БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

НЯКОИ РЕЗУЛТАТИ ЗА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕТО НА НУЛИТЕ НА ЦЕЛИТЕ ФУНКЦИИ ОТ ВИДА

$$\int_0^1 f(t)\cos tzdt \quad \text{и} \quad \int_0^1 f(t)\sin tzdt$$

Петър К. Русев

Проблемът за разпределението на нулите на целите функции от вида

$$U(f;z)\quad \int_0^1 f(t)\cos tzdt \tag{1}$$

и

$$V(f;z)\quad \int_0^1 f(t)\sin tzdt \tag{2}$$

е третиран систематично може би за пръв път от Г Пойа. Основният резултат на Пойа гласи: ако $f(t)$ е положителна и ненамаляваща в интервала $[0, 1]$, целите функции (1) и (2) имат само реални нули. Подробно е дискутиран също така и въпросът за взаимното разположение на нулите за целите функции (1) и (2) в този случай и в частност Пойа установява, че освен когато $f(t)$ има само краен брой точки на растеж и всички такива точки са рационални, целите функции (1) и (2) нямат общи нули и нещо повече, нулите им се разделят взаимно.

Методът на Пойа се основава на следното помощно твърдение, установено от него посредством метода на варириане на аргумента: ако нулите на полинома $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ с реални коефициенти са в единичния кръг, тригонометричните полиноми $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kz$ и $\sum_{k=0}^{n} a_k \sin kz$ имат само реални нули.

Нека $f(t)$ е положителна и ненамаляваща в интервала $[0, 1]$. Съгласно една теорма на Какейа [2] за всяко $n = 1, 2, 3, \ldots$ нулите на полинома

$$(3) \qquad P_n(f;z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k$$

са в единичния кръг. От помощното твърдение следва тогава, че целите функции

$$U_n(f;z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{k}{n} z$$

и

$$V_n(f;z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \sin \frac{k}{n} z$$

имат само реални нули за всяко $n = 1, 2, 3, \ldots$ Понеже $f(t)$ е интегрируема в риманов смисъл в интервала $[0, 1]$,

$$\lim_{n \to \infty} U_n(f;z) = \int_0^1 f(t) \cos tz\,dt$$

и

$$\lim_{n \to \infty} V_n(f;z) = \int_0^1 f(t) \sin tz\,dt$$

равномерно върху всяко ограничено множество от комплексната равнина. От една известна теорема на Хурвиц [3] следва, че целите функции (1) (2) имат само реални нули. Но както не е трудно да се установи, всяка цяла функция от вида (1) или (2) винаги има, и то даже безбройно много нули. Наистина редът на цяла функция $F(z)$ от вида $U(f;z)$ или $V(f;z)$ не надминава единица и ако допуснем, че $F(z)$ има краен брой нули, тя ще има вида $Q(z)e^{q(z)}$, където $Q(z)$ и $q(z)$ са полиноми и степента на $q(z)$ не надминава единица. Но в такъв случай идваме до противоречие с една лема на Риман, съгласно която $\lim\limits_{x \to +\infty} U(f;x) = \lim\limits_{|x| \to \infty} V(f;x) = 0$.

Методът за изследване разпределението на нулите на целите функции от вида (1) и (2), предложен от Пойа, който може да бъде наречен още метод на интегралните суми, в същност води до следното твърдение, което ще формулираме като

Теорема 1. Нека E е множеството на реалните функции $f(t)$, дефинирани и интегруеми в риманов смисъл в интервала $[0, 1]$, които притежават следното свойство: за всички достатъчно големи n нулите на полиномите (3) са в единичния кръг. Тогава, ако $f \in E$, целите функции (1) и (2) имат само реални нули.

Методът на Пойа е широко използван в изследвания на Л. Чакалов, Н. Обрешков, Л. Илиев, Е. Божоров и др. върху разпределението на нулите на целите функции от вида (1) и (2). Предложени са също така и различни модификации на този метод.

В следващото изложение се анонсират някои резултати за разпределението на нулите за целите функции от вида (1) и (2). В първите три части се разглеждат класи от цели функции от вида (1) и (2), които имат само реални нули. В последната четвърта част се третират въпроси от по-общ характер, свързани с разпределението на нулите на целите функции от вида (1) и (2).

I

Както беше изтъкнато вече, ако $f(t)$ е неотрицателна и ненамаляваща върху интервала $[0, 1]$, целите функции (1) и (2) имат само реални нули. Ако $f(t)$ има краен брой точки на растеж, целите функции (1) и (2) могат да имат общи нули и даже безбройно много. Простият пример

$$U(1\,;z)=\int_0^1 \cos tz\,dt=\frac{\sin z}{z}=\frac{2}{z}\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2},$$

$$V(1\,;z)=\int_0^1 \sin tz\,dt=\frac{1-\cos z}{z}=\frac{2}{z}\sin\frac{z}{2}\sin\frac{z}{2}$$

показва, че това наистина може да се случи. Нещо повече, както установява Пойа в цитираната му по-горе работа, това е така винаги, когато $f(t)$ е „изключителна" функция, т. е. ако $f(t)$ е неотрицателна, ненамаляваща върху $[0, 1]$, но има само краен брой точки на растеж и всички такива точки са рационални числа.

С оглед на бъдещите нужди ще разгледаме още един пример. Нека $\eta(t)$ е функцията, дефинирана върху интервала $[0, 1]$, както следва:

$$\eta(t)=\begin{cases} 1, & 0\le t<\frac{1}{2}, \\ 0, & t=\frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2}<t\le 1. \end{cases} \tag{4}$$

Тогава чрез непосредствено пресмятане получаваме, че

$$U(\eta\,;z)=\frac{2}{z}\left(1-\cos\frac{z}{2}\right)\sin\frac{z}{2}$$

и

$$V(\eta\,;z)=\frac{2}{z}\left(1-\cos\frac{z}{2}\right)\cos\frac{z}{2},$$

т. е. получихме цели функции от вида (1) и (2) съответно, които имат пак безбройно много общи нули и освен това имат само реални нули.

В тази част разглеждаме именно класи от цели функции от вида (1) и (2), за които се установява, че имат безбройно много общи нули и освен това, че всичките им нули са реални.

Теорема 2. Нека σ реално число, такова, че $|\sigma|\leq 1$, и $f(t)$ принадлежи на множеството E, дефинирано в условието на теорема 1. Тогава, ако $f(1)\neq 0$,

а) целите функции

$$(5)\qquad U(f,\sigma;z)=\int_0^1 \{f(t)+\sigma f(1-t)\}\cos tz dt$$

и

$$(6)\qquad V(f,\sigma;z)=\int_0^1 \{f(t)+\sigma f(1-t)\}\sin tz dt$$

имат само реални нули;

б) ако $|\sigma|=1$, целите функции $U(f,\sigma;z)$ и $V(f,\sigma;z)$ имат безбройно много нули.

Ще отбележим преди всичко, че твърдението а) на теорема 2 е по същество установено в работата на Л. Чакалов ([4], стр. 80). Теорема 2 може да бъде установена с помощта на следното твърдение, което е модификация на една теорема на Шур [5].

Лема 1. Нека $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ е полином от n-та степен, чиито нули лежат в единичния кръг, и ε е комплексно число, такова, че $|\varepsilon|\leq 1$. Тогава

а) нулите на полинома

$$P(\varepsilon;z)=P(z)+\varepsilon P^*(z),$$

където $P^*(z)=z^n \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{n-k}\,.\,z^k$, са в единичния кръг;

б) ако $|\varepsilon|=1$, нулите на $P(\varepsilon;z)$ са по единичната окръжност.

С оглед обаче на бъдещи нужди ще възпроизведем тук пътя, следван от Л. Чакалов в цитираната му работа. Тя е посветена на класа L от цели функции $F(z)$, притежаващи свойството, че съществува редица от полиноми $\{P_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, която клони към $F(z)$ равномерно върху всяко ограничено множество на комплексната равнина и освен това за всички достатъчно големи n нулите на $P_n(z)$ лежат в полуравнината $\text{Im}(z)>0$. За така дефинираната класа L се пренасят почти без изменение редица твърдения за разпределението на нулите на полиномите, като например теоремата на Гаус — Люка. По-точно, ако $F(z)\in L$, то и $F'(z)\in L$. За нашите нужди са необходими и други свойства на функциите от класа L, които ще формулираме като помощни твърдения. Преди това обаче ще установим твърдение, от което следва, че едно твърде широко множество от цели (трансцендентни) функции принадлежи на класа L. По същество това твърдение е установено на стр. 76 от цитираната работа на Л. Чакалов, но доказателството, което се предлага тук, е по-елементарно.

Лема 2. Ако нулите на полинома $P(z)$ лежат в единичния кръг, цялата функция $F(z)=P(e^{iz})$ принадлежи на класа L.

Доказателство. Ако две функции $F(z)$ и $G(z)$ принадлежат на класа L, то и тяхното произведение $F(z)\,G(z)$ също принадлежи на L. Поради тази забележка достатъчно е да установим твърдението на лемата само за случая, когато $P(z)$ е от първа степен. Нека $P(z)=z-a$ и $|a|\leq 1$. Да положим

$$P_n(z)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{iz}{n}\right)^n-a.$$

Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(z)=e^{iz}-a=P(e^{iz})$ равномерно върху всяко ограничено множество и за всяко $n=1,2,3,\ldots$ нулите на $P_n(z)$ са в полуравнината $\mathrm{Im}(z)>0$.

Лема 3. Ако редицата от функции $\{F_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, принадлежащи на класа L, е равномерно сходяща върху всяко ограничено множество и $F(z)=\lim\limits_{n\to\infty} F_n(z)$, $F(z)$ също принадлежи на L.

Доказателство. За всяко $n=1,2,3,\ldots$ съществува полином $P_n(z)$, чиито нули са в полуравнината $\mathrm{Im}(z)>0$ и освен това $|F_n(z)-P_n(z)|<\frac{1}{n}$ за $|z|\leq n$. Ако M е произволно ограничено множество, да определим R така, че M да се съдържа в кръга $|z|\leq R$. Нека $\varepsilon>0$ е произволно и да определим $N=N(\varepsilon)$ така, че $N\geq R$, $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$ за $n>N$ и $|F(z)-F_n(z)|<\frac{\varepsilon}{2}$ за $|z|\leq R$. Тогава за всяко $z\in M$ и всяко $n>N$ ще имаме $|F(z)-P_n(z)|\leq |F(z)-F_n(z)|+|F_n(z)-P_n(z)|<\varepsilon$, т. е. редицата от полиноми $\{P_n(z)\}$ е равномерно сходяща към $F(z)$ върху M.

Лема 4. Ако $F(z)\in L$, целите функции

$$u(z)=\frac{1}{2}\{F(z)+\overline{F}(z)\}$$

и

$$v(z)=\frac{1}{2i}\{F(z)-\overline{F}(z)\}$$

имат само реални нули.

Забележка. Ако $F(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$ е цяла функция, по определение $\overline{F}(z)=\bar{a}_0+\bar{a}_1z+\bar{a}_2z^2+\ldots$

Без да се спираме подробно върху доказателството на лема 4, ще отбележим, че тя е следствие от теоремата на Билер — Ермит за полиноми и теоремата на Хурвиц, която беше упомената по-горе.

Доказателство на теорема 2. а) За всички достатъчно големи n нулите на полинома

$$P_n(f;z)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)z^k$$

лежат в кръга $|z|\leq 1$. От лема 1 следва, че за всички такива n нулите на полинома

(7) $$P_n(f,\sigma;z)=P_n(f;z)+\sigma P_n^*(f;z)=\sum_{k=0}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)+\sigma f\left(1-\frac{k}{n}\right)\right\}z^k$$

са в единичния кръг, щом $|\sigma|\leq 1$. Според лема 2 цялата функция

(8) $$Q_n(f,\sigma;z)=\frac{1}{n}P_n(f,\sigma;z)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)+\sigma f\left(1-\frac{k}{n}\right)\right\}e^{i\frac{k}{n}z}$$

принадлежи на класа L. Следователно съгласно лема 3 цялата функция

(9) $$E(f,\sigma;z)=\int_0^1\{f(t)+\sigma f(1-t)\}e^{itz}dt$$

също принадлежи на L и от лема 4 следва, че целите функции (5) и (6) имат само реални нули.

б) Ако $|\sigma|=1$, за всички достатъчно големи n нулите на полинома (7) ще лежат върху единичната окръжност. За всички такива n цялата функция (8) ще има само реални нули. От теоремата на Хурвиц следва тогава, че цялата функция (9) няма нереални нули. Но както установихме, че целите функции от вида (1) и (2) имат винаги безбройно много нули, така се доказва, че и цялата функция от вида $\int_0^1 \varphi(t)e^{itz}dt$ винаги има безбройно много нули. И така при условията на теорема 2 цялата функция (9) има безбройно много нули и всички те са реални. Но това означава, че целите функции (5) и (6) имат в разглеждания случай безбройно много общи нули.

Теорема 3. Нека τ е реално число, такова, че $|\tau|\leq 1$, и F_τ е множеството на реалните функции $f(t)$ върху интервала $[0, 1]$, които са интегруеми в риманов смисъл и удовлетворяват следните изисквания:

1) $f(t)=\tau f(1-t)$ за $\frac{1}{2}<t\leq 1$;

2) за всички достатъчно големи n нулите на полинома

$$Q_n(f;z)=\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{2n-1}\right)z^k$$

лежат вън от единичния кръг.

Тогава:

а) ако $f(t)\in F_\tau$, целите функции $U(f;z)$ и $V(f;z)$ имат само реални нули;

б) ако $f(t)\in F_1$,

$$U(f;z)=R(z)\cos\frac{z}{2},$$

$$V(f;z)=R(z)\sin\frac{z}{2},$$

където $R(z)$ е цялата функция, която има само реални нули, и освен това $R(z)=\frac{2}{z}\sin\frac{z}{2}$ тогава и само тогава, когато $f(t)=1$ почти навсякъде в интервала $[0, 1]$.

в) ако $f(t) \in F_{-1}$,

$$U(f;z) = S(z)\sin\frac{z}{2},$$

$$V(f;z) = -S(z)\cos\frac{z}{2},$$

където $S(z)$ е цяла функция, която има само реални нули и освен това $S(z) = \frac{2}{z}\left(1-\cos\frac{z}{2}\right)$ тогава и само тогава, когато $f(t) = \eta(t)$ почти навсякъде в интервала $[0, 1]$, където $\eta(t)$ е функцията (4).

Доказателството на теорема 3 се опира на един резултат на Л. Илиев (вж. [6], помощната теорема на стр. 15). В същност ние се нуждаем от една модификация на този резултат, а именно:

Лема 5. Нека $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ е полином, чиято степен не надминава n, всичките нули на който са вън от единичния кръг, и ε е комплексно число, такова, че $|\varepsilon| < 1$.

Тогава:

а) нулите на полинома

$$Q(\varepsilon; z) = Q(z) + \varepsilon z^p Q^*(z),$$

където $Q^*(z) = z^n \bar{Q}\left(\frac{1}{z}\right)$ и p е произволно цяло неотрицателно число, са в единичния кръг;

б) ако $|\varepsilon| = 1$, нулите на $Q(\varepsilon; z)$ са по единичната окръжност.

Доказателство на теорема 3. а) От лема 5 следва, че за всички достатъчно големи n нулите на полинома

$$Q_n(f, \tau; z) = Q_n(f; z) + \tau z^n Q_n^*(f; z)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{2n-1}\right) z^k + \tau \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{2n-1}\right) z^{2n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{2n-1}\right) z^k$$

$$+ \sum_{k=n}^{2n-1} \tau f\left(1-\frac{k}{2n-1}\right) z^k = \sum_{k=0}^{2n-1} f\left(\frac{k}{2n-1}\right) z^k$$

са в единичния кръг. Както при доказателството на теорема 2, оттук следва, че цялата функция

$$E(f; z) = \int_0^1 f(t) e^{itz}\, dt \tag{10}$$

принадлежи на класа L и следователно целите функции $U(f; z)$ и $V(f; z)$ имат само реални нули.

б) Нека $f(t) \in F_1$, т. е. $f(t) = f(1-t)$ за $\frac{1}{2} < t \leq 1$. Ако $0 \leq t < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < 1-t \leq 1$ и следователно $f(1-t) = f(1-(1-t)) = f(t)$. Понеже равенството $f(t) = f(1-t)$ е удовлетворено и за $t = \frac{1}{2}$, следва от предишните изводи, че то е изпълнено за всяко $t \in [0, 1]$. Тогава за цялата функция (10) получаваме

$$E(f;z)=\int_0^1 f(1-t)e^{i(1-t)z}dt=e^{i\frac{z}{2}}R(z),$$

където

$$R(z)=\int_0^1 f(t)e^{i\left(\frac{1}{2}-t\right)z}dt.$$

От твърдението а) на теоремата, което установихме вече, следва, че цялата функция $E(f;z)$, а следователно и цялата функция $R(z)$ има само реални нули, щом $f(t)\in F_1$. Ще покажем по-нататък, че цялата функция $R(z)$ е реална. Наистина

$$\bar{R}(z)=\int_0^1 f(t)e^{-i\left(\frac{1}{2}-t\right)z}dt=\int_0^1 f(1-t)e^{-i\left(\frac{1}{2}-1+t\right)z}dt$$

$$=\int_0^1 f(t)e^{i\left(\frac{1}{2}-t\right)z}dt=R(z).$$

Тогава ще имаме

$$U(f;z)=\frac{1}{2}\Big(E(f;z)+\bar{E}(f;z)\Big)=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{z}{2}}R(z)+e^{-i\frac{z}{2}}R(z)\right)=R(z)\cos\frac{z}{2},$$

$$V(f;z)=\frac{1}{2i}\Big(E(f;z)-\bar{E}(f;z)\Big)=\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{z}{2}}R(z)-e^{-i\frac{z}{2}}R(z)\right)=R(z)\sin\frac{z}{2}$$

Да допуснем, че $R(z)=\frac{2}{z}\sin\frac{z}{2}$. Тогава

$$U(f;z)=\frac{2}{z}\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}=\frac{\sin z}{z}=\int_0^1 \cos tzdt,$$

$$V(f;z)=\frac{2}{z}\sin^2\frac{z}{2}=\frac{1-\cos z}{z}=\int_0^1 \sin tzdt,$$

следователно

$$E(f;z)=U(f;z)+iV(f;z)=\int_0^1 e^{itz}dt,$$

откъдето получаваме, че цялата функция

$$\int_0^1 \{f(t)-1\}e^{itz}dt\equiv 0.$$

Но тогава за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$ ще бъде в сила равенството

$$\int_0^1 \{f(t)-1\} t^n dt = 0$$

и следователно функцията $f(t)-1$ е почти навсякъде равна на нула в интервала $[0, 1]$ (вж. например И. П. Натансон [7], стр. 433, теорема 1).

в) Нека $f(t) \in F_{-1}$, т. е. $f(t) = -f(1-t)$ за $\frac{1}{2}<t\leq 1$. Както в б) се убеждаваме, че това равенство е удовлетворено и когато $0\leq t<\frac{1}{2}$, т. е. $f(t) = -f(1-t)$ за всяко $t \in [0, 1]$ с евентуално изключение за $t = \frac{1}{2}$. Тогава за цялата функция (10) ще имаме

$$E(f;z) = -ie^{i\frac{z}{2}} S(z),$$

където

$$S(z) = i\int_0^1 f(t) e^{-i\left(\frac{1}{2}-t\right)z} dt,$$

следователно $S(z)$ има само реални нули, щом $f(t) \in F_{-1}$. Ще покажем, че цялата функция $S(z)$ е реална. Наистина

$$\bar{S}(z) = -i\int_0^1 f(t) e^{i\left(\frac{1}{2}-t\right)z} dt = -i\int_0^1 f(1-t) e^{i\left(\frac{1}{2}-1+t\right)z} dt$$

$$= i\int_0^1 f(t) e^{-i\left(\frac{1}{2}-t\right)z} dt = S(z).$$

Тогава

$$U(f;z) = \frac{1}{2}\left(E(f;z)+\bar{E}(f;z)\right) = \frac{1}{2}\left(-ie^{i\frac{z}{2}} S(z) + ie^{-i\frac{z}{2}} S(z)\right) = S(z)\sin\frac{z}{2},$$

$$V(f;z) = \frac{1}{2i}\left(E(f;z)-\bar{E}(f;z)\right) = \frac{1}{2i}\left(-ie^{i\frac{z}{2}} S(z) - ie^{-i\frac{z}{2}} S(z)\right) = -S(z)\cos\frac{z}{2}.$$

Да допуснем, че $S(z) = \frac{2}{z}\left(1-\cos\frac{z}{2}\right)$. Тогава

$$U(f;z) = \frac{2}{z}\left(1-\cos\frac{z}{2}\right)\sin\frac{z}{2} = \int_0^1 \eta(t)\cos tz\,dt,$$

$$V(f;z) = -\frac{2}{z}\left(1-\cos\frac{z}{2}\right)\cos\frac{z}{2} = \int_0^1 \eta(t)\sin tz\,dt,$$

където $\eta(t)$ е функцията (4). Следователно

$$E(f;z)=\int_0^1 \eta(t)e^{itz}dt$$

и както по-горе, заключаваме, че $f(t)=\eta(t)$ почти навсякъде в интервала $[0, 1]$.

Ще покажем сега, че съществуват функции $f(t)$, които удовлетворяват изискванията за принадлежност към множеството F_τ, дефинирано в условието на теорема 3. Нека $f(t)$ монотонно намалява в интервала $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $f\left(\frac{1}{2}\right)\geqq 0$. Ако $|\tau|\geqq 1$, полагаме $f(t)=\tau f(1-t)$ за $\frac{1}{2}<t\leqq 1$. Остава да отбележим, че от теоремата на Какейа, която беше цитирана в началото, следва, че за всяко $n=1, 2, 3, \ldots$ нулите на полинома $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{2n-1}\right) z^k$ са вън от единичния кръг.

II

В тази част се прави опит за използуване на полиномите на С. Н. Бернщайн при третиране на проблема за разпределението на нулите на целите функции от вида (1) и (2). Идеята се състои в следното: разглеждаме целите функции

$$U_n^*(f;z)=\int_0^1 B_n(f;t)\cos tzdt \tag{11}$$

и

$$V_n^*(f;z)=\int_0^1 B_n(f;z)\sin tzdt, \tag{12}$$

където $B_n(f;z)$ е n-тият полином на С. Н. Бернщайн за функцията $f(t)$. Ако тази функция удовлетворява някои изисквания (например ако f е ограничена и почти навсякъде непрекъсната върху интервала $[0, 1]$, може да се твърди, че

$$\lim_{n\to\infty} U_n^*(f;z)=\int_0^1 f(t)\cos tzdt=U(f;z),$$

$$\lim_{n\to\infty} V_n^*(f;z)=\int_0^1 f(t)\sin tzdt=V(f;z)$$

равномерно върху всяко ограничено множество от комплексната равнина и ако познаваме разпределението на нулите на целите функции (11) и

(12), можем да изведем въз основа на теоремата на Хурвиц заключение за нулите на целите функции $U(f;z)$ и $V(f:z)$.

След тези предварителни бележки можем да формулираме съответните резултати.

Теорема 4. Да означим с B множеството на ограничените реални функции $f(t)$, дефинирани върху интервала $[0, 1]$, които притежават следните свойства:

1) за всички достатъчно големи n нулите на полинома

$$R_n(f;z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)z^k$$

лежат в единичния кръг;

2) $\lim_{n\to\infty} B_n(f;t)=f(t)$ почти навсякъде в интервала $[0, 1]$;

3) $f(1)\neq 0$.

Тогава, ако $f(t)\in B$, целите функции $U(f;z)$ и $V(f;z)$ имат само реални нули.

Доказателството се опира на един резултат на Н. Обрешков ([8], твърдението на стр. 46), който ще формулираме в малко видоизменена форма като

Лема 6. Ако нулите на полинома $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ от n-та степен са в единичния кръг и нулите на полинома $h(z)$ са в полуравнината $R(z)\leq\frac{1}{2}$, нулите на полинома $\sum_{k=0}^{n} a_k h\left(\frac{k}{n}\right)z^k$ лежат също в единичния кръг.

Доказателство на теорема 4. Очевидно

$$B_n(f;z)=(1-z)^n R_n\left(f;\frac{z}{1-z}\right).$$

Понеже от неравенството $|z(1-z)^{-1}|\leq 1$ следва, че $\mathrm{Re}(z)\leq\frac{1}{2}$ и освен това $B_n(f;1)=f(1)\neq 0$ за всички достатъчно големи n $(n\geq N)$, нулите на полинома $B_n(f;z)$ лежат в полуравнината $\mathrm{Re}(z)<\frac{1}{2}$. От лема 6 следва тогава, че за всяко $n=1, 2, \ldots$ нулите на полинома

$$\sum_{k=0}^{m} B_n\left(f;\frac{k}{m}\right)z^k \quad (n\geq N)$$

лежат в единичния кръг, понеже нулите на полинома $\sum_{k=0}^{m} z^k$ са в този кръг. Следователно съгласно теорема 1 целите функции

$$U_n^*(f;z)=\int_0^1 B_n(f;t)\cos tz\,dt$$

$$V_n^*(f;z)=\int_0^1 B_n(f;t)\sin tz\,dt$$

имат само реални нули.

От условието 2) на теоремата следва, че функцията $f(t)$ е измерима в интервала $[0, 1]$ и понеже е ограничена, тя е интегрируема в лебегов смисъл върху този интервал. Тогава от теоремата на Лебег за ограничените редици от измерими функции следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} U_n^*(f;x)=U(f;x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} V_n^*(f;x)=V(f;x)$ за всяко реално x. Наистина по предположение $|f(t)|\leq M<+\infty\ (0\leq t\leq 1)$ за някое реално M, а както е известно, $|B_n(f;t)|\leq M$ за $0\leq t\leq 1$. По-нататък от последното неравенство следва, че редиците $\{U_n^*(f;z)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{V_n^*(f;z)\}_{n=1}^{\infty}$ са равномерно ограничени върху всяко ограничено множество от комплексната равнина. Следователно според теоремата на Витали тези редици са равномерно сходящи върху всяко такова множество, съответно към функциите $U(f;z)$ и $V(f;z)$ и според теоремата на Хурвиц последните цели функции имат само реални нули.

В същност методът на доказателство на теорема 4 позволява да бъде установено следното по-общо твърдение:

Теорема 5. Ако функцията $f(t)$ удовлетворява условията на теорема 4, а функцията $g(t)$ удовлетворява условията на теорема 1, целите функции

$$U(fg;z)=\int_0^1 f(t)g(t)\cos tz\,dt \tag{13}$$

и

$$V(fg;z)=\int_0^1 f(t)g(t)\sin tz \tag{14}$$

имат само реални нули.

Последното твърдение при допълнителното предположение, че и функцията $f(t)$ е интегрируема в риманов смисъл, може да се получи с помощта на теорема 1, като се има пред вид един резултат на Е. Божоров ([9], стр. 152).

Ще разгледаме още едно приложение на полиномите на С. Н. Бернщайн. Твърдението, което ще установим, е в известен смисъл аналог на теорема 3.

Теорема 6. Нека τ е реално число такова, че $|\tau|\geq 1$, и B_τ е множеството на ограничените реални функции, дефинирани върху интервала $[0, 1]$ и удовлетворяващи следните изисквания:

1) $f(t)=\tau f(1-t)$ за $\frac{1}{2}<t\leq 1$;

2) за всички достатъчно големи n нулите на полиномите

$$S_n(f;z) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k} f\left(\frac{k}{2n-1}\right) z^k$$

лежат вън от единичната окръжност;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} B_{2n-1}(f;t) = f(t)$ почти навсякъде в интервала $[0, 1]$.

Тогава, ако $f(t) \in B$, и функцията $g(t)$ удовлетворява условията на теорема 1, целите функции (13) и (14) имат само реални нули.

Без да се спираме подробно върху доказателството на последното твърдение, ще изтъкнем преди всичко, че съгласно лема 5 за всички достатъчно големи n нулите на полинома

$$W_n(f;z) = S_n(f;z) + \tau z^n S_n^*(f;z)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k} f\left(\frac{k}{2n-1}\right) z^k + \tau \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k} f\left(\frac{k}{2n-1}\right) z^{2n-k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k} f\left(\frac{k}{2n-1}\right) z^k + \tau \sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{2n-k-1} f\left(1-\frac{k}{2n-1}\right) z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{k} f\left(\frac{k}{2n-1}\right) z^k$$

лежат в единичния кръг. От условието 2) на теоремата следва, че $f(0)\neq 0$. Тогава от 1) получаваме, че $f(1)=\tau f(0)\neq 0$, понеже $\tau\neq 0$, и както в доказателството на теорема 4, заключаваме по-нататък, че нулите на полинома

$$B_{2n-1}(f;z) = (1-z)^{2n-1} W_n\left(f; \frac{z}{1-z}\right)$$

лежат в полуравнината $\mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}$ за всички достатъчно големи n. По-нататък образуваме полиномите

$$\sum_{k=0}^{m} B_{2n-1}\left(f;\frac{k}{m}\right) g\left(\frac{k}{m}\right) z^k \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

чиито нули, съгласно лема 6, ще лежат в единичния кръг за всички достатъчно големи m и n и доказателството завършва, както това на теорема 4.

III

В тази част се дискутира преди всичко следният въпрос: възможно ли е да се извадят някакви заключения за нулите на целите функции от вида (1) и (2), ако се откажем от изискването нулите на полиномите (3) да лежат в кръга $|z| \leq 1$ за всички достатъчно големи n. По-точно, какво може да се твърди за разпределенията на нулите на целите функции (1) и (2), ако допуснем, че съществуват неотрицателни константи λ и δ, такива, че за всички достатъчно големи n нулите на полиномите

$$(3) \qquad P_n(f;z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k$$

да лежат в кръга $\left\{z : |z| \leq 1 + \frac{\lambda}{n^\delta}\right\}$. За краткост да означим с $E(\lambda, \delta)$ множеството на реалните функции $f(t)$, дефинирани и интегрируеми в риманов смисъл върху интервала $[0, 1]$, за които полиномите (3) притежават последното свойство.

В нашата работа [10] е установено, че ако $f(t) \in E(\lambda, 2)$ $(\lambda \geq 0)$, нулите на целите функции $U(f;z)$ и $V(f;z)$ лежат в ивицата $\mathrm{Im}(z) < \sqrt{2\lambda}$. Покъсно К. Дочев в работата си [11] под същото заглавие, както нашата, предложи следното твърдение: Ако $f \in E(\lambda, \delta)$ за някои $\lambda \geq 0$ и $\delta > 1$, целите функции (1) и (2) имат само реални и взаимно разделящи се нули. По-точно резултатът на К. Дочев гласи: Ако $f \in E(\lambda, 1)$ за някое $\lambda \geq 0$, нулите на цялата функция

$$(10) \qquad E(f;z) = \int_0^1 f(t) e^{itz} dt$$

лежат в полуравнината $\mathrm{Im}(z) \geq -\lambda$. Ако $f \in E(\lambda, \delta)$ за някое $\lambda \geq 0$ и $\delta > 1$, нулите на (10) са в полуравнината $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.

За да получи твърдението, че нулите на целите функции (1) и (2) са реални, щом $f \in E(\lambda, \delta)$ за някое $\lambda \geq 0$ и $\delta > 1$, Дочев се позовава на теоремата на Билер — Ермит за цели функции от първи ред. Ще отбележим, че само този последен аргумент не е достатъчен, тъй като теоремата на Билер — Ермит изобщо не е валидна за произволни цели функции от първи ред. Наистина на стр. 67 от цитираната в началото работа на Л. Чакалов се разглежда цялата функция

$$(15) \qquad F(z) = \frac{1}{z^2}\left(e^{-iz} - 1 + iz\right),$$

която очевидно има ред единица и за която се установява, че има безбройно много нули и всички те са в полуравнината $\mathrm{Im}(z) \geq 0$. Въпреки това цялата функция

$$\frac{1}{2i}\left(F(z) - \bar{F}(z)\right) = \frac{z - \sin z}{z^2}$$

има даже безбройно много нереални нули. Нещата няма да се променят, ако се ограничим само върху цели функции от вида (10), или по-общо върху целите функции от вида

$$(16) \qquad E^*(\varphi;z) = \int_{-1}^{1} \varphi(t) e^{itz} dt.$$

Наистина цялата функция (15) принадлежи на класа $L^2(-\infty, \infty)$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx < +\infty.$$

Освен това $F(z)$ е от експоненциален тип и типът на $F(z)$ е равен на единица. Тогава съгласно една теорема на Палей и Винер ([12], стр. 13), $F(z)$ се представя във вида (16) с $\varphi(t) \in L^2(-1, 1)$.

В цитираната по-горе работа на К. Дочев не е приведено доказателство на неговия резултат, който дискутираме тук, но по всяка вероятност то почива на следната идея: Да се покаже, че щом $f \in E(\lambda, \delta)$ за някое $\lambda \geq 0$ и $\delta > 1$, цялата функция (10) принадлежи на класа L и тогава от лема 4 ще следва, че целите функции (1) и (2) имат само реални нули. С оглед именно на по-нататъшните разглеждания ще възпроизведем доказателството на резултата на Дочев.

Нека функцията $f \in E(\lambda, \delta)$ за някое $\lambda \geq 0$ и $\delta > 1$. Тогава за всички достатъчно големи n нулите на полинома (3) са в кръга $\left\{z : |z| \leq 1 + \frac{\lambda}{n^\delta}\right\}$, следователно нулите на полинома

$$\tilde{P}_n(f; z) = P_n\left(f; \left(1 + \frac{\lambda}{n^\delta}\right) z\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{n^\delta}\right)^k z^k$$

са в кръга $|z| \leq 1$ за всички такива стойности на n. Съгласно лема 2 цялата функция

$$\tilde{E}_n(f; z) = \frac{1}{n} \tilde{P}_n\left(f; e^{i\frac{z}{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{n^\delta}\right)^k e^{i\frac{k}{n}z}$$

ще принадлежи на класа L, щом n е достатъчно голямо. Ще покажем, че

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{E}_n(f; z) = \int_0^1 f(t) e^{itz} dt$$

равномерно върху всяко ограничено множество. Понеже

$$\lim_{n \to \infty} E_n(f; z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{i\frac{k}{n}z} = \int_0^1 f(t) e^{itz} dt,$$

достатъчно е да покажем, че

$$\lim_{n \to \infty} \{\tilde{E}_n(f; z) - E_n(f; z)\} = 0$$

равномерно върху всяко ограничено множество.

Функцията $f(t)$ е интегрируема в риманов смисъл върху интервала $[0, 1]$, следователно е ограничена, и нека $|f(t)| \leqq M$ за $0 \leqq t \leqq 1$. Нека освен това $|z| \leqq R$. От $\delta > 1$ следва, че

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\left(1+\frac{\lambda}{n^\delta}\right)^n - 1\right\} = 0$$

каквото и да е λ. Нека тогава $\varepsilon > 0$ е произволно и да изберем $N = N(\varepsilon)$ така, че за $n > N$ да бъде в сила неравенството

$$\left|\left(1+\frac{\lambda}{n^\delta}\right)^n - 1\right| \leqq \frac{\varepsilon}{M}\cdot e^{-R}.$$

Но щом $\lambda \geqq 0$, за всяко $k = 1, 2, \ldots, n-1$ е в сила неравенството

$$0 \leqq \left(1+\frac{\lambda}{n^\delta}\right)^k - 1 \leqq \left(1+\frac{\lambda}{n^\delta}\right)^n - 1.$$

Тогава за $n > N$ ще имаме ($|z| \leqq R$)

$$|\widetilde{E}_n(f; z) - E_n(f; z)|$$

$$= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left\{\left(1+\frac{\lambda}{n^\delta}\right)^k - 1\right\} e^{i\frac{k}{n}z}\right|$$

$$\leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \left\{\left(1+\frac{\lambda}{n^\delta}\right)^k - 1\right\} e^{\frac{k}{n}R}$$

$$\leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \left\{\left(1+\frac{\lambda}{n^\delta}\right)^n - 1\right\} e^R$$

$$\leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M \frac{\varepsilon}{M}\cdot e^{-R} e^R = \varepsilon.$$

Теорема 7. Да означим с $B(\lambda, \delta)$ ($\lambda \geqq 0$, $\delta \geqq 0$) множеството на ограничените функции $f(t)$, дефинирани върху интервала $[0, 1]$, които удовлетворяват следните изисквания:

1) За всички достатъчно големи n нулите на полинома

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k$$

лежат в кръга $|z| \leqq 1 + \frac{\lambda}{n^\delta}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(f; t) = f(t)$ почти навсякъде върху интервала $[0, 1]$;

3) $f(1) \neq 0$.

Тогава, ако $f(t) \in B(\lambda, \delta)$ за някои $\lambda \geqq 0$ и $\delta > 1$ и функцията $g(t) \in E(\lambda', \delta')$ за някои $\lambda' \geqq 0$ и $\delta' > 1$, целите функции $U(fg; z)$ и $V(fg; z)$ имат само реални нули.

Доказателство. За всички достатъчно големи n нулите на полинома

$$\widetilde{P}_n(f;z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{\lambda}{n^{\delta}}\right)^{k}z^{k}$$

лежат в единичния кръг. Понеже $f(1)\neq 0$, за всички такива n нулите на полинома

$$\widetilde{B}_n(f;z)=(1-z)^{n}\widetilde{P}_n\left(f;\frac{z}{1-z}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{\lambda}{n^{\delta}}\right)^{n\frac{k}{n}}z^{k}(1-z)^{n-k}$$

$$=B_n(f_n;z),$$

където

$$f_n(t)=f(t)\left(1+\frac{\lambda}{n^{\delta}}\right)^{nt}\quad(0\leq t\leq 1),$$

ще лежат в полуравнината $\mathrm{Re}(z)\leq\frac{1}{2}$.

От условието $g(t)\in E(\lambda',\delta')$ следва, че за всички достатъчно големи m нулите на полинома

$$\sum_{k=0}^{m}g\left(\frac{k}{m}\right)\left(1+\frac{\lambda'}{n^{\delta'}}\right)^{k}z^{k}$$

ще лежат в единичния кръг. От лема 6 следва тогава, че нулите на полинома

$$\sum_{k=0}^{m}B_n\left(f_n;\frac{k}{m}\right)g\left(\frac{k}{m}\right)\left(1+\frac{\lambda'}{n^{\delta'}}\right)^{k}z^{k}$$

са в единичния кръг за всички достатъчно големи m и n. Оттук следва по-нататък, че цялата функция

$$\int_0^1 B_n(f_n;t)g(t)e^{itz}dt$$

принадлежи на класа L за всички достатъчно големи n. Ще покажем, че

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 B_n(f_n;t)g(t)e^{itz}dt=\int_0^1 f(t)g(t)e^{itz}dt$$

равномерно по z върху всяко ограничено множество. Като имаме пред вид, че при условията на теоремата

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 B_n(f;t)g(t)e^{itz}dt=\int_0^1 f(t)g(t)e^{itz}dt,$$

достатъчно е да установим, че

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \{B_n(f_n;t)-B_n(f;t)\}g(t)e^{itz}dt=0$$

равномерно върху всяко ограничено множество. Но това следва пак, както по-горе, от равенството

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{\lambda}{n^\delta}\right)^n-1\right\}=0.$$

И така цялата функция

$$\int_0^1 f(t)g(t)e^{itz}dt$$

принадлежи на класа L, откъдето следва, че целите функции $U(fg;z)$ и $V(fg;z)$ имат само реални нули.

Ще формираме сега две твърдения, които могат да се разглеждат като обобщения на резултати, установени в първите две части на настоящата работа. Няма да се спираме върху доказателствата им, понеже методът и техниката на доказване са вече достатъчно добре демонстрирани.

Теорема 8. Нека λ, δ и τ са реални числа, такива, че $\lambda\geq 0$, $\delta>1$ и $|\tau|\geq 1$. Означаваме с $F_\tau(\lambda,\delta)$ множеството на реалните функции $f(t)$, дефинирани и интегрируеми в риманов смисъл върху интервала $[0, 1]$ и удовлетворяващи следните изисквания:

1) $f(t)=\tau f(1-t)$ за $\frac{1}{2}<t\leq 1$;

2) за всички достатъчно големи n нулите на полинома

$$Q_n(f;z)=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{2n-1}\right)z^k$$

са в „областта“ $|z|\geq 1-\frac{\lambda}{n^\delta}$.

Тогава ако $f(t)\in F_\tau(\lambda,\delta)$, целите функции $u(f;z)$ и $v(f;z)$ имат само реални нули.

Теорема 9. Нека λ, δ и τ са реални числа, такива, че $\lambda\geq 0$, $\delta>1$ и $|\tau|\geq 1$. Означаваме с $B_\tau(\lambda,\delta)$ множеството на ограничените реални функции $f(t)$ върху интервала $[0, 1]$, които удовлетворяват следните изисквания:

1) $f(t)=\tau f(1-t)$ за $\frac{1}{2}<t\leq 1$;

2) за всички достатъчно големи n нулите на полинома

$$S_n(f;z)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k} f\left(\frac{k}{2n-1}\right)z^k$$

лежат в областта $|z|\geq 1-\frac{\lambda}{n^\delta}$;

3) $\lim B_{2n-1}(f;t)=f(t)$ почти навсякъде в интервала $[0, 1]$.

Тогава ако $f(t)\in B_\tau(\lambda,\delta)$ и $g(t)\in E(\lambda',\delta')$ за някои $\lambda'\geq 0$ и $\delta'>1$, целите функции $U(fg;z)$ и $V(fg;z)$ имат само реални нули.

IV

Ако хвърлим един поглед върху първите три части по отношение на метода, който се използува при доказателството на твърденията, веднага ще констатираме следната обща схема, по която те са протичали: от условията, които удовлетворяват допустимите функции $f(t)$, следва, че цялата функция

$$E(f;z)=\int_{0}^{1} f(t)e^{itz}dt \tag{10}$$

принадлежи на класа L и следователно по силата на лема 4 целите функции $U(f;z)$ и $V(f;z)$ имат само реални нули. Този метод или подход, както беше споменато вече, е предложен в цитираната в началото работа на Л. Чакалов.

Като се има пред вид казаното дотук, съвършено естествено възниква следният въпрос: Какви условия трябва да удовлетворява цяла функция от вида (10), или по-общо от вида

$$E^{*}(\varphi;z)=\int_{-1}^{1} \varphi(t)e^{itz}dt, \tag{16}$$

за да принадлежи на класа L. Естествено едно необходимо условие, както това следва от теоремата на Хурвиц, е нулите на цялата функция от вида (10), респ. (16), да лежат в полуравнината $\operatorname{Im}(z)\geqq 0$. Но както показва примерът с функцията (15), това условие изобщо не е достатъчно, що се касае до функциите от вида (16).

Съгласно една теорема, изказана от Г. Пойа и установена от Н. Обрешков [13], една цяла функция $F(z)\in L$ тогава и само тогава, когато има вида

$$F(z)=az^{m}e^{-\gamma z^{2}+\delta z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}},$$

където m е цяло неотрицателно число и са удовлетворени следните изисквания:

1) $\gamma\geqq 0$;
2) $\operatorname{Im}(a_n)\geqq 0$ за всяко $n=1,2,3,\ldots$;
3) редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^2}$ е сходящ;
4) редът $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_n}\right)$ е сходящ и е в сила неравенството

$$\operatorname{Im}\delta+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_n}\right)\geqq 0. \tag{17}$$

Ако се ограничим с разглеждането на цели функции, чийто ред не надминава единица (каквито са например функциите от вида (10) или (16)), от горния резултат получаваме следния критерий, който ще формулираме като

Лема 7. За да принадлежи една цяла функция $F(z)$ към класа L и редът на $F(z)$ да не надминава единица, е необходимо и достатъчно тя да има вида

$$F(z)=az^m e^{\lambda z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}},$$

където m е цяло неотрицателно число и са изпълнени следните изисквания:

1) $\operatorname{Im}(a_n)\geqq 0$ за всяко $n=1, 2, 3, \ldots$;

2) редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{1+\varepsilon}}$ е сходящ, каквото и да е положителното число ε;

3) редът $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_n}\right)$ е сходящ и е в сила неравенството (17).

В тази форма, в която е изказан горният критерий, едва ли има практическо значение, понеже в него преди всичко явно участвуват нулите на разглежданите цели функции, по-специално в неравенството (17). Затова ще се постараем да получим такава форма на критерия, в която условието (17) се заменя с друго, което вече не съдържа явно тези нули. Такава модификация е възможна, както ще видим, за един клас цели функции, чийто ред не надминава единица и който съдържа целите функции от вида (10) и (16).

Да означим с K множеството на целите функции $F(z)$, които удовлетворяват следните изисквания:

1) редът на $F(z)$ не надминава единица;

2) $F(z)$ принадлежи на класа A, т. е. ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ са нулите на $F(z)$ отлични от нула, редът $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_n}\right)\right|$ е сходящ;

3) съществува θ, такова, че $0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$, и нулите на $F(z)$ с евентуално изключение на краен брой се съдържат в секторите $|\arg z|\leqq\theta$ и $|\arg z-\pi|\leqq\theta$.

Основният резултат, който ще установим в тази част, е

Теорема 10. За да принадлежи една цяла функция $F(z)$ от множеството K към класа L, е необходимо и достатъчно да бъдат удовлетворени следните условия:

1) нулите на $F(z)$ да са в полуравнината $\operatorname{Im}(z)\geqq 0$;

2) $\lim_{|y|\to+\infty}\operatorname{Im}\left(\frac{F'(iy)}{F(iy)}-\frac{\overline{F}'(iy)}{\overline{F}(iy)}\right)\geqq 0$.

Доказателството на теорема 10 се основава на две помощни твърдения.

Лема 8. Нека $0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ и $a\neq 0$ е комплексно число, такова, че $|\arg a|\leqq\theta$ или $|\arg a-\pi|\leqq\theta$. Тогава за всяко реално y е в сила неравенството

$$\frac{1}{\left|1-\frac{iy}{a}\right|}\leq\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}.$$

Доказателство. Нека $a=\alpha+i\beta$, тогава

$$\frac{1}{\left|1-\frac{iy}{a}\right|^2}=\frac{|a|^2}{|a-iy|^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+(\beta-y)^2}\leq\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}=1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\leq 1+\operatorname{tg}^2\theta.$$

Лема 9. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, която удовлетворява следните изисквания:

1) $a_n\neq 0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$;

2) $\lim a_n$

3) редът $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{1}{a_n}$ е сходящ;

4) съществува θ, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ такова, че за всички достатъчно големи n е удовлетворено или неравенството $|\arg a_n|<\theta$, или неравенството $|\arg a_n-\pi|<\theta$.

Тогава

а) редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-a_n}-\frac{1}{z-\bar{a}_n}\right) \tag{18}$$

е абсолютно и равномерно сходящ върху всяко ограничено и затворено множество, което не съдържа никоя от точките a_n и $\bar{a}_n$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$

б) $\lim\limits_{y\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{iy-a_n}-\frac{1}{iy-\bar{a}_n}\right)=0.$

Доказателство. а) От равенството

$$\frac{1}{z-a_n}-\frac{1}{z-\bar{a}_n}=\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\bar{a}_n}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\left(1-\frac{z}{\bar{a}_n}\right)}$$

получаваме, че

$$\left|\frac{1}{z-a_n}-\frac{1}{z-\bar{a}_n}\right|\leq\frac{2}{\left|1-\frac{z}{a_n}\right|\left|1-\frac{z}{\bar{a}_n}\right|}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{a_n}\right| \tag{19}$$

и от последното неравенство следва, че абсолютната и равномерна сходимост на реда (18) в смисъла на твърдението на лемата е еквивалентна със сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{a_n}\right|$.

б) От неравенство (19) и от лема 8 получаваме, че

$$\left|\frac{1}{iy-a_n}-\frac{1}{iy-\bar{a}_n}\right|\leq 2(1+\operatorname{tg}^2\theta)\left|\operatorname{Im}\frac{1}{a_n}\right|,$$

откъдето следва, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{iy-a_n}-\frac{1}{iy-\bar{a}_n}\right)$$

е равномерно сходящ в интервала $(-\infty, +\infty)$ и понеже

$$\lim_{|y|\to+\infty}\left(\frac{1}{iy-a_n}-\frac{1}{iy-\bar{a}_n}\right)=0$$

за всяко $n=1, 2, 3, \ldots$, получаваме, че

$$\lim_{|y|\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{iy-a_n}-\frac{1}{iy-\bar{a}_n}\right)=0.$$

Доказателство на теорема 10. Нека $F(z)\in K$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ са нулите на $F(z)$, отлични от нула, и да предположим, че точката $z=0$ е m-кратна нула на $F(z)$. Тогава каноничното представяне на $F(z)$ ще има вида

$$F(z)=az^m e^{\delta z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}},$$

от което получаваме, че

$$\bar{F}(z)=\bar{a}z^m e^{\bar{\delta} z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\bar{a}_n}\right)e^{\frac{z}{\bar{a}_n}}.$$

Чрез логаритмично диференциране намираме

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{m}{z}+\delta+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right),$$

$$\frac{\bar{F}'(z)}{\bar{F}(z)}=\frac{m}{z}+\bar{\delta}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\bar{a}_n}+\frac{1}{\bar{a}_n}\right).$$

От лема 9 следва тогава, че

$$\frac{F'(z)}{F(z)}-\frac{\bar{F}'(z)}{\bar{F}(z)}=2i\left(\operatorname{Im}\ \delta+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{1}{a_n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-a_n}-\frac{1}{z-\bar{a}_n}\right)$$

и

$$\lim_{|y|\to+\infty}\operatorname{Im}\left(\frac{F'(iy)}{F(iy)}-\frac{\bar{F}'(iy)}{\bar{F}(iy)}\right)=2\left(\operatorname{Im}\delta+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{1}{a_n}\right).$$

И така за всяка цяла функция $F(z)\in K$ е в сила горното равенство. Но от това равенство и от лема 7 следва непосредствено твърдението на теоремата.

Ще покажем сега, че целите функции от вида (16), а следователно и от вида (10) удовлетворяват условията за принадлежност към множеството K. Преди всичко всяка цяла функция от вида (16), респ. (10), е от експоненциален тип, т. е. от ред единица и нормален тип. Известно е, че всяка цяла функция от експоненциален тип, която е ограничена върху реалната ос, принадлежи на класа A (вж. забележката след теорема 2 на стр. 293 от книгата на Б. Я. Левин [14]). Най-сетне от Палей — Тичмарш и Винер е установено, че каквото и да е $\varepsilon>0$ нулите на целите функции от вида (16), с изключение евентуално на краен брой, лежат в секторите $|\arg z| \leqq \varepsilon$ и $|\arg z-\pi| \leqq \varepsilon$ (вж. стр. 24 от цитираната по-горе работа на Н. Обрешков [8]). И така за целите функции от вида (16) е приложима теорема 10 и в частност за целите функции от вида (10) получаваме следния резултат:

Теорема 11. За да принадлежи цяла функция от вида

$$E(f;z)=\int_0^1 f(t)e^{itz}dt \tag{10}$$

към класа L, е необходимо и достатъчно да бъдат удовлетворени следните изисквания:

1) нулите на $E(f;z)$ да лежат в полуравнината $\operatorname{Im}(z)\geq 0$;

$$\text{2)}\quad \lim_{y\to\infty}\left(\frac{\int_0^1 tf(t)e^{ty}dt}{\int_0^1 f(t)e^{ty}dt}+\frac{\int_0^1 tf(t)e^{-ty}dt}{\int_0^1 f(t)e^{-ty}dt}\right)$$

Ще направим едно интересно приложение в духа на разглежданията в първата и втората част на настоящата работа. Да положим по определение

$$\Phi(f(t);y)=\frac{\int_0^1 tf(t)e^{ty}dt}{\int_0^1 f(t)e^{ty}dt}+\frac{\int_0^1 tf(t)e^{-ty}dt}{\int_0^1 f(t)e^{-ty}dt}$$

Чрез непосредствено пресмятане се убеждаваме, че

$$\Phi(f(t);y)+\Phi(f(1-t);y)=2.$$

Като имаме пред вид, че $\Phi(\lambda f(t);y)=\Phi(f(t);y)$ каквото и да е реалното $\lambda\neq 0$, от горното равенство получаваме, че ако функцията $f(t)$ удовлетворява условието $f(t)=f(1-t)$ или условието $f(t)=-f(1-t)$, то $\Phi(f(t);y)=1$. Следователно, ако функцията $f(t)$ удовлетворява условието $f(t)=f(1-t)$ или условието $f(t)=-f(1-t)$, за да принадлежи цялата функция $E(f;z)$ към класа L, е необходимо и достатъчно нулите ѝ да лежат в полуравнината $\operatorname{Im} z\geqq 0$.

Ще дадем още едно приложение на теорема 11. Да допуснем, че функцията $f(t)$ е неотрицателна в интервала $[0,1]$ и освен това, че не е почти навсякъде равна на нула в този интервал, което е равносилно с допускането, че $\int_0^1 f(t)dt\neq 0$. Да положим по определение

$$\psi(f;y)=\frac{\int_0^1 tf(t)e^{ty}dt}{\int_0^1 f(t)e^{ty}dt}$$

Тогава

$$\frac{d\psi(f;y)}{dy}=\frac{\int\limits_0^1 t^2 f(t)e^{yt}dt\cdot\int\limits_0^1 f(t)e^{yt}dt-\left(\int\limits_0^1 tf(t)e^{yt}dt\right)^2}{\left(\int\limits_0^1 f(t)e^{yt}dt\right)^2}.$$

От неравенството на Буняковски — Шварц получаваме, че

$$\left(\int\limits_0^1 tf(t)e^{yt}dt\right)^2=\left(\int\limits_0^1 t\sqrt{f(t)}\,.\,e^{\frac{y}{2}t}\sqrt{f(t)}\,e^{\frac{y}{2}t}dt\right)^2$$

$$\int\limits_0^1 t^2 f(t)e^{yt}dt\,.\int\limits_0^1 f(t)e^{yt}dt,$$

т. е. $\frac{d\psi(f;y)}{dy}\geqq 0$. И така функцията $\psi(f;y)$ е монотонно растяща в интервала $(-\infty,+\infty)$. Освен това $0\leq\psi(f;y)\cdot 1$, следователно съществува границата $\lim\limits_{|y\,\to+\infty}\psi(f;y)$ и тя е неотрицателна. Но тогава ще съществува и границата $\lim\limits_{|y|\to+\infty}\psi(f;-y)$, която е неотрицателна, т. е. в разглеждания от нас случай условието 2) на теорема 11 е удовлетворено. Следователно, за да принадлежи цяла функция от вида $E(f;z)$ на класа L, щом $f(t)\geqq 0$ и $\int\limits_0^1 f(t)dt\neq 0$, е необходимо и достатъчно нулите на $E(f;z)$ да лежат в полуравнината $\operatorname{Im}(z)\geqq 0$.

Като последно приложение на теорема 11 в рамките на настоящата работа да изтъкнем следното: Ако за реалната функция $f(t)(0\cdot\cdot t\leq 1)$ са удовлетворени условията на теорема 11, целите функции $U(f;z)$ и $V(f;z)$ имат само реални нули. По-точно, съществуват редици от полиноми $\{P_n(z)\}$ и $\{Q_n(z)\}$, такива, че за всяко $n=1,2,3,\ldots$ полиномите $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ имат само реални и взаимно разделящи се нули, $\lim P_n(z)=U(f;z)$ и $\lim Q_n(z)=V(f;z)$ равномерно върху всяко ограничено множество. Обратно, както не е трудно да се установи, ако целите функции $U(f;z)$ и $V(f;z)$ имат само реални и взаимно разделящи се нули, както не е трудно да се установи, или цялата функция $E(f;z)$ или $E(f;-z)$ принадлежи на класа L. И така, ако реалната функция $f(t)$ $(0\leq t\leq 1)$ удовлетворява условието б) на теорема 11, то необходимото и достатъчно условие целите функции $U(f;z)$ и $V(f;z)$ да имат само реални и в известен смисъл взаимно разделящи се нули е цялата функция $E(f;z)$ или $E(f;-z)$ да има всичките си нули в полуравнината $\operatorname{Im}(z)\geqq 0$.

Направените от теорема 11 изводи, а също така и самата теорема 11 могат да се получат при допълнителни предположения като следствия от един резултат на Б. Я. Левин (вж. цитираната му по-горе книга, стр. 415, теорема 7), който от своя страна е обобщение на класическата теорема на Билер — Ермит за един клас на цели функции от експоненциален тип, а именно тези, на които дефектът е неотрицателен. За да се убедим в това, да припомним преди всичко определението на дефект на една цяла функция от експоненциален тип. Ако $F(z)$ е такава функция, дефектът d_F на $F(z)$ се определя от равенството

$$2d_F = h_F\left(-\frac{\pi}{2}\right)-h_F\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

където $h_F(\theta)\,(-\pi\leq\theta\leq\pi)$ е индикаторната функция на $F(z)$, т. е.

$$h_F(\theta)=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log|F(re^{i\theta})|}{r}$$

Както не е трудно да се убедим, за функциите от вида $E(f;z)$ е в сила равенството

$$2d_E = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\int_0^1 tf(t)e^{yt}dt}{\int_0^1 f(t)e^{yt}dt}+\frac{\int_0^1 tf(t)e^{-yt}dt}{\int_0^1 f(t)e^{-yt}dt}\right)$$

при предположение, че границата в дясната страна на последното равенство съществува. За да получим това равенство, вземаме пред вид, че за всички достатъчно големи y

$$\log|E(f;-iy)| = \log\int_0^1 f(t)e^{yt}\,dt+O(1),$$

$$\log|E(f;iy)| = \log\int_0^1 f(t)e^{-yt}dt+O(1),$$

след което прилагаме правилото на Лопитал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Polya, G. Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen. — Math. Z., 1918, **2**, 352—383.
2. Kakeya, J. On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients. — Tohoku Math. J., **2**, 1912, No. 3, 140—142.
3. Hurwitz, A. Über die Nullstellen der Bessel'schen Funktionen. — Math. Ann., **33**, 1889, 246—266.
4. Чакалов, Л. Върху една класа цели функции. — Сп. на БАН, 1927, **36**, 51—89.
5. Schur, I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. — J. reine u. angew. Math., **147**, 1917, 205—232.
6. Илиев, Л. Върху нулите на някои класи от полиноми и цели функции. С., 1940.
7. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций. М., 1949.
8. Обрешков, Н. Върху нулите на полиномите и на някои цели функции. — Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., **37**, 1941, № 1, 1—115.
9. Божоров, Е. Върху някои въпроси, свързани с теорията на интегралните полиноми. — Год. Химико-технол. инст., **2**, 1955, № 2, 151—161.
10. Rusev, P. Über die Verteilung der Nullstellen einer Klasse ganzer Funktionen. — C. R. Acad. Bulg. Sci., **14**, 1961, No. 1, 7—9.
11. Dočev, K. Über die Verteilung der Nullstellen einer Klasse ganzer Funktionen. — C. R. Acad. Bulg. Sci., **15**, 1962, No. 3, 239—241.

12. Pelay, Winer. Fourier transforms in the complex domain. New York, 1934.
13. Обрешков, Н. Върху корените на алгебричните уравнения. — Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., 23, №1, 1927, 177—200.
14. Левин, Б. Я. Распределение корней целых функций. М., 1956.

Постъпила на 4. XII. 1971 г.

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА

$$\int_0^1 f(t)\cos tz\,dt \text{ и } \int_0^1 f(t)\sin tz\,dt$$

Петър Русев

(Резюме)

В первых трех частях статьи определяются некоторые достаточные условия существования только действительных нулей у целых функций типа $U(f;z)=\int_0^1 f(t)\cos tz\,dt$ и $V(f;z)=\int_0^1 f(t)\sin tz\,dt$. В частности, доказывается

Теорема 3. Пусть τ — действительное число, $|\tau|\geq 1$, пусть E_τ — множество всех действительных функций $f(t)$ на интервале $[0, 1]$, интегрируемых в римановском смысле и удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(t)=\tau f(1-t)$ при $\frac{1}{2}<t\leq 1$;

2) нули многочлена $Q_n(f;z)=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{2n-1}\right)z^k$

принадлежат области $\{z:|z|\geq 1\}$ при n достаточно большом.

Тогда

а) если $f(t)\in F_\tau$, то целые функции $U(f;z)$ и $V(f;z)$ имеют только действительные нули;

б) если $f(t)\in F_1$, то $U(f;z)=R(z)\cos\frac{z}{2}$, $V(f;z)=R(z)\sin\frac{z}{2}$, где $R(z)$ — целая функция, имеющая только действительные нули, и $R(z)=\frac{2}{z}\sin\frac{z}{2}$ исполнено в том и только в том случае, когда $f(t)=1$ почти везде в интервале $[0, 1]$;

в) если $f(t)\in F_{-1}$, то $U(f;z)=S(z)\sin\frac{z}{2}$ и $V(f;z)=-S(z)\cos\frac{z}{2}$, где $S(z)$ — целая функция, имеющая только действительные нули, и $S(z)=\frac{2}{z}\left(1-\cos\frac{z}{2}\right)$ в том и только в том случае, когда $f(t)=\eta(t)$ почти везде в интервале $[0, 1]$, где $\eta(t)$ — функция, определенная следующим образом:

$$\eta(t)=\begin{cases} 1 \text{ при } 0\leq t<\frac{1}{2}, \\ 0 \text{ при } t=\frac{1}{2}, \\ -1 \text{ при } \frac{1}{2}<t\leq 1. \end{cases}$$

Теорема 4. Пусть B — множество всех действительных и ограниченных функций $f(t)$ на интервале $[0, 1]$, обладающих следующими свойствами:

1) нули многочлена $R_n(f;z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)z^k$

лежат в единичном круге $\{z\colon |z| \leq 1\}$ при достаточно большом n;

2) $\lim_{n\to\infty} B_n(f;t)=f(t)$ почти везде на интервале $[0, 1]$; здесь $B_n(f;t)$ — n-й многочлен Бернштейна для функции $f(t)$;

3) $f(1)\neq 0$.

Тогда, если $f(t)\in B$, то целые функции $U(f;z)$ и $V(f;z)$ имеют только действительные нули.

Далее вводится множество $E(\lambda,\delta)$ $(\lambda\geq 0,\ \delta\geq 0)$ всех действительных и интегрируемых в римановском смысле функций $f(t)$ на интервале $[0, 1]$, обладающих следующим свойством: нули многочлена $\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)z^k$ лежат в круге $|z|\leq 1+\frac{\lambda}{n^\delta}$ при n достаточно большом. Пусть $B(\lambda,\ \delta)$ $(\lambda\geq 0,\ \delta\geq 0)$ — множество действительных в ограниченных функций на интервале $[0, 1]$, для которых нули многочлена $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)z^k$ находятся в круге $|z|\leq 1+\frac{\lambda}{n^\delta}$ при n достаточно большом и $\lim_{n\to\infty} B_n(f;t)=f(t)$ почти везде на $[0, 1]$. Тогда

Теорема 7. Если $f\in B(\lambda,\delta)$ для некоторых $\lambda\geq 0$ и $\delta>1$ и $g\in E(\lambda',\delta')$ для некоторых $\lambda'\geq 0$ и $\delta'>1$, то целые функции $U(fg;z)$ и $V(fg;z)$ имеют только действительные нули.

В заключительной части статьи обсуждаются некоторые общие вопросы распределения нулей целых функций $U(f;z)$ и $V(f;z)$.

Пусть L — класс целых функций, являющихся равномерными пределами последовательностей многочленов с нулями на полуплоскости $\operatorname{Im}\{z\}>0$. Пусть K — множество всех целых функций $F(z)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) порядок $F(z)$ не выше единицы;

2) если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ нули $F(z)$, ряд $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{1}{a_n}\right|$ сходится;

3) существует θ $\left(0\leq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, такое, что только конечное число нулей $F(z)$ расположено вне области $|\arg z|\leq\theta$ и $|\arg z-\pi|\leq\theta$. Основной результат этой части работы — это

Т е о р е м а 10. Целая функция $F(z) \in K$ принадлежит классу L тогда и только тогда, когда удовлетворены условия:

1) нули $F(z)$ лежат в полуплоскости $\mathrm{Im}(z) \geqq 0$;

2) $\lim\limits_{|y| \to +\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{F'(iy)}{F(iy)} - \frac{\overline{F'(iy)}}{\overline{F(iy)}}\right) \geqq 0$

С целью применять указанную теорему к целым функциям типа $E(f; z) = U(f; z) + iV(f; z)$ доказывается, что они принадлежат классу K.

SOME RESULTS ABOUT THE DISTRIBUTION OF ZEROES OF ENTIRE FUNCTIONS OF THE KIND $\int_0^1 f(t) \cos tzdt$ AND $\int_0^1 f(t) \sin tzdt$

P e t â r R u s e v

(Summary)

In the first three parts of the paper some sufficient conditions are given for the entire functions of the kind $U(f; z) \int_0^1 f(t) \cos tzdt$ and $V(f; z) = \int_0^1 f(t) \sin tzdt$ to have only real zeroes. For example:

T h e o r e m 3. Let τ be a real number such that $\tau \geqq 1$ and F_τ be the set of all real functions $f(t)$ on the interval [0, 1] which are R-integrable and satisfy the following conditions:

1) $f(t) = \tau f(1-t)$ if $\frac{1}{2} < t \leqq 1$;

2) all the zeroes of the polynomial

$$Q_n(f; z) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{2n-1}\right) z^k$$

are in the region $\{z;\ z| \geqq 1\}$ if n is large enough.
Then

a) if $f(t) \in F_\tau$, the entire functions $U(f; z)$ and $V(f; z)$ have only real zeroes;

b) if $f(t) \in F_1$,

$$U(f;z) = R(z)\cos\frac{z}{2},$$

$$V(f;z) = R(z)\sin\frac{z}{2},$$

where $R(z)$ is an entire function with only real zeroes and $R(z)=\frac{z}{2}\sin\frac{z}{2}$ if and only if $f(t)=1$ almost everywhere in the interval $[0,1]$;

c) if $f(t)\in F_{-1}$

$$U(f;z)=S(z)\sin\frac{z}{2},$$

$$V(f;z)=-S(z)\cos\frac{z}{2}$$

where $S(z)$ is an entire function with only real zeroes and $S(z)=\frac{2}{z}\left(1-\cos\frac{z}{2}\right)$ if and only if $f(t)=\eta(t)$ almost everywhere in the interval $[0,1]$, where $\eta(t)$ is the function defined as follows

$$\eta(t)=\begin{cases} 1, & 0\leq t<\frac{1}{2}, \\ 0, & t=\frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2}<t\leq 1. \end{cases}$$

Theorem 4. Let B be the set of all real and bounded functions $f(t)$ on the interval $[0,1]$ which have the following properties:

1) the zeroes of the polynomial $R_n(f;z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)z^k$ are in the unit disk $\{z: |z|\leq 1\}$ if n is large;

2) $\lim_{n\to\infty} B_n(f;t)=f(t)$ almost everywhere in the interval $[0,1]$ where $B_n(t)$ is the n'th S. N. Bernstein's polynomial of the function $f(t)$;

3) $f(1)\neq 0$.

Then if $f(t)\in B$, the entire functions $U(f;z)$ and $V(f;z)$ have only real zeroes.

We define further the set $E(\lambda,\delta)$ $(\lambda\geq 0, \delta\geq 0)$ of all real and R-integrable functions $f(t)$ on the interval $[0,1]$ which have the property: the zeroes of the polynomial $\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)z^k$ are in the circle $|z|\leq 1+\frac{\lambda}{n^\delta}$ if n is sufficiently large. With $B(\lambda,\delta)(\lambda\geq 0, \delta\geq 0)$ we denote the set of the real and bounded functions $f(t)$ on $[0,1]$ for which the zeroes of the polynomial $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)z^k$ lie in the circle $|z|\leq 1+\frac{\lambda}{n^\delta}$ if n is large and $\lim_{n\to\infty} B_n(f;t)=f(t)$ almost everywhere in $[0,1]$.

Theorem 7. If $f \in B(\lambda, \delta)$ for some $\lambda \geqq 0$ and $\delta > 1$ and $g \in E(\lambda', \delta')$ for some $\lambda' \geqq 0$ and $\delta' > 1$, the entire functions $U(fg; z)$ and $V(fg; z)$ have only real zeroes.

In the last part of the paper are discussed some general questions connected with the distributions of the zeroes of the entire functions $U(f; z)$ and $V(f; z)$.

Let L be the class of the entire fnnctions which are uniform limits of sequence of polynomials wſth zeroes in the half-plane $\mathrm{Im}(z) > 0$. We denote with K the set of all entire functions $F(z)$ such that:

1) the order of $F(z)$ is not greater than one;

2) if $\{a_n\}$ are the zeros of $F(z)$, the series $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im} \frac{1}{a_n}$ is convergent;

3) for some $\theta \left(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ only finite number of the zeroes of $F(z)$ are outside the regions $|\arg z| \leqq \theta$ and $|\arg z - \pi| \leqq \theta$.

The main result is

Theorem 10. An entire function $F(z) \in K$ belongs to the class L if and only if the following conditions are fulfilled:

1) the zeroes of $F(z)$ are in the half-plane $\mathrm{Im}(z) \geqq 0$;

2) $\lim\limits_{|y| \to +\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{F'(iy)}{F(iy)} - \frac{\bar{F}'(iy)}{\bar{F}(iy)}\right) \geqq 0.$

By applying this result to the entire function $E(f; z) = U(f; z) + iV(f; z)$ we establish that the entire functions of this kind belong to the class K.