БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЯТИМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА, НЕСУЩИЕ ВПОЛНЕ ГОЛОНОМНУЮ 4-ТКАНЬ ЛИНИЙ КРИВИЗНЫ

С. Й. Билчев, Д. Т. Дочев

ВВЕДЕНИЕ

В работе [4] рассмотрен вопрос о трехмерных поверхностях четырехмерного евклидова пространства, несущие вполне голономную 3-ткань линий кривизны. В настоящей работе рассматриваем обобщенно такой же вопрос в пятимерном пространстве.

Дадим следующие определения:

1. Скажем, что 4-мерная поверхность 5-мерного евклидова пространства несет вполне голономную 4-ткань линий кривизны первого вида, если через каждую точку этой поверхности проходят 4 трехмерные поверхности таким образом, что любая тройка линий кривизны содержится в одной из этих трехмерных поверхностей.

2. Скажем, что 4-мерная поверхность 5-мерного евклидова пространства несет вполне голономную 4-ткань линий кривизны второго вида, если через каждую точку этой поверхности проходят 6 двумерных поверхностей таким образом, что любая пара линий кривизны содержится в одной из этих двумерных поверхностей.

Цель нашей работы — вывод условий полной голономности, классификация поверхностей, удовлетворяющих этому условию, исследование существования каждого класса этих поверхностей и выявление некоторых геометрических свойств.

В работе пользуемся методом внешних форм Картана и в частности теорией пфаффовых систем в инволюции.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваем хиперповерхности 5-мерного евклидова пространства. Канонизируем репер в каждой точке, так чтобы вектор $\vec{I}_5$ был перпендикулярным касательной плоскости к поверхности в этой точке, а векторы $\vec{I}_i$, $i=1, 2, 3, 4$, направляем вдоль линий кривизны (рис. 1). т. е. получаем

$$
\begin{aligned}
&\omega^5 = 0,\\
&\omega^5_1 = a\omega^1,\\
(1)\qquad &\omega^5_2 = b\omega^2,\\
&\omega^5_3 = c\omega^3,\\
&\omega^5_4 = e\omega^4.
\end{aligned}
$$

Структурные формулы евклидова пространства имеют вид

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad D\omega^k_i = \omega^j_i \wedge \omega^k_j.$$

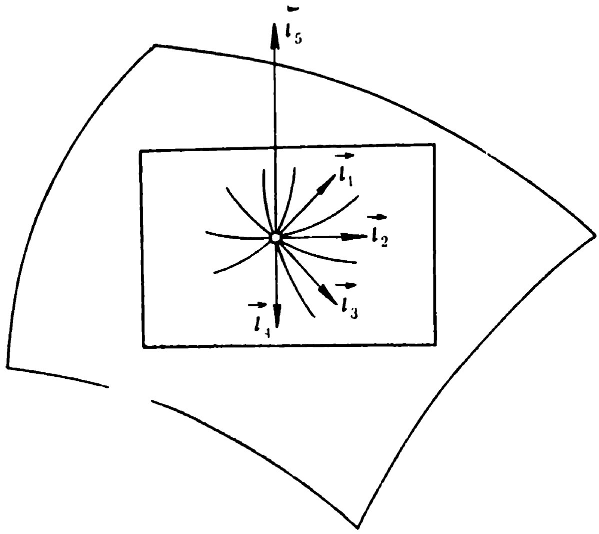

Рис. 1

Дополним систему (1) ковариантами

$$\omega^1 \wedge \omega^5_1 + \omega^2 \wedge \omega^5_2 + \omega^3 \wedge \omega^5_3 + \omega^4 \wedge \omega^5_4 + \omega^5 \wedge \omega^5_5 = 0;$$

в силу системы (1) это уравнение удовлетворяется тождественно.

$$\omega^1_1 \wedge \omega^5_1 + \omega^2_1 \wedge \omega^5_2 + \omega^3_1 \wedge \omega^5_3 + \omega^4_1 \wedge \omega^5_4 + \omega^5_1 \wedge \omega^5_5 = da \wedge \omega^1$$
$$+ a\{\omega^1 \wedge \omega^1_1 + \omega^2 \wedge \omega^1_2 + \omega^3 \wedge \omega^1_3 + \omega^4 \wedge \omega^1_4 + \omega^5 \wedge \omega^1_5\},$$
$$\omega^1_2 \wedge \omega^5_1 + \omega^2_2 \wedge \omega^5_2 + \omega^3_2 \wedge \omega^5_3 + \omega^4_2 \wedge \omega^5_4 + \omega^5_2 \wedge \omega^5_5 = db \wedge \omega^2$$
$$+ b\{\omega^1 \wedge \omega^2_1 + \omega^2 \wedge \omega^2_2 + \omega^3 \wedge \omega^2_3 + \omega^4 \wedge \omega^2_4 + \omega^5 \wedge \omega^2_5\},$$
$$\omega^1_3 \wedge \omega^5_1 + \omega^2_3 \wedge \omega^5_2 + \omega^3_3 \wedge \omega^5_3 + \omega^4_3 \wedge \omega^5_4 + \omega^5_3 \wedge \omega^5_5 = dc \wedge \omega^3$$
$$+ c\{\omega^1 \wedge \omega^3_1 + \omega^2 \wedge \omega^3_2 + \omega^3 \wedge \omega^3_3 + \omega^4 \wedge \omega^3_4 + \omega^5 \wedge \omega^3_5\},$$
$$\omega^1_4 \wedge \omega^5_1 + \omega^2_4 \wedge \omega^5_2 + \omega^3_4 \wedge \omega^5_3 + \omega^4_4 \wedge \omega^5_4 + \omega^5_4 \wedge \omega^5_5 = de \wedge \omega^4$$
$$+ e\{\omega^1 \wedge \omega^4_1 + \omega^2 \wedge \omega^4_2 + \omega^3 \wedge \omega^4_3 + \omega^4 \wedge \omega^4_4 + \omega^5 \wedge \omega^4_5\}.$$

Учитывая соотношения $\omega_i^i=0$, $i=1, 2, 3, 4, 5$ (по i нет суммирования) и $\omega_i^j=-\omega_j^i$, $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$, и, подставляя равенства (1), получаем

$$
\begin{aligned}
&da\wedge\omega^1+(a-b)\omega_1^2\wedge\omega^2+(a-c)\omega_1^3\wedge\omega^3+(a-e)\omega_1^4\wedge\omega^4=0,\\
&(a-b)\omega_1^2\wedge\omega^1+db\wedge\omega^2+(b-c)\omega_2^3\wedge\omega^3+(b-e)\omega_2^4\wedge\omega^4=0,\\
&(a-c)\omega_1^3\wedge\omega^1+(b-c)\omega_2^3\wedge\omega^2+dc\wedge\omega^3+(c-e)\omega_3^4\wedge\omega^4=0,\\
&(a-e)\omega_1^4\wedge\omega^1+(b-e)\omega_2^4\wedge\omega^2+(c-e)\omega_3^4\wedge\omega^3+de\wedge\omega^4=0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Из системы (2) по лемме Картана ([1], гл. II, § 7) следует

$$
\begin{aligned}
&\omega^5=0,\\
&\omega_1^5=a\omega^1,\\
&\omega_2^5=b\omega^2,\\
&\omega_3^5=c\omega^3,\\
&\omega_4^5=e\omega^4,\\
&da=a_i\omega^i,\\
&db=b_i\omega^i,\\
&dc=c_i\omega^i,\\
&de=e_i\omega^i;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(a-b)\omega_1^2=a_2\omega^1+b_1\omega^2+\alpha\omega^3+\beta\omega^4,\\
&(a-c)\omega_1^3=a_3\omega^1+\alpha\omega^2+c_1\omega^3+\gamma\omega^4,\\
&(b-c)\omega_2^3=\alpha\omega^1+b_3\omega^2+c_2\omega^3+\delta\omega^4,\\
&(a-e)\omega_1^4=a_4\omega^1+\beta\omega^2+\gamma\omega^3+e_1\omega^4,\\
&(b-e)\omega_2^4=\beta\omega^1+b_4\omega^2+\delta\omega^3+e_2\omega^4,\\
&(c-e)\omega_3^4=\gamma\omega^1+\delta\omega^2+c_4\omega^3+e_3\omega^4.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

..тема (3) является системой Пфаффа.

§ 2. УСЛОВИЯ ПОЛНОЙ ГОЛОНОМНОСТИ

1. Вывод условий полной голономности 4-тканей первого вида

Допустим:

а) что через каждую точку проходит трехмерная поверхность, касающаяся плоскости, натянутой на векторы $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ и $\vec{l}_3$, т. е. уравнение этой поверхности будет $\omega^4=0$; пишем ковариант:

$$\omega^1\omega_1^4+\omega^2\wedge\omega_2^4+\omega^3\wedge\omega_3^4+\underbrace{\omega^4\wedge\omega_4^4}_{0}+\underbrace{\omega^5\wedge\omega_5^4}_{0}=0,$$

или

$$\omega^1\wedge\omega_1^4+\omega^2\wedge\omega_2^4+\omega^3\wedge\omega_3^4=0$$

и по лемме Картана

$$(4)\qquad \begin{aligned} \omega_1^4&=A_{11}\omega^1+A_{12}\omega^2+A_{13}\omega^3,\\ \omega_2^4&=A_{12}\omega^1+A_{22}\omega^2+A_{23}\omega^3,\\ \omega_3^4&=A_{13}\omega^1+A_{23}\omega^2+A_{33}\omega^3; \end{aligned}$$

б) что через каждую точку проходит трехмерная поверхность, касающаяся плоскости, натянутой на векторы $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ и $\vec{l}_4$, т. е. уравнение этой поверхности будет $\omega^3=0$, пишем ковариант:

$$\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3+\underbrace{\omega^3\wedge\omega_3^3}_{0}+\omega^4\wedge\omega_4^3+\underbrace{\omega^5\wedge\omega_5^3}_{0}=0$$

или

$$\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3+\omega^4\wedge\omega_4^3=0$$

и по лемме Картана

$$(5)\qquad \begin{aligned} \omega_1^3&=B_{11}\omega^1+B_{12}\omega^2+B_{13}\omega^4,\\ \omega_2^3&=B_{12}\omega^1+B_{22}\omega^2+B_{23}\omega^4,\\ \omega_3^4&=-B_{13}\omega^1-B_{23}\omega^2+B_{33}\omega^4, \end{aligned}$$

в) что через каждую точку проходит трехмерная поверхность, касающаяся плоскости, натянутой на векторы $\vec{l}_1$, $\vec{l}_3$ и $\vec{l}_4$, т. е. следует $\omega^2=0$; пишем ковариант и по лемме Картана следует

$$(6)\qquad \begin{aligned} \omega_1^2&=C_{11}\omega^1+C_{12}\omega^3+C_{13}\omega^4,\\ \omega_2^3&=-C_{12}\omega^1+C_{22}\omega^3+C_{23}\omega^4,\\ \omega_2^4&=-C_{13}\omega^1+C_{23}\omega^3+C_{33}\omega^4; \end{aligned}$$

г) что через каждую точку проходит трехмерная поверхность, касающаяся плоскости, натянутой на векторы $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ и $\vec{l}_4$, получаем аналогично

$$(7)\qquad \begin{aligned} \omega_1^2&=E_{11}\omega^2+E_{12}\omega^3+E_{13}\omega^4,\\ \omega_1^3&=E_{12}\omega^2+E_{22}\omega^3+E_{23}\omega^4,\\ \omega_1^4&=F_{13}\omega^2+E_{23}\omega^3+E_{33}\omega^4. \end{aligned}$$

Уравнения (4), (5), (6) и (7) дают нам условие полной голономности 4-тканей первого вида:

$$
\begin{aligned}
&\omega_1^4\big|_{\omega^4=0}=A_{11}\omega^1+A_{12}\omega^2+A_{13}\omega^3, &&\omega_1^2\big|_{\omega^2=0}=C_{11}\omega^1+C_{12}\omega^3+C_{13}\omega^4,\\
&\omega_2^4\big|_{\omega^4=0}=A_{12}\omega^1+A_{22}\omega^2+A_{23}\omega^3, &&\omega_2^3\big|_{\omega^2=0}=-C_{12}\omega^1+C_{22}\omega^3+C_{23}\omega^4,\\
&\omega_3^4\big|_{\omega^4=0}=A_{13}\omega^1+A_{23}\omega^2+A_{33}\omega^3; &&\omega_2^4\big|_{\omega^2=0}=-C_{13}\omega^1+C_{23}\omega^3+C_{33}\omega^4;\\
(8)\qquad &\omega_1^3\big|_{\omega^3=0}=B_{11}\omega^1+B_{12}\omega^2+B_{13}\omega^4, &&\omega_1^2\big|_{\omega^1=0}=E_{11}\omega^2+E_{12}\omega^3+E_{13}\omega^4,\\
&\omega_2^3\big|_{\omega^3=0}=B_{12}\omega^1+B_{22}\omega^2+B_{23}\omega^4, &&\omega_1^3\big|_{\omega^1=0}=E_{12}\omega^2+E_{22}\omega^3+E_{23}\omega^4,\\
&\omega_3^4\big|_{\omega^3=0}=-B_{13}\omega^1-B_{23}\omega^2+B_{33}\omega^4; &&\omega_1^4\big|_{\omega^1=0}=E_{13}\omega^2+E_{23}\omega^3+E_{33}\omega^4.
\end{aligned}
$$

2. Вывод условий полной голономности 4-тканей второго вида

Допустим:

а) что через каждую точку проходит двумерная поверхность, касающаяся плоскости, натянутой на векторы $\vec{l}_1$, и $\vec{l}_2$, т. е. уравнения этой поверхности будут $\omega^3=0$, $\omega^4=0$; пишем коварианты:

$$\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3+\underbrace{\omega^3\wedge\omega_3^3}_{0}+\underbrace{\omega^4\wedge\omega_4^3}_{0}+\underbrace{\omega^5\wedge\omega_5^3}_{0}=0,$$

$$\omega^1\wedge\omega_1^4+\omega^2\wedge\omega_2^4+\underbrace{\omega^3\wedge\omega_3^4}_{0}+\underbrace{\omega^4\wedge\omega_4^4}_{0}+\underbrace{\omega^5\wedge\omega_5^4}_{0}=0,$$

или

$$\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0,$$

$$\omega^1\wedge\omega_1^4+\omega^2\wedge\omega_2^4=0$$

и по лемме Картана

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
\omega_1^3&=A_{11}^3\omega^1+A_{12}^3\omega^2,\\
\omega_2^3&=A_{12}^3\omega^1+A_{22}^3\omega^2,\\
\omega_1^4&=A_{11}^4\omega^1+A_{12}^4\omega^2,\\
\omega_2^4&=A_{12}^4\omega^1+A_{22}^4\omega^2;
\end{aligned}
$$

б) что через каждую точку проходит двумерная поверхность, касающаяся плоскости, натянутой на векторы $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_3$, т. е. уравнения этой поверхности будут $\omega^2=0$, $\omega^4=0$; пишет коварианты и по лемме Картана следует

$$\omega_1^4=B_{11}^4\omega^1+B_{13}^4\omega^3,$$

$$\omega_3^4=B_{13}^4\omega^1+B_{33}^4\omega^3,$$

$$(10)\qquad \omega_1^2 = B_{11}^2\omega^1 + B_{13}^2\omega^3,$$
$$\omega_2^3 = -B_{13}^2\omega^1 + B_{33}^2\omega^3;$$

в) что через каждую точку проходит двумерная поверхность, касающаяся плоскости, натянутой на векторы $\vec{l}_1$, и $\vec{l}_4$; получаем аналогично

$$\omega_1^2 = C_{11}^2\omega^1 + C_{14}^2\omega^4,$$
$$(11)\qquad \omega_2^4 = -C_{14}^2\omega^1 + C_{44}^2\omega^4,$$
$$\omega_1^3 = C_{11}^3\omega^1 + C_{14}^3\omega^4,$$
$$\omega_3^4 = C_{14}^3\omega^1 + C_{44}^3\omega^4.$$

Дальше, аналогично для поверхностей, касающиеся плоскости, соответственно натянутой на векторы $\vec{l}_2$ и $\vec{l}_3$, $\vec{l}_2$ и $\vec{l}_4$, $\vec{l}_3$ и $\vec{l}_4$ получаем условия:

$$\omega_1^2 = D_{22}^1\omega^2 + D_{23}^1\omega^3,$$
$$(12)\qquad \omega_1^3 = D_{23}^1\omega^2 + D_{33}^1\omega^3,$$
$$\omega_2^4 = D_{22}^4\omega^2 + D_{23}^4\omega^3,$$
$$\omega_3^4 = D_{23}^4\omega^2 + D_{33}^4\omega^3;$$

$$\omega_1^2 = E_{22}^1\omega^2 + E_{24}^1\omega^4,$$
$$(13)\qquad \omega_1^4 = E_{24}^1\omega^2 + E_{44}^1\omega^4,$$
$$\omega_2^3 = E_{22}^3\omega^2 + E_{24}^3\omega^4,$$
$$\omega_3^4 = -E_{24}^3\omega^2 + E_{44}^3\omega^4;$$

$$\omega_1^3 = F_{33}^1\omega^3 + F_{34}^1\omega^4,$$
$$(14)\qquad \omega_1^4 = F_{34}^1\omega^3 + F_{44}^1\omega^4,$$
$$\omega_2^3 = F_{33}^2\omega^3 + F_{34}^2\omega^4,$$
$$\omega_2^4 = F_{34}^2\omega^3 + F_{44}^2\omega^4.$$

Уравнения (9), (10), (11), (12), (13) и (14) дают нам условие полной голономности 4-тканей второго вида:

$$\omega_1^3\big|_{\omega^3=0,\ \omega^4=0} = A_{11}^3\omega^1 + A_{12}^3\omega^2, \quad \omega_1^4\big|_{\omega^3=0,\ \omega^4=0} = A_{11}^4\omega^1 + A_{12}^4\omega^2,$$
$$\omega_2^3\big|_{\omega^3=0,\ \omega^4=0} = A_{12}^3\omega^1 + A_{22}^3\omega^2, \quad \omega_2^4\big|_{\omega^3=0,\ \omega^4=0} = A_{12}^4\omega^1 + A_{22}^4\omega^2,$$
$$\omega_1^4\big|_{\omega^2=0,\ \omega^4=0} = B_{11}^4\omega^1 + B_{13}^4\omega^3, \quad \omega_1^2\big|_{\omega=0,\ \omega^4=0} = B_{11}^2\omega^1 + B_{13}^2\omega^3,$$
$$\omega_3^4\big|_{\omega^2=0,\quad 0} = B_{13}^4\omega^1 + B_{33}^4\omega^3, \quad \omega_2^3\big|_{\omega^2=0,\ \omega^4=0} = -B_{13}^2\omega^1 + B_{33}^2\omega^3,$$
$$\omega_1^2\big|_{\omega^2=0,\ \omega^3=0} = C_{11}^2\omega^1 + C_{14}^2\omega^4, \quad \omega_1^3\big|_{\omega^2=0,\ \omega^3=0} = C_{11}^2\omega^1 + C_{14}^3\omega^4,$$

$$(15)\qquad \begin{aligned}
&\omega_2^4\big|_{\omega^2=0,\ \omega^3=0}=-C_{14}^2\omega^1+C_{44}^2\omega^4, && \omega_3^4\big|_{\omega^2=0,\ \omega^3=0}=C_{14}^3\omega^1+C_{44}^3\omega^4,\\
&\omega_1^2\big|_{\omega^1=0,\ \omega^4=0}=D_{22}^1\omega^2+D_{23}^1\omega^3, && \omega_2^4\big|_{\omega^1=0,\ \omega^4=0}=D_{22}^4\omega^2+D_{23}^4\omega^3,\\
&\omega_1^3\big|_{\omega^1=0,\ \omega^4=0}=D_{23}^1\omega^2+D_{33}^1\omega^3, && \omega_3^4\big|_{\omega^1=0,\ \omega^4=0}=D_{23}^4\omega^2+D_{33}^4\omega^3,\\
&\omega_1^2\big|_{\omega^1=0,\ \omega^3=0}=E_{22}^1\omega^2+E_{24}^1\omega^4, && \omega_2^3\big|_{\omega^1=0,\ \omega^3=0}=E_{22}^3\omega^2+E_{24}^3\omega^4,\\
&\omega_1^4\big|_{\omega^1=0,\ \omega^3=0}=-E_{24}^1\omega^2+E_{44}^1\omega^4, && \omega_3^4\big|_{\omega^1=0,\ \omega^3=0}=-E_{24}^3\omega^2+E_{44}^3\omega^4,\\
&\omega_1^3\big|_{\omega^1=0,\ \omega^2=0}=F_{33}^1\omega^3+F_{34}^1\omega^4, && \omega_2^3\big|_{\omega^1=0,\ \omega^2=0}=F_{33}^2\omega^3+F_{34}^2\omega^4,\\
&\omega_1^4\big|_{\omega^1=0,\ \omega^2=0}=F_{34}^1\omega^3+F_{44}^1\omega^4, && \omega_2^4\big|_{\omega^1=0,\ \omega^2=0}=F_{34}^2\omega^3+F_{44}^2\omega^4,
\end{aligned}$$

3. Классификация

Будем рассматривать 5 классов поверхностей:

I класс, для которых $a=b=c=e$;

II класс, для которых $a=b=c\neq e$ (аналогично рассматриваются $a=b=e\neq c$, $a=c=e\neq b$, $b=c=e\neq a$);

III класс, для которых $a=c\neq b=e$ (аналогично рассматриваются остальные случаи этого вида);

IV класс, для которых $a=c\neq b\neq e\neq a$ (аналогично рассматриваются остальные случаи этого вида);

V класс, для которых все a, b, c, e различны.

Рассмотрим вопрос о существовании различных классов поверхностей, несущих вполне голономную 4-ткань первого вида линий кривизны, и некоторые геометрические свойства этих поверхностей.

§ 3. ПОВЕРХНОСТИ I КЛАССА ($a=b=c=e$)

Из системы (3), ввиду независимости форм ω_i, $i=1, 2, 3, 4$, получаем

$$a_2=b_1=\alpha=\beta=a_3=c_1=\gamma=a_4=e_1=b_3=c_2=\delta=b_4=e_2=c_4=e_3=0;$$
$$a_i=b_i=c_i=e_i,\quad i=1, 2, 3, 4,$$

т. е. система (3) переходит в систему

$$(16)\qquad \begin{aligned}
&\omega^5=0,\\
&\omega_1^5=a\omega^1,\\
&\omega_2^5=a\omega^2,\\
&\omega_3^5=a\omega^3,\\
&\omega_4^5=a\omega^4,\\
&da=0.
\end{aligned}$$

Система вполне интегрируемая, т. е. в инволюции, так как внешнее дифференцирование не дает никаких новых уравнений — система замкнута, Случай 1. Постоянная $a=0$, т. е. имеем

$$\omega^5=0,\ \omega_1^5=0,\ \omega_2^5=0,\ \omega_3^5=0,\ \omega_4^5=0.$$

Следует

$$d\vec{l}_5=\omega_5^1\vec{l}_1+\omega_5^2\vec{l}_2+\omega_5^3\vec{l}_3+\omega_5^4\vec{l}_4=-\omega_1^5\vec{l}_1-\omega_2^5\vec{l}_2-\omega_3^5\vec{l}_3-\omega_4^5\vec{l}_4=0,$$

т. е. нормаль к гиперповерхности имеет фиксированное направление или поверхность есть плоскость.

Случай 2. Постоянная $a\neq 0$. Рассматриваем точку

$$\vec{P}=\vec{A}+\frac{1}{a}\vec{l}_5, \tag{17}$$

где A — точка нашей гиперповерхности.

Продифференцируем (17):

$$d\vec{P}=\omega^1\vec{l}_1+\omega^2\vec{l}_2+\omega^3\vec{l}_3+\omega^4\vec{l}_4+\frac{1}{a}\left\{\omega_5^1\vec{l}_1+\omega_5^2\vec{l}_2+\omega_5^3\vec{l}_3+\omega_5^4\vec{l}_4\right\}$$

$$d\vec{P}=\left(\omega^1-\frac{1}{a}\omega_1^5\right)\vec{l}_1+\left(\omega^2-\frac{1}{a}\omega_2^5\right)\vec{l}_2+\left(\omega^3-\frac{1}{a}\omega_3^5\right)\vec{l}_3+\left(\omega^4-\frac{1}{a}\omega_4^5\right)\vec{l}_4.$$

Из равенства (16) следует $d\vec{P}=0$, т. е. точка $\vec{P}$ неподвижна или имеем сферу с центром $\vec{P}$ и радиусом $1/a$. Таким образом все поверхности этого класса получены, они зависят от шести произвольных постоянных.

§ 4. ПОВЕРХНОСТИ II КЛАССА $(a=b=c\neq e)$

Из системы (3) ввиду независимости форм ω^i, $i=1, 2, 3, 4$, получаем

$$a_2=b_1=\alpha=\beta=a_3=c_1=\gamma=b_3=c_2=\delta,$$

$$a_i=b_i=c_i,\ i=1, 2, 3, 4.$$

Таким образом, система (3) переходит в систему

$$\begin{aligned}
&\omega^5=0,\\
&\omega_1^5=a\omega^1,\\
&\omega_2^5=a\omega^2,\\
&\omega_3^5=a\omega^3,\\
&\omega_4^5=e\omega^4,\\
&da=a_4\omega^4,\\
&de=e_i\omega^i,\\
&(a-e)\omega_1^4=a_4\omega^1+e_1\omega^4,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$(a-e)\omega_2^4=a_4\omega^2+e_2\omega^4,$$

$$(a-e)\omega_3^4=a_4\omega^3+e_3\omega^4,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Меняем обозначения:

$$\frac{a_4}{a-e}=\bar{a}_4,\ \frac{e_i}{a-e}=\bar{e}_i,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \text{т. е.}$$

$$\omega^5=0,\quad \omega_1^5=a\omega^1,\quad \omega_2^5=a\omega^2,\quad \omega_3^5=a\omega^3,\quad \omega_4^5=e\omega^4,$$

$$da=(a-e)\bar{a}_4\omega^4,$$

$$de=(a-e)\bar{e}_i\omega^i,$$

$$\omega_1^4=\bar{a}_4\omega^1+\bar{e}_1\omega^4,$$

$$\omega_2^4=\bar{a}_4\omega^2+\bar{e}_2\omega^4,$$

$$\omega_3^4=\bar{a}_4\omega^3+\bar{e}_3\omega^4.$$

Прибавляем уравнения

$$\omega_1^2=u_i\omega^i,$$

$$\omega_1^3=v_i\omega^i,$$

$$\omega_2^3=w_i\omega^i,\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Требования удовлетворения полной голономности дает

$$\omega_1^4\big|_{\omega^4=0}=\bar{a}_4\omega^1,\qquad \omega_1^3\big|_{\omega^3=0}=v_1\omega^1+v_2\omega^2+v_4\omega^4,$$

$$\omega_2^4\big|_{\omega^4=0}=\bar{a}_4\omega^2,\qquad \omega_2^3\big|_{\omega^3=0}=w_1\omega^1+w_2\omega^2+w_4\omega^4,$$

$$\omega_3^4\big|_{\omega^4=0}=\bar{a}_4\omega^3,\qquad \omega_3^4\big|_{\omega^3=0}=\bar{e}_3\omega^4,$$

т. е. условие выполнено; $w_1=v_2,\ 0=-v_4,\ 0=w_4$;

$$\omega_1^2\big|_{\omega^2=0}=u_1\omega^1+u_3\omega^3+u_4\omega^4,\qquad \omega_1^2\big|_{\omega^1=0}=u_2\omega^2+u_3\omega^3+u_4\omega^4,$$

$$\omega_2^3\big|_{\omega^2=0}=w_1\omega^1+w_3\omega^3+w_4\omega^4,\qquad \omega_1^3\big|_{\omega^1=0}=v_2\omega^2+v_3\omega^3+v_4\omega^4,$$

$$\omega_2^4\big|_{\omega^2=0}=\bar{e}_2\omega^4,\qquad \omega_1^4\big|_{\omega^1=0}=\bar{e}_1\omega^4,$$

т. е. $w_1=-u_3,\ 0=-u_4,\ 0=-w_4;\ v_2=u_3,\ 0=u_4,\ 0=v_4$.
Или система

$$\omega^5=0,$$

$$\omega_1^5=a\omega^1,$$

$$\omega_2^5=a\omega^2,$$

$$\omega_3^5=a\omega^3,$$

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
&\omega_4^5 = e\omega^4,\\
&de = (a-e)e_i\omega^i,\\
&da = (a-e)a_4\omega^4,\\
&\omega_1^2 = u_1\omega^1 + u_2\omega^2,\\
&\omega_1^3 = v_1\omega^1 + v_3\omega^3,\\
&\omega_2^3 = w_2\omega^2 + w_3\omega^3,\\
&\omega_1^1 = a_4\omega^1 + e_1\omega^4,\\
&\omega_2^1 = a_4\omega^2 + \bar{e}_2\omega^4,\\
&\omega_3^1 = a_4\omega^3 \quad e_3\omega^4,
\end{aligned}
$$

удовлетворяет условию полной голономности. Будем исследовать вопрос о существовании интегрального многообразия $\mathfrak{M}^4$ системы (20).

Обозначим значения форм на первом интегральном элементе $\mathcal{E}_1$ через a. Для исследования инволютивности системы (20) составим ее полярную матрицу:

$$
\left|\begin{array}{ccccccccccc}
\boxed{a^1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0\\
0 & \boxed{a^1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^3 & 0\\
0 & 0 & \boxed{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^3\\
0 & 0 & 0 & \boxed{a^4} & 0 & 0 & a^1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{a^4} & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{a^4} & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{(a-e)a^4} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & (a-e)a^1 & (a-e)a^2 & (a-e)a^3 & 0 & \boxed{(a-e)a^4} & 0 & 0 & 0
\end{array}\right|
$$

Если обозначим символом Δ_8 определитель восьмого порядка этой матрицы (взятый в рамку), то

$$
\Delta_8 = (a-e)^2(a^1)^2 a^2 (a^4)^2
$$

в общем случае можно считать отличным от нуля, поэтому $S_1 = 8$.

Обозначим значения форм на втором интегральном элементе $\mathcal{E}_2$ через β и составим полярную матрицу для определения $S_1 + S_2$:

$$\begin{bmatrix}
\alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\beta_1 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \alpha_1 & \alpha^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \beta^1 & \beta^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & \alpha^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & \beta^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^4 & 0 & 0 & a^1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^4 & 0 & a^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^4 & a^3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (a-e)a^4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (a-e)a^1 & (a-e)a^2 & (a-e)a^3 & 0 & (a-e)a^4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^4 & 0 & 0 & \beta^1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^4 & 0 & \beta^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^4 & \beta^3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (a-e)\beta^4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (a-e)\beta^1 & (a-e)\beta^2 & (a-e)\beta^3 & 0 & (a-e)\beta^4
\end{bmatrix}$$

Если обозначим символом Δ_{11} определитель одиннадцатого порядка, составленный из элементов этой матрицы, то

$$\Delta_{11}=(a-e)^2\Delta_2^1\Delta_2^2\Delta_2^3(a^4)^5$$

в общем случае можно считать отличным от нуля. Значит $S_1+S_2=11$, т. е. $S_2=3$. Так как мы имеем одиннадцать неизвестных форм, то $S_3=S_4=0$. Поэтому число Картана Q равняется

$$Q=S_1+2S_2+3S_3+4S_4=8+2.3+3.0+4.0=14.$$

Дифференцируя систему (20) и подставляя формы da, de, ω_1^2, ω_1^3, ω_2^3, ω_1^4, ω_2^4, ω_3^4, получаем

$$\begin{gathered}
d\bar{a}_4\wedge\omega^4=0,\\
(a-e)\Delta\bar{e}_i\wedge\omega^i=0,\\
\Delta u_1\wedge\omega^1+\Delta u_2\wedge\omega^2=0,\\
\Delta v_1\wedge\omega^1+\Delta v_3\wedge\omega^3=0,\\
\Delta w_2\wedge\omega^2+\Delta w_3\wedge\omega^3=0,\\
\Delta_1\bar{a}_4\wedge\omega^1+\Delta\bar{e}_1\wedge\omega^4=0,\\
\Delta_2\bar{a}_4\wedge\omega^2+\Delta\bar{e}_2\wedge\omega^4=0,\\
\Delta_3\bar{a}_4\wedge\omega^3+\Delta\bar{e}_3\wedge\omega^4=0.
\end{gathered}\tag{21}$$

Из первого уравнения системы (21) по лемме Картана находим

$$(22)\qquad d\bar a_4=\bar A_{44}\omega^4.$$

Подставляя равенство (22) в последние три уравнения (21), выражаем

$$\begin{aligned}
d\bar e_1&=[u_1\bar e_2+v_1\bar e_3-ae+\bar A_{44}-(\bar a_4)^2-(\bar e_1)^2]\omega^1\\
&+\bar e_2(u_2-\bar e_1)\omega^2+\bar e_3(v_3-\bar e_1)\omega^3+\bar E_{14}\omega^4,\\
d\bar e_2&=-\bar e_1(u_1+\bar e_2)\omega^1+[w_2\bar e_3-\bar e_1u_2-\bar A_{44}\\
&-(\bar a_4)^2-(\bar e_2)^2]\omega^2+\bar e_3(w_3-\bar e_2)\omega^3+\bar E_{24}\omega^4,\\
d\bar e_3&=-\bar e_1(v_1+\bar e_3)\omega^1-\bar e_2(w_2+\bar e_3)\omega^2+[\bar A_{44}\\
&-\bar e_1v_3-\bar e_2w_3-ae-(a_4)^2-(\bar e_3)^2]\omega^3+\bar E_{34}\omega^4.
\end{aligned}\qquad(23)$$

Имея ввиду (23), из второго уравнения (21) получаем

$$de_4=(\bar E_{14}-\bar e_1\bar e_4)\omega^1+(\bar E_{24}-e_2\bar e_4)\omega^2+(\bar E_{34}-e_3\bar e_4)\omega^3+E_{44}\omega^4.$$

Еще:

$$\begin{aligned}
\Delta u_1&=U_{11}\omega^1+U_{12}\omega^2,\\
\Delta U_2&=U_{12}\omega^1+U_{22}\omega^2,\\
\Delta v_1&=V_{11}\omega^1+V_{13}\omega^3,\\
\Delta v_3&=V_{13}\omega^1+V_{33}\omega^3,\\
\Delta w_2&=W_{22}\omega^2+W_{23}\omega^3,\\
\Delta w_3&=W_{23}\omega^2+W_{33}\omega^3,
\end{aligned}$$

где

$$\Delta u_1=du_1+\qquad \Delta u_2=du_2+\ \ldots,\qquad \Delta v_1=dv_1+$$
$$\Delta v_3=dv_3+\qquad \Delta w_2=dw_2+\qquad \Delta w_3=dw_3+$$

(невыписанные формы выражаются линейно через ω^i, $i=1, 2, 3, 4$).

Следовательно, наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_4$ зависит от 14 параметров:

$$\bar A_{44},\ E_{i4},\ U_{11},\ U_{12},\ U_{22},\ V_{11},\ V_{13},\ V_{33},\ W_{22},\ W_{23},\ W_{33},\ i=1, 2, 3, 4,$$

т. е. N 14. Или N $Q=14$, т. е. число Картана совпадает с числом произвольных параметров наиболее общего интегрального элемента. Следовательно ([I], гл. VIII, § 11), цель регулярна, система в инволюции и интегральное многообразие $\mathfrak{M}^4$ существует и зависит от трех функций двух аргументов ($S_2=3$).

Поверхности II класса являются огибающими однопараметрических семейств гиперсфер. Действительно, в этом случае

$$da=(a-e)\bar a_4\omega^4 \text{ и точка}$$

$$\vec P=\vec A+\frac{1}{a}\vec l_5,$$

$$d\vec{P}=d\vec{A}-\frac{da}{a^2}\vec{l_5}+\frac{1}{a}d\vec{l_5}=\omega^1\vec{l_1}+\omega^2\vec{l_2}+\omega^3\vec{l_3}$$

$$+\omega^4\vec{l_4}-\frac{a-e}{a^2}\bar{a}_4\omega^4\vec{l_5}+\frac{1}{a}\{\omega_5^1\vec{l_1}+\omega_5^2\vec{l_2}+\omega_5^3\vec{l_3}+\omega_5^4\vec{l_4}\}$$

$$d\vec{P}=\left(\omega^1+\frac{1}{a}\omega_5^1\right)\vec{l_1}+\left(\omega^2+\frac{1}{a}\omega_5^2\right)\vec{l_2}+\left(\omega^3+\frac{1}{a}\omega_5^3\right)\vec{l_3}$$

$$+\left(\omega^4+\frac{1}{a}\omega_2^4\right)\vec{l_4}-\frac{a-e}{a^2}\bar{a}_4\vec{l_5}\omega^4;$$

но $\omega_i^j=-\omega_j^i$ и $\omega_1^5=a\omega^1$, $\omega_2^5=a\omega^2$, $\omega_3^5=a\omega^3$, $\omega_4^5=e\omega^4$,
т. е.

$$d\vec{P}=\left[\frac{a-e}{a}\vec{l_4}-\frac{a-e}{a^2}\bar{a}_4\vec{l_5}\right]\omega^4.$$

Следовательно, поверхность голономности $\omega^4=0$ принадлежит касательной гиперсфере с центром в точке $\vec{P}$ (если $\omega^4=0$, то $d\vec{P}=0$) и радиусом $1/a$. Случай поверхностей III и IV классов рассматриваются аналогично.

Пересечение двух поверхностей голономности $\omega^2=0$ и $\omega^4=0$ III класса принадлежит касательной гиперсфере с центром $\vec{P}$ (если $\omega^2=\omega^4=0$, то $d\vec{P}=0$) и радиусом $1/a$. В самом деле в этом случае $da=(a-b)(\bar{a}_2\omega^2+\bar{a}_4\omega^4)$ и точка

$$\vec{P}=\vec{A}+\frac{1}{a}\vec{l_5},$$

$$d\vec{P}=d\vec{A}-\frac{da}{a^2}\vec{l_5}+\frac{1}{a}d\vec{l_5}=\omega^1\vec{l_1}+\omega^2\vec{l_2}+\omega^3\vec{l_3}+\omega^4\vec{l_4}$$

$$-\frac{1}{a^2}(a-b)(\bar{a}_2\omega^2+\bar{a}_4\omega^4)\vec{l_5}+\frac{1}{a}\{\omega_5^1\vec{l_1}+\omega_5^2\vec{l_2}+\omega_5^3\vec{l_3}+\omega_5^4\vec{l_4}\},$$

$$d\vec{P}=\left(\omega^1+\frac{1}{a}\omega_5^1\right)\vec{l_1}+\left(\omega^2+\frac{1}{a}\omega_5^2\right)\vec{l_2}+\left(\omega^3+\frac{1}{a}\omega_5^3\right)\vec{l_3}$$

$$+\left(\omega^4+\frac{1}{a}\omega_5^4\right)\vec{l_4}-\frac{1}{a^2}(a-b)(\bar{a}_2\omega^2+\bar{a}_4\omega^4)\vec{l_5},$$

но $\omega_i^j=-\omega_j^i$ и $\omega_1^5=a\omega^1$, $\omega_2^5=b\omega^2$, $\omega_3^5=a\omega^3$, $\omega_4^5=b\omega^4$, т. е.

$$d\vec{P}=\left[\frac{a-b}{a}\vec{l_2}-\frac{a-b}{a^2}\bar{a}_2\vec{l_5}\right]\omega^2+\left[\frac{a-b}{a}\vec{l_4}-\frac{a-b}{a^2}\bar{a}_4\vec{l_5}\right]\omega^4.$$

Следовательно, поверхности III класса являются огибающими двухпараметрических семейств гиперсфер.

§ 5. ПОВЕРХНОСТИ V КЛАССА (ВСЕ a, b, c, e РАЗЛИЧНЫ)

Меняем обозначения:

$$\frac{a_2}{a-b}=\bar{a}_2,\quad \frac{b_1}{a-b}=\bar{b}_1,\quad \frac{\alpha}{a-b}=\alpha_1,\quad \frac{\beta}{a-b}=\beta_1,\quad \frac{a_3}{a-c}=a_3,$$

$$\frac{\alpha}{a-c}=\alpha_2,\quad \frac{c_1}{a-c}=\bar{c}_1,\quad \frac{\gamma}{a-c}=\gamma_1,\quad \frac{\alpha}{b-c}=\alpha_3,\quad \frac{b_3}{b-c}=\bar{b}_3,$$

$$\frac{c_2}{b-c}=c_2,\quad \frac{\delta}{b-c}=\delta_1,\quad \frac{a_4}{a-e}=\bar{a}_4,\quad \frac{\beta}{a-e}=\beta_2,\quad \frac{\gamma}{a-e}=\gamma_2,$$

$$\frac{e_1}{a-e}=e_1,\quad \frac{\beta}{b-e}=\beta_3,\quad \frac{b_4}{b-e}=\bar{b}_4,\quad \frac{\delta}{b-e}=\delta_2,\quad \frac{e_2}{b-e}=e_2,$$

$$\frac{\gamma}{c-e}=\gamma_3,\quad \frac{\delta}{c-e}=\delta_3,\quad \frac{c_4}{c-e}=c_4,\quad \frac{e_3}{c-e}=e_3;$$

тогда система (3) принимает вид:

$$\omega^5=0,$$
$$\omega_1^5=a\omega^1,$$
$$\omega_2^5=b\omega^2,$$
$$\omega_3^5=c\omega^3,$$
$$\omega_4^5=e\omega^4$$

(24)
$$\begin{aligned}
da&=a_1\omega^1+(a-b)\bar{a}_2\omega^2+(a-c)\bar{a}_3\omega^3+(a-e)\bar{a}_4\omega^4,\\
db&=(a-b)\bar{b}_1\omega^1+b_2\omega^2+(b-c)\bar{b}_3\omega^3+(b-e)\bar{b}_4\omega^4,\\
dc&=(a-c)\bar{c}_1\omega^1+(b-c)\bar{c}_2\omega^2+c_3\omega^3+(c-e)c_4\omega^4,\\
de&=(a-e)\bar{e}_1\omega^1+(b-e)\bar{e}_2\omega^2+(c-e)\bar{e}_3\omega^3+e_4\omega^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1^2&=\bar{a}_2\omega^1+\bar{b}_1\omega^2+\alpha_1\omega^3+\beta_1\omega^4,\\
\omega_1^3&=\bar{a}_3\omega^1+\alpha_2\omega^2+\bar{c}_1\omega^3+\gamma_1\omega^4,\\
\omega_2^3&=\alpha_3\omega^1+\bar{b}_3\omega^2+\bar{c}_2\omega^3+\delta_1\omega^4,\\
\omega_1^4&=\bar{a}_4\omega^1+\beta_2\omega^2+\gamma_2\omega^3+\bar{e}_1\omega^4,\\
\omega_2^4&=\beta_3\omega^1+\bar{b}_4\omega^2+\delta_2\omega^3+\bar{e}_2\omega^4,\\
\omega_3^4&=\gamma_3\omega^1+\delta_3\omega^2+\bar{c}_4\omega^3+\bar{e}_3\omega^4.
\end{aligned}$$

Удовлетворение условия полной голономности для системы (24) дает

$$\beta_2=\beta_3,\quad \gamma_2=\gamma_3,\quad \delta_2=\delta_3,$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1=-\alpha_3, \quad \beta_1=-\beta_3, \quad \delta_1=\delta_2,\\
(25) \qquad &\alpha_2=\alpha_3, \quad \gamma_1=-\gamma_3, \quad \delta_1=-\delta_3,\\
&\alpha_1=\alpha_2, \quad \beta_1=\beta_2, \quad \gamma_1=\gamma_2.
\end{aligned}
$$

Из полученных уравнений (25) следует

$$\alpha_i=\beta_i=\gamma_i=\delta_i=0, \quad i=1,\ 2,\ 3,$$

т. е. система (24) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\omega^5=0,\\
&\omega_1^5=a\omega^1,\\
&\omega_2^5=b\omega^2,\\
&\omega_3^5=c\omega^3,\\
(26) \qquad &\omega_4^5=e\omega^4,\\
&da=a_1\omega^1+(a-b)\bar{a}_2\omega^2+(a-c)\bar{a}_3\omega^3+(a-e)\bar{a}_4\omega^4,\\
&db=(a-b)\bar{b}_1\omega^1+b_2\omega^2+(b-c)\bar{b}_3\omega^3+(b-e)\bar{b}_4\omega^4,\\
&dc=(a-c)\bar{c}_1\omega^1+(b-c)\bar{c}_2\omega^2+c_3\omega^3+(c-e)\bar{c}_4\omega^4,\\
&de=(a-e)\bar{e}_1\omega^1+(b-e)\bar{e}_2\omega^2+(c-e)\bar{e}_3\omega^3+e_4\omega^4,\\
&\omega_1^2=\bar{a}_2\omega^1+\bar{b}_1\omega^2,\\
&\omega_1^3=\bar{a}_3\omega^1+\bar{c}_1\omega^3,\\
&\omega_2^3=\bar{b}_3\omega^2+\bar{c}_2\omega^3,\\
&\omega_1^4=\bar{a}_4\omega^1+\bar{e}_1\omega^4,\\
&\omega_2^4=\bar{b}_4\omega^2+\bar{e}_2\omega^4,\\
&\omega_3^4=\bar{c}_4\omega^3+\bar{e}_3\omega^4.
\end{aligned}
$$

Будем исследовать вопрос о существовании интегрального многообразия $\mathfrak{M}^4$ системы (26).

Обозначим значения форм на первом интегральном элементе $\mathcal{E}_1$ через α. Для исследования инволютивности системы (26) составим ее полярную матрицу:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{a^1} & 0 & 0 & 0 & (a-b)a^2 & (a-c)a^3 & 0 & (a-e)a^4 & 0 \\
0 & \boxed{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & (b-c)a^3 & 0 & (b-e)a^4 \\
0 & 0 & \boxed{a^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{a^4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{a^1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{a^1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{a^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{a^1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{a^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (a-b)a^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(c-e)a^4 & 0 & (a-c)a^1 & (b-c)a^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & (a-e)a^1 & (b-e)a^2 & (c-e)a^3 \\
0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a^4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^4 & 0 \\
a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^4
\end{array}
$$

Обозначая символом Δ_{10} определитель десятого порядка этой матрицы (взятый в рамку), в общем случае можно считать его отличным от нуля, поэтому $S_1=10$.

Если обозначим значения форм на втором интегральном элементе $\mathcal{E}_2$ через β и составим полярную матрицу для определения S_1+S_2, то в ней легко можно заметить определитель шестнадцатого порядка, отличный от нуля. Поэтому $S_1+S_2=16$, а так как число неизвестных форм $q=16$, то $S_2=6$, $S_3=S_4=0$. Следовательно, число Картана

$$Q=10+2.6+3.0+4.0=22.$$

Дополняя систему (26) ковариантами последних десяти уравнений подставляя в них уравнения системы (26) и разлагая по лемме Картана получим

$$
\begin{aligned}
da_1 &= A_{11}\omega^1+[2a_1a_2+(a-b)A_{21}]\omega^2+[2a_1a_3+(a-c)A_{31}]\omega^3\\
&\quad+[2a_1a_4+(a-e)A_{41}]\omega^4,\\
da_2 &= A_{21}\omega^1+[B_{11}+(a_2)^2+(b_1)^2+a_3b_3+a_4b_4+ab]\omega^2+a_3(a_2+c_2)\omega^3\\
&\quad+a_4(a_2+e_2)\omega^4,\\
da_3 &= A_{31}\omega^1+a_2(a_3+b_3)\omega^2+[C_{11}+(a_3)^2+(c_1)^2+a_4c_4-a_2c_2+ac]\omega^3\\
&\quad+a_4(a_3+e_3)\omega^4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\bar{a}_4 &= A_{41}\omega^1+\bar{a}_2(\bar{a}_4-\bar{b}_4)\omega^2+\bar{a}_3(\bar{a}_4-\bar{c}_4)\omega^3+[E_{11}+(a_4)^2+(\bar{e}_1)^2-\bar{a}_2\bar{e}_2\\
&\quad -\bar{a}_3\bar{e}_3+ae]\omega^4,\\
d\bar{b}_1 &= B_{11}\omega^1+B_{12}\omega^2+\bar{b}_3(\bar{b}_1-\bar{c}_1)\omega^3+\bar{b}_4(\bar{b}_1-\bar{e}_1)\omega^4,\\
db_2 &= [-2\bar{b}_1 b_2+(a-b)B_{12}]\omega^1+B_{22}\omega^2+[2b_2\bar{b}_3+(b-c)B_{32}]\omega^3\\
&\quad +[2b_2\bar{b}_4+(b-e)B_{42}]\omega^4,\\
d\bar{b}_3 &= \bar{b}_1(\bar{a}_4-\bar{b}_3)\omega^1+B_{32}\omega^2+[C_{22}+(\bar{b}_3)^2+(\bar{c}_2)^2+\bar{c}_1\bar{b}_1+\bar{c}_4\bar{b}_4\\
&\quad +bc]\omega^3+\bar{b}_4(\bar{b}_3+\bar{e}_3)\omega^4,\\
d\bar{b}_4 &= \bar{b}_1(\bar{a}_4-\bar{b}_4)\omega^1+B_{42}\omega^2+\bar{b}_3(\bar{b}_4-\bar{c}_4)\omega^3+[E_{22}+(\bar{b}_4)^2+(\bar{e}_2)^2\\
&\quad +\bar{b}_1\bar{e}_1-\bar{b}_3\bar{e}_3+be]\omega^4,\\
d\bar{c}_1 &= C_{11}\omega^1+\bar{c}_2(\bar{b}_1-\bar{c}_1)\omega^2+C_{13}\omega^3+\bar{c}_4(\bar{c}_1-\bar{e}_1)\omega^4,\\
d\bar{c}_2 &= -\bar{c}_1(\bar{c}_2+\bar{a}_2)\omega^1+C_{22}\omega^2+C_{23}\omega^3+\bar{c}_4(\bar{c}_2-\bar{e}_2)\omega^4,\\
dc_3 &= [-2\bar{c}_1c_3+(a-c)C_{13}]\omega^1+[-2\bar{c}_2c_3+(b-c)C_{23}]\omega^2+C_{33}\omega^3\\
&\quad +[2c_3\bar{c}_4+(c-e)C_{43}]\omega^4,\\
d\bar{c}_4 &= \bar{c}_1(\bar{a}_4-c_4)\omega^1+\bar{c}_2(\bar{b}_4-\bar{c}_4)\omega^2+C_{43}\omega^3+[E_{33}+(\bar{c}_4)^2+(\bar{e}_3)^2\\
&\quad +\bar{c}_1\bar{e}_1+\bar{c}_2\bar{e}_2+ce]\omega^4,\\
d\bar{e}_1 &= E_{11}\omega^1+e_2(\bar{b}_1-\bar{e}_1)\omega^2+e_3(c_1-e_1)\omega^3+E_{14}\omega^4,\\
d\bar{e}_2 &= -\bar{e}_1(\bar{a}_2+\bar{e}_2)\omega^1+E_{22}\omega^2+\bar{e}_3(\bar{c}_2-\bar{e}_2)\omega^3+E_{24}\omega^4,\\
d\bar{e}_3 &= -\bar{e}_1(\bar{a}_3+\bar{e}_3)\omega^1-\bar{e}_2(\bar{b}_3+e_3)\omega^2+E_{33}\omega^3+E_{34}\omega^4,\\
de_4 &= [-2\bar{e}_1e_4+(a-e)E_{14}]\omega^1+[-2\bar{e}_2e_4+(b-e)E_{24}]\omega^2\\
&\quad +[-2e_3e_4+(c-e)E_{34}]\omega^3+E_{44}\omega^4.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Следовательно, наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_4$ зависит от 22 параметров:

$$
A_{i1},\ B_{i2},\ C_{i3},\ E_{i4},\ B_{11},\ C_{11},\ E_{11},\ C_{22},\ E_{22},\ E_{33},\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,
$$

т. е. $N=22$. Или $N=Q=22$, т. е. число Картана совпадает с числом произвольных параметров наиболее общего интегрального элемента. Следовательно ([1], гл. III, § 11), цепь регулярна, система в инволюции и интегральное многообразие $\mathfrak{M}^4$ существует и зависит от шести функций двух аргументов ($S_2=6$).

Пользуясь условиями полной голономности (15) для гиперповерхностей 5-мерного пространства, несущих вполне голономную 4-ткань линий кривизны второго вида, легко получаем соответственно те же самые пфаффовые системы для определения существования интегральных многообразий $\mathfrak{M}^4$ второго вида, как и в § 3, 4, 5.

Или справедлива следущая

Теорема: Семейства гиперповерхностей, несущих вполее голономную 4-ткань линий кривизны первого вида и второго вида, соответственно из всех классов совпадают.

Соавтор Д. Т. Дочев участвовал в разработке § 4 настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников, С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва, 1948.
2. Картан, Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. Москва, 1962.
3. Картан, Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. Москва, 1963
4. Билчев, С. И. Трехмерные поверхности четырехмерного евклидова пространства, несущие вполне голономную 3-ткань линий кривизны. — Известия на Мат. инст. на БАН, 11, 1970, 55—56.
5. Фавар, Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. Москва, 1960.

Поступило 29. III. 1971 г.

ЧЕТИРИМЕРНИ ПОВЪРХНИНИ В ПЕТМЕРНОТО ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО, НОСЕЩИ НАПЪЛНО ХОЛОНОМНА 4-ТЪКАН ОТ ЛИНИИ НА КРИВИНАТА

С. Й. Билчев, Д. Тр. Дочев

(*Резюме*)

Въвеждат се определения за хиперповърхнини в петмерното евклидово пространство, носещи напълно холономна 4-тъкан от линии на кривината от първи вид и от втори вид.

Каноничният репер в произволна точка се избира така, че векторът l_5 е перпендикулярен на допирателната равнина към хиперповърхнината в тази точка, а векторите $\vec{l_i}$, $i=1, 2, 3, 4$ са насочени по линиите на кривината.

Извеждат се условията за пълна холономност за повърхнините от първи вид и от втори вид. В зависимост от коефициентите a, b, c, e, влизащи в структурните уравнения, се разглеждат пет класа повърхнини от всеки вид.

Повърхнините от първи вид първи клас се характеризират с $a=b=c=e$. Тези повърхнини съществуват и зависят от шест произволни постоянни.

Повърхнините от първи вид втори клас се характеризират с $a=b=c$ e. Доказва се, че тези повърхнини съществуват с произвол от три функции на две променливи и се явяват обвивки на еднопараметрично семейство хиперсфери.

Повърхнините от първи вид трети клас ($a=c \neq b=e$), четвърти клас ($a=c \neq b \neq e \neq a$) и пети клас (a, b, c, e — различни) съществуват съответно с произвол от четири, пет и шест функции на две променливи.

Доказана е теорема: семейства хиперповърхнини, носещи напълно холономна 4-тъкан от линии на кривината от първи и втори вид, съответно от петте класа, съвпадат.

Изследването е извършено с метода на Картан.

SUR LES HYPERSURFACES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN A 5 DIMENSIONS, QUI PORTENT 4-TISSU COMPLETEMENT HOLONOME DES LIGNES DE COURBURE

S. I. Bilčev, D. T. Dočev

(Résumé)

On introduit des définitions pour hypersurfaces dans l'espace euclidien à 5 dimensions, portantes 4-tissu complètement holonome des lignes de courbure de première et de deuxième sorte.

On choisit le repère canonique dans un point arbitraire de telle sorte que le vecteur $\vec{I_5}$ soit perpendiculaire au plan tangent de la hypersurface dans ce point, et les vecteurs $\vec{I_i}$, $i=1, 2, 3, 4$, soient dirigés sur les lignes de courbure.

On déduit les conditions de l'holonomie complète pour les surfaces de première et de deuxième sorte. En dépendance des coefficients a, b, c, e, qui entrent dans les équations de structure, on étudie 5 types de surfaces de chaque sorte.

Les surfaces de 1ère sorte et 1er type sont déterminées avec $a=b=c=e$. Ces surfaces existent et dépendent de 6 constantes arbitraires.

Les surfaces de 1ère sorte et 2ème type sont caractérisées avec $a=b=c\neq e$. On démontre que ces surfaces existent et dépendent de 3 fonctions arbitraires de 2 variables indépendantes. Elles sont des enveloppes d'une famille de hypersphères, dépendantes d'un paramètre.

Les surfaces de 1ère sorte et 3ème type ($a=c\neq b=e$), 4ème type ($a=c\neq b\neq e\neq a$) et 5ème type (a, b, c, e—divers) existent et dépendent respectivement de 4, 5 et 6 fonctions de 2 variables indépendantes.

On démontre le théorème: les familles de hypersurfaces qui portent 4-tissu complètement holonome des lignes de courbure de première sorte et respectivement des 5 types, coïncident avec les 5 types de deuxième sorte.

L'étude a été faite au moyen de la méthode de E. Cartan.