БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

УСТОЙЧИВОСТ ОТ n-ТИ РЕД

Рангел Ст. Кръстев

В настоящата статия ще въведем новото понятие устойчивост от n-ти ред и ще намерим някои критерии за такава устойчивост. Ще дадем механично и геометрично тълкуване на този вид устойчивост.

Нека положим

$$y=\operatorname{colon}[y_1,\dots,y_k],\quad y'=\operatorname{colon}[y_1',\dots,y_k'],$$
(1)
$$f(x,y)=\operatorname{colon}[f_1(x,y),\dots,f_k(x,y)].$$

При тези полагания системата

(2) $$y_i' = f_i(x,y_1,\dots,y_k)\quad (i=1,\dots,k)$$

се записва така:

(3) $$y'=f(x,y).$$

Дефиниция 1. Нека y е устойчиво в смисъл на Ляпунов решение на системата диференциални уравнения (3) при $x\to\infty$. Ще казваме, че y е устойчиво от n-ти ред, когато за всяко решение u на (3), за което

(4) $$\|u-y\|<\varepsilon \quad \text{при} \quad x_0\leqq x<\infty,$$

има крайно положително число A, такова, че са изпълнени и следните неравенства:

(5) $$\|u^{(m)}-y^{(m)}\|<A\varepsilon \quad \text{при} \quad x_0\leqq x<\infty \quad \text{за } m=1,\dots,n.$$

Това означава, че ε може да се избере така, щото нормите (4) да бъдат произволно малки.

Механичното тълкуване на този вид устойчивост е следното. Ако устойчивостта е от втори ред, то от известно $t_0\leqq t$ скоростите и ускоренията на движещите се точки по законите за движения u и y се различават така, както е посочено в (5). Ако устойчивостта е от първи ред, то само скоростите удовлетворяват (5).

Дефиниция 2. Ще казваме, че y е асимптотично устойчиво от n-ти ред решение на (3), когато то е устойчиво от n-ти ред и са изпълнени условията

(6) $$\lim_{x\to\infty}\|u^{(m)}-y^{(m)}\|=0\quad (m=0,1,\dots,n).$$

Теорема 1. Нека $y \equiv 0$ е асимптотично устойчиво от n-ти ред решение на (3) $[f(x,0)\equiv 0]$ и нека u е решение на (3), което удовлетворява условията (6). Нека още разбираме

$$\lim_{x\to\infty} u^{(m)}(x) = u^{(m)}(\infty) \quad (m = 0, 1, \ldots, n). \tag{7}$$

При тези предположения в точката $y=0$ решенията u имат помежду си и с решението $y=0$ допиране от n-ти ред.

Доказателство. От условието за асимптотична устойчивост от n-ти ред имаме

$$\lim_{x\to\infty} \|u^{(m)}\| = 0 \quad (m=0, 1, \ldots, n) \tag{8}$$

и понеже е изпълнено (7), то

$$u^{(m)}(\infty) = 0 \quad (m=0, 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Това показва, че всички решения, удовлетворяващи условието за асимптотична устойчивост от n-ти ред, удовлетворяват (9) и следователно се допират помежду си и до $y=0$ от n-ти ред в точката $y=0$ $(x=\infty)$.

Нека разгледаме системата интегро-диференциални уравнения

$$y' = f(x, y). \tag{10}$$

За тази система ще докажем следната

Теорема 2. Нека f удовлетворява условието на Липшиц по y с константа B.

1) Ако y е устойчиво решение на (10), то е и устойчиво от първи ред.

2) Ако y е асимптотично устойчиво решение на (10), то е и асимптотично устойчиво от първи ред.

Доказателство. 1) Нека u е решение на (10), за което

$$\|u-y\| < \varepsilon, \quad x_0 \leq x < \infty. \tag{11}$$

Вижда се, че

$$\|u'-y'\| = \|f[x,u]-f[x,y]\| \leq B\,\|u-y\| \leq [B]\varepsilon. \tag{12}$$

Това означава съгласно дефиниция 1, че y е устойчиво от първи ред.

2) Ако y е асимптотично устойчиво решение на (10), то $\lim\limits_{x\to\infty} \|y-u\| = 0$ за всяко u, удовлетворяващо условието

$$\|u(x_0)-y(x_0)\| < \delta(x_0, \varepsilon).$$

Тогава от (12) получаваме

$$\lim_{x\to\infty} \|u'-y'\| \leq \lim_{x\to\infty} \|u-y\|, \tag{13}$$

което означава, че y е асимптотично устойчиво от първи ред.

Нека разгледаме реалната нелинейна система

$$y' = A(x)y + f(x,y) \quad (f(x,0)\equiv 0), \tag{14}$$

където $A(x)$ е матрица.

За (14) ще докажем следната

Теорема 3. Нека $\|A(x)\| \leq A$ и

(15) $$\|f(x,y)\| \leq \varphi(x) |\,.\; y\,^{m} \quad (m>0), \qquad \varphi(x) \leq B$$

(A и B — положителни константи).

1) Ако y 0 е устойчиво решение на (14), то е и устойчиво от първи ред.

2) Ако y 0 е асимптотично устойчиво решение на (14), то е и асимптотично устойчиво от първи ред.

Доказателство. 1) Нека y е решение, за което $y < \varepsilon$, когато $x_0 \leq x <$ Тогава

(16) $$y' \quad A(x) \quad y + \varphi \quad y\,^{m} < \varepsilon [A + B\varepsilon^{m-1}],$$

което ще рече, че y 0 е устойчиво от първи ред решение на (14).

2) Ако y 0 е асимптотично устойчиво решение на (14), то

$$\lim_{x\to\infty} y \quad 0 \quad \text{и следователно} \quad \lim_{x\to\infty} y' \quad 0,$$

което се вижда от (16). Това показва, че в този случай y 0 е асимптотично устойчиво от първи ред.

Да разгледаме линейната система

(17) $$y' = A(x)y \quad f(x),$$

където $A(x)$ е матрица, а $f(x)$ е вектор

$$[f(x) \quad \mathrm{colon}(f \qquad , f_k)].$$

За (17) ще докажем следната

Т е о р е м а 4. Нека системата (17) притежава дефинирано и n пъти диференцируемо решение в интервала $x_0 \leq x <$ Нека матрицата A и f са n 1 пъти диференцируеми и ограничени, включително и производните им до (n 1)-те:

(18) $$A^{(r)} \quad \leq M_r \quad (r \quad 0, 1, . \quad , n-1).$$

При тези предположения:

1) ако y е устойчиво решение на (17), то е и устойчиво от n-ти ред;

2) ако y е асимптотично устойчиво решение на (17), то е и асимптотично устойчиво от n-ти ред.

Д о к а з а т е л с т в о. 1) Нека u е решение, за което

(19) $$u \quad y \quad < \varepsilon, \quad x_0 \leq x <$$

Вижда се, че

(20) $$|\,u' - y' \qquad A \qquad u - y \leq M_0 \varepsilon.$$

Като диференцираме (17) и имаме пред вид условията (18) от теоремата, получаваме

(21) $$u'' - y'' \quad < A_2\, \varepsilon.$$

Така, продължавайки n - 1 пъти, получаваме

(22) $$\| u^{(n)} - y^{(n)} \| < A_n \,.\, \varepsilon$$

($A_1, \ldots, A_n$ са положителни константи, произходът на които е очевиден).

От изложеното се вижда, че y е устойчиво от n-ти ред.

2) Нека y е асимптотично устойчиво решение на (17). Тогава

$$\lim_{x\to\infty} \| u-y \| = 0,$$

когато

$$\| u(x_0)-y(x_0) \| < \delta(x_0, \varepsilon).$$

От (20), (21), (22) се вижда, че

$$\lim_{x\to\infty} \| u^{(r)}-y^{(r)} \| = 0, \quad r=1, \dots, n,$$

което означава, че y е асимптотично устойчиво от n-ти ред.

Следствие. От доказаното следва, че ако една линейна система диференциални уравнения с постоянни коефициенти има n пъти диференцируемо устойчиво или асимптотично устойчиво решение в интервала $x_0 \leq x < \infty$, то е и устойчиво от n-ти ред, съответно асимптотично устойчиво от n-ти ред. Твърдението следва от обстоятелството, че всички коефициенти са ограничени и производните им са равни на нула (следователно изпълнени са условията в теорема 4).

Ако решението е аналитично, то е устойчиво, съответно асимптотично устойчиво от произволен ред (ако е устойчиво, съответно асимптотично устойчиво).

Ще разглеждаме системата

$$y' = f(x, y), \tag{23}$$

За която ще докажем следната

Теорема 5. Нека $f(x, y)$ удовлетворява условието на Липшиц по y с константа A. Нека f'_x и f'_y съществуват, $\|f'_y\| < B$, а f'_x удовлетворява условието на Липшиц по y с константа C, в областта в която (23) притежава решение

$$D\{x_0 \leq x < \infty, \ \| y \| < H\}.$$

При тези предположения:

1) ако y е устойчиво решение на (23), то е устойчиво от втори ред;

2) ако y е асимптотично устойчиво решение на (23), то е асимптотично устойчиво от втори ред.

Доказателство. 1) Нека u е решение, за което

$$\| u-y \| < \varepsilon, \quad x_0 \leq x < \infty \tag{24}$$

Тогава

$$\| u'-y' \| \leq \| f(x, u)-f(x, y) \| \leq A \| u-y \| < A\varepsilon \tag{25}$$

и

$$\begin{aligned} \| u''-y'' \| &\leq \| f'_x(x, u)-f'_x(x, y) \| + \| f'_y(x, u)u'-f'_y(x, y)y' \| \\ &\leq C \| u-y \| + B \| u'-y' \| < \varepsilon [C+AB]. \end{aligned} \tag{26}$$

От (25) и (26) се вижда, че y е устойчиво от втори ред.

2) Нека y е асимптотично устойчиво решение на (23). Тогава

$$\lim_{x\to\infty} \| u-y \| = 0 \tag{27}$$

и следователно, както се вижда от (25) и (26),

$$\lim_{x\to\infty} \| u' - y' \| = 0, \quad \lim_{x\to\infty} | u'' - y'' | = 0, \tag{28}$$

което показва, че y е асимптотично устойчиво от втори ред. Изложените дефиниции и теореми обобщават дефинициите и теоремите на Ляпунов [1, 2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Брадистилов, Г. Висша математика. III. С., 1959.
2. Демидович, В. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
3. Чезари, Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1964.

Постъпила на 22. VI. 1971 г.

УСТОЙЧИВОСТЬ n-ГО ПОРЯДКА

Рангел Крыстев

(Резюме)

В статье рассматривается новый тип устойчивости на основе следующих определений:

1. Пусть y — устойчивое в смысле Ляпунова решение системы дифференциальных уравнений (3) при $x \to \infty$. Будем считать y устойчивым n-го порядка, если для каждого решения u системы (3), для которого удовлетворено условие $|u-y| < \varepsilon$ при $x_0 \leqq x < \infty$, существует конечное положительное число A такое, что выполняются неравенства

$$|u^{(m)} - y^{(m)}| < A\varepsilon$$

при $x_0 \leqq x < \infty$ для $m = 1, \ldots, n$.

2. Будем считать y асимптотически устойчивым n-го порядка решением системы (3), если y устойчиво n-го порядка и удовлетворены условия

$$\lim_{x\to\infty} |u^{(m)} - y^{(m)}| = 0 \quad (m = 0, \ldots, n).$$

Для введенного типа устойчивости доказывается ряд теорем.

STABILITY OF n^{th} ORDER

Rangel Krăstev

(Summary)

In the present article we introduce a new kind of stability by the following definitions:

1. Let y be a stable solution in Lyapunov's sense of the system of differential equations (3) at $x \to \infty$. We shall say that y is stable of n^{th} order when for any solution u of (3) for which $|u-y| < \varepsilon$ with $x_0 \leqq x < \infty$ there is a finite positive number A such that the inequalities

$$|u^{(m)} - y^{(m)}| < A\varepsilon$$

with $x_0 \leqq x < \infty$ hold true for $m = 1, \ldots, n$.

2. We shall say that y is an asymptotically stable of n^{th} order, when it is stable of n^{th} order and the conditions

$$\lim_{x \to \infty} |u^{(m)} - y^{(m)}| = 0 \quad (m = 0, \ldots, n)$$

hold.

For this kind of stability a number of theorems are proved.