БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Вячеслав М. Старжинский

§ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ НОРМАЛИЗУЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Допустим, исходная система приведена к диагональной форме и сделана замена независимого переменного $\tau = \omega t$

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \lambda_\nu x_\nu + \sum a^\nu_{jh} x_j x_h + \sum b^\nu_{jhk} x_j x_h x_k + \dots \qquad (\nu = 0, \pm 1). \tag{1.1}$$

Суммирование всюду ниже по два раза встречающимся индексам, принимающим значения 0, ± 1; $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_{-1} = -i$. Коэффициенты a^ν_{jh}, $b^\nu_{jhk}, \dots$, вообще говоря, комплексные и

$$a^\nu_{hj} = a^\nu_{jh}, \quad b^\nu_{\{jhk\}} \quad \text{i. d.} \quad (\nu, j, h, k = 0, \pm 1),$$

где $\{jhk\}$ обозначает любую перестановку чисел j, h, k.

По теореме 1 ([5], § 0, п. II) А. Д. Брюно существует обратимая комплексная замена переменных (нормализующее преобразование)

$$x_j = y_j + \sum \alpha^j_{lm} y_l y_m + \sum \beta^j_{lmp} y_l y_m y_p + \dots \qquad (j = 0, \pm 1),$$
$$(\alpha^j_{ml} = \alpha^j_{lm}, \ \beta^j_{\{lmp\}} \ \text{i. d.}; \ j, l, m, p = 0, \pm 1) \tag{1.2}$$

приводящая систему (1.1) к нормальной форме

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \lambda_\nu y_\nu + y_\nu \sum_{(\Lambda, Q) = 0} g_{\nu Q}\, y_0^{q_0} y_1^{q_1} y_{-1}^{q_{-1}} \qquad (\nu = 0, \pm 1). \tag{1.3}$$

Здесь Λ и Q — векторы с компонентами $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{-1}$ и q_0, q_1, q_{-1} соответственно; последние суть целые числа или нули, при этом $q_\nu \geqq -1$, а остальные q_j — неотрицательные и $q_0 + q_1 + q_{-1} \geqq 1$. Суммирование в (1.3) происходит только по резонансным членам, показатели степеней которых удовлетворяют резонансному уравнению

$$(\Lambda, Q) = \lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1 + \lambda_{-1} q_{-1} = i(q_1 - q_{-1}) = 0.$$

Решение здесь очевидно: $q_{-1} = q_1$.

Для членов $2r$-ой степени нормальной формы ($q_0+2q_1=2r-1$; $r=1, 2, \ldots$) возможен следующий набор показателей степеней (индекс при $\mathbf{Q}$ отмечает номер уравнения):

$$\mathbf{Q}_0=(-1, r, r),\ (1, r-1, r-1), \ldots, (2r-1, 0, 0),$$
$$\mathbf{Q}_{\pm 1}= \qquad (1, r-1, r-1), \ldots, (2r-1, 0, 0).$$

Для членов $2r+1$-ой степени нормальной формы ($q_0+2q_1=2r$; $r=1, 2, \ldots$) вектор $\mathbf{Q}$ принимает значения

$$\mathbf{Q}=(0, r, r),\ (2, r-1, r-1), \ldots, (2r, 0, 0)$$

независимо от номера уравнения нормальной формы.

После того, как найдены все решения резонансного уравнения, запишем нормальную форму (1.3) в виде

$$(1.4)\quad \frac{dy_\nu}{d\tau}=\lambda_\nu y_\nu+y_\nu\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\left[G^\nu_{2(r-s)-1,s}y_0^{-1}+G^\nu_{2(r-s),s}\right]y_0^{2(r-s)}y_1^s y_{-1}^s \quad (\nu=0, \pm 1).$$

При этом

$$G^{\pm 1}_{-1r}=0 \quad (r=1, 2, \ldots),$$

ибо, как следует из вычисления $\mathbf{Q}_\nu$, в двух последних уравнениях ($\nu=\pm 1$) нет членов с y_0^{-1}.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ НОРМАЛИЗУЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Симметризуем коэффициенты нормальной формы (1.4) и запишем ее в виде

$$(2.1)\qquad \frac{dy_\nu}{d\tau}=\lambda_\nu y_\nu+\sum f^\nu_{lm}y_l y_m+\sum g^\nu_{lmp}y_l y_m y_p+\cdots \qquad (\nu=0, \pm 1)$$

$$(f^\nu_{ml}=f^\nu_{lm},\ g^\nu_{\{lmp\}}\ \text{i. d.};\ \nu, l, m, p=0, \pm 1).$$

Разумеется, в представлении (2.1) отличные от нуля коэффициенты f^ν_{lm}, $g^\nu_{lmp}, \ldots$ определяются представлением (1.4).

Замена (1.2) переводит систему (1.1) в нормальную форму (2.1). Ограничиваясь членами до третьей степени переменных включительно, получим тождества (штрих-производная по τ)

$$\begin{aligned} y'_\nu &+\sum \alpha^\nu_{lm}(y'_l y_m+y_l y'_m)+\sum \beta^\nu_{lmp}(y'_l y_m y_p+y_l y'_m y_p\\ &+y_l y_m y'_p)+\cdots=\lambda_\nu y_\nu+\lambda_\nu\sum\alpha^\nu_{lm}y_l y_m+\lambda_\nu\sum\beta^\nu_{lmp}y_l y_m y_p\\ &+\sum a^\nu_{jh}\Big(y_j+\sum\alpha^j_{lm}y_l y_m\Big)\Big(y_h+\sum\alpha^h_{lm}y_l y_m\Big)\\ &+\sum b^\nu_{jhk}y_j y_h y_k+\cdots \qquad (\nu=0, \pm 1). \end{aligned}$$

Изменяя индексы суммирования и симметризуя коэффициенты в суммах, запишем последние тождества в виде

$$(2.2)\qquad \sum f^\nu_{lm} y_l y_m + \sum g^\nu_{lmp} y_l y_m y_p + \frac{2}{3}\sum (\alpha^\nu_{jl} f^j_{mp} + \alpha^\nu_{jm} f^j_{pl} + \alpha^\nu_{jp} f^j_{lm}) y_l y_m y_p + \sum(\lambda_l+\lambda_m-\lambda_\nu)\alpha^\nu_{lm} y_l y_m + \sum(\lambda_l+\lambda_m+\lambda_p-\lambda_\nu)\beta^\nu_{lmp} y_l y_m y_p + \dots = \sum a^\nu_{lm} y_l y_m + \sum b^\nu_{lmp} y_l y_m y_p + \frac{2}{3}\sum(a^\nu_{jl}a^j_{mp}+a^\nu_{jm}a^j_{pl}+a^\nu_{jp}a^j_{lm}) y_l y_m y_p + \dots \quad (\nu=0,\ \pm1).$$

Введем следующие символы:

$$(2.3)\qquad \Delta^\nu_{lm} = \begin{cases}1 & \lambda_\nu = \lambda_l+\lambda_m\\ 0 & \lambda_\nu \ne \lambda_l+\lambda_m\end{cases};\qquad \Delta^\nu_{lmp} = \begin{cases}1 & \lambda_\nu = \lambda_l+\lambda_m+\lambda_p\\ 0 & \lambda_\nu \ne \lambda_l+\lambda_m+\lambda_p\end{cases}$$

$$(\nu, l, m, p = 0,\ \pm1)$$

Имеет место следующая альтернатива:

1) Допустим, значения ν, l, m, p (и реальных параметров исходной колебательной системы, от которых зависят λ_ν, λ_l, λ_m, λ_p) таковы, что круглые скобки в четвертой и затем в пятой суммах (2.2) отличны от нуля ($\Delta^\nu_{lm}=0$ и затем $\Delta^\nu_{lmp}=0$). Это означает, что при этом $(\Lambda, Q)\neq 0$. Сравнивая члены с $y_l y_m$ и затем с $y_l y_m y_p$ в левой и правой частях тождеств (2.2), заметим, что при сделанном допущении первые три суммы отсутствуют (ибо для них $(\Lambda, Q) = 0$). Будем иметь, приравнивая в (2.2) коэффициенты сначала при членах второй степени переменных

$$(2.4)\qquad \alpha^\nu_{lm} = \frac{a^\nu_{lm}}{\lambda_l+\lambda_m-\lambda_\nu}(1-\Delta^\nu_{lm}) \quad (\nu, l, m = 0,\ \pm1),$$

а затем при членах третьей степени

$$(2.5)\qquad \beta^\nu_{lmp} = \frac{1}{\lambda_l+\lambda_m+\lambda_p-\lambda_\nu}\Big[b^\nu_{lmp} + \frac{2}{3}\sum a^\nu_{jl}\alpha^j_{mp}+a^\nu_{jm}\alpha^j_{pl} + a^\nu_{jp}\alpha^j_{lm})\Big](1-\Delta^\nu_{lmp}) \quad (\nu, l, m, p=0,\ \pm1).$$

2) Допустим, значения ν, l, m, p (и реальных параметров исходной колебательной системы) таковы, что круглые скобки в четвертой и затем в пятой суммах (2.2) равны нулю ($\Delta^\nu_{lm}=1$ и затем $\Delta^\nu_{lmp}=1$). Это означает, во-первых, что соответствующие значения α^ν_{lm}, а затем и β^ν_{lmp} могут быть выбраны любыми. В этой задаче выберем их равными нулю и тем самым оправдается справедливость формул (2.4) и (2.5) для всех значений ν, l, m, p. Во-вторых, при сделанном допущении имеем $(\Lambda, Q)=0$. Из сравнения членов с $y_l y_m$ и затем с $y_l y_m y_p$ в левой и правой частях тождеств (2.2) теперь определятся симметризованные коэффициенты нормальной формы (2.1): f^ν_{lm} и затем g^ν_{lmp}. Будем иметь

$$(2.6)\qquad (f^\nu_{lm} = a^\nu_{lm}\Delta^\nu_{lm} \quad (\nu, l, m=0,\ \pm1),$$

$$(2.7)\qquad g^\nu_{lmp} = \Big\{b^\nu_{lmp} + \frac{2}{3}\sum[(a^\nu_{jl}\alpha^j_{mp} - \alpha^\nu_{jl} f^j_{mp}) + (a^\nu_{jm}\alpha^j_{pl} - \alpha^\nu_{jm} f^j_{pl}) + (a^\nu_{jp}\alpha^j_{lm} - \alpha^\nu_{jp} f^j_{lm})]\Big\}\Delta^\nu_{lmp} \quad (\nu, l, m, p=0,\ \pm1).$$

Результаты этого параграфа справедливы для систем произвольного порядка. В нашей задаче ($\lambda_0=0,\ \lambda_1=i,\ \lambda_{-1}=-i$)

$$P^0_{00}=\Delta^0_{\{1-1\}}=\Delta^1_{\{01\}}=\Delta^{-1}_{\{0-1\}}\quad 1$$

и формулы (2.4) дадут

$$a^0_{00}=a^0_{\{1-1\}}=a^1_{\{01\}}=a^{-1}_{\{0-1\}}=0,$$

$$a^0_{11}=-\frac{1}{2}ia^0_{11},\ a^0_{01}=-ia^0_{01},\ a^1_{00}=ia^1_{00},\ a^1_{11}=-ia^1_{11},$$

$$a^1_{-1-1}=\frac{1}{3}ia^1_{-1-1},\ a^1_{0-1}=\frac{1}{2}ia^1_{0-1},\ a^1_{1-1}=ia^1_{1-1}.$$

Выпишем нормализующее преобразование с точностью до вторых степеней переменных включительно, учитывая вещественность исходной системы

$$\begin{aligned} &x_0=y_0+2\operatorname{Re}(a^0_{11}y_1^2)+4\operatorname{Re}(a^0_{01}y_0y_1)+[3],\\ (2.8)\qquad &x_1=\overline{x}_{-1}=y_1+a^1_{00}y_0^2+a^1_{11}y_1^2+a^1_{-1-1}y^2_{-1}+2a^1_{0-1}y_0y_{-1}+2a^1_{1-1}y_1y_{-1}+[3]. \end{aligned}$$

Формулы (2.6) дадут для коэффициентов второй степени нормальной формы (1.4)

$$(2.9)\qquad G^0_{10}=a^0_{00},\ G^0_{-11}=2a^0_{-11},\ G^1_{10}=2a^1_{01},\ G^{-1}_{10}\quad 2a^{-1}_{0-1}.$$

Используя формулы (2.5) и (2.7), можно выписать в (2.8) и (2.9) члены с третьими степенями переменных и соответствующие коэффициенты нормальной формы.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ СУЖДЕНИЯ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

Выпишем в системе уравнений (1.4) члены второй степени переменных включительно, учитывая (2.9):

$$\begin{aligned} &\frac{dy_0}{d\tau}\quad a^0_{00}y_0^2+2a^0_{1-1}y_1y_{-1}+[3],\\ (3.1)\qquad &\frac{dy_1}{d\tau}=iy_1+2a^1_{01}y_0y_1+[3],\\ &\frac{d\overline{y}_1}{d\tau}=-i\overline{y}_1+2\overline{a}^1_{01}y_0\overline{y}_1+[3]. \end{aligned}$$

Умножая второе уравнение на $\overline{y}_1$, а третье на y_1 и складывая, получим укороченную систему уравнений

$$(3.2)\qquad \frac{dy_0}{d\tau}\quad a^0_{00}y_0^2+2a^0_{1-1}\varrho^2,\quad \frac{d\varrho}{d\tau}=2\operatorname{Re}a^1_{01}y_0\varrho$$

с вещественными коэффициентами и неотрицательной переменной $\varrho=|y_1|$.

Как известно, для того чтобы обнаружить неустойчивость тривиального решения системы (3.2), достаточно заметить всего одну траекторию, выходящую за заданную область

$$\tau\geqq\tau_0 \text{ и } y_0^2+\varrho^2\leqq R^2$$

при сколь угодно малых значениях начальных возмущений $y_0^0 = y_0(\tau_0)$ и $\varrho_0 = \varrho(\tau_0)$. Рассмотрим возникающие здесь ситуации.

1. Пусть $a_{00}^0 \neq 0$. Рассмотрим решения системы (3.2), начинающиеся на оси y_0, т. е. для которых $\varrho_0 = 0$. Из второго уравнения (3.2) имеем $(d\varrho/d\tau)_0 = 0$, следовательно, для этих решений $\varrho(\tau) \equiv 0$. Подчиним сколь угодно малое начальное значение y_0^0 условию $\operatorname{sign} y_0^0 = \operatorname{sign} a_{00}^0$. Как следует из первого уравнения (3.2), для таких решений будем иметь

$$y_0(\tau) > a_{00}^0\, y_0^{0\,2}(\tau - \tau_0),$$

что и означает неустойчивость тривиального решения системы (3.2) при $a_{00}^0 \neq 0$.

2. Допустим $a_{00}^0 = 0$, но $a_{1-1}^0 \neq 0$, $\operatorname{Re} a_{01}^1 \neq 0$. Разделив первое уравнение (3.2) на второе, найдем первый интеграл системы (3.2) (при $a_{00}^0 = 0$)

$$y_0^2 - \frac{a_{1-1}^0}{\operatorname{Re} a_{01}^1}\varrho^2 = c.$$

Очевидно, при условиях

(3.3) $$a_{00}^0 = 0, \quad a_{1-1}^0 \operatorname{Re} a_{01}^1 < 0$$

тривиальное решение системы (3.2) устойчиво (начало координат является центром), а при условиях

$$a_{00}^0 = 0, \quad a_{1-1}^0 \operatorname{Re} a_{01}^1 > 0$$

тривиальное решение системы (3.2) неустойчиво (начало координат является седлом).

3. Допустим, $a_{00}^0 = a_{1-1}^0 = 0$, $\operatorname{Re} a_{01}^1 \neq 0$. Из первого уравнения (3.2) имеем $y_0(\tau) = y_0^0$. Выбирая y_0^0 из условия $\operatorname{sign} y_0^0 = \operatorname{sign} \operatorname{Re} a_{01}^1$, будем иметь для таких решений в силу второго уравнения (3.2), что $\varrho \to \infty$ при $\tau \to$ и $\varrho_0 > 0$ — тривиальное решение системы (3.2) неустойчиво.

4. Допустим, наконец, что $a_{00}^0 = \operatorname{Re} a_{01}^1 = 0$, $a_{1-1}^0 \neq 0$. Второе уравнение (3.2) дает нам $\varrho(\tau) = \varrho_0$. Траектория, для которой $\operatorname{sign} y_0^0 = \operatorname{sign} a_{1-1}^0$, $\varrho_0 > 0$, уходит в бесконечность, опять-таки неустойчивость.

Итак, тривиальное решение системы (3.2) устойчиво лишь при условиях ((3.3). Случай $a_{00}^0 = a_{1-1}^0 = \operatorname{Re} a_{01}^1 = 0$ требует исследования по членом не ниже третьей степени.

Замечание. Критический случай одного нулевого и пары чисто мнимых корней для установившихся движений рассмотрен Г. В. Каменковым ([5] гл. II) и И. Г. Малкиным ([6], § 96). Подчеркнем, что система (3.2) содержит всего лишь три коэффициента, что и определило специфику исследования по сравнению с общим случаем ([6], §§ 94, 96). Однако мы не можем утверждать, что нормализующее преобразование (1.2) (и, следовательно, нормальная форма (1.4)) может быть выбрано аналитическим в окрестности нуля. Это обстоятельство не позволяет перенести суждения об устойчивости тривиального решения системы (3.1) на устойчивость невозмущенного движения (тривиального решения исходной системы).

ЛИТЕРАТУРА

1. Старжинский, В. М. К теории нелинейных колебаний, ч. 1—3, М., 1970—1972.
2. Старжинский, В. М. Об одной из нормальных форм в теории нелинейных колебаний. — Вестник МГУ, сер. 1, 1971, № 6, 112—118.
3. Старжинский, В. М. О нормальных формах четвертого порядка нелинейных колебаний. — Изв. АН СССР, сер. Мех. тв. тела, 1972, № 1, 5—13.
4. Брюно, А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений. — Тр. Моск. матем. общества, **25**, 1971, 119—262; **26**, 1972, 199—241.
5. Каменков, Г. В. Избранные труды в двух томах, т. 1, М., 1971.
6. Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения, М., 1966.

Поступила 7. XII. 1972 г.

НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА НОРМАЛНИ ФОРМИ В НЕЛИНЕЙНИТЕ КОЛЕБАНИЯ

Вячеслав Старжинский

(Резюме)

В работите [1, 2, 3] са изследвани нормалните форми и резонанси, възникващи за аналитични автономни системи на обикновените диференциални уравнения от произволен ред при демпфиране и за системи от четвърти и шести ред с две и съответно три двойки различни чисто имагинерни собствени стойности на матрицата на линейната част. Тук се изследва аналитична автономна система, чиято матрица на линейната част има две чисто имагинерни и една нулева собствена стойност. Извеждат се изчислителни формули за коефициенти на нормализиращото преобразоване и нормалната форма; даден е анализ на устойчивостта. Изследването се основава на обобщаващите резултати на А. Д. Брюно [4] по теория на нормалните форми.

SOME APPLICATIONS OF NORMAL FORMS IN NON-LINEAR OSCILLATIONS

Vjačeslav Staržinskij

(Summary)

In the papers [1, 2, 3] the normal forms and resonances arising at damping, for analytic autonomous systems of ordinary differential equations of arbitrary order and for systems of fourth and sixth order with two and three, respectively, pairs of different pure imaginary eigenvalues of the matrix of the linear part were studied. Here an analytic autonomous system whose matrix of the linear part has two pure imaginary and one zero eigenvalue is considered. Computing formulas for the coefficients of the normalizing transformation and the normal form are derived; analysis of the stability is made. The study is based on Briuno's [4] generalizing results in the theory of the normal forms.