,\quad X=x^1+ix^2+jx^3+kx^4,$$

където $f^i=f^i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ и $f^i\in C^\infty$.

Така определихме функцията $F=F(X)$ с аргумент и стойност в $R(i, j, k)$.

Функцията $F(X)$ се нарича аналитична в смисъл на Ward, когато якобиевата матрица $(\partial f^i/\partial x^k)$ принадлежи на матричното представяне на първата производна алгебра D на алгебрата S [4]*.

Да разгледаме в $R(i, j, k)$ областите M и $\check{M}$ (в частност $M\equiv\check{M}\equiv R(i, j, k)$).

Нека изображението P на M в $\check{M}$ се задава с функцията $F(X)$:

$$
\begin{aligned}
P:\quad & M\to\check{M},\\
& X\to F(X).
\end{aligned}
$$

Ще докажем следната

Теорема 1. Необходимото и достатъчно условие неизроденото преобразование P да е конформно е функцията $F(X)$ да е аналитична в смисъл на Ward.

а) Достатъчност:

Нека в точка $X\in M\subset R(i, j, k)$ разгледаме произволните линии

$$c: x^i = x^i(u); \quad l: x^i = x^i(v), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Тангенциалният вектор v в точка X към линията c ще има координати $v(v^1, v^2, v^3, v^4)$, като $v^i = dx^i/du$, $i = 1, 2, 3, 4$. Аналогично получаваме и тангенциалния вектор w към линията l в точка $X: w^i = \delta x^i/\delta v$, където δ е символ на диференциране по направление на втората крива.

Нека точка $X \in M$ чрез P отива в точка $\check{X} \in \check{M}$, т. е. $\check{x}^i = f^i(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Следователно образите $\check{c}$ и $\check{l}$ на линиите c и l в $\check{M}$ ще минават през точка $\check{X}$ и се задават с уравненията

$$\check{c}: \check{x}^i = \check{x}^i(u); \quad \check{l}: \check{x}^i = \check{x}^i(v), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Така за $\check{v}$ и $\check{w}$ тангенциалните вектори към $\check{c}$ и $\check{l}$ в точка $\check{X}$ — получаваме

$$\check{v}^i = \frac{d\check{x}^i}{du} = \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{du} = f^i_k v^k,$$

$$\check{w}^i = \frac{\delta \check{x}^i}{\delta v} = \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\delta x^k}{\delta v} = f^i_k w^k,$$

където $\partial f^i/\partial x^k$ е означено с f^i_k. Тези формули показват, че пространството от направленията в точка X се изобразява в пространството от направленията в точка $\check{X} \in \check{M}$.

Според (2) изображението P е конформно, ако между тези направления е изпълнено съотношението

$$(7) \qquad \frac{(vw)}{\sqrt{(vv)}\sqrt{(ww)}} = \frac{(\check{v}\check{w})}{\sqrt{(\check{v}\check{v})}\sqrt{(\check{w}\check{w})}}.$$

Да изразим (7) чрез координатите на векторите спрямо каноническия базис:

$$v = v^1 + iv^2 + jv^3 + kv^4,$$
$$w = w^1 + iw^2 + jw^3 + kw^4,$$
$$\check{v} = f^1_k v^k + if^2_k v^k + jf^3_k v^k + kf^4_k v^k,$$
$$\check{w} = f^1_k w^k + if^2_k w^k + jf^3_k w^k + kf^4_k w^k.$$

Като заместим в (7) и преобразуваме, равенството приема вида

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} v^i w^i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(v^i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(w^i)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{4} f^i_k v^k f^i_l w^l}{\sqrt{\sum (f^i_k v^k)^2}\sqrt{\sum (f^i_k w^k)^2}}.$$

Оттук получаваме

$$(8) \qquad \left[\sum_{i=1}^{4}(v^i w^i)^2\right]^2 \sum (f^i_k v^k)^2 \sum (f^i_k w^k)^2 = \left[\sum f^i_k v^k f^i_l w^l\right]^2 \sum (v^i)^2 \sum (w^i)^2,$$

тъй като P е неизродено, т. е.

$$\sum (f_k^i v^k)^2 \neq 0, \quad \sum (f_l^i w^l)^2 = 0.$$

От (8) чрез подходящо групиране получаваме

$$(9) \quad \left(\sum_{i=1}^4 v^i w^i\right)^2 \Big[\sum_{i=1}^4 (f_1^i)^2 (v')^2 + \sum_{i=1}^4 (f_2^i)^2 (v^2)^2 + \sum (f_3^i)^2 (v^3)^2 + \sum (f_4^i)^2 (v^4)^2$$

$$+ 2 \sum f_1^i f_2^i v^1 v^2 + 2 \sum_{i=1}^4 f_1^i f_3^i v^1 v^3 + 2 \sum f_1^i f_4^i v^1 v^4 + 2 \sum f_2^i f_3^i v^2 v^3$$

$$+ 2 \sum f_2^i f_4^i v^2 v^4 + 2 \sum f_3^i f_4^i v^3 v^4 \Big] \Big[\sum (f_1^i)^2 (w^1)^2 + \sum (f_2^i)^2 (w^2)^2$$

$$\sum (f_3^i)^2 (w^3)^2 + \sum (f_4^i)^2 (w^4)^2 + 2 \sum f_1^i f_2^i w^1 w^2 + 2 \sum f_1^i f_3^i w^1 w^3$$

$$+ 2 \sum f_1^i f_4^i w^1 w^4 + 2 \sum f_2^i f_3^i w^2 w^3 + 2 \sum f_2^i f_4^i w^2 w^4 + 2 \sum f_3^i f_4^i w^3 w^4 \Big]$$

$$= \Big[\sum (f_1^i)^2 v' w^1 + \sum (f_2^i)^2 v^2 w^2 + \sum (f_3^i)^2 v^3 w^3$$

$$+ \sum (f_4^i)^2 v^4 w^4 + \sum f_1^i f_2^i (v' w^2 + v^2 w') + \sum f_1^i f_3^i (v' w^3 + v^3 w')$$

$$+ \sum f_1^i f_4^i (v' w^4 + w' v^4) + \sum f_2^i f_3^i (v^2 w^3 + v^3 w^2) \sum f_2^i f_4^i (v^2 w^4 + v^4 w^2)$$

$$+ \sum f_3^i f_4^i (v^3 w^4 + v^4 w^3) \Big]^2 \sum (v^i)^2 \sum (w^i)^2.$$

Ако функцията $F(X)$ е аналитична, то якобиевата матрица $(\partial f^i / \partial x^k)$ въз основа на определението ще има вида (5), т. е. ще са изпълнени условията (6), които за (f_k^i) приемат вида

$$(10) \quad \sum_{i=1}^4 (f_1^i)^2 = \sum (f_2^i)^2 = \sum (f_3^i)^2 = \sum (f_4^i)^2,$$

$$(11) \quad \begin{aligned} &\sum f_1^i f_2^i = 0, \quad \sum f_1^i f_4^i = 0, \quad \sum f_2^i f_4^i = 0, \\ &\sum f_1^i f_3^i = 0, \quad \sum f_2^i f_3^i = 0, \quad \sum f_3^i f_4^i = 0. \end{aligned}$$

Заместваме (10) и (11) в лявата и дясната част на (9) и получаваме тъждество. Следователно, ако $F(X)$ е аналитична в смисъл на Ward, P е конформно преобразование.

б) Необходимост:

Нека P е конформно преобразование, т. е. запазва ъглите между кои да са две направления от областта M и съответните им от $\check{M}$.

Да разгледаме например

$$v(1, 0, 0, 0) \quad w(0, 1, 0, 0)$$

и съответните им

$$\check{v}(f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4), \quad \check{w}(f_2^1, f_2^2, f_2^3, f_2^4).$$

Равенство (7) приема вида

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{4} v^i w^i \qquad \frac{\sum f_1^i v' f_2^i v^2}{\sqrt{\sum (f_1^i v^1)^2}\sqrt{\sum (f_2^i v^2)^2}}$$

Тъй като $\sum_{i=1}^{4} v^i w^i = 0$, от (12) получаваме

$$\sum_{i=1}^{4} f_1^i f_2^i = 0.$$

Ако разгледаме всевъзможните комбинации на единичните вектори, ще получим останалите пет уравнения от (11).

Да разгледаме направленията

$$v(1, 0, 0, 0), \quad w(1, 1, 0, 0)$$

и съответните им чрез преобразованието P

$$\check{v}(f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4), \quad \check{w}(f_1^1+f_2^1, f_1^2+f_2^2, f_1^3+f_2^3, f_1^4+f_2^4).$$

Като заместим в (7), получаваме

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} v^i w^i}{\sqrt{\sum (v^i)^2}\sqrt{\sum (w^i)^2}} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{4} f_1^i v^1 f_l^i w^l}{\sqrt{\sum (f_1^i v^1)^2}\sqrt{\sum (f_l^i w^l)^2}}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sum f_1^i (f_1^i + f_2^i)}{\sqrt{\sum (f_1^i)^2}\sqrt{\sum (f_1^i + f_2^i)^2}} = \frac{\sum (f_1^i)^2 + \sum f_1^i f_2^i}{\sqrt{\sum (f_1^i)^2}\sqrt{\sum (f_1^i)^2 + \sum (f_2^i)^2 + 2\sum f_1^i f_2^i}}$$

$$\frac{\sum (f_1^i)^2}{\sqrt{\sum (f_1^i)^2}\sqrt{\sum (f_1^i)^2 + \sum (f_2^i)^2}} \qquad 2\sum \left[(f_1^i)^2 \right]^2$$

$$\sum (f_1^i)^2 \left[(f_1^i)^2 + \sum (f_2^i)^2 \right].$$

Тук $\sum (f_1^i)^2 \quad 0$, тъй като преобразованието P е неизродено. Тогава

$$\sum_{i=1}^{4} (f_1^i)^2 \quad \sum_{i=1}^{4} (f_2^i)^2.$$

Аналогично се получават и останалите уравнения от (10), т. е.

$$\sum_{i=1}^{4} (f_1^i)^2 = \sum_{i=1}^{4} (f_2^i)^2 = \sum (f_3^i)^2 \quad \sum (f_1^i)^2.$$

Но според определението следва, че $F(X)$ е аналитична, щом са изпълнени условията (6), т. е. (10) и (11).

§ 2. ГЕОМЕТРИЧНИ СВОЙСТВА НА ИЗОБРАЖЕНИЕТО, ОПРЕДЕЛЕНО ЧРЕЗ НАПЪЛНО ДИФЕРЕНЦИРУЕМА ФУНКЦИЯ

Ще използваме следната дефиниция на Spampinato [5]* Функцията $F(X)$ се нарича напълно диференцируема отляво (или отдясно), ако производната $(\partial f^i/\partial x^k)$ на аналитичната в смисъл на Ward функция $F(X)$ принадлежи на алгебрата S (или $\bar{S}$).

В алгебрата на кватернионите условието за пълна диференцируемост отляво е равносилно на следните равенства:

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial f^1}{\partial x^1}=\frac{\partial f^2}{\partial x^2}=\frac{\partial f^3}{\partial x^3}=\frac{\partial f^1}{\partial x^1},\\
&\frac{\partial f^1}{\partial x^2}=-\frac{\partial f^2}{\partial x^1}=\frac{\partial f^1}{\partial x^3}=-\frac{\partial f^3}{\partial x^1},\\
&\frac{\partial f^1}{\partial x^3}=-\frac{\partial f^3}{\partial x^1}=\frac{\partial f^2}{\partial x^1}=-\frac{\partial f^1}{\partial x^2},\\
&\frac{\partial f^1}{\partial x^1}=-\frac{\partial f^1}{\partial x^1}=\frac{\partial f^3}{\partial x^2}=-\frac{\partial f^2}{\partial x^3}.
\end{aligned}
$$

За дясна диференцируемост имаме

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial f^1}{\partial x^1}=\frac{\partial f^2}{\partial x^2}=\frac{\partial f^3}{\partial x^3}=\frac{\partial f^1}{\partial x^4},\\
&\frac{\partial f^1}{\partial x^2}=-\frac{\partial f^2}{\partial x^1}=-\frac{\partial f^1}{\partial x^3}=\frac{\partial f^3}{\partial x^1},\\
&\frac{\partial f^1}{\partial x^3}=-\frac{\partial f^3}{\partial x^1}=-\frac{\partial f^2}{\partial x^1}=\frac{\partial f^1}{\partial x^2},\\
&\frac{\partial f^1}{\partial x^4}=-\frac{\partial f^1}{\partial x^1}=-\frac{\partial f^3}{\partial x^2}=\frac{\partial f^2}{\partial x^3}.
\end{aligned}
$$

Чрез непосредствена проверка се вижда, че (13) и (14) удовлетворяват (6), т. е. напълно диференцируемата функция $F(X)$ задава конформно съответствие в $R(i, j, k)$. Даже нещо повече — в пространството $R(i, j, k)$ могат да се разглеждат подпространства (площадки), определени от базисните единици, взети две по две, например: $(1, i)$, $(i, k)=i(1, j), \ldots$ Тези площадки, общо шест на брой, са изоморфни с алгебрата на комплексните числа. От това следва, че в тях е валидна метриката на комплексните числа. Означаваме ги съответно $R(1, i)$, $R(j, k)$, $R(1, j)\ldots$

Да разгледаме векторите $\bar{v}$ и $\bar{w}$, проекции на v и w върху $R(1, i)$:

$$\bar{v}(v^1, v^2, 0, 0), \qquad \bar{w}(w^1, w^2, 0, 0).$$

Нека чрез преобразованието P $v \to v$ и $w \to w$, т. е.

$$\check{v}^i=f_1^i v^1+f_2^i v^2, \quad w^i=f_1^i w^1+f_2^i w^2, \quad i=1, 2, 3, 4.$$

---

* [4] и [5] познавам само от реферата на Широков [3].

Да проектираме векторите v и w върху $R(1, i)$; $v \xrightarrow{\varphi} \bar{v}$, $w \xrightarrow{\varphi} \bar{w}$ и върху $R(j, k)$: $v \xrightarrow{\varphi'} v'$, $w \xrightarrow{\varphi'} w'$;

$$\overset{*}{v}(f_1^1 v^1 + f_2^1 v^2, \quad f_1^2 v^1 + f_2^2 v^2),$$

$$\overset{*}{w}(f_1^1 w^1 + f_2^1 w^2, \quad f_1^2 w^1 + f_2^2 w^2),$$

$$\overset{*}{v}{}'(f_1^3 v^1 + f_2^3 v^2, \quad f_1^4 v^1 + f_2^4 v^2),$$

$$\overset{*}{w}{}'(f_1^3 w^1 + f_2^3 w^2, \quad f_1^4 w^1 + f_2^4 w^2).$$

Да разгледаме преобразованието $P^* = P\varphi$, което изобразява подпространството $R(1, i)$ в подпространството $R(1, i)$ и $R(j, k)$. Ще казваме, че P^* е конформно преобразование в смисъл на метриката, въведена в $R(1, i)$ и $R(j, k)$, ако запазва ъглите: $\sphericalangle(\bar{v}\,\bar{w}) = \sphericalangle(\overset{*}{v}\overset{*}{w}) = \sphericalangle(\overset{*}{v}{}'\overset{*}{w}{}')$.

Теорема 2. Необходимото и достатъчно условие неизроденото преобразование P^* да е конформно в смисъл на горното определение е функцията $F(X)$ да е напълно диференцируема отляво или отдясно в смисъл на Spampinako.

а) Достатъчност:

Според установената метрика върху площадките $R(1, i)$ и $R(j, k)$ условието за конформност на изображението P се свежда до равенството на ъглите $\sphericalangle(\bar{v}\,\bar{w})$, $\sphericalangle(\overset{*}{v}\overset{*}{w})$, $\sphericalangle(\overset{*}{v}{}'\overset{*}{w}{}')$, което, изразено чрез координатите на съответните вектори, ще има вида

$$\frac{v^1w^1+v^2w^2}{\sqrt{(v^1)^2+(v^2)^2}\sqrt{(w^1)^2+(w^2)^2}} = \frac{(f_1^1v^1+f_2^1v^2)(f_1^1w^1+f_2^1w^2)+(f_1^2v^1+f_2^2v^2)(f_1^2w^1+f_2^2w^2)}{\sqrt{(f_1^1v^1+f_2^1v^2)^2+(f_1^2v^1+f_2^2v^2)^2}\sqrt{(f_1^1w^1+f_2^1w^2)^2+(f_1^2w^1+f_2^2w^2)^2}}.$$

След преобразуване и подходящо групиране получаваме

$$(16)\quad (v^1w^1+v^2w^2)\{[(f_1^1)^2+(f_1^2)^2](v^1)^2+[(f_2^1)^2+(f_2^2)^2](v^2)^2+2(f_1^1f_2^1+f_1^2f_2^2)v^1v^2\}$$
$$\times\{[(f_1^1)^2+(f_1^2)^2](w^1)^2+[(f_2^1)^2+(f_2^2)^2](w^2)^2+2(f_1^1f_2^1+f_1^2f_2^2)w^1w^2\}$$
$$=[(v^1)^2+(v^2)^2][(w^1)^2+(w^2)^2]\{[(f_1^1)^2+(f_1^2)^2]v^1w^1+[(f_2^1)^2+(f_2^2)^2]v^2w^2$$
$$+(f_1^1f_2^1+f_1^2f_2^2)(v^1w^2+v^2w^1)\}^2.$$

Ако функцията $F(x)$ е отляво или отдясно диференцируема, въз основа на (13) или (14) имаме

$$(f_1^1)^2+(f_1^2)^2=(f_2^1)^2+(f_2^2)^2=a,$$

$$f_1^1f_2^1+f_1^2f_2^2=0.$$

Заместваме в (16) и получаваме тъждество.

Аналогично се доказва, че $\sphericalangle(\bar{v}\,\bar{w}) = \sphericalangle(\overset{*}{v}{}'\overset{*}{w}{}')$, ако функцията $F(x)$ е напълно диференцируема.

Следователно, ако $F(x)$ е напълно диференцируема, съответствието $P^* = P\varphi$, където P се задава чрез $F(x)$, а φ е проектирането върху $R(1, i)$ и $R(j, k)$, е конформно.

Аналогично могат да се разгледат и останалите пет площадки, които чрез преобразованието P^* конформно се изобразяват в себе си и в допълнителните си площадки в $R(i, j, k)$.

б) Необходимост:

Нека P^* е конформно преобразование на $R(1, i)$ в $R(1, i)$, $R(j, k)$. Да изберем $v(1, 0, 0, 0)$; $w(0, 1, 0, 0) \in R(1, i)$. Чрез P^* получаваме

$$\overset{*}{v}(f_1^1, f_1^2), \quad \overset{*}{w}(f_2^1, f_2^2) \in R(1, i);$$

$$\overset{*}{v}{}'(f_1^3, f_1^4), \quad w'(f_2^3, f_2^4) \in R(j, k).$$

От

$$\cos(vw) = \cos(\overset{*}{v}\,\overset{*}{w}) = \cos(\overset{*}{v}{}'\; w') \tag{17}$$

получаваме

$$0 = \frac{f_1^1 f_2^1 + f_1^2 f_2^2}{\sqrt{(f_1^1)^2 + (f_1^2)^2}\sqrt{(f_2^1)^2 + (f_2^2)^2}} = \frac{f_1^3 f_2^3 + f_1^4 f_2^4}{\sqrt{(f_1^3)^2 + (f_1^4)^2}\sqrt{(f_2^3)^2 + (f_2^4)^2}}, \tag{18}$$

или

$$f_1^1 f_2^1 + f_1^2 f_2^2 = 0, \quad f_1^3 f_2^3 + f_1^4 f_2^4 = 0. \tag{19}$$

Избираме друга двойка вектори $a(1, 0, 0, 0)$, $b(1, 1, 0, 0)$, на които чрез P^* съответствуват

$$\left.\begin{array}{l} \overset{*}{a}(f_1^1, f_1^2) \\ \overset{*}{b}(f_1^1 + f_2^1, f_1^2 + f_2^2) \end{array}\right\} \in R(1, i), \qquad \left.\begin{array}{l} a'(f_1^3, f_1^4) \\ \overset{*}{b}{}'(f_1^3 + f_2^3, f_1^4 + f_2^4) \end{array}\right\} \in R(j, k).$$

От

$$\sphericalangle(ab) = \sphericalangle(\overset{*}{a}\,\overset{*}{b}) = \sphericalangle(\overset{*}{a}{}'\;\overset{*}{b}{}')$$

получаваме

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(f_1^1)^2 + (f_1^2)^2 + f_1^1 f_2^1 + f_1^2 f_2^2}{\sqrt{(f_1^1)^2 + (f_1^2)^2}\sqrt{(f_1^1)^2 + (f_2^1)^2 + (f_1^2)^2 + (f_2^2)^2 + 2(f_1^1 f_2^1 + f_1^2 f_2^2)}} \tag{20}$$

$$= \frac{(f_1^3)^2 + (f_1^4)^2 + f_1^3 f_2^3 + f_1^4 f_2^4}{\sqrt{(f_1^3)^2 + (f_1^4)^2}\sqrt{(f_1^3)^2 + (f_2^3)^2 + (f_1^4)^2 + (f_2^4)^2 + 2(f_1^3 f_2^3 + f_1^4 f_2^4)}}.$$

Като вземем пред вид (19), уравненията (20) приемат вида

$$2[(f_1^1)^2 + (f_1^2)^2]^2 = [(f_1^1)^2 + (f_1^2)^2][(f_1^1)^2 + (f_2^1)^2 + (f_1^2)^2 + (f_2^2)^2].$$

От това, че P^* е неизродено, следва $(f_1^1)^2 + (f_1^2)^2 \neq 0$, т. е.

$$(21)\qquad \begin{aligned}(f_1^1)^2+(f_1^2)^2&=(f_2^1)^2+(f_2^2)^2,\\ (f_1^3)^2+(f_1^4)^2&=(f_2^3)^2+(f_2^4)^2.\end{aligned}$$

Като решим съвместно (19) и (20), получаваме

$$(22)\qquad \left|\begin{aligned}(f_2^1)^2&=(f_1^2)^2,\\ (f_1^1)^2&=(f_2^2)^2;\end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned}(f_2^3)^2&=(f_1^4)^2,\\ (f_1^3)^2&=(f_2^4)^2.\end{aligned}\right.$$

Като коренуваме (22) и вземем пред вид (19), получаваме следните окончателни зависимости:

$$(23')\qquad f_2^1=-f_1^2,\quad f_1^1=f_2^2,$$

$$(23'')\qquad f_2^3=f_1^4;\quad f_1^3=-f_2^4,$$

$$(24')\qquad f_2^1=f_1^2;\quad f_1^1=-f_2^2,$$

$$(24'')\qquad f_2^3=-f_1^4;\quad f_1^3=f_2^4.$$

Какъв е геометричният смисъл на тези равенства?

Да разгледаме ориентировката на ъглите $\sphericalangle(v\,w)$, $\sphericalangle(v\,w)$, $\sphericalangle(\overset{*}{v}'\,w')$. За тази цел да изчислим синусите им, като вземем пред вид (23) и (24). Съгласно метриката, въведена в $R(1,i)$, $R(j,k)$, получаваме

$$\sin(\bar{v}\,\bar{w}(= \frac{v^1w^2-w^1v^2}{\sqrt{(v^1)^2+(v^2)^2}\,\sqrt{(w^1)^2+(w^2)^2}},$$

$$\sin(\overset{*}{v}\,\overset{*}{w}) = \frac{(f_1^1v^1+f_2^1v^2)(f_1^2w^1+f_2^2w^2)-(f_1^1w^1+f_2^1w^2)(f_1^2v^1+f_2^2v^2)}{\sqrt{(f_1^1v^1+f_2^1v^2)^2+(f_1^2v^1+f_2^2v^2)^2}\,\sqrt{(f_1^1w^1+f_2^1w^2)^2+(f_1^2w^1+f_2^2w^2)^2}},$$

$$\sin(v'\,w') = \frac{(f_1^3v^1+f_2^3v^2)(f_1^4w^1+f_2^4w^2)-(f_1^3w^1+f_2^3w^2)(f_1^4v^1+f_2^4v^2)}{\sqrt{(f_1^3v^1+f_2^3v^2)^2+(f_1^4v^1+f_2^4v^2)^2}\,\sqrt{(f_1^3w^1+f_2^3w^2)^2+(f_1^4w^1+f_2^4w^2)^2}}.$$

Чрез непосредствена проверка се вижда, че за (23') $\sphericalangle(\bar{v}\,\bar{w})$ и $\sphericalangle(v\,\overset{*}{w})$ са еднакво ориентирани, а за (24') — противно ориентирани. Понеже в този случай подпространството $R(1,i)$ се изобразява в себе си, целесъобразно е да изискваме ъглите да запазват не само големината си, но и ориентировката си, т. е. вземаме само решението (23').

Аналогично се проверява за (23'') и (24''). Оказва се, че ляво диференцируемата според Spampinato функция запазва ориентировката на ъглите при изображението P^* на $R(1,i)$ в $R(j,k)$, а дясно диференцируемата функция променя посоката им.

Аналогично чрез изобразяването на останалите пет площадки, изоморфни с алгебрата на комплексните числа, се получават и останалите връзки от (13) и (14). Следователно условието за пълна диференцируемост на функцията е и необходимо.

Изказвам дълбока признателност и благодарност на доц. В. В. Вишневски за насоките, ръководството и отзивчивостта при написването на настоящата статия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петканчин, Б. Основи на математиката. София, 1968.
2. Розенфельд, Б. А. Неевклидовы геометрии. Москва, 1955.
3. Широков, А. П. Об одном типе G-структур, определяемых алгебрами. В: Труды геометрического семинара ВИНИТИ, том 1, Москва, 1966.
4. Ward, J. A. A theory of analytic functions in linear associative algebras. — Duke Math. J., 1940, **7**, 233—248.

Spampinato, N. Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa ad n unita dotata di modulo. I, II, III. — Rend. Circolo math. Palermo, **57**, 1933, 235—272; **59**, 1935, 185—227.

Постъпила на 1. X. 1971

О КОНФОРМНЫХ СВОЙСТВАХ АНАЛИТИЧНЫХ КВАТЕРНИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

М. Власакова

(*Резюме*)

Рассматриваются некоторые свойства аналитичных изображений алгебры кватернионов $R(i, j, k)$.

Дефинируются основные употребляемые понятия, с целью чего указываются ранг и зависимости между элементами матричной алгебры D, производной от матричной алгебры S.

Далее показано, что аналитичность кватернионных функций является необходимым и достаточным условием конформности изображения, определенного посредством этих функций над $R(i, j, k)$.

Доказывается, что если кватернионная функция является и дифференцируемой слева или справа, то она дефинирует специальное конформное изображение между двумерными подпространствами (Ri, j, k).

ON THE CONFORM PROPERTIES OF ANALYTIC QUATERNION MAPPINGS

M. Vlasakova

(*Summary*)

Some properties of the analytic mappings of the algebra of the quaternions $R(i, j, k)$ are considered.

The basic concepts used are defined by showing the rank and the interdependences between the elements of the matrix algebra D the derivative of the matrix algebra S. Next it is shown that the analycity of the quaternion functions is a necessary and sufficient condition for conformity of the mapping, defined by means of these functions, on $R(i, j, k)$. It is proved that if the quaternion function is differentiable on the left or the right, then it defines a special conform mapping between two-dimensional subspaces of $R(i, j, k)$.