БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ)

Светослав Й. Билчев, Дочо Т. Дочев, Димитър К. Пантелеев

В настоящей работе мы продолжаем изучение геометрии систем, начатое нами в работах [1] и [2]. Рассматривается вопрос о законах сохранения для изучаемых систем. Найдены необходимые условия существования двух законов сохранения и необходимые и достаточные условия существования одного закона сохранения.

В работах [1] и [2] отмечалось, что система уравнений

$$\omega^3\wedge\omega^1=0,\quad \omega^4\wedge\omega^2=0 \tag{1}$$

является, в характеристических переменных, системой изучаемого типа, где формы ω^i ($i=1, 2, 3, 4$) удовлетворяют структурным уравнениям вида

$$\begin{aligned}
d\omega^1&=(\omega_4^4-\omega_3^3)\wedge\omega^1-a_2^1\omega^2\wedge\omega^3-a_4^1\omega^4\wedge\omega^3+a_4^4\omega^4\wedge\omega^1,\\
d\omega^2&=(\omega_3^3-\omega_4^4)\wedge\omega^2-a_1^2\omega^1\wedge\omega^4-a_3^2\omega^3\wedge\omega^4+a_3^3\omega^3\wedge\omega^2,\\
d\omega^3&=\omega_1^3\wedge\omega^1-\omega_3^3\wedge\omega^3+\omega^2\wedge\omega^4,\\
d\omega^4&=\omega_2^4\wedge\omega^2+\omega_4^4\wedge\omega^4+\omega^1\wedge\omega^3.
\end{aligned}\tag{2}$$

Еще имеют места уравнения:

$$\begin{aligned}
da_4^1&=-2a_4^1\omega_3^3+\quad,\quad da_3^3=-a_3^3\omega_3^3+a_3^2\omega_2^4+\\
da_1^2&=a_1^2(2\omega_3^3-3\omega_4^4)-a_3^2\omega_1^3+\\
d\omega_1^3&=\omega_{11}^3\wedge\omega^1+(2\omega_3^3-\omega_4^4+a_3^3\omega^3-a_4^4\omega^4)\wedge\omega_1^3\\
&\quad+A_1\omega^2\wedge\omega^3-(a_{12}^2+A_4)\omega^4\wedge\omega^3,\\
d\omega_3^3&=(a_3^3\omega^1+a_2^1\omega^2+a_4^1\omega^4)\wedge\omega_1^3+a_3^2\omega^3\wedge\omega_2^4+(A_1+1)\omega^2\wedge\omega^1\\
&\quad+(a_{31}^3+a_4^4)\omega^3\wedge\omega^1+A_3\omega^2\wedge\omega^3-(a_{12}^2+A_4)\omega^4\wedge\omega^1\\
&\quad+(a_2^1a_1^2-a_{41}^1-a_{43}^4)\omega^4\wedge\omega^3-a_3^3\omega^2\wedge\omega^4,
\end{aligned}\tag{3}$$

где невыписанные формы линейно выражаются через ω^i ($i=1, 2, 3, 4$). Выражения для дифференциалов da_3^2, da_4^4, da_2^1, $d\omega_2^4$ и $d\omega_4^4$ получаются соответственно из da_4^1, da_3^3, da_1^2, $d\omega_1^3$ и $d\omega_3^3$ заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$ и $3 \leftrightarrow 4$.

В работе [2] рассматривается вопрос о законах сохранения, допускаемых системой (1). Оказывается, что в общем случае рассмотрение этого вопроса сопровождается громоздкими вычислениями и трудностями. Поэтому доказано существование законов сохранения в частных случаях лишь для найденных в работе [1] систем, допускающих транзитивных групп преобразований.

В настоящей работе вопрос о законах сохранения рассмотрен для системы (17) [1]. Эта система получается из (1) после канонизации параметров $a_3^3=a_4^4=0$, $a_4^1=a_3^2=1$ и имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&d\omega^1=A_{21}\omega^2\wedge\omega^1+A\omega^3\wedge\omega^1-B\omega^4\wedge\omega^1-a_2^1\omega^2\wedge\omega^3+\omega^3\wedge\omega^4,\\
&d\omega^2=A_{12}\omega^1\wedge\omega^2+B\omega^4\wedge\omega^2-A\omega^3\wedge\omega^2-a_1^2\omega^1\wedge\omega^4+\omega^4\wedge\omega^3,\\
(4)\qquad &d\omega^3=b_{21}\omega^2\wedge\omega^1+b_{31}\omega^3\wedge\omega^1+b_{41}\omega^4\wedge\omega^1\\
&\qquad+b_{23}\omega^2\wedge\omega^3+b_{43}\omega^4\wedge\omega^3+\omega^2\wedge\omega^4.\\
&d\omega^4=b_{12}\omega^1\wedge\omega^2+b_{42}\omega^4\wedge\omega^2+b_{32}\omega^3\wedge\omega^2\\
&\qquad+b_{14}\omega^1\wedge\omega^4+b_{34}\omega^3\wedge\omega^4+\omega^1\wedge\omega^3,
\end{aligned}
$$

где коэффициенты b_{ij}, A_{12}, A_{21}, A, B, a_1^2 и a_2^1 ($1\leq i, j\leq 4$) компоненты структурного тензора. Их дифференциалы выражаются линейно через ω^i ($i=1, 2, 3, 4$). Для отыскания законов сохранения пользуемся определением, данным в § 3 работы [4]. В пространстве зависимых и независимых переменных будем искать дифференциальные формы Ω степени $p+1$, замкнутые ($d\Omega=0$) и обращающиеся в нуль на всех интегральных многообразиях. Всякая форма θ, удовлетворяющая условию $d\theta=\Omega$ (хотя бы при локальном рассмотрении такая найдется), будет интегралом системы. Для систем изучаемого нами типа не существуют 0-мерных интегралов, т. е. функций постоянных на всех интегральных многообразиях. Мы будем искать одномерные интегралы или соответствующие им двумерные формы Ω. Всякая такая форма, равная нулю вследствие уравнений (1), имеет вид:

$$
(5)\qquad \Omega=M\omega^3\wedge\omega^1+N\omega^4\wedge\omega^2.
$$

Продифференцировав (3), пользуясь структурными уравнениями и применив лемму Картана, получим:

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&dM=M_1\omega^1+(N-Mb_{23}-MA_{21})\omega^2+M_3\omega^3+(MB-Mb_{43})\omega^4,\\
&dN=(M-Nb_{14}-NA_{12})\omega^1+N_2\omega^2+(NA-Nb_{34})\omega^3+N_4\omega^4.
\end{aligned}
$$

Для совместности системы (6) необходимо, чтобы в результате внешнего дифференцирования этих уравнений не было членов с $\omega^2\wedge\omega^4$ и $\omega^1\wedge\omega^3$ соответственно из первого и второго уравнения. Приравнивая коэффициенты перед формами $\omega^2\wedge\omega^4$ и $\omega^1\wedge\omega^3$ к нулю, получаем два уравнения:

$$
\begin{aligned}
&\alpha M - b_{43}N + M_3 - N_4 = 0, \\
&\beta N - b_{34}M + N_4 - M_3 = 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\alpha = A^4_{21} + B^2 + b_{21} + b_{34} - b_{41}a^1_2 + BA_{21} - Bb_{42}, \\
&\beta = A^3_{12} + A^1 + b_{12} + b_{43} - b_{32}a^2_1 + AA_{12} - Ab_{31}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Складывая уравнения (7), получаем:

$$
(\alpha - b_{34})M + (\beta - b_{43})N = 0. \tag{9}
$$

1°. Тогда условия:

$$
\alpha - b_{34} = 0 \text{ и } \beta - b_{43} = 0 \tag{10}
$$

будут необходимыми для того, чтобы система (1) была „представима в дивергентной форме“ вида:

$$
d\theta^1 = 0, \quad d\theta^2 = 0, \tag{11}
$$

т. е. с двумя уравнениями. Если уравнения (10) не удовлетворяются, то система (1) „не представима в дивергентной форме“ вида (11).

Мы пришли к следующему результату:

Теорема 1. Система (1) обладает двух инвариантов:

$$
\begin{aligned}
&I_1 = \alpha - b_{34} = A^1_{21} + B^2 + b_{21} - b_{41}a^1_2 + BA_{21} - Bb_{42}, \\
&I_2 = \beta - b_{43} = A^3_{12} + A^1 + b_{12} - b_{32}a^2_1 + AA_{12} - Ab_{31},
\end{aligned} \tag{12}
$$

одновременное обращение в нуль которых необходимо для существования у системы двух законов сохранения.

2°. Дальше рассматриваем случай общего решения уравнения (9), т. е.

$$
\begin{aligned}
&M = (\beta - b_{43})H = I_2H, \\
&N = (\alpha - b_{34})H = I_1H,
\end{aligned} \tag{13}
$$

где H ненулевая функция и инварианты I_1 и I_2 не нули и не константы. Тогда дифференциалы этих инвариантов будут выражаться линейно через ω^i ($i = 1, 2, 3, 4$) по формулам

$$
dI_1 = p_i\omega^i, \quad dI_2 = q_i\omega^i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{14}
$$

Подставляя выражения (13) в (9), получим:

$$
H(\alpha\beta - b_{34}b_{43}) + M_3 - N_4 = 0. \tag{15}
$$

Подставляем выражения (13) в (6):

$$
\begin{aligned}
I_2dH + HdI_2 &= M_1\omega^1 + [b_{23}b_{43} - I_1 - b_{23}\beta - A_{21}\beta + A_{21}b_{43}]H\omega^2 \\
&\quad + M_3\omega^3 + [BI_2 - b_{43}I_2]H\omega^4, \\
-I_1dH - HdI_1 &= [-b_{14}b_{34} + I_2 + b_{14}\alpha + A_{12}\alpha - A_{12}b_{34}]H\omega^1 + N_2\omega^2 \\
&\quad + [b_{34}I_1 - AI_1]H\omega^3 + N_4\omega^4.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Умножая первое уравнение (16) на $I_1(=\alpha-b_{34})$, а второе — на $I_2(=\beta-b_{43})$, складывая их и сравнивая выражения перед формами ω^i, получаем:

$$M_1=f_1H,\quad M_3=f_3H,\quad N_2=f_2H,\quad N_4=f_4H, \tag{17}$$

где f_i ($i=1, 2, 3, 4$) — функции, зависящих от коэффициентов, входящих в выражений (12). Подставляя (17) в (16), получим:

$$dH=Hc_i\omega^i\quad (i=1, 2, 3, 4). \tag{18}$$

Замкнутость формы $\Psi=c_i\omega^i$, т. е.

$$d\Psi=d(c_i\omega^i)=0 \tag{19}$$

является условием интегрируемости уравнения (18). Мы доказали

Теорема 2. Необходимое и достаточное условие существования одного закона сохранения будет выполнение равенства (19) и

$$(\alpha-b_{34})^2p_4+(\beta-b_{43})^2q_3+(\alpha-b_{34})(\beta-b_{43})[(\alpha-b_{34})(b_{43}-B)$$
$$+(\beta-b_{43})(b_{34}-A)-(p_3+q_4)]=0$$

или

$$(\alpha\beta-b_{34}b_{43})[(\alpha-b_{34})^2r_4+(\beta-b_{43})^2s_3-(\alpha-b_{34})(\beta-b_{43})(r_3+s_4+1)]$$
$$+(\alpha-b_{34})(\beta-b_{43})[(\alpha-b_{34})(b_{43}-B)+(\beta-b_{43})(b_{34}-A)]=0$$

соответственно в случаях, когда $\alpha\beta-b_{34}b_{43}=0$ или $\alpha\beta-b_{34}b_{43}\neq 0$ (в этом случае $d\dfrac{\beta-b_{43}}{\alpha\beta-b_{34}b_{43}}=r_i\omega^i$ и $d\dfrac{\alpha-b_{34}}{\alpha\beta-b_{34}b_{43}}=s_i\omega^i$, $i=1, 2, 3, 4$).

3°. Отдельно рассмотрим случай, когда инварианты I_1 и I_2 есть константы, отличные от нуля (случаи $I_1=0$, $I_2\neq 0$ и $I_1\neq 0$, $I_2=0$ не рассматриваются, так как они приводят к нулевыми функциями: $M=N=0$). Тогда из уравнений (6), имея в виду (13), получаем:

$$\begin{aligned} I_2dH&=M_1\omega^1+(N-Mb_{23}-MA_{21})\omega^2+M_3\omega^3+(MB-Mb_{43})\omega^4,\\ I_1dH&=(M-Nb_{34}-NA_{12})\omega^1+N_2\omega^2+(NA-Nb_{34})\omega^3+N_4\omega^4. \end{aligned} \tag{20}$$

Из уравнений (20), после сравнения, выражаем M_1, M_3, N_2 и N_4 через H. Подставляем эти выражения в первое уравнение и получаем:

$$dH=Hm_i\omega^i\quad (i=1, 2, 3, 4). \tag{21}$$

Замкнутость формы $m_i\omega^i$ является необходимым и достаточным условием интегрируемости уравнения (21).

Теорема 3. Необходимое и достаточное условие существования одного закона сохранения, в случае когда инварианты есть постоянные, отличны от нуля, будет выполнение условия $d(m_i\omega^i)=0$ и

$$(b_{43}-B)I_1+(b_{34}-A)I_2=\alpha\beta-b_{34}b_{43}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Билчев, С. Й. Системы из двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (локальная теория). — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, № 3, 1970, 14—21.
2. Билчев, С. Системы из двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (о законах сохранения). — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, № 6, 1970, 28—34.
3. Билчев, С. Й. Трехмерные поверхности четырехмерного евклидова пространства, несущие вполне голономную 3-ткань линий кривизны. — Изв. Мат. инст. БАН, 11, 1970, 55—66.
4. Васильев, А. М. Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех неизвестных функциях и двух независимых переменных. — Матем. сб., 70 (112), 1966, № 4, 457—480.
5. Фиников, С. П. Метод внешних форм Картана. М., 1948.
6. Картан, Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М., 1962.

Поступила 22. X. 1970 г.

СИСТЕМИ ОТ ДВЕ ЧАСТНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПЪРВИ РЕД (ЗА ЗАКОНИТЕ НА СЪХРАНЕНИЕ)

Светослав Билчев, Дочо Дочев,
Димитър Пантелеев

(Резюме)

В работата е разгледан в общ вид въпросът за законите на съхранение за изучавания тип системи $S_{2,2}^{(1)}$ (с две зависими и две независими променливи).

Намерени са необходими условия за привеждане (редуциране) на системите $S_{2,2}^{(1)}$ в дивергентна форма с две уравнения и необходими и достатъчни условия за привеждане в дивергентна форма с едно уравнение.

Изследванията са извършени по метода на Картан.

SYSTEME ZWEIER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG (ÜBER DIE ERHALTUNGSGESETZE)

Svetoslav Bilčev, Dočo Dočev,
Dimităr Panteleev

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit wird in allgemeiner Form die Frage über die Erhaltungsgesetze für den untersuchten Typ $S_{2,2}^{(1)}$ von Systemen (mit zwei abhängigen und zwei unabhängigen Variablen) behandelt.

Es werden notwendige Bedingungen für das Reduzieren der Systeme $S_{2,2}^{(1)}$ auf „Divergenzform“ mit zwei Gleichungen und notwendige und hinreichende Bedinungen für das Reduzieren auf „Divergenzform“ mit einer Gleichung aufgestellt.

Die Berechnungen werden mit der Methode von E. Cartan durchgeführt.