БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

ПРОГНОЗИРАНЕ СИГУРНОСТТА НА ПРИБОРИ ЧРЕЗ РАЗПОЗНАВАНЕ НА ОБРАЗИ, КАТО СЕ ОТЧИТА ЕВОЛЮЦИЯТА НА ПРИБОРА

Мария З. Шишкова

1. При разработката на всеки прибор потенциално се залага едно и също време на безотказна работа. Обаче под влиянието на различни фактори всеки прибор има своя индивидуална дълготрайност. Това налага при прогнозиране времето на безотказна работа да се вземат пред вид зависимости между измененията във времето на параметрите, определящи функционалните свойства на прибора, и причините, пораждащи тези изменения. Тъй като това е свързано с установяване на голям брой зависимости между дълготрайността и различни по характер неконтролируеми фактори, то подобна постановка на задачата за прогнозиране сигурността на даден конкретен прибор се явява практически неразрешима. Ето защо е целесъобразно да разглеждаме възможността за прогнозиране поведението на всеки прибор по параметри, които могат да се измерят, като се прилагат методи за разпознаване на образи. Поради това, че образите в пространството на параметрите се пресичат, използването на детерминирани методи не дава добри резултати. Затова при разпознаване на потенциално ненадеждни прибори с по-голям успех могат да се използуват статистически методи.

Нека имаме съвкупност от прибори с гарантирана дълготрайност T часа, като за всеки прибор имаме сведения за неговата фактическа дълготрайност T_i. В зависимост от отношението между T и T_i тези прибори могат да бъдат разделени на два класа: клас A_1 — състоящ се от приборите, за които $T_i > T$, и клас A_2 — от приборите, за които $T_i \leq T$.

Всеки прибор в течение на времето е в различни състояния, последователността на които определя принадлежността му към единия или другия клас. Всяко състояние на прибора се определя от съвкупност от параметри, а векторът, съответствуващ на описанието на прибора, в своята еволюция описва определена траектория в пространството на параметрите. По тази причина задачата за прогнозиране може да се формулира като задача за разпознаване на траектории. При такава постановка се приема, че на резултата от класификацията влияят както отделното състояние на прибора, така и историята на неговата еволюция. При това възниква задачата за определяне на момента, след който не е необходимо по-нататъшно наблюдение.

2. Нека пространството на параметрите $\{x_s\}$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ е разделено на N области. Всяка област се характеризира с определена гарантирана дълготрайност T_i на приборите, които влизат в нея.

Иска се да се определи принадлежността на даден прибор към един от класовете A_i $(i=1, 2, \ldots, N)$ въз основа на съвкупността от състояния, в които приборът се е намирал по време на наблюдението до определен момент от време.

Нека X^* е съвкупността от резултатите при наблюдение на прибор от класа A_i $(i=1, 2, \ldots, N)$, представляваща редица от стойности на параметрите, измерени при $t_0=0$ и $t_j=t_{j-1}+\Delta t$, $j=1, 2, \ldots, m-1$:

$$X^*=(X_0, X_1, \ldots, X_{m-1}), \tag{1}$$

където

$$X_j=(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}),\ j=0, 1, \ldots, m-1. \tag{2}$$

Моментът за прекратяване на наблюденията над прибора се определя от това, съвкупността от наблюдения в своята последователност да бъде достатъчна за вземане на определено решение. Решаващо значение за това има $p_i(X_0, X_1, \ldots, X_{m-1}/A_i)$, $i=1, 2, \ldots, N$.

Поставената задача е много близка до известната задача за последователен анализ [1].

Действително от гледна точка на математическата статистика задачата за прогнозиране напълно съвпада със задачата за различаване на хипотези. На всеки клас се поставя в съответствие определена вероятностна мярка p_i, зададена върху пространството на параметрите. Номерът на класа i е параметър, по който се отличават различните мерки p_i [3]. Въз основа на наблюдението трябва да се предпочете една от хипотезите за стойността на неизвестния параметър.

В класическата постановка на задачата за избор на хипотеза се предполага, че съвкупността от наблюдения X^* е получена при независими изпитвания на изучавания обект, параметрите x_{sj} също са независими и е известна условната плътност на вероятността $p(x_{sj}/A_i)$ за всички стойности на s, j и i.

Означаваме с p_{im} плътността на вероятността за всяко цяло положително число m да получи съвкупността $X^*=(X_0, X_1, \ldots, X_{m-1})$ при условие, че тя принадлежи на множеството A_i. Понеже отделните наблюдения са независими, то p_{im} може да се определят с израза

$$p_{im}=p(X^*/A_i)=\prod_{j=0}^{m-1}\prod_{s=0}^{n} p(x_{sj}/A_i). \tag{3}$$

В случай на дихотомия последователният критерий на отношение на вероятностите за проверка на простата хипотеза A_1 относно простата хипотеза A_2 се строи по следния начин. Избират се две положителни константи l и L.

За всяка стойност на m се изчислява $\frac{p_{1m}}{p_{2m}}$. Наблюденията продължават, ако е изпълнено

(4) $$l < \frac{p_{1m}}{p_{2m}} < L.$$

Решение в полза на хипотезата A_1 се взема в случая, когато

(5) $$\frac{p_{1m}}{p_{2m}} \quad L,$$

а в полза на хипотезата A_2, когато

(6) $$\frac{p_{1m}}{p_{2m}} \quad l.$$

Константите l и L се избират така, че грешката от първи род да не превишава предварително избрана константа a, а грешката от втори род да не надминава друга константа β. В [1] е показано, че l и L трябва да удовлетворяват условията

(7) $$l \geq \frac{1-\beta}{a} \quad \text{и} \quad L \quad \frac{\beta}{1-a}$$

В случая, когато трябва да се направи избор от N, взаимно изключващи се и изчерпващи всички възможни случаи хипотези, е необходимо да се състави план за последователна проверка, като се формулира критерий, според който на всеки етап от наблюдението да се вземе едно от $N+1$ възможни решения — или да завърши наблюдението с приемане на една от хипотезите A_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), или да продължи наблюдението. Ще считаме, че планът за последователна проверка е оптимален, ако осигурява зададена вероятностна грешка при най-малък брой наблюдения [1].

Ако A_1 и B са две конкуриращи се хипотези (A_1 — проста, а $B = \bigcup_{i=2}^{N} A_i$ — сложна), то проверката на A_1 и B може да се осъществи по (4) — (6). В този случай знаменателят в отношенията (4) — (6) е

(8) $$p_{2m} = \sum_{i=2}^{N} p(X^* / A_i) F_1(A_i),$$

където $F_1(A_i)$ е вероятностно разпределение, дефинирано в B и удовлетворяващо условието

(9) $$\sum_{i=2}^{N} F_1(A_i) = 1.$$

Ако $\beta_1(A_i)$ е вероятността за приемане на хипотезата A_1 в случай, че е правилна хипотезата A_i, означаваме

(10) $$\bar{\beta}_1 = \sum_{i=2}^{N} \beta_1(A_i) F_1(A_i).$$

Тогава за константите l и L според (7) могат да се използуват

(11) $$l_1 = \frac{1-a_1}{\beta_1} \quad \text{и} \quad L_1 = \frac{a_1}{1-\beta_1}$$

Тъй като $F_1(A_i)$ е разпределение на A_i ($i = 2, \ldots, N$), то разпределението на съвкупността ($X_0, X_1, \ldots, X_{m-1}$) точно се определя от функцията (8) и затова хипотезата B може да се счита за проста. В такъв случай е приложим последователният критерий за избор между две прости хипотези, за който в [1] е показано, че е оптимален. Този критерий е основан на сравняване отношенията на вероятностите $\frac{p_{1m}}{p_{2m}}$ и константата l_1. Ако $\alpha_1 = 0$, а β_1 е зададената допустима грешка, получаваме $L_1 = 0$, $l_1 = \frac{1}{\beta_1}$. В такъв случай вероятността за приемане на простата хипотеза A_1, при условие че е вярна някоя от хипотезите A_i, не превишава $\frac{1}{l_1}$. Решение в полза на сложната хипотеза B не се взема. Този критерий осигурява минимална средна вероятностна грешка β_1 за приемане неправилно решение, като грешката от първи род α_1 е нула.

Въз основа на лемата, доказана в [1] (§ 10.5, стр. 188), може да се състави оптимален план за последователна проверка за избор на една от N взаимно изключващи се хипотези.

Ще формулираме един критерий, произтичащ от цитираната лема, който наричаме последователен критерий на допълнението.

Да означим

$$\bar{A}_j = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} A_i \tag{12}$$

и с $\bar{p}_{jm} = p(X^* \mid \bar{A}_j)$ плътността на вероятността за появяване на съвкупността от наблюдения X^* при условие, че имаме коя да е от хипотезите с изключение на A_j.

На всеки етап от наблюдението се изчисляват N отношения на вероятностите от вида $\frac{p_{jm}}{\bar{p}_{jm}}$.

Наблюдението спира и се взема решение в полза на хипотезата A_q, ако при някое $j = q$ е изпълнено неравенството

$$\frac{p_{qm}}{\bar{p}_{qm}} \geq l_q. \tag{13}$$

Ако това неравенство е изпълнено за няколко хипотези едновременно, то се приема тази хипотеза, за която отношението (13) има най-голяма стойност.

Наблюдението продължава, ако за всяко $i = 1, 2, \ldots, N$ е изпълнено неравенството

$$\frac{p_{im}}{\bar{p}_{im}} < l_i$$

Нека $r_i = p(A_i)$, $i = 1, \ldots, N$, е едно априорно разпределение на хипотезите $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Ако положим

$$F_j(A_i) = \frac{r_i}{1 - r_i},$$

тогава има смисъл да се постави въпросът за оптимално решение в полза на някоя хипотеза. Така избраните разпределения $F_j(A_i)$ удовлетворяват условието (9). Ще покажем, че в този случай е вярна следната

Теорема. Последователният критерий на допълнението е оптимален критерий, в смисъл че осигурява зададена средна вероятностна грешка от втори род при най-малък брой наблюдения.

Теоремата ще бъде доказана, ако покажем, че разгледаният по-горе последователен критерий за проверка на простата хипотеза A_1 относно сложната хипотеза B не се отличава от критерия на допълнението. Двата критерия (4) и (13) се отличават само по знаменателите в отношенията на вероятностите. В първия случай имаме

$$p_m = \frac{\sum_{i=2}^{N} p(X|A_i)p(A_i)}{\sum_{i=2}^{N} p(A_i)} = \frac{\sum_{i=2}^{N} p(X|A_i)}{\sum_{i=2}^{N} p(A_i)}$$

Но тъй като и

$$p_{jm} = \frac{p(X|A)}{p(A)} = \frac{p\left(X, \sum_{i=1}^{N} A_i\right)}{p\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p(X, A_i)}{\sum_{i=1}^{N} p(A_i)},$$

следва, че теоремата е вярна.

3. Моделът на метода може да бъде използуван при решаване на задачи за прогнозиране сигурността на прибори от различно естество при условие, че се направят някои изменения, отразяващи спецификата на решаваната задача.

Ще разгледаме приложението на метода за прогнозиране сигурността на полупроводникови елементи.

С помощта на обучаващата съвкупност определяме $p(x_s, A_i)$, $p(X_j, A_i)$, $p(X_k^*, A_i)$, където $X_k^*(k=1, 2, \ldots, p)$ е редица от наблюдения на прибори в различни моменти от време;

$q_k(k=1, 2, \ldots, p)$ е редица, показваща принадлежността на всеки прибор към един или друг клас.

Резултатите от наблюденията показват, че стойностите на параметрите X_s в момента $t=0$ се подчиняват на нормален закон на разпределение, който зависи от някакъв параметър a, определящ се от класа, към който принадлежи приборът. Стойностите на параметрите в следващите моменти зависят от стойността в момента $t=0$. Съвместното им разпределение също е подчинено на двумерен нормален закон с условна плътност

$$p(x_{s0}|A_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(a_i)} e^{-\frac{[x_{s0}-\mu_i(a_i)]^2}{2\sigma_i^2(a_i)}}$$

Параметрите a_i могат да се определят въз основа на обучаващата съвкупност с помощта на принципа за най-голямо правдоподобие, т. е. намираме стойността a_i, която осигурява максимум на израза

$$\sum_{k(q_k=i)} \log \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2(a_i)}}\, e^{-\frac{[(x_{s0})_k-\mu_i(a_i)]^2}{2\sigma_i^2(a_i)}}$$

Известно е ([4] § 3.2, стр. 64), че максимумът се достига при

$$\mu_i=\frac{1}{p_i}\sum_{k(q_k=i)}(x_{s0})_k\,,$$

$$\sigma_i=\frac{1}{p_i}\sum_{k(q_k=i)}[(x_{s0})_k-\mu_i]^2,$$

където p_i е броят на приборите от i-тия образ. Сумира се по този k, за който $q_k=i$.

При $t=t_j$ имаме

$$p(x_{sj}/x_{s0}, A_i)=\frac{p(x_{s0}x_{sj}/A_i)}{p(x_{s0}/A_i)},$$

$$p(x_{s0}x_{sj}/A_i)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\begin{vmatrix}(k_{00})_i & (k_{0j})_i\\ (k_{j0})_i & (k_{jj})_i\end{vmatrix}}}\exp\left\{-\frac{\begin{vmatrix}(k_{00})_i & (k_{0j})_i & x_{s0}-(\mu_{x_{s0}})_i\\ (k_{j0})_i & (k_{jj})_i & x_{sj}-(\mu_{x_{sj}})_i\\ x_{s0}-(\mu_{x_{s0}})_i & x_{sj}-(\mu_{x_{s1}})_i & 0\end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix}(k_{00})_i & (k_{0j})_i\\ (k_{j0})_i & (k_{jj})_i\end{vmatrix}}\right\}$$

Най-голямо отношение за функцията на правдоподобие се получава при

$$(\mu_{x_{s0}})_i=(\bar{x}_{s0})_i=\frac{1}{p_i}\sum_{k(q_k=i)}(x_{s0})_k\,,$$

$$(\mu_{x_{sj}})_i=(\bar{x}_{sj})_i=\frac{1}{p_i}\sum_{k(q_k=i)}(x_{sj})_k\,,$$

$$(k_{0j})_i=\frac{1}{p_i-1}\sum_{k(q_k=i)}[(x_{s0})_k-(\bar{x}_{s0})_k][(x_{sj})_k-(x_{s})_k].$$

Тогава

$$p(X_0/A_i)=p(x_{10}/A_i)\,p(x_{20}/A_i)\ldots p(x_{n0}/A_i),$$

$$p(X_jX_0/A_i)=p(x_{1j}/x_{10}, A_i)\,p(x_{2j}/x_{20}, A_i)\ldots p(x_{nj}/x_{n0}, A_i),$$

$$p(X^*/A_i)=p(X_0/A_i)\,p(X_1/A_i)\ldots p(X_{m-1}/A_i).$$

След като се определят по този начин изразите за вероятностите, етапът за обучение е завършен и може да се премине към разпознаване, като се прилага изложеният по-горен метод.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вальд, А.** Последовательный анализ. М., 1960.
2. **Васильев, В. И., В. Е. Реуцкий.** Принцип учета предыстории входного сигнала при распознавании движущихся во времени объектов. Автоматика, 1968, № 5, 15—20; 1969, № 3, 40—45.
3. **Ковалевский, В. А.** Задача распознавания образов с точки зрения математической статистики.— В: Читающие автоматы, Киев, 1965, 8—37.
4. **Андерсон, Т.** Введение в многомерный статистический анализ. М., 1963.

Постъпила на 27. X. 1972 г.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ПРИБОРОВ ПОСРЕДСТВОМ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ С УЧЕТОМ ЭВОЛЮЦИИ ПРИБОРА

Мария Шишкова

(Резюме)

В статье показывается, что задачу прогнозирования надежности прибора можно сформулировать в виде задачи распознавания траекторий и решать последнюю методом последовательного анализа Вальда. Для случая, когда требуется выбирать из двух взаимно исключающихся гипотез, предлагается план последовательной проверки и доказывается его оптимальность. Приводится пример применения модели метода прогнозирования надежности полупроводниковых приборов.

PROGNOSTICATION OF THE RELIABILITY OF APPARATUSES BY MEANS OF IDENTIFICATION OF IMAGES ACCOUNTING FOR THE EVOLUTION OF THE APPARATUS

Maria Šiškova

(Summary)

It is shown in this article that the problem of prognostication of the reliability of apparatuses can be formulated as a problem of identification of trajectories, which can be solved by the sequential analysis method of Wald. A plan for successive check up is proposed for the case, when a choice between two mutually exclusive hypotheses should be made and it is proved that it is optimal. An application of the method's model for prognosticating the reliability of semiconductory apparatuses is shown.