БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

РАЗКЛОНЯВАЩИ СЕ СЛУЧАЙНИ ПРОЦЕСИ С ИМИГРАЦИЯ

Николай М. Янев

Пълното изследване на марковски разклоняващи се процеси с имиграция, където моментите на имиграция образуват поасонов поток, принадлежи на Севастянов [1]. В настоящата работа този модел се обобщава за разклоняващи се процеси, зависещи от възрастта на частиците. Последните, както е известно, не са вече марковски.

§ 1. ОПИСАНИЕ НА МОДЕЛА

Разглеждаме еднотипни частици, които еволюират независимо една от друга. Всяка от частиците има случайно време на живот τ с функция на разпределение

$$G(t)=\mathrm{P}\{\tau\leq t\},\quad G(0)=0. \tag{1}$$

В края на своя живот частицата поражда случаен брой ν частици с нулева възраст. Всяка от новообразуваните частици еволюира аналогично. Предполагаме, че са зададени условните вероятности*

$$p_n(u)=\mathrm{P}\{\nu=n/\tau=u\},\quad n=0,\,1,\ldots,\ \sum_{n=0}^{\infty}p_n(U)=1.$$

Нека μ_t означава броя на частиците в момент t при условие, че в началния момент $t=0$ е имало една частица с нулева възраст. Да означим

$$P_n(t)=\mathrm{P}\{\mu_t=n\},\quad n=0,1,\ldots,$$

и да въведем производящите функции

$$\begin{aligned} &h(u\,;s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(u)s^n,\quad s\leq 1,\ h(u\,;1)=1,\\ &\mathfrak{F}(t\,;s)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)s^n,\ |s|\leq 1,\ \mathfrak{F}(t\,;1)=1, \end{aligned} \tag{2}$$

---

* Вероятностите да се породят ν на брой частици с нулева възраст при условие, че пораждане се е извършило, като при това частицата в момента на пораждане е достигнала възраст u.

Не е трудно да се види, че $\mathfrak{F}(t\,;s)$ удовлетворява нелинейното интегрално уравнение

$$(3) \qquad \mathfrak{F}(t\,;s) = \int_0^t h(u\,;\mathfrak{F}(t-u\,;s))dG(u)+s(1-G(t))$$

с начално условие

$$(4) \qquad \mathfrak{F}(0\,;s)=s.$$

Нека освен това, независимо от наличието на някакъв брой частици, с вероятност $\delta_{k0}+q_k\Delta t+0(\Delta t)$ за интервал от време $\Delta t\to 0$ възникват (имигрират) k на брой частици. Така възникналите частици по-нататък се развиват по законите на описания по-горе разклоняващ се процес, зависещ от възрастта на частиците. Символът на Кронекер $\delta_{ij}=1$ при $i\neq j$ и $\delta_{ij}=1$ при $i=j$. Предполагаме, че q_k удовлетворяват условията

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k=0,\ q_0<0,\ q_k\geq 0,\ k>0,$$

и въвеждаме производящата функция

$$g(s)=\sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k,\quad |s|\leq 1,\ g(1)=0.$$

Състоянието на така описаната система се определя от броя на частиците ξ_t в момент t. Предполагаме, че в началния момент не е имало частици, т. е. $\xi_0=0$. Да означим

$$R_n(t)=\mathsf{P}\{\xi_t=n\},\quad n=0,1,\ldots,$$

и да въведем производящите функции

$$\Phi(t\,;s)=\sum_{n=0}^{\infty} R_n(t)s^n,\ |s|\leq 1,\ \Phi(t\,;1)=1.$$

Предмет на нашето изследване ще бъде разклоняващият се процес с имиграция ξ_t и неговото асимптотично поведение при $t\to\infty$.

Винаги ще предполагаме, че

$$(5) \qquad A=\int_0^{\infty} a(u)dG(u)<\infty,$$

където $a(u)=\frac{\partial h(u\,;s)}{\partial s}\Big|_{s=1}$. От условията (1) и (5) следва (вж. теорема 1 от [2]), че $\mathfrak{F}(t\,;s)$ е единствено решение на уравнение (3) с начално условие (4) в класа на вероятностните производящи функции.

§ 2. ПРЕДСТАВЯНЕ НА $\Phi\ (t;\ s)$ ЧРЕЗ $\mathfrak{F}(t\,;s)$ И $g(s)$

Ще покажем, че описаният по-горе модел може да се разглежда като частен случай на разклоняващ се процес, зависещ от възрастта на частиците, с два типа частици. Следвайки метода на Севастянов [1], да означим изучаваните частици като частици тип T_1 и да въведем една фиктивна частица тип T_0. Така имиграцията може да се представи като произхождаща от размножаването на фиктивната частица тип T_0, която, пораждайки нови частици тип T_1, сама не изчезва и не се размножава. А частиците тип T_1 пораждат само частици от същия тип по законите на разклоняващия се процес без имиграция. Тези условия лесно могат да бъдат изразени аналитично. За целта да припомним накратко някои определения от [2].

Нека векторът $\mu^i(t)=(\mu^i_0(t), \mu^i_1(t))$ означава, че в момента t съществуват $\mu^i_j(t)$ частици от тип T_j при условие, че в началния момент е имало само една частица от тип T_i, $i, j=0, 1$. Всяка от частиците от тип T_i има случайно време на живот τ^i и случаен състав на непосредственото си потомство $\nu^i=(\nu^i_0, \nu^i_1)$. Считаме зададени функциите на разпределение $G^i(t)=\mathsf{P}\{\tau^i \le t\}$ и условните вероятности* $p^i_{(\alpha_0, \alpha_1)}(u)=\mathsf{P}\{\nu^i=(\alpha_0, \alpha_1)/\tau^i=u\}$ където α_0 и α_1 пробягват целите неотрицателни числа. Предполагаме, че частиците еволюират независимо една от друга.

Да въведем производящите функции

$$(6)\qquad \begin{aligned} h^i(u; s_0, s_1) &= \sum_{\alpha_0, \alpha_1} p^i_{(\alpha_0, \alpha_1)}(u) s_0^{\alpha_0} s_1^{\alpha_1}, \\ \mathfrak{F}^i(t; s_0, s_1) &= \sum_{\alpha_0, \alpha_1} P^i_{(\alpha_0, \alpha_1)}(t) s_0^{\alpha_0} s_1^{\alpha_1}, \end{aligned}$$

където $P^i_{(\alpha_0, \alpha_1)}(t)=\mathsf{P}\{\mu^i(t)=(\alpha_0, \alpha_1)\}$, $|s_i| \leqq 1$, $i=0, 1$. Производящите функции $\mathfrak{F}^i(t; s_0, s_1)$ удовлетворяват системата нелинейни интегрални уравнения

$$(7)\qquad \mathfrak{F}^i(t; s_0, s_1)=\int_0^t h^i[u; \mathfrak{F}^0(t-u; s_0, s_1), \mathfrak{F}^1(t-u; s_0, s_1)]dG^i(u)+s_i(1-G^i(t))$$

с начални условия

$$(8)\qquad \mathfrak{F}^i(0; s_0, s_1)=s_i, \quad i=0, 1.$$

Сега вече е ясно, че в разглеждания от нас случай трябва да положим

$$\text{I.}\quad p^0_{(\alpha_0, \alpha_1)}(u)=\begin{cases} 0, & \alpha_0 \neq 1 \vee \alpha_1 = 0, \\ p^0_{\alpha_1} = \dfrac{q_{\alpha_1}}{1-q_0} & \alpha_0=1 \wedge \alpha_1 \neq 0; \end{cases} \qquad p^1_{(\alpha_0, \alpha_1)}(u)=\begin{cases} 0, & \alpha_0 \neq 0, \\ p_{\alpha_1}(u), & \alpha_0=0, \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad G^0(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ 1-e^{q_0 t}, & t \geqq 0, \end{cases} \qquad G^1(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ G(t) & t \geqq 0, \end{cases}$$

$$\text{III.}\quad P^0_{(\alpha_0, \alpha_1)}(t)=\begin{cases} 0, & \alpha_0 \neq 1, \\ R_{\alpha_1}(t) & \alpha_0=1; \end{cases} \qquad P^1_{(\alpha_0, \alpha_1)}(t)=\begin{cases} 0, & \alpha_0 \neq 0, \\ P_{\alpha_1}(t), & \alpha_0 = 0. \end{cases}$$

Да въведем вероятностната производяща функция

$$(9)\qquad f(s)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{1-q_0} s^k=\frac{g(s)-q_0}{1-q_0}, \qquad |s| \leq 1, \quad f(1)=1.$$

* Вж. забележката на стр. 71.

От горните условия лесно се получава, че между производящите функции (2), (6) и (9) съществува следната връзка:

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
&h^0(u\,;\,s_0,\,s_1)=s_0f(s_1), \quad h^1(u\,;\,s_0,\,s_1)=h(u\,;\,s_1),\\
&\mathfrak{F}^0(t\,;\,s_0,\,s_1)=s_0\Phi(t\,;\,s_1), \quad \mathfrak{F}^1(t\,;\,s_0,\,s_1)=\mathfrak{F}(t\,;\,s_1).
\end{aligned}
$$

Използувайки съотношенията (10) от (7), получаваме за $\Phi(t\,;\,s)$ следното уравнение (полагаме $s_1=s$):

$$\Phi(t\,;\,s)=e^{q_0t}-q_0e^{q_0t}\int_0^t\Phi(u\,;\,s)f(\mathfrak{F}(u;\,s))du,$$

с начално условие $\Phi(0\,;\,s)=1$. Като положим $X(t\,;\,s)=e^{-q_0t}\Phi(t\,;\,s)$ и диференцираме по t, стигаме до линейното диференциално уравнение

$$\frac{\partial X(t\,;\,s)}{\partial t}=-q_0X(t\,;\,s)f(\mathfrak{F}(t\,;\,s))$$

с начално условие $X(0\,;\,s)=1$, което има решение

$$X(t\,;\,s)=\exp\left\{-q_0\int_0^t f(\mathfrak{F}(u\,;\,s))du\right\}.$$

Оттук, като вземем пред вид (9), окончателно получаваме

$$(11)\qquad \Phi(t\,;\,s)=\exp\left\{\int_0^t g(\mathfrak{F}(u\,;\,s))du\right\},$$

където $\mathfrak{F}(t\,;\,s)$ е единственото решение на (3).

§ 3. АСИМПТОТИКА НА ПЪРВИТЕ И ВТОРИТЕ МОМЕНТИ

Да въведем означенията

$$
\begin{gathered}
a_0=g'(1), \quad b_0=g''(1), \quad a(u)=\frac{\partial h(u\,;\,s)}{\partial s}\bigg|_{s=1},\\
b(u)=\frac{\partial^2h(u\,;\,s)}{\partial s^2}\bigg|_{s=1}, \quad A(t)=\mathsf{E}\mu_t=\frac{\partial\mathfrak{F}(t\,;\,s)}{\partial s}\bigg|_{s=1},\\
B(t)=\mathsf{E}\mu_t(\mu_t-1)=\frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathfrak{F}(t\,;\,s)\Big|_{s=1},\\
M(t)=\mathsf{E}\xi_t, \quad D(t)=\mathsf{D}\xi_t.
\end{gathered}
$$

От (11) получаваме за математическото очакване и дисперсията на ξ_t следните изрази:

$$(12)\qquad M(t)=\frac{\partial}{\partial s}\ln\Phi(t\,;\,s)\Big|_{s=1}=a_0\int_0^t A(u)du,$$

$$D(t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln \Phi(t;s)+\frac{\partial}{\partial s}\ln \Phi(t;s)\right)\Big|_{s=1} \tag{13}$$

$$=a_0\int_0^t B(u)\,du+b_0\int_0^t A^2(u)du+a_0\int_0^t A(u)du,$$

където $A(t)$ и $B(t)$ са определени от уравненията

$$A(t)=\int_0^t A(t-u)a(u)dG(u)+1-G(t), \tag{14}$$

$$B(t)\quad\int_0^t B(t-u)a(u)dG(u)+\int_0^t A^2(t-u)b(u)dG(u). \tag{15}$$

Нека A е определено от (5), а $B=\int_0^\infty b(u)dG(u)$. Съгласно [3] разклоняващият се процес без имиграция μ_t се нарича докритически, ако $A<1$, надкритически, ако $A>1$, и критически, ако $A=1$, $B>0$. Това определение без изменение ще пренесем върху разглеждания процес с имиграция ξ_t.

Да определим реалното число α като корен на уравнението

$$1=\int_0^\infty e^{-\alpha u}a(u)dG(u). \tag{16}$$

Ако $A\geq 1$, то съществува единствено такова α, като $\alpha=0$ при $A=1$ и $\alpha>0$ при $A>1$. Ако $A<1$, уравнение (16) може и да няма корен. Но ако съществува корен, той непременно ще бъде отрицателен. По-нататък винаги ще предполагаме, че уравнение (16) има единствен корен α.

При известни условия [3] в докритическия и в надкритическия случай $A(t)\sim A_0e^{\alpha t}$ при $t\to\infty$, а в критическия съществува $\lim\limits_{t\to\infty} A(t)=A_1$, където константите A_0 и A_1 се изразяват точно. Ще покажем, че за $M(t)$ съществуват аналогично три типа гранични съотношения.

Теорема 1. Ако процесът ξ_t е докритически, a_0 и $M_1=\int_0^\infty udG(u)$ са крайни, то съществува $\lim\limits_{t\to\infty} M(t)=\frac{a_0M_1}{1-A}$.

Доказателство. Лапласовата трансформация на функцията $A(t)$

$$\varphi(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}A(t)dt$$

е определена в полуравнината $\mathrm{Re}\lambda>\alpha$, където $\alpha<0$ е корен на (16). От уравнение (14) получаваме

$$\varphi(\lambda)=\varphi(\lambda)\int_0^\infty e^{-\lambda t}a(t)dG(t)+\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-G(t))dt.$$

Тъй като $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}a(t)dG(t) \neq 1$, за $\varphi(\lambda)$ получаваме представянето

$$\varphi(\lambda)=\frac{\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(1-G(t))dt}{1-\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}a(t)dG(t)}.$$

Следователно

$$\lim_{\lambda\to\infty}\varphi(\lambda)=\frac{M_1}{1-A}$$

и $\lim\limits_{t\to\infty} M(t)=a_0\lim\limits_{\lambda\to 0}\varphi(\lambda)=\frac{a_0M_1}{1-A}$

Теоремата е доказана.

Да интегрираме двете страни на уравнение (14):

$$\int\limits_0^t A(x)dx=\int\limits_0^t\int\limits_0^x A(x-u)a(u)dG(u)dx+\int\limits_0^t(1-G(x))dx.$$

Като вземем пред вид, че

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^x A(x-u)a(u)dG(u)dx=\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-u} A(x)dxa(u)dG(u),$$

и положим $M_0(t)=\int\limits_0^t A(x)dx$, получаваме уравнението

$$M_0(t)=\int\limits_0^t M_0(t-u)a(u)dG(u)+\int\limits_0^t(1-G(u))du. \tag{17}$$

Да означим

$$G_a^{(\alpha)}(t)=\int\limits_0^t e^{-\alpha u}a(u)dG(u), \text{ където } \alpha \text{ е корен на (16)}$$

$$G_a(t)=G_a^{(0)}(t),\quad M_{ak}^{(\alpha)}=\int\limits_0^\infty u^k dG_a^{(\alpha)}(u)\quad M_k=\int\limits_0^\infty u^k dG(u).$$

Теорема 2. Ако процесът ξ_t е критически, a_0, M_1 и M_{a1} са крайни, то при $t\to\infty$ $M(t)=\frac{a_0M_1}{M_{a1}}t+o(t)$.

Доказателство. В условието на теоремата уравнение (17), което може да се запише във вида

$$M_0(t)=\int\limits_0^t M_0(t-u)dG_a(t)+\int\limits_0^t(1-G(u))du, \tag{18}$$

е уравнение на възстановяването. Тъй като $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t (1-G(u))du=M_1$, то доказателството на теоремата се получава непосредствено от [5] (стр. 271, теорема 7).

Ще дадем едно уточнение на тази теорема.

Теорема 3. В условията на теорема 2, ако допълнително допуснем, че вторите моменти M_2 и M_{a2} са крайни и $G_a(t)$ е функция на разпределение от абсолютнонепрекъснат тип*, то при $t\to$

$$M(t)=\frac{a_0M_1}{M_{a1}}t-\frac{a_0M_2}{2M_{a1}}+\frac{a_0M_1M_{a2}}{2M_{a1}^2}+o(1).$$

Доказателство. Тъй като

$$\int\limits_0\left[\int\limits_0^t(1-G(u))du-M_1\right]dt=-\int\limits_0^\infty\int\limits_t^\infty[1-G(u)]dudt$$

$$-\int\limits_0^\infty\int\limits_0^u dt[1-G(u)]du=\int\limits_0^\infty u[1-G(u)]du\quad-\frac{M_2}{2},$$

то към уравнение (18) може да се приложи теорема 3 от [3], откъдето непосредствено следва утвърждението на теоремата.

Теорема 4. Ако процесът ξ_t е надкритически, a_0, $M_{a1}^{(\alpha)}$ и $\int\limits_0^\infty ue^{-\alpha u}(1-G(u))du$ са крайни, то

$$\lim_{t\to\infty}M(t)e^{-\alpha t}=M,$$

където $\alpha>0$ е корен на (16), а

$$(19)\qquad M=\frac{a_0}{\alpha M_{a1}^{(\alpha)}}\int\limits_0^\infty e^{-\alpha u}[1-G(u)]du.$$

Доказателство. В уравнение (17) да положим $M_0(t)=e^{\alpha t}\bar{M}_0(t)$, където α е корен на (16). Получаваме

$$(20)\qquad \bar{M}_0(t)=\int\limits_0^t\bar{M}_0(t-u)dG_a^{(\alpha)}(u)+e^{-\alpha t}\int\limits_0^t(1-G(u))du.$$

Ще покажем, че $e^{-\alpha t}\int\limits_0^t(1-G(u))du$ може да се представи като разлика на две монотонно-намаляващи функции от $L_1(0,\infty)$. Действително

$$e^{-\alpha t}\int\limits_0^t(1-G(u))du=\alpha\int\limits_t^\infty e^{-\alpha x}\int\limits_0^x(1-G(u)dudx-\int\limits_t^\infty e^{-\alpha x}(1-G(x))dx,$$

---

* За дефиницията вж. [3].

$$\int_0^\infty \int_t^\infty e^{-ax}(1-G(x))dxdt=\int_0^\infty \int_0^x dte^{-ax}(1-G(x))dx \quad \int_0^\infty xe^{-ax}(1-G(x))dx<\infty,$$

$$\int_0^\infty e^{-at}\int_0^t (1-G(u))dudt=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-at}(1-G(t))dt\leq\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-at}dt=\frac{1}{a^2}<\infty$$

Следователно към уравнение (20) можем да приложим основната теорема на възстановяването. Теоремата е доказана

Теорема 5. Нека процесът ξ_t е надкритически. Тогава, ако $G_a^{(a)}(t)$ е неаритметична функция на разпределение, a_0, b_0 и $\int_0^\infty e^{-2au}b(u)dG(u)$ са крайни, то $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-2at}D(t)=\bar{D}$, където $a>0$ е корен на уравнението (16),

$$(21)\qquad \begin{cases} \bar{D}=\dfrac{A_0^2\left[b_0+a_0\displaystyle\int_0^\infty e^{-2at}b(t)dG(t)\right]}{2a\left[1-\displaystyle\int_0^\infty e^{-2at}a(t)dG(t)\right]}, \\ A_0=\dfrac{1}{M_{a1}^{(a)}}\displaystyle\int_0^\infty e^{-au}(1-G(u))du. \end{cases}$$

Доказателство. Лесно се вижда, че

$$\int_0^t\int_0^u B(u-x)a(x)dG(x)du=\int_0^t\int_x^t B(u-x)dua(x)dG(x)=\int_0^t\int_0^{t-x} B(u)dua(x)dG(x),$$

$$\int_0^t\int_0^u A^2(u-x)b(x)dG(x)du=\int_0^t\int_0^{t-x} A^2(u)dub(x)dG(x).$$

Следователно, като интегрираме двете страни на уравнение (15) и положим

$$V(t)=\int_0^t B(u)du \quad \text{и} \quad W(t)=\int_0^t A^2(u)du,$$

ще получим уравнението

$$(22)\qquad V(t)=\int_0^t V(t-x)a(x)dG(x)+\int_0^t W(t-x)b(x)dG(x).$$

Да означим $m=\int_0^\infty e^{-2au}a(u)dG(u)$, където $a>0$ е корен на (16). Ясно е, че $m<1$. Сега в (22) да извършим полагането

$$V(t)=e^{2at}V_0(t), \quad W(t)=e^{2at}W_0(t)$$

$$G_a^{(2a)}(t)=\frac{1}{m}\int_0^t e^{-2au}a(u)dG(u).$$

Получаваме уравнението

$$V_0(t)=m\int_0^t V_0(t-x)dG_a^{(2a)}(x)+\int_0^t W_0(t-x)e^{-2ax}b(x)dG(x). \tag{23}$$

Като се възползуваме от известното свойство за композицията на две функции, теорема 6 от [3] и теорема 4, не е трудно до се види, че

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t W_0(t-x)e^{-2ax}b(x)dG(x)=\frac{A_0^2}{2a}\int_0^\infty e^{-2ax}b(x)dG(x).$$

Следователно към уравнение (23) може да се приложи лема 4, стр. 248 от [6], откъдето получаваме

$$\lim_{t\to\infty}V_0(t)=\lim_{t\to\infty}e^{-2at}V(t)=\frac{A_0^2}{2a(1-m)}\int_0^\infty e^{-2ax}b(x)dG(x).$$

Да положим в (13) $\bar{D}(t)=e^{-2at}D(t)$. От доказаното по-горе и от факта, че по теорема 4 $\lim_{t\to\infty}e^{-2at}\int_0^t A(u)du=0$, окончателно получаваме $\lim_{t\to\infty}\bar{D}(t)=\bar{D}$. Теоремата е доказана.

Ще изследваме асимптотиката на ковариацията

$$C(t,\tau)=\operatorname{Cov}(\xi_t,\xi_{t+\tau})=E\xi_t\xi_{t+\tau}-E\xi_tE\xi_{t+\tau}.$$

С тази цел за $\Phi(t,\tau;s_1,s_2)=Es_1^{\xi_t}s_2^{\xi_{t+\tau}}$, $\tau\geq 0$, можем да получим представяне аналогично на (11). Ще се ползуваме от факта, че за процеса без имиграция μ_t функцията $\mathfrak{F}(t,\tau;s_1,s_2)=Es_1^{\mu_t}s_2^{\mu_{t+\tau}}$ удовлетворява (вж. [4]) интегралното уравнение

$$\mathfrak{F}(t,\tau;s_1,s_2)=\int_0^t h(u;\mathfrak{F}(t-u,\tau;s_1,s_2))dG(u) \tag{24}$$

$$+s_1\int_t^{t+\tau}h(u;\mathfrak{F}(t+\tau-u;s_2))dG(u)+s_1s_2(1-G(t+\tau)).$$

В случая с два типа частици за функциите

$$\mathfrak{F}^i(t,\tau;\mathbf{x},\mathbf{y})=E\mathbf{x}^{\mu^i(t)}\mathbf{y}^{\mu^i(t+\tau)},\ \tau\geq 0,\ \mathbf{x}=(x_0,x_1),\ \mathbf{y}=(y_0,y_1),$$

лесно може да се получи система от интегрални уравнения, аналогични на (24):

$$(25)\qquad \mathfrak{F}^i(t, \tau; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^t h^i(u; \mathbf{F}(t-u, \tau; \mathbf{x}, \mathbf{y}))dG^i(u)$$

$$+x_i\int_t^{t+\tau} h^i(u; \mathbf{F}(t+\tau-u; \mathbf{y}))dG^i(u) + x_i y_i(1-G^i(t+\tau)),$$

където $i=0,\ 1,\ \mathbf{F}(.)=(\mathfrak{F}^0(.),\ \mathfrak{F}^1(.))$.

Като вземем пред вид условията I — III от § 2, не е трудно да видим, че в разглеждания от нас случай

$$\mathfrak{F}^0(t, \tau; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_0 y_0 \Phi(t, \tau; x_1, y_1),$$

$$\mathfrak{F}^1(t, \tau; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \mathfrak{F}(t, \tau; x_1, y_1).$$

Тогава от първото уравнение на (25), като положим $s_1=x_1,\ s_2\ \ y_1$, получаваме уравнението

$$\Phi(t, \tau; s_1, s_2) = e^{q_0(t+\tau)} - q_0 e^{q_0 t}\int_0^t e^{-q_0 u}\Phi(u, \tau; s_1, s_2)$$

$$\times f(\mathfrak{F}(u, \tau; s_1, s_2))du - q_0 e^{q_0(t+\tau)}\int_0^\tau e^{-q_0 u}\Phi(u; s_2)f(\mathfrak{F}(u; s_2))du.$$

Полагаме $X(t, \tau)\quad \Phi(t, \tau; s_1, s_2)e^{-q_0(t+\tau)}$ и диференцираме по t

$$\frac{\partial}{\partial t}X(t, \tau) - -q_0 X(t, \tau)f(\mathfrak{F}(t, \tau)),$$

където за краткост сме положили $\mathfrak{F}(t, \tau) = \mathfrak{F}(t, \tau; s_1, s_2)$. Това уравнение с начално условие $X(0, \tau) = \Phi(\tau; s_2)\, e^{-q_0\tau}$ има решение

$$X(t, \tau) = e^{-q_0\tau}\Phi(\tau; s_2)\exp\left\{-q_0\int_0^t f(\mathfrak{F}(u; \tau))du\right\}.$$

Оттук и от (9) и (11) окончателно получаваме

$$(26)\qquad \Phi(t, \tau; s_1, s_2) = \exp\left\{\int_0^\tau g(\mathfrak{F}(u; s_2))du + \int_0^t g(\mathfrak{F}(u, \tau; s_1, s_2))du\right\},$$

където $\mathfrak{F}(t, \tau; s_1, s_2)$ се определя от (24).

От (26) за

$$C(t, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2}\ln\Phi(t, \tau; s_1, s_2)\,|_{s_1=s_2=1}$$

следва представянето

$$(27)\qquad C(t, \tau) = a_0\int_0^t B(u, \tau)du + b_0\int_0^t A(u)A(u+\tau)du.$$

В горната формула $B(t, \tau)=\mathrm{E}\mu_t\mu_{t+\tau}$ удовлетворява уравнението, което се получава, като диференцираме (24) последователно по s_1 и s_2 в точката $s_1=s_2=1$:

$$(28)\qquad B(t, \tau)=\int_0^t B(t-u, \tau)a(u)dG(u)+\int_0^t A(t-u)A(t+\tau-u)b(u)dG(u)$$
$$+\int_t^{t+\tau} A(t+\tau-u)a(u)dG(u)+1-G(t+\tau).$$

Теорема 6. В условието на теорема 5 равномерно по $\tau\geqq 0$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha(2t+\tau)}C(t, \tau)=\bar{D},$$

където константата $\bar{D}$ е определена от формула (21).

Доказателство. Въвеждаме означенията $V(t, \tau)=\int_0^t B(u, \tau)du$ и

$W(t, \tau)=\int_0^t A(u)A(u+\tau)du$. Като вземем пред вид, че

$$\int_0^t\int_0^u B(u-x, \tau)a(x)dG(x)du=\int_0^t\int_0^{t-x} B(u, \tau)du\,a(x)dG(x)=\int_0^t V(t-x, \tau)dx$$

и

$$\int_0^t\int_0^u A(u-x)A(u+\tau-x)b(x)dG(x)du=\int_0^t W(t-x, \tau)b(x)dG(x),$$

да интегрираме двете страни на уравнение (28). Така стигаме до уравнението

$$V(t, \tau)=\int_0^t V(t-x, \tau)a(x)dG(x)+\int_0^t W(t-x, \tau)b(x)dG(x)+K(t, \tau),$$

където

$$K(t, \tau)=\int_0^t\int_u^{u+\tau} A(u+\tau-x)a(x)dG(x)du+\int_\tau^{t+\tau}(1-G(u))du.$$

В горното уравнение да извършим полагането

$$V_0(t, \tau)=e^{-\alpha(2t+\tau)}V(t, \tau),\quad W_0(t, \tau)=e^{-\alpha(2t+\tau)}W(t, \tau),$$

$$G_a^{(2\alpha)}(t)=\frac{1}{m}\int_0^t e^{-2\alpha u}a(u)dG(u),\ \text{където}\ m=\int_0^\infty e^{-2\alpha u}a(u)dG(u).$$

От (16) следва, че $m<1$. Получаваме следното уравнение:

$$(29)\ V_0(t,\tau)=m\int_0^t V_0(t-x,\tau)dG_a^{(2a)}(x)+\int_0^t W_0(t-x)e^{-2ax}b(x)dG(x)+e^{-a(2t+\tau)}K(t,\tau).$$

Не е трудно да се види, че $\lim\limits_{t\to\infty}[e^{-a(2t+\tau)}K(t,\tau)]=0$ и

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t W_0(t-x,\tau)e^{-2ax}b(x)dG(x)=\frac{A_0^2}{2a}\int_0^\infty e^{-2ax}b(x)dG(x),$$

където константата A_0 се определя по формула (21) и сходимостта е равномерна по $\tau\geqq 0$. Първото гранично съотношение се получава непосредствено от представянето на $K(t,\tau)$, като се използува теорема 4, а второто следва от теорема 6 в [3], теорема 4 и известно свойство за композицията на две функции.

Следователно към уравнение (29) можем да приложим лема 4 ([6], стр. 248), откъдето

$$\lim_{t\to\infty}V_0(t)=\frac{A_0^2}{2a(1-m)}\int_0^\infty e^{-2ax}b(x)dG(x)$$

равномерно по $\tau\geqq 0$. Ако положим в (27)

$$\tilde{C}(t,\tau)=e^{-a(2t+\tau)}C(t,\tau),$$

то от доказаното по-горе непосредствено следва $\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{C}(t,\tau)=\bar{D}$. Теоремата е доказана.

§ 4. ГРАНИЧНИ ТЕОРЕМИ

Теорема 7. Ако процесът ξ_t е докритически, a_0 и M_1 са крайни, то съществуват границите $\lim\limits_{t\to\infty}R_k(t)=R_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}R_k=1$.

Доказателство. Ще покажем, че

$$(30)\qquad \lim_{t\to\infty}\Phi(t;s)=\Phi(s)=\exp\left\{\int_0^\infty g(\mathfrak{F}(u;s))du\right\}$$

равномерно по s в кръга $|s|\leqq 1$. Тъй като при $|s|\leqq 1$

$$|g(s)|\leqq a_0|s-1| \quad \text{и} \quad |\mathfrak{F}(t;s)-1|\leqq A(t)|s-1|,$$

то следва, че

$$(31)\qquad |g(\mathfrak{F}(t;s))|\leqq a_0A(t)|s-1|\leqq 2a_0A(t).$$

От друга страна, според теорема 1 интегралът

$$\int_0^\infty A(t)dt=\frac{M_1}{1-A}\quad \text{е крaен.}$$

Следователно несобственият интеграл $\int\limits_0^\infty g(\mathfrak{F}(t;s))dt$ е равномерно сходящ в $|s|\leqq 1$, откъдето следва граничното съотношение (30). Като вземем пред вид, че

$$\left|\int_0^\infty g(\mathfrak{F}(u\,;\,s))du\right| \leq \int_0^\infty g(\mathfrak{F}(u\,;\,s))du \leqq a_0\,|\,s-1\,|\int_0^\infty A(u)du = \frac{a_0M_1}{1-A}\,|\,s-1\,|\xrightarrow[s\to\infty]{} 0,.$$

окончателно получаваме

$$\lim_{s\to 1}\Phi(s) = \lim_{s\to 1}\sum_{k=0}^{\infty} R_k\, s^k = 1.$$

Теоремата е доказана.

Теорема 8. Нека процесът ξ_t е критически, $G_a(t)$ е функция на разпределение от абсолютно непрекъснат тип, a_0, b_0, M_3, M_{a3}, B и $\int_0^\infty u^2b(u)dG(u)$ са крайни. Да означим

$$c = \frac{a_0M_1}{M_{a1}}, \quad \varrho = \frac{2a_0M_{a1}}{B}, \quad S_t(x) = \mathrm{P}\left\{\frac{\xi_t}{ct} \leq x\right\}.$$

Тогава $\lim\limits_{t\to\infty} S_t(x) = S(x)$, където $S(x)=0$ при $x<0$ и $S(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\int_0^{\varrho x} y^{\varrho-1}e^{-y}\,dy$ при $x \geqq 0$.

Доказателство. Тъй като $\Phi\left(t\,;\exp\left\{\frac{i\tau}{ct}\right\}\right)$ е характеристичната функция на случайната величина ξ_t/ct, а $(1-i\tau/\varrho)^{-\varrho}$ е характеристичната функция на граничното разпределение $S(x)$, то за доказателство на теоремата ще бъде достатъчно да покажем, че

$$\lim_{t\to\infty}\Phi\left(t\,;\,e^{\frac{i\tau}{ct}}\right) = \left(1-\frac{i\tau}{\varrho}\right)^{-\varrho}. \tag{32}$$

За тази цел да разбием интеграла

$$\int_0^t g\left(\mathfrak{F}\left(u\,;\,e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)\right)du \tag{33}$$

на четири събираеми и да изследваме поведението им при $t\to\infty$. И така при $t>T$

$$\int_0^t g\left(\mathfrak{F}\left(u\,;\,e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)\right)du = \int_0^T g\left(\mathfrak{F}\left(u\,;\,e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)\right)du + \int_T^t \left[g\left(\mathfrak{F}\left(u\,;\,e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)\right) - a_0\left(\mathfrak{F}\left(u\,;\,e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)-1\right)\right]du$$

$$-a_0\int_T^t\left[1-\mathfrak{F}\left(u\,;\,e^{\frac{i\tau}{ct}}\right) - \frac{A(u)\left(1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)}{1+\frac{B(u)}{2A(u)}\left(1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)}\right]du - a_0\int_T^t \frac{A(u)\left(1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)}{1+\frac{B(u)}{2A(u)}\left(1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)}\,du$$

$$= I_1+I_2+I_3+I_4.$$

От (31) следва, че при всяко $T>0$

$$|\,I_1\,| \leqq a_0\left|\,e^{\frac{i\tau}{ct}}-1\,\right|\int_0^T A(u)du \leqq \frac{a_0\,|\,\tau\,|}{ct}\int_0^T A(u)du \to 0$$

при $t\to\infty$.

Не е трудно да се види (например [5]), че $g(s)$ може да се представи във вида

$$g(s)=a_0(s-1)+\frac{\bar{b}_0(s)}{2}(s-1)^2,$$

където при $|s|\le 1$ $\bar{b}_0(s)\le b_0$, а при $s\to 1$ $\bar{b}_0(s)\to b_0$. Оттук и (31) получаваме, че

$$|I_2|\le\int_T^t\left|g\left(\mathfrak{F}\left(u;e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)\right)-a_0\left(\mathfrak{F}\left(u;e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)-1\right)\right|du\le\frac{b_0}{2}\int_T^t\left|\mathfrak{F}\left(u;e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)-1\right|^2du$$

$$\le\frac{b_0}{2}\left|e^{\frac{i\tau}{ct}}-1\right|^2\int_T^t A^2(u)du\le\frac{b_0\tau^2}{2ct^2}\int_T^t A^2(u)du\to 0$$

при T достатъчно голямо и $t\to\infty$.

От [4] е известно, че при $|s|\le 1$ и $t\to\infty$ имаме представянето

$$1-\mathfrak{F}(t;s)=\frac{A(t)(1-s)}{1+\frac{B(t)}{2A(t)}(1-s)}\left[1+O\left(\frac{1}{\log\left(t+\frac{2}{1-s}\right)}\right)\right].$$

Следователно при T достатъчно голямо

$$I_3\le Ka_0\int_T^t\frac{A(u)\left|1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right|du}{\left|1+\frac{B(u)}{2A(u)}\left(1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)\right|\left|\log\left(u+\frac{2}{1-e^{\frac{i\tau}{ct}}}\right)\right|},\tag{34}$$

където K е някаква константа. Тъй като

$$\frac{2}{1-e^{\frac{i\tau}{ct}}}=i\frac{e^{-\frac{i\tau}{2ct}}}{\sin\frac{\tau}{2ct}}=1+i\,\mathrm{ctg}\frac{\tau}{2ct},$$

то

$$\left|\log\left(u+\frac{2}{1-e^{\frac{i\tau}{ct}}}\right)\right|\ge\ln\left|u+1+i\,\mathrm{ctg}\frac{\tau}{2ct}\right|=\frac{1}{2}\ln\left[(u+1)^2+\mathrm{ctg}^2\frac{\tau}{2ct}\right]\ge\ln\left|\mathrm{ctg}\frac{\tau}{2ct}\right|.$$

От друга страна,

$$\left|1+\frac{B(u)}{2A(u)}\left(1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)\right|\ge\mathrm{Re}\left\{1+\frac{B(u)}{2A(u)}\left(1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)\right\}$$

$$=1+\frac{B(u)}{A(u)}\sin^2\frac{\tau}{2ct}\ge 1+(B_1'u+B_2')\sin^2\frac{\tau}{2ct}.$$

Тук сме използували факта (вж. [3]), че в условията на нашата теорема при $t\to\infty$

$$A(t)=A_1+o\left(\frac{1}{t}\right),\quad B(t)=B_1t+B_2+o(1),$$

където

$$A_1=\frac{M_1}{M_{a1}},\quad B_1=\frac{BM_1^2}{M_{a1}^3}. \tag{35}$$

Следователно $A(t)\ \ A'_1$, $\frac{B(t)}{A(t)}\ \ B'_1t+B'_2$, където A'_1, B'_1, B'_2 са подходящо подбрани константи. Сега можем да оценим интеграла в дясната част на неравенството (34). От горните зависимости получаваме

$$|I_3|\leq Ka_0A'_1\frac{|\tau|}{ct\ln\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2ct}}\left|\int_T^t\frac{du}{1+(B'_1u+B'_2)\sin^2\frac{\tau}{2ct}}\right|$$

$$\frac{K_1}{t\left(\sin^2\frac{\tau}{2ct}\right)\ln\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2ct}}\left[\ln\left(1+(B'_1t+B'_2)\sin^2\frac{\tau}{2ct}\right)-\ln\left(1+(B'_1T+B'_2)\sin^2\frac{\tau}{2ct}\right)\right]\underset{t\to\infty}{\to}0.$$

За краткост сме положили

$$K_1=\frac{Ka_0A'_1}{B'_1}.$$

Нека T е достатъчно голямо. Тогава

$$\lim_{t\to\infty}I_4=\lim_{t\to\infty}I'_4+\lim_{t\to\infty}I''_4,$$

където

$$I'_4=-a_0\int_T^t\frac{A_1\left(1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)du}{1+\left(\frac{B_1}{2A_1}u+O(1)\right)\left(1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)},$$

$$I''_4=-a_0\int_T^t\frac{o\left(\frac{1}{u}\right)\left(1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)du}{1+\left(\frac{B_1}{2A_1}u+O(1)\right)\left(1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)}.$$

Константите A_1 и B_1 са определени по формула (35). Лесно се вижда, че

$$\lim_{t\to\infty}I'_4=\lim_{t\to\infty}\left\{-\frac{2a_0A_1^2}{B_1}\left[\log\left(1+\left(\frac{B_1}{2A_1}t+O(1)\right)\left(1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)\right)\right.\right. \tag{36}$$

$$\left.\left.-\log\left(1+\left(\frac{B_1}{2A_1}t+O(1)\right)\left(1-e^{\frac{i\tau}{ct}}\right)\right)\right]\right\}=-\frac{2a_0A_1^2}{B_1}\log\left(1-i\frac{B_1\tau}{2A_1c}\right)$$

$$=-\varrho\log\left(1-\frac{i\tau}{\varrho}\right).$$

Като използуваме, че при $|z|\leq1$ $\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{1-z}\right\}\geq\frac{1}{2}$, можем да оценим I''_4 по следния начин:

$$|I_4''| \leq a_0 C_1 \int_T^t \frac{du}{u\left|\frac{1}{1-e^{\frac{i\tau}{ct}}}+\frac{B_1}{2A_1}u+O(1)\right|} \leq a_0 C_1 \int_T^t \frac{du}{u\left(\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2A_1}u+O(1)\right)}$$

$$\leq C_2 \int_T^t \frac{du}{u^2} \xrightarrow[t\to\infty]{} O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Тук C_1 и C_2 са подходящо подбрани константи.

Сега да изберем T достатъчно голямо, така че интегралите I_2, I_3 и I_4'' при $t \to \infty$ да са произволно малки. От доказаното дотук тогава ще следва, че разликата между (33) и (36) може да бъде направена също произволно малка, което доказва граничното съотношение (32). Теоремата е доказана.

Т е о р е м а 9. Нека процесът ξ_t е надкритически, функцията на разпределение $G_a^{(\alpha)}(t)$ е неаритметична, a_0, b_0, $M_{a1}^{(\alpha)}$,

$$\int_0^\infty e^{-2\alpha u} b(u) dG(u) \quad \text{и} \quad \int_0^\infty u e^{-\alpha u}(1-G(u))du$$

са крайни. Тогава при $t \to \infty$ случайната величина $e^{-\alpha t}\xi_t$ клони средноквадратично към случайната величина ξ с лапласова трансформация

$$\varphi(\lambda) = \exp\left\{\int_0^\infty g(f(\lambda e^{-\alpha u}))du\right\}, \tag{37}$$

където $f(\lambda)$ се определя от уравнението

$$f(\lambda) = \int_0^\infty h(u; f(\lambda \exp\{-\alpha u\}))dG(u). \tag{38}$$

Доказателство. Достатъчно е да покажем, че равномерно по $\tau \geq 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}[e^{-\alpha(t+\tau)}\xi_{t+\tau} - e^{-\alpha t}\xi_t]^2 = 0. \tag{39}$$

Действително

$$\mathsf{E}[e^{-\alpha(t+\tau)}\xi_{t+\tau} - e^{-\alpha t}\xi_t]^2 = e^{-2\alpha(t+\tau)}D(t+\tau) - e^{-2\alpha t}D(t) - 2e^{-\alpha(2t+\tau)}C(t,\tau)$$
$$+ [e^{-\alpha(t+\tau)}M(t+\tau) - e^{-\alpha t}M(t)]^2.$$

Сега (39) следва непосредствено от горното равенство, като към дясната му страна приложим теореми 4, 5 и 6. Тъй като пространството L_2 е пълно, то следва съществуването на случайна величина ξ, такава, че

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}[e^{-\alpha t}\xi_t - \xi]^2 = 0.$$

Нека $S_t(x) = \mathsf{P}\{e^{-\alpha t}\xi_t \leq x\}$, $S(x) = \mathsf{P}\{\xi \leq x\}$. От доказаното по-горе следва, че $\lim_{t\to\infty} S_t(x) = S(x)$. Следователно лапласовата трансформация $\Phi(t; \exp\{-\lambda e^{-\alpha t}\})$ на разпределението $S_t(x)$ клони при $t \to \infty$ към лапласовата трансформация $\varphi(\lambda)$ на разпределението $S(x)$. От друга страна, известно е (вж. [4]), че в условията на теоремата

$$\lim_{t\to\infty} \mathfrak{F}(t; \exp\{-\lambda e^{-\alpha t}\}) = f(\lambda),$$

където $f(\lambda)$ удовлетворява (38). Формула (37) се получава от (11), като положим $s=\exp\{-\lambda e^{-\alpha t}\}$ и извършим съответния граничен преход. Теоремата е доказана.

Нека в началния момент $t=0$ е имало някакъв случаен брой частици с вероятностна производяща функция $U_0(s)$. Тогава производящата функция $U(t; s)$ на вероятностното разпределение на броя на частиците в момент t се представя по следния начин:

$$U(t; s) = U_0(\mathfrak{F}(t; s))\Phi(t; s),$$

където $\mathfrak{F}(t; s)$ удовлетворява уравнение (3), а $\Phi(t; s)$ се определя от формула (11). При това граничните теореми остават без изменение, като само в надкритичния случай лапласовата трансформация на граничното разпределение ще има вида

$$u(\lambda) \quad U_0(f(\lambda))\varphi(\lambda),$$

където $f(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ се определят от уравнения (38) и (37).

Считам за приятен дълг да изразя голямата си благодарност на професор д-р Б. А. Севастянов, който ме въведе в кръга на тези въпроси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Севастьянов, Б. А. Предельные теоремы для ветвящихся случайных процессов специального вида. — Теория вероятностей и ее применения, 2, 1957, № 2, 339—348.
2. Севастьянов, Б. А. Ветвящиеся процессы с превращениями, зависящими от возраста частиц. — Теория вероятностей и ее применения, 9, 1964, № 4, 577—594.
3. Севастьянов, Б. А. Уравнения типа восстановления и моменты ветвящихся процессов. — Математические заметки, 3, 1968, № 1, 3—14.
4. Севастьянов, Б. А. Предельные теоремы для ветвящихся процессов с превращениями, зависящими от возраста частиц. — Теория вероятностей и ее применения, 13, 1968, № 2, 243—265.
5. Севастьянов, Б. А. Ветвящиеся процессы. М., 1971.
6. Харрис, Т. Е. Теория ветвящихся случайных процессов. М., 1966.

Постъпила на 9. II. 1972 г.

ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ИММИГРАЦИЕЙ

Николай Янев

(Резюме)

В работе обобщается модель Севастьянова [1] ветвящихся процессов, зависящих от возраста частиц. Исследовано асимптотическое поведение первых и вторых моментов. Эти результаты даются теоремами 1—6. Доказаны соответствующие предельные теоремы (7, 8, 9) для докритического, критического и надкритического случаев.

BRANCHING RANDOM PROCESSES WITH IMMIGRATION

Nikolaj Janev

(Summary)

The present paper generalizes the model of Sevastyanov [1] for branching processes depending on the age of the particles. The asymptotic behaviour of the first and second moments is studied. The results are stated in theorems 1—6. Corresponding limit theorems (7, 8 and 9) for undercritical, critical and overcritical cases are obtained.