БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

МИНИМАЛНИ СИСТЕМИ ОТ АКСИОМИ, ОПРЕДЕЛЯЩИ КРАЙНА ПРОЕКТИВНА РАВНИНА

Чавдар Г. Лозанов

В една крайна проективна равнина π от ред n ($n \geqq 2$ естествено число) са изпълнени свойствата:

1. С всеки две различни точки е инцидентна точно една права.
2. С всеки две различни прави е инцидентна точно една точка.
3. С всяка точка са инцидентни точно $n+1$ различни прави.
4. С всяка права са инцидентни точно $n+1$ различни точки.

(I) 5. В равнината има точно n^2+n+1 точки.

6. В равнината има точно n^2+n+1 прави.
7. Съществуват 4 точки, никои три от които не са инцидентни с една права.
8. Съществуват 4 прави, никои три от които не са инцидентни с една точка.

Оказва се, че за системи от аксиоми, определящи една крайна проективна равнина, може да се вземат различни групи от свойствата в (I). При конструиране на модели на проективни равнини е от значение каква система от аксиоми ще изберем. Някоя част от свойствата в (I) наричаме *пълна система от аксиоми*, ако тя е достатъчна за определяне на крайна проективна равнина. Една система наричаме *минимална*, ако всяка нейна истинска част не е пълна. Известни са следните резултати за системите от аксиоми на крайна проективна равнина: M. Hall [1] е доказал, че системите (1 2 3 7), (1 2 4 7), (1 2 5 7), (1 2 6 7) са пълни и че от свойства 1, 4, 6 следват свойства 2, 3, 5 и обратно. A. Barlotti [2] е доказал, че от всяка от системите (2 3 6), (1 4 5), (2 4 5 6), (1 3 5 6) следват останалите свойства от (I) без свойствата 7 и 8, а също така, че системите (1 2 3 4) и (1 2 5 6) са непълни. Да отбележим, че свойствата 2, 4, 6, 8 от (I) са дуални на 1, 3, 5, 7. При доказателствата по-нататък ще използуваме този факт.

Тук ще изследваме пълни минимални системи от аксиоми на една крайна проективна равнина. В това отношение важи следната

Теорема. От свойствата в (I) може да се образуват точно 22 пълни минимални системи от аксиоми:

$$
(\mathrm{II})\quad
\begin{array}{llll}
A=(1\ 4\ 5), & B=(1\ 4\ 6), & C=(1\ 3\ 5\ 6), & \\
A'=(2\ 3\ 6), & B'=(2\ 3\ 5), & C'=(2\ 4\ 5\ 6), & \\
D=(1\ 2\ 3\ 7), & E=(1\ 2\ 4\ 7), & F=(1\ 2\ 5\ 7), & G=(1\ 2\ 6\ 7), \\
D'=(1\ 2\ 4\ 8), & E'=(1\ 2\ 3\ 8), & F'=(1\ 2\ 6\ 8), & G'=(1\ 2\ 5\ 8), \\
H=(1\ 3\ 4\ 7), & I=(1\ 3\ 4\ 8), & J=(1\ 3\ 5\ 7), & K=(1\ 5\ 6\ 7), \\
H'=(2\ 3\ 4\ 8), & I'=(2\ 3\ 4\ 7), & J'=(2\ 4\ 6\ 8), & K'\ \ (2\ 5\ 6\ 8).
\end{array}
$$

А. Най напред ще покажем, че системите във (II) са пълни.

Означаваме с x броя на всички точки в π, с y броя на всички прави в π, с P_i $(i=1, 2, \ .\ ., x)$ произволна точка от π, а с R_s $(s \ \ 1, 2, \dots, y)$ произволна права от π. Нека с точка P_i са инцидентни r_i+1 прави, а с права R_s p_s+1 точки. Във всички случаи имаме

$$
(1)\qquad \sum_{i\ \ 1}^{x}(r_i+1)=\sum_{s=1}^{y}(p_s+1),
$$

тъй като броят на инцидентностите на точки с прави е равен на броя на инцидентностите на прави с точки. От свойство 1 следва, че върху правите през всяка точка на π лежат всички точки на π, т. е. важи равенството

$$
(2)\qquad x\ \ \sum_{s=1}^{r_i+1}p_s+1.
$$

Аналогично от дуалното свойство на 1, 2 получаваме

$$
(3)\qquad y=\sum_{i=1}^{p_s+1}r_i+1.
$$

Лема I. Системите A, A′, B, B′, C, C′ са пълни.

Достатъчно е да покажем, че от 1, 2, 3, 4, 5, 6 следват 7 и 8 поради доказаното в [2]. Тъй като $n\geqq 2$, то според 3 през някоя точка C на π има поне три различни прави a, b и d. Върху a взимаме точка $A\neq C$ и върху b — точка $B\neq C$ (тези точки съществуват според 4). Според 1 съществува правата $c=AB$. Според 2 правата c пресича d в точка P, различна от A и B. Според 4 съществува точка $D\,\mathrm{Z}\,d$, такава, че D е различна от P и C. Тогава точките A, B, C, D са такива, че никои три от тях не лежат на една права. Също така правите $a \ \ AC$, $c \ \ AB$, $e \ \ BD$, $d=DC$ са такива, че никои три от тях не минават през една точка. С това е доказано, че горните системи са пълни.

Лема II. Системите D, D′, E E′, F, F′, G, G′ са пълни.

Известно е, че системите D, E, F, G са пълни — вж. [1]. Във всяка от системите D′, E′, F′, G′ фигурират свойства 2 и 8. Според 8 съществуват 4 прави a, b, c, d, никои три от които не се пресичат в една точка. Но според 2 всеки две от тях имат обща точка. Тогава точките $A \ \ ac$, $B=bd$, $C=bc$, $D=ad$ са такива, че никои три от тях не лежат на една права. И тъй от 2 и 8 следва 7. Тогава пълнотата на системите D′, E′, F′, G′ следва съответно от пълнотата на системите E, D, G, F.

Лема III. Системите H=(1 3 4 7) и H′=(2 3 4 8) са пълни.

Да разгледаме системата H. Според 7 съществува поне една точка. От 1 следва, че важи равенство (2). Като вземем пред вид 3 и 4, имаме $r_i+1=n+1$, $p_s+1=n+1$ и (2) добива вида

$$x=\sum_{s=1}^{n+1} n+1=n(n+1)+1=n^2+n+1.$$

Следователно от 1, 3, 4, 7 следва 5. Но системата $A=(1\ 4\ 5)$ е пълна, откъдето и системата H е пълна. За дуалната система H′ поради 2, 3, 4, 8 равенство (3) добива вида

$$y=\sum_{i=1}^{n+1} n+1=n(n+1)+1=n^2+n+1,$$

т. е. от 2, 3, 4, 8 следва 6. Но системата $A'=(2\ 3\ 6)$ според лема I е пълна и следователно системата H′ е пълна.

Лема IV. Системите $I=(1\ 3\ 4\ 8)$ и $I'=(2\ 3\ 4\ 7)$ са пълни.

Да разгледаме системата I. Според 8 съществуват четири прави. Върху някоя от тях според 4 има някаква точка. Щом съществува една точка, както в лема III, се показва, че от 1, 3, 4 следва 5. Следователно I е пълна система. Дуално I′ също е пълна система.

Лема V. Системите $J=(1\ 3\ 5\ 7)$ и $J'=(2\ 4\ 6\ 8)$ са пълни.

Да разгледаме системата J. През точка P_i, неинцидентна с права R_s (такава съществува според 7), ще има p_s+1 прави, съединяващи P_i с точките от правата R_s (по 1). Очевидно $p_s+1\leqq r_i+1$. Но от 3 имаме $r_i+1=n+1$, откъдето $p_s+1\leqq n+1$ или $p_s\leqq n$ за всяко $s\in[1, y]$. От 5 получаваме $x=n^2+n+1$ и тогава равенство (2) добива вида

$$n^2+n+1=\sum_{s=1}^{n+1} p_s+1,\quad \text{или}\quad \sum_{s=1}^{n+1} p_s=n^2+n=\sum_{s=1}^{n+1} n,\quad \sum_{s=1}^{n+1}(n-p_s)=0.$$

Но $n-p_s\geqq 0$ от $n\geqq p_s$. Оттук следва, че за всяко $s\in[1, y]$ $p_s=n$, т. е. от 1, 3, 5, 7 следва 4, което доказва, че J е пълна системата, тъй като системата $A=(1\ 4\ 5)$ според лема I е пълна. За системата J′ получаваме съответно $r_i\leqq n$ и равенство (3) добива вида

$$\sum_{i=1}^{n+1} r_i+1=n^2+n+1,\quad \text{откъдето}\quad r_i=n,$$

т. е. от 2, 4, 6, 8 следва 3 и тъй като A′ е пълна система, то и J′ е пълна система.

Лема VI. Системите $K=(1\ 5\ 6\ 7)$ и $K'=(2\ 5\ 6\ 8)$ са пълни.

Да разглеждаме системата K. Първо ще покажем, че $r_i\geqq n$ за всяко $i\in[1, x]$. Разглеждаме два случая:

а. Нека за всяко $s\in[1, y]$ $p_s\leqq n$. От 1 и 5 равенство (2) добива вида

$$n^2+n+1=1+\sum_{s=1}^{r_i+1} p_s\leqq 1+(r_i+1)n,$$

или $n^2+n\leqq(r_i+1)n$ и оттук $n+1\leqq r_i+1$, т. е. $n\leqq r_i$.

б. Нека върху правата R_k има $p_k+1=n+k+1$ точки, като $1<k$. За k важи неравенството

$$1<k\leq\frac{n^2-n-1}{2}. \tag{4}$$

Наистина вън от R_k има поне две точки P, Q (според стойство 7). Тогава през P, Q и точките на R_k ще има най-малко $2(n+k)+2$ прави. Но според 6 трябва да имаме

$$2n+2k+2\leq n^2+n+1, \quad \text{т. е.} \quad k\leq\frac{n^2-n-1}{2}.$$

Освен това за всяко $s\neq k$ $s\in[1, y]$ важи

$$p_s<\frac{n^2+n-2}{n+k}. \tag{5}$$

Действително през точките върху R_s и R_k ще минават най-малко $(n+k)p_s+2$ прави (ако R_k и R_s имат обща точка M), откъдето пак според 6 ще имаме $(n+k)p_s+2\leq n^2+n+1$ или $p_s\leq\frac{n^2+n-1}{n+k}$, но от това неравенство и от (4) следва

$$p_s+p_k+1\leq\frac{n^2+n-1}{n+k}+n+k+1\leq\frac{n^2+n}{n+1}+n+\frac{n^2-n-1}{2}+1$$

$$=n+\frac{n^2+n+1}{2}=\frac{n^2+3n+1}{2}<n^2+n \quad (n\geq 2),$$

т. е. има точка L от π, която не е инцидентна нито с правата R_k, нито с правата R_s. Тогава (според 1) ще има поне още една права, съединяваща точка L с пресечната точка M на R_k и R_s. Но поради 6 трябва да имаме $(n+k)p_s+2+1\leq n^2+n+1$, или $(n+k)p_s\leq n^2+n-2$, откъдето следва (5), тъй като $n+k>0$. Нека P_i е произволна точка от π. Ако P_i не е инцидентна с R_k, то върху всяка права през P_i ще има $p_s<\frac{n^2+n-2}{n+k}\leq\frac{n^2+n}{n+1}=n$ точки и както в а) имаме $n\leq r_i$.

Нека сега P_i е инцидентна с R_k. Тогава, като имаме пред вид 5 и че $p_k+1=n+k+1$, равенство (2) добива вида

$$n^2+n+1=n+k+\sum_{s=1}^{r_i}p_s+1, \quad \text{или} \quad n^2-k=\sum_{s=1}^{r_i}p_s.$$

Като приложим 5, получаваме

$$n^2-k\leq r_i\,\frac{n^2+n-2}{n+k}, \quad \text{или} \quad r_i\geq\frac{(n^2-k)(n+k)}{n^2+n-2}$$

Ще покажем, че

$$\frac{(n^2-k)(n+k)}{n^2+n-2}\geq n. \tag{6}$$

Тъй като $n^2+n-2\geq 0$ $(n\geq 2)$, то горното неравенство е еквивалентно със следното:

$$(n^2-k)(n+k)\geq n(n^2+n-2),$$

или

$$k^2+(n-n^2)k+n^2-2n\leq 0.$$

Но това неравенство е вярно, когато

$$\text{(7)}\qquad \frac{n^2-n-\sqrt{n^4-2n^3-3n^2+8n}}{2}\leq k\leq\frac{n^2-n+\sqrt{n^4-2n^3-3n^2+8n}}{2}.$$

Тук $n^4-2n^3-3n^2+8n>0$ при $n\geq 2$, защото функцията $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+8x$ е растяща при $x\geq 2$ и $f(2)=4$. Лесно се вижда, че при $n\geq 2$

$$\frac{n^2-n-\sqrt{n^4-2n^3-3n^2+8n}}{2}<1$$

и

$$\frac{n^2-n-1}{2}<\frac{n^2-n+\sqrt{n^4-2n^3-3n^2+8n}}{2}$$

Но според (4) $1\leq k\leq\frac{n^2-n-1}{2}$. Следователно неравенство (7) е вярно за всички допустими стойности на k, а оттук и неравенство (6), от което непосредствено следва $n\leq r_i$. И тъй доказахме, че $n\leq r_i$ за всяко $i\in[1,x]$.

Нека сега R_s е произволна права от π. Броят на правите през точките на R_s ще бъде $r_{i,1}+r_{i,2}+\dots+r_{i,p_s+1}+1$. Тъй като $r_i\geq n$, то тези прави ще бъдат най-малко $(p_s+1)n+1$, но според 6 трябва да имаме $(p_s+1)n+1=n^2+n+1$, откъдето $p_s+1\leq n+1$ или $p_s\leq n$ за всяко $s\in[1,y]$. Като вземем пред вид, че от 6 $y=n^2+n+1$, получаваме

$$(*)\qquad \sum_{s=1}^{y}(p_s+1)\leq(n+1)(n^2+n+1).$$

От друга страна, от 5 $x=n^2+n+1$ и понеже $r_i\geq n$, получаваме

$$(**)\qquad \sum_{i=1}^{x}(r_i+1)\geq(n+1)(n^2+n+1).$$

Тогава от равенство (1) и неравенствата (*) и (**) получаваме

$$(n+1)(n^2+n+1)\leq\sum_{i=1}^{N}(r_i+1)=\sum_{s=1}^{N}(p_s+1)\leq(n+1)(n^2+n+1),$$

т. е. $\sum_{i=1}^{N}(r_i+1)=\sum_{s=1}^{N}(p_s+1)=(n+1)(n^2+n+1)$, където $N=n^2+n+1$.

И сега от $r_i\geq n$ и $p_s\leq n$ следва веднага, че

$$r_i=n \text{ за всяко } i\in[1,N] \text{ и } p_s=n \text{ за всяко } s\in[1,N].$$

Следователно от 1, 5, 6, 7 следват 3 и 4. Но системата A=(1 4 5) е пълна, значи и системата K е пълна. За дуалната система K' аналогично се доказва, че $p_s\geq n$ за всяко $s\in[1,y]$, а оттук, че $r_i\leq n$ за всяко $i\in[1,x]$ и после както по-горе, че $p_s=n$ и $r_i=n$, т. е. че от 2, 5, 6, 8 следват 3 и 4. Но системата A' (2 3 6) е пълна, следователно и системата K' е пълна.

Б. Сега ще покажем, че системите във (II) са минимални. Това следва от непълнотата на следните системи:

$$\Sigma_1=(3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8),\quad \Sigma_2=(1\ 2\ 3\ 4),\quad \Sigma_3=(1\ 2\ 5\ 6),\quad \Sigma_4=(1\ 2\ 7\ 8),$$
$$\Sigma_5=(1\ 3\ 6\ 7\ 8),\ \Sigma_6=(1\ 3\ 5\ 8),\ \Sigma_7=(1\ 4\ 7\ 8),$$
$$\Sigma_5'=(2\ 4\ 5\ 7\ 8),\ \Sigma_6'=(2\ 4\ 6\ 7),\ \Sigma_7'=(2\ 3\ 7\ 8),$$
$$\Sigma_8=(1\ 5\ 6\ 8),\ \Sigma_9=(1\ 5\ 7\ 8),$$
$$\Sigma_8'=(2\ 5\ 6\ 7),\ \Sigma_9'=(2\ 6\ 7\ 8).$$

За да докажем непълнотата на горните системи, конструираме специални изродени крайни равнини, такива, че в тях се реализират свойствата от системите $\Sigma_1 \div \Sigma_9'$ (изродена крайна равнина наричаме крайна равнина, в която някои от свойствата в (I) не се реализират).

I. π_1 се състои от 7 точки: A, B, C, D, E, F, G, и 7 прави, инцидентни съответно с тройките точки:

$$k_1=AEG,\quad k_2=ABD,\quad k_3=ACD,\quad k_4=EFG,$$
$$k_5=BCF,\quad k_6=FDG,\quad k_7=BEC.$$

Очевидно в така конструираната крайна равнина през всяка точка минават точно три прави, върху всяка права лежат точно три точки, а точките A, B, C, G, и правите k_1, k_2, k_5, k_6 са такива, че са изпълнени свойства 7 и 8. Следователно в π_1 са изпълнени свойства 3, 4, 5, 6, 7, 8. Но едновременно през точките C и G не минава нито една права, а правите k_2 и k_4 не се пресичат нито в една точка. Тогава свойствата 1 и 2 не са изпълнени в π_1, откъдето се вижда, че те не са следствия на останалите. Оттук следва, че всяка пълна система трябва да съдържа поне едно от свойствата 1 или 2 и че Σ_1 е непълна система.

II. За системите Σ_2 и Σ_3 вж. [2].

III. π_2 е безкрайна проективна равнина. Свойства 1, 2, 7 и 8 са изпълнени в π_2. Следователно само с тях не може да се докаже, че една равнина е крайна, т. е. Σ_4 е непълна система.

IV. π_3 се състои от 5 точки: A, B, C, D, E, и 7 прави: $a_1=AB$, $a_2=AEC$, $a_3=AD$, $a_4=BC$, $a_5=BED$, $a_6=CD$, $a_7 \angle E$, като a_7 не е инцидентна с никоя от точките A, B, C, D (π_3 е от ред $n=2$). Тук 1, 3, 6, 7, 8 са изпълнени, но например 2 не е изпълнено (правите a_1 и a_6 не се пресичат). Следователно Σ_5 е непълна система. Чрез дуалната равнина на π_3 се доказва, че Σ_5' също е непълна система.

V. π_4 се състои от n^2+n+1 точки, инцидентни с една права, като през всяка точка минават $n+1$ прави. Очевидно тук 1, 3, 5, 8 са изпълнени, но например 6 не е изпълнено (в π_4 има повече от n^2+n+1 прави). Следователно Σ_6 е непълна система. Чрез дуалната равнина на π_4 се доказва, че Σ_6' е непълна.

VI. π_5 се състои от 9 точки: A, B, C, D, E, F, G, H, K и 12 прави:

$$k_1=\mathrm{ABH},\quad k_2=\mathrm{ACE},\quad k_3=\mathrm{ADG},\quad k_4=\mathrm{AFK},$$
$$k_5=\mathrm{BEK},\quad k_6=\mathrm{BDF},\quad k_7=\mathrm{BCG},\quad k_8=\mathrm{CHF},$$
$$k_9=\mathrm{CKD},\quad k_{10}=\mathrm{EHD},\quad k_{11}=\mathrm{EGF},\quad k_{12}=\mathrm{KHG}.$$

Очевидно в π_5 с всяка права са инцидентни точно $n+1=3$ точки. Проверява се непосредствено, че в π_5 с всеки две различни точки е инцидентна точно една права. Точките C, D, E, F са такива, че никои три от тях не са инцидентни с една права, а правите k_2, k_6, k_9, k_{11} са такива, че никои три от тях не са инцидентни с една точка. Следователно в π_5 са изпълнени 1, 4, 7, 8, но например 5 и 6 не са изпълнени. Следователно Σ_7 е непълна система. От дуалната равнина на π_5 следва, че Σ_7' е непълна система.

VII. π_6 се състои от n^2+n+1 точки, инцидентни с една права, n^2+n-2 прави, инцидентни с една от точките, и две прави, инцидентни с други две точки. В тази равнина 1,5, 6,8 са изпълнени, но например 4 не е изпълнено. Следователно Σ_8 е непълна система. Чрез дуалната равнина на π_6 се доказва, че Σ_8' е също непълна система.

VIII. π_7 се състои от n^2+n+1 точки, като n^2+n-1 от тях са инцидентни с една права a, а различните точки P и Q не са инцидентни с a и $2n^2+2n$ прави, като $2n^2+2n-2$ от тях съединяват P и Q с точките на правата a, а другите две са правата през P и Q и правата a. Тук 1, 5, 7, 8 са изпълнени, но например 6 не е изпълнено. Следователно Σ_9 е непълна система. В дуалната равнина на π_7 се вижда, че и Σ_9' е непълна система.

И тъй от доказаното в А следва, че системите във (II) са пълни, а от доказаното в Б, че те са минимални, защото всяка част на някоя система от (II) се съдържа в някоя от системите $\Sigma_1 \div \Sigma_9'$, които, както видяхме по-горе, са непълни. От друга страна, всяка друга система, образувана от свойствата в (I), или ще съдържа някоя от системите във (II), или пък ще се съдържа в някоя от системите $\Sigma_1 \div \Sigma_9'$. Следователно системите във (II) са точно всички пълни минимални системи от аксиоми, определящи една крайна проективна равнина, които могат да се образуват от свойствата в (I).

С това теоремата е доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall M. Ir. The Theory of Groups. New York, 1959.
2. Barlotti, A. Un'osservasione sulle proprieta che caratterizano un piano grafico finito. — Bull. Unione Mat. Ital., 17, 1962. 4.

Постъпила на 8. I. 1972 г.

МИНИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ АКСИОМ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ КОНЕЧНУЮ ПРОЕКТИВНУЮ ПЛОСКОСТЬ

Чавдар Лозанов

(Резюме)

При построении моделей конечной проективной плоскости важен выбор системы аксиом. В статье рассматривается восемь свойств, характеризующих конечную проективную плоскость. Некоторая часть этих свойств определяется как полная система аксиом, если эта часть достаточна для определения конечной проективной плоскости. Система аксиом считается минимальной, если любая ее собственная часть не является полной. Найденые все полные минимальные системы аксиом, определяющие конечную проективную плоскость, которых можно образовать из рассматриваемых восьми свойств.

MINIMAL AXIOM SYSTEMS DEFINING A FINITE PROJECTIVE PLANE

Čavdar Lozanov

(Summary)

When constructing models of a finite projective plane, it is of importance, what a system of axioms will be used. In the present paper eight properties characterizing a finite projective plane are considered. A number of these properties are said to form a complete system of axioms if they are sufficient to define a finite projective plane. A system is called minimal if any of its proper parts is not complete. All complete minimal axiom systems defining a finite projective plane that can be formed out of the above eight properties are found.