БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ТОЖДЕСТВАХ В ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ АЛГЕБР ЛИ

Георги К. Генов

В теории ассоциативных PI-алгебр (алгебр с тождественными соотношениями) была известна следующая проблема Джекобсона ([1], стр. 329): будет ли PI-алгеброй тензорное произведение $G \otimes_F H$ двух произвольных PI-алгебр? Недавно Регев [2], [3] дал положительный ответ на этот вопрос, а В. Н. Латышев в своей работе [4] привел красивое и краткое доказательство результатов Регева.

Естественным является рассмотрение аналогичной проблемы для алгебр Ли, хотя тензорное произведение Ли, в общем случае, не является алгеброй Ли.

Пусть L_∞ — свободная алгебра Ли над некоторым полем F, обладающая счетным множеством свободных образующих $x_1, x_2, \ldots$ Через Q_n мы обозначаем пространство всех полилинейных многочленов в L_∞ степени n от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если V — любой вербальный (вполне инвариантный) идеал алгебры Ли L_∞, то через V_n обозначаем подпространство $V \cap Q_n$.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема (теорема 2.10):

Теорема. Если вербальный идеал V свободной алгебры Ли L_∞ содержит полином степени d, $2 \leq d \leq n$, то $\dim_F Q_n/V_n \leqq (d-1)^{2n}$.

Как следствие мы получаем:

Теорема. Пусть G и H — алгебры Ли над полем F, удовлетворяющие некоторым нетривиальным полиномиальным тождествам. Тогда существует ненулевой полилинейный элемент $f(x)$ свободной алгебры Ли L_∞ такой, что он является тождеством в алгебрах Ли G и H и в их тензорном произведении $G \otimes_F H$.

Здесь следует отметить, что для ассоциативных алгебр аналогичные теоремы доказаны Регевым [2], [3] и В. Н. Латышевым [4]. Мы используем метод, примененный В. Н. Латышевым в его работе [4].

Автор пользуется случаем выразить благодарность В. Н. Латышеву за постановку проблем перед алгебраическим семинаром в Софийском университете.

§ 1. НЕОБХОДИМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $X=\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ — счетное множество символов, а A — множество ассоциативных слов, образованных элементами множества X. Положим $x_i<x_j$, если $i<j$. Множество A частично упорядочим в лексикографическом смысле.

1.1. ([6], определение 1). Ассоциативное слово u называется правильным, если для всякого представления u u_1u_2, где u_1, u_2 — непустые слова, справедливо неравенство $u>u_2u_1$.

Если u и v — правильные слова и $u=vv_1$, где v_1 — непустое слово, то будем считать, что $v>u$.

1.2 ([6], определение 2). Неассоциативное X-слово $[u]$ назовем правильным, если:

1) правильно ассоциативное слово u, получающееся из данного опусканием скобок,

2) если $[u]=[v].[w]$, то $[v]$ и $[w]$ — правильные слова,

3) если $[u]=[[v_1].[v_2]].[w]$, то $v_2\leq w$.

1. 3 ([6], лемма 1). В каждом правильном ассоциативном слове одним и только одним способом можно расставить скобки так, чтобы получившееся при этом неассоциативное слово было правильным.

В силу взаимнооднозначного соответствия между правильными ассоциативными и неассоциативными словами, сохраним, как это сделано в работе [6], символ $[u]$ для обозначения правильного неассоциативного слова, соответствующего правильному ассоциативному слову u.

Пусть F — некоторое ассоциативное кольцо с единицей, а A_{FX} — свободное F-операторное ассоциативное кольцо с множеством $X=\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ свободных образующих. В кольце A_{FX} множество X порождает некоторое подкольцо Ли $A_{FX}^{(-)}$ относительно операции $x_\circ y=xy-yx$, сложения и применения операторов из кольца F.

1.4 ([6], лемма 3). Если правильное X-слово $[v]$ в $A_{FX}^{(-)}$ записать в виде элемента кольца A_{FX}, то в эту запись слово v войдет с коэффициентом 1, а все остальные ассоциативные слова, входящие в нее, будут меньше слова v.

Обозначим через L_{FX} свободное F-операторное кольцо Ли.

1.5 ([6], теорема 1). Кольца $A_{FX}^{(-)}$ и L_{FX} естественно изоморфны.

В силу предыдущей теоремы, мы будем отождествлять кольца L_{FX} и $A_{FX}^{(-)}$.

1. 6 ([6]). Правильные неассоциативные X-слова составляют базис кольца L_{FX} над F.

В силу предыдущего предложения правильные неассоциативные X-слова кольца L_{FX} будем называть базисными.

Пусть f — произвольный элемент свободного кольца Ли L_{FX}. Тогда, по предложению 1.6, он может быть единственным образом записан в виде линейной комбинации базисных одночленов.

Определение 1.7 ([7]). Будем обозначать через $\bar{f}$ и называть старшим членом элемента f максимальный базисный одночлен, входящий в запись f с ненулевым коэффициентом.

Лемма 1.8. Пусть $[u]$, $[v]$ — базисные одночлены в свободном кольце Ли L_{FX}, $[u]>[v]$. Тогда ассоциативное слово uv является правильным, а старшим членом произведения $[u][v]$ является базисный одночлен $\overline{[u][v]}=[uv]$. Коэффициентом при $\overline{[u][v]}$ служит единица.

Доказательство. Докажем сначала, что uv является правильным ассоциативным словом. Пусть $uv=w_1w_2$. Могут встретиться следующие три случая: 1) $w_1=u$, $w_2=v$; 2) $u=w_1u_1$, $w_2=u_1v$; 3) $v=v_1w_2$, $w_1=uv_1$. В случае 1) мы имеем $w_2w_1=v.u$ и поскольку $u>v$, то $uv>w_2w_1$. Если выполняется случай 2), то $w_2w_1=u_1vw_1$. Но $u>u_1$, так как u_1 не может совпадать ни с каким начальным подсловом слова u, и поэтому $uv>w_2w_1$. В случае 3) мы имеем $w_2w_1=w_2uv_1$ и, поскольку $u>v>w_2$, то $uv>w_2w_1$. Таким образом, мы проверили, что слово uv является правильным.

Рассмотрим ассоциативное кольцо A_{FX}. Кольцо Ли L_{FX} мы отождествляем с подкольцом Ли $A^{(-)}_{FX}$. Тогда, по лемме 1.4, слова $[u]$ и $[v]$ записываются как элементы кольца A_{FX} в виде

$$[u]=u+\sum_i \lambda_i u_i, \quad \lambda_i\in F, \tag{1}$$

$$[v]=v+\sum_j \mu_j v_j, \quad \mu_j\in F,$$

где $u>u_i$ для всех i и $v>v_j$ для всех j.

Из равенств (1) мы получаем

$$[u][v]=uv+\sum_i \lambda_i u_i v+\sum_j \mu_j u v_j+\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j u_i v_j. \tag{2}$$

В правой части равенства (2) старшим ассоциативным членом является слово uv. Тогда, непосредственно из леммы 1.4, получается, что $\overline{[u][v]}=[uv]$, причем коэффициентом перед $\overline{[u][v]}$ в записи элемента $[u][v]$ через базисные одночлены служит единица. Лемма доказана.

Пусть S_{d-1} — симметрическая группа степени $d-1$ на множестве первых $d-1$ натуральных чисел, а $s\in S_{d-1}$ — любая подстановка, не совпадающая с тождественной подстановкой ε. Тогда имеет место

Лемма 1.9. Пусть ассоциативное полилинейное X-слово $u=v_dv_{d-1}\ldots v_2v_1$ — правильно и его подслова $v_d>v_{d-1}>\ldots>v_2>v_1$ тоже правильны. Тогда ассоциативное слово $v=v_dv_{s(d-1)}\ldots v_{s(2)}v_{s(1)}$ меньше u и является правильным.

Доказательство. Пусть x_n — старший символ в записи полилинейного слова u. Тогда $u=x_nu_1$ и $v=x_nw$, где в u_1 и w участвуют элементы множества X, которые меньше x_n. Следовательно, слово v — правильное. Так как s не является тождественной подстановкой, то существует такое целое число k, $2\leq k\leq d-1$, что $k\neq s(k)$, k — наибольшее с этим свойством. Тогда $v=v_dv_{d-1}\ldots v_{k+1}v_{s(k)}v_{s(k-1)}\ldots v_{s(1)}$ и поскольку $v_k>v_{s(k)}$, то $u>v$. Лемма доказана.

1.10 ([4], теорема). Количество перестановок первых n натуральных чисел, в которых любая выборка из d чисел $2\leq d\leq n$ содержит по крайней мере один порядок, не превосходит $(d-1)^{2n}$.

Пусть F — произвольное поле, $F_\infty[x]$ — свободная ассоциативная алгебра со счетным множеством свободных образующих $X=\langle x_1, x_2, \ldots\rangle$ над полем F, а L_∞ — свободная алгебра Ли с тем же множеством свободных образующих. Очевидно, что в обозначениях предыдущего параграфа $F_\infty[x]$ A_{FX} и L_∞ L_{FX}. Как и в предыдущем параграфе, мы будем отождествлять L_∞ с подалгеброй Ли $F_\infty[x]^{(-)}$ $A^{(-)}_{FX}$.

Пусть V — любой вербальный (вполне инвариантный) идеал алгебры L_∞, а Q_n — пространство всех полилинейных многочленов в L_∞ степени n от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим через V_n подпространство $V \cap Q_n$.

Предложение 2.1. Имеет место равенство $\dim_F Q_n = (n-1)!$.

Доказательство. По предложению 1.6, любой элемент из Q_n является линейной комбинацией полилинейных базисных одночленов от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Но, как легко видеть, полилинейные базисные одночлены от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеют вид $[x_n x_{s(n-1)} \ldots x_{s(2)} x_{s(1)}]$, где $s \in S_{n-1}$, содержатся в Q_n и составляют множество из $(n-1)!$ элементов. Предложение 2.1 доказано.

Предложение 2.2. Если вербальный идеал V алгебры Ли L_∞ содержит полином степени d, то он содержит полилинейный полином степени d.

Предложение доказывается при помощи линеаризации (см. [1], стр. 325).

Предложение 2.3. Если в вербальном идеале V алгебры Ли L содержится полилинейный полином степени d, то в нем содержится полилинейный полином f вида

$$f=[x_d x_{d-1} \ldots x_2 x_1] - \sum_{s \in S_{d-1}} \lambda_s [x_d x_{s(d-1)} \ldots x_{s(1)}].$$

Доказательство. Пусть полилинейный элемент

$$h = \sum_{s \in S_{d-1}} \mu_s [x_d x_{s(d-1)} \ldots x_{s(2)} x_{s(1)}] \tag{3}$$

седержится в идеале V. Если $\mu_\varepsilon \neq 0$, где ε — тождественная подстановка из S_{d-1}, то, очевидно, элемент $f = \frac{1}{\mu_\varepsilon} \cdot h$ содержится в V и имеет требуемый вид. Допустим, что старшим членом $\bar{h}$ в (3) является базисный одночлен $[x_d x_{t(d-1)} \ldots x_{t(2)} x_{t(1)}]$, $\varepsilon \neq t \in S_{d-1}$. Запишем элемент $z = \frac{1}{\mu_t} \cdot h$ как линейную комбинацию ассоциативных слов от $x_1, x_2, \ldots, x_d$. По лемме 1.4 старшим ассоциативным членом в этой записи является ассоциативное слово $x_d x_{t(d-1)} \ldots x_{t(1)}$, то есть мы имеем

$$z = x_d x_{t(d-1)} \ldots x_{t(2)} x_{t(1)} + \ldots, \tag{4}$$

где все следующие ассоциативные члены суммы меньше слова $x_d x_{t(d-1)} \ldots x_{t(1)}$.

Пусть φ — автоморфизм ассоциативной алгебры $F_\infty[x]$, определенный равенствами

(5) $$x_i\varphi = x_{t-1(i)}, \quad \text{если} \quad 1 \leqslant i \leqslant d-1,$$

$$x_i\varphi = x_i, \quad \text{если} \quad d = i.$$

Из определения автоморфизма φ следует, что L_0 замкнута относительно φ и ограничение φ на L_0 является автоморфизмом лиевой алгебры L_0. Следовательно, элемент $z\varphi$ содержится в L_0 и поэтому является линейной комбинацией базисных полилинейных слов от x_1, x_2, $\ldots$, x_d. С другой стороны, из равенства (4) следует, что

$$z\varphi = x_d x_{d-1} \ldots x_2 x_1 + \ldots,$$

где все следующие ассоциативные члены суммы меньше слова $x_d x_{d-1} \ldots x_1$.

Тогда, по лемме 1.4, элемент $z\varphi$ будет иметь вид

$$z\varphi = [x_d x_{d-1} \ldots x_2 x_1] - \sum_{s \in S_{d-1}} \lambda_s [x_d x_{s(d-1)} \ldots x_{s(2)} x_{s(1)}].$$

Но ограничение φ на L_0 является лиевым автоморфизмом, а элемент z содержится в вербальном идеале V. Следовательно, элемент $z\varphi$ тоже содержится в V. Предложение 2.3 доказано.

Пусть $[v_d]([v_{d-1}](\ldots ([v_2][v_1]) \ldots))$ — базисный полилинейный одночлен в L_0, где $[v_i]$ — тоже базисные одночлены, а $w(y_1, \ldots, y_d) = [y_d y_{s(d-1)} \ldots y_{s(2)} y_{s(1)}] (s \in S_{d-1})$ — любое правильное неассоциативное слово от y_1, y_2, $\ldots$, y_d. Имеет место следующая лемма

Лемма 2.4. В записи неассоциативного X — слова $w([v_1], [v_2], \ldots, [v_d])$ через базисные одночлены старшим членом $w([v_1], \ldots, [v_d])$ является базисный одночлен $[v_d v_{s(d-1)} \ldots v_{s(2)} v_{s(1)}]$. Коэффициентом перед старшим членом $w([v_1], \ldots, [v_d])$ служит единица.

Доказательство. Запишем слово $w(y_1, \ldots, y_d)$ через ассоциативные слова от y_1, y_2, $\ldots$, y_d. По лемме 1.4, его старшим ассоциативным членом будет слово $y_d y_{s(d-1)} \ldots y_{s(2)} y_{s(1)}$, участвующее с коэффициентом единица, то есть мы имеем

(6) $$w(y_1, \ldots, y_d) = y_d y_{s(d-1)} \ldots y_{s(2)} y_{s(1)} + \ldots,$$

где следующие ассоциативные члены суммы меньше слова $y_d y_{s(d-1)} \ldots y_{s(1)}$.

Базисные одночлены $[v_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, d)$ тоже записываются в виде

(7) $$[v_i] = v_i + \ldots,$$

где следующие ассоциативные члены суммы меньше слова v_i $(i=1, \ldots, d)$.

Так как $v_d > v_{d-1} > \ldots > v_1$, то индукцией по числу d, применяя (6) и (7), легко доказывается, что старшим ассоциативным членом в записи элемента $w([v_1], \ldots, [v_d])$ является слово $v_d v_{s(d-1)} \ldots v_{s(2)} v_{s(1)}$, причем коэффициент перед ним есть единица. По лемме 1.9, ассоциативное слово $v_d v_{s(d-1)} \ldots v_{s(2)} v_{s(1)}$ — правильно. Тогда, по лемме 1.4, старший член $w([v_1], \ldots, [v_d])$ совпадает с базисным одночленом $[v_d v_{s(d-1)} \ldots v_{s(2)} v_{s(1)}]$ и коэффициентом перед ним в записи слова $w([v_1], \ldots, [v_d])$ через базисные одночлены служит единица. Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. Пусть $[u]$ — базисный полилинейный одночлен степени n от $x_1, x_2, \dots, x_n$, а $[v]$ — правильное неассоциативное подслово в $[u]$ от $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$. Пусть $[w]$ — правильное неассоциативное полилинейное слово от $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ такое, что $[v]>[w]$. Подставим в $[u]$ вместо $[v]$ слово $[w]$. Тогда старший член $\overline{(u)}$ в записи через базисные одночлены полученного неассоциативного полилинейного одночлена (u) будет строго меньше чем $[u]$.

Доказательство. Доказательство леммы проведем индукцией по числу $p=n-r$, где r — степень слова v. Если $p=0$, то есть $n=r$, то $[u]=[v]$ и $(u)=[w]$. Тогда $\overline{(u)}=[w]<[v]=[u]$.

Допустим, что $p>0$ и для чисел меньше чем p лемма уже доказана. Тогда $[u]=[u_1][u_2]$, так как степень $[u]$ больше единицы. Ясно, что $[v]$ будет подсловом либо в $[u_1]$, либо в $[u_2]$.

Предположим, что слово $[v]$ является подсловом в $[u_1]$. Тогда мы имеем $(u)=(u_1)[u_2]$. Запишем слово (u_1) через базисные одночлены. Пусть его старший член $\overline{(u_1)}$ есть базисный одночлен $[h]$. По индуктивному предположению, мы имеем $[u_1]>[h]$. Так как слова $[u]=[u_1][u_2]$ и (u_1) — полилинейные и $[u_1]>[u_2]$, то базисный одночлен $[u_2]$ меньше всех базисных одночленов, участвующих в записи слова (u_1). Тогда, по лемме 1.8, старшим членом $\overline{(u)}=\overline{(u_1)[u_2]}$ слова (u) будет базисный одночлен $[hu_2]$. Но $u_1>h$ и поэтому $u=u_1u_2>hu_2$, то есть $[u]>[hu_2]=\overline{(u)}$.

Случай, когда слово $[v]$ является подсловом в $[u_2]$, рассматривается аналогично.

Лемма 2.5 доказана.

Лемма 2.6. Пусть ассоциативное полилинейное X-слово v имеет следующий вид:

$$v=(x_{\alpha_d}\dots x_{\beta_d})(x_{\alpha_{d-1}}\dots x_{\beta_{d-1}})\dots(x_{\alpha_1}\dots x_{\beta_1}),$$

для которого выполняются следующие условия:

1) $x_{\alpha_d}>x_{\alpha_{d-1}}>\dots>x_{\alpha_2}>x_{\alpha_1}$,

2) символы, находящиеся между x_{α_i} и $x_{\alpha_{i-1}}$, меньше $x_{\alpha_{i-1}}$, $i=2, \dots, d$,

3) все символы, следующие за x_{α_1}, меньше x_{α_1}.

Тогда слова v и $v_i=x_{\alpha_i}\dots x_{\beta_i}$ $(i=1, \dots, d)$ — правильны и скобки в правильном неассоциативном слове $[v]$ расставлены следующим образом:

$$[v]=[v_d]([v_{d-1}](\dots([v_2][v_1])\dots)). \tag{8}$$

Доказательство. То, что слова v и v_i $(i=1, \dots, d)$ — правильны является очевидным.

Обозначим через $l(v)$ степень слова v. Индукцией по числу $l(v)$ мы докажем равенство (8).

Если $l(v)=1$, то нечего доказывать. Пусть $l(v)>1$ и лемма доказана для слов, длина которых меньше $l(v)$. Пусть x_β — наименьший символ, участвующий в записи слова v. Тогда очевидно, что $x_\alpha \geq x_\beta$. Если $x_\gamma x_\beta (x_\gamma>x_\beta)$ — подслово в полилинейном слове v, то заменим в v, как это делается в доказательстве леммы 1 из [6], подслово $x_\gamma x_\beta$ символом x^1_γ, а x_δ $(\delta\neq\beta, \gamma)$ — символом x^0_δ и положим $x^k_s>x^l_t$, если $x_s>x_t$. Мы получаем полилинейное слово v' от символов x_t^k, длина которого равна $l(v)-1$. Легко видеть, что слово имеет указанный в лемме вид. По индуктивному предположению, равенство (8) имеет место для слова v', а тогда мы получаем соответствующее представление и для слова v. Лемма 2.6 доказана.

Лемма 2.7. Пусть в правильном ассоциативном полилинейном слове u от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеется подслово $v=(x_{\alpha_d} \ldots x_{\beta_d}) \ldots (x_{\alpha_1} \ldots x_{\beta_1})$, для которого выполняются все условия предыдущей леммы, причем, если за x_β в слове u следует x_{α_0}, то $x_{\alpha_0} > x_{\alpha_1}$. Тогда правильное неассоциативное слово $[v]$ является подсловом в правильном неассоциативном слове $[u]$.

Доказательство. По предыдущей лемме, слово v правильно и ему соответствует правильное неассоциативное слово $[v]$.

Если $d=1$, то нам нечего доказывать. Допустим, что $d>2$ и что для слов u, длина которых меньше n, лемма доказана. В записи слова u наименьший символ является x_1. Если $x_j x_1$ подслово в u, то заменим его символом x_j^1, а x_i $(i \neq j, 1)$ заменим символами x_i^1. Положим $x_s^k > x_t^l$, если $x_s > x_t$. Мы получаем полилинейное слово u' от символов x_t^l, длина которого равна $n-1$. Легко видеть, что подслово v заменится новым подсловом v' в u', для которого все условия леммы выполнены. Слово v' как X-слово совпадает с v. Рассматривая слова u' и v' как слова от символов x_t^l, мы попадаем в условия индуктивного предположения. Дальнейшие рассуждения очевидны.

Лемма 2.7 доказана.

Замечание 2.8. Предыдущая лемма является частным случаем леммы 4 из [6], но в формулировке последней допущена некоторая неточность. Поэтому мы не сделали прямую ссылку на эту лемму.

Ассоциативное полилинейное слово $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$ от $x_1, \ldots, x_n$ будем называть „хорошим“ (см. [4]), если перестановка индексов $i_1 i_2 \ldots i_n$ удовлетворяет условиям теоремы 1.10.

Определение 2.9. Базисный полилинейный одночлен $[x_n x_{s(n-1)} \ldots x_{s(2)} x_{s(1)}]$ $(s \in S_{n-1})$ будем называть хорошим, если его „ассоциативный носитель“ $x_n x_{s(n-1)} \ldots x_{s(1)}$ является хорошим словом.

Теорема 2.10. Если вербальный идеал V алгебры Ли L_∞ содержит полином степени d, $2 \leq d \leq n$, то $\dim_F Q_n / V_n \leq (d-1)^{2n}$.

Доказательство. По предложениям 2.2 и 2.3, в фактор-алгебре L_∞ / V выполняется полилинейное тождество

$$(9) \qquad [y_d y_{d-1} \ldots y_1] = \sum_{s \in S_{d-1}} \lambda_s [y_d y_{s(d-1)} \ldots y_{s(1)}].$$

Для доказательства достаточно установить, что линейное пространство Q_n порождается по mod V_n хорошими базисными одночленами. Пусть $[u] \in Q_n$ не такой базисный одночлен. Тогда ассоциативное полилинейное слово u содержит подслово $v = v_d v_{d-1} \ldots v_1 = (x_{\alpha_d} \ldots x_{\beta_d})(x_{\alpha_{d-1}} \ldots x_{\beta_{d-1}}) \ldots (x_{\alpha_1} \ldots x_{\beta_1})$, $v_i = x_{\alpha_i} \ldots x_{\beta_i}$ $(i=1, \ldots, d)$, которое удовлетворяет всем условиям леммы 2.7 (см. [5]). По леммам 2.6 и 2.7 базисный одночлен $[v]$ является подсловом в $[u]$ и имеет вид $[v]=[v_d]([v_{d-1}](\ldots ([v_2][v_1]) \ldots))$. Подставим в (9) $y_i=[v_i]$ $(i=1, \ldots, d)$. Одночлен $[y_d y_{s(d-1)} \ldots y_{s(2)} y_{s(1)}]$

после указанной подстановки переходит в неассоциативное X-слово $(v_d v_{s(d-1)} \ldots v_{s(2)} v_{s(1)})$. Мы получаем

(10)
$$v = \sum_{\varepsilon + s \in S_{d-1}} \lambda_s (v_d v_{s(d-1)} \ldots v_{s(2)} v_{s(1)}) \pmod{V}.$$

Каждое неассоциативное слово $(v_d v_{s(d-1)} \ldots v_{s(2)} v_{s(1)})$ в правой части равенства (10) выразим через базисные одночлены. По леммам 1.9 и 2.4, мы имеем $(v_d v_{s(d-1)} \ldots v_{s(2)} v_{s(1)}) = [v_d v_{s(d-1)} \ldots v_{s(1)}] + \ldots$, где следующие члены суммы строго меньше базисного одночлена $[v_d v_{s(d-1)} \ldots v_{s(2)} v_{s(1)}]$, и $[v] > [v_d v_{s(d-1)} \ldots v_{s(1)}]$ ($\varepsilon \neq s \in S_{d-1}$). Таким образом мы получаем сравнение

(11)
$$[v] = \sum_k \mu_k [v_k] \pmod{V},$$

где $\mu_k \in F$, $[v_k]$ — полилинейные базисные одночлены, записанные на тех же символах, что и слово $[v]$, причем $[v] > [v_k]$.

Подставляя теперь в слово $[u]$ вместо $[v]$ правую часть сравнения (11) и применяя лемму 2.5, мы получаем следующее сравнение:

(12)
$$[u] = \sum_r \nu_r [u_r] \pmod{V_n},$$

где $\nu_r \in F$, $[u_r] \in Q_n$ — базисные одночлены, меньшие чем $[u]$. К каждому из базисных одночленов $[u_r]$ применимо проведенное рассуждение и т. д. О конечном числе шагов получим представление $[u]$ по mod V_n в виде линейной комбинации хороших базисных одночленов.

Теорема 2.10 доказана.

Напомним, что тензорное произведение двух алгебр Ли не всегда является алгеброй Ли. Следствием из предыдущего результата является следующая теорема.

Теорема 2.11. Пусть G и H — алгебры Ли над полем F, удовлетворяющие некоторым нетривиальным полиномиальным тождествам. Тогда существует ненулевой полилинейный элемент $f(x)$ свободной алгебры Ли L_∞ такой, что он является тождеством в алгебрах Ли G и H и в их тензорном произведении $G \otimes_F H$.

Доказательство. Пусть U, W — вербальные идеалы в L_∞, состоящие из всех элементов алгебры Ли L_∞, являющихся тождествами соответственно в G и H. По условию, идеалы U и W — ненулевые. Рассмотрим вербальный идеал $V = V \cap W$. Ясно, что идеал V — ненулевой. Пусть идеал V содержит полином степени d, $2 < d \leq n$. В пространстве Q_n выберем базис $m_1(x)$, $m_2(x), \ldots, m_{d_n}(x)$ по mod V_n. Для любой подстановки $s \in S_{n-1}$ симметрической группы $(n-1)$-вой степени на множестве $1, 2, \ldots n-1$ будем иметь

$$[x_n x_{s(n-1)} \ldots, x_{s(2)} x_{s(1)}] = \sum_{i=1}^{d_n} \lambda_i(s) m_i(x) \pmod{V_n}, \quad \lambda_i(s) \in F,$$

причем это сравнение превращается в равенство, если вместо x в него подставить элементы алгебры G или алгебры H. Рассмотрим полилинейный полином $f(x) \in L_\infty$:

$$f(x) = \sum_{s \in S_{n-1}} \mu_s [x_n x_{s(n-1)} \ldots x_{s(2)} x_{s(1)}],$$

коэффициенты которого μ_s подлежат определению. Пусть $g_i \otimes h_i \in G \otimes_F H$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда

$$f(g_1 \otimes h_1, \ldots, g_n \otimes h_n) = \sum_{s \in S_{n-1}} \mu_s [g_n g_{s(n-1)} \ldots g_{s(1)}] \otimes [h_n h_{s(n-1)} \ldots h_{s(1)}] =$$

$$= \sum_{i=1}^{d_n} \sum_{j=1}^{d_n} \left(\sum_{s \in S_{n-1}} \lambda_i(s) \lambda_j(s) \mu_s \right) m_i(g) \otimes m_j(h).$$

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений:

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\sum_{s \in S_{n-1}} \lambda_i(s) \mu_s = 0, \\ &\sum_{s \in S_{n-1}} \lambda_i(s) \lambda_j(s) \mu_s = 0. \end{aligned}$$

от $(n-1)!$ неизвестных μ_s и $d_n + d_n^2$ уравнений. По теореме 2.10 $d_n \leq (d-1)^{2n}$ и при достаточно больших n мы имеем $d_n + d_n^2 < 2d_n^2 \leq 2(d-1)^{4n} < (n-1)!$. Поэтому в этом случае система (13) имеет нетривиальное решение $\mu_s = \mu_s^0$, а полилинейный полином

$$f(x) = \sum_{s \in S_{n-1}} \mu_s^0 [x_n x_{s(n-1)} \ldots x_{s(2)} x_{s(1)}],$$

как легко видеть, является тождеством в алгебрах Ли G и H и в алгебре $G \otimes_F H$.

Теорема 2.11 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джекобсон, Н. Строение колец. М., 1961.
2. Regev, A. Existence of polynomial identities in $A \otimes B$. — Bull. Amer. Math. Soc., **77**, 1971, No. 6. 1067—1069.
3. Regev, A. Existence of polynomial identities in $A \otimes B$. — Israel J. Math., **11**, 1972. No. 2 131—152.
4. Латышев, В. Н. К теореме Регева о тождествах тензорного произведения PI — алгебр. — Успехи матем. наук. **27**. 1972, № 4, 213—214.
5. Ширшов, А. И. О некоторых неассоциативных нилькольцах и алгебраических алгебрах. — Матем. сб., **41** (83), 1957, № 3. 381—394.
6. Ширшов, А. И. О свободных кольцах Ли. — Матем. сб., **45** (87), 1958, № 2, 113—122.
7. Шмелькин, А. Л. Свободные полинильпотентные группы. — Изв. АН СССР, сер. Матем., **28**, 1964, 91—122.

Поступила 16. XII. 1972 г.

ВЪРХУ ПОЛИНОМНИТЕ ТЪЖДЕСТВА В ТЕНЗОРНОТО ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА АЛГЕБРИ НА ЛИ

Георги Генов

(Резюме)

Нека L_∞ е свободната алгебра на Ли над полето F, имаща изброимо множество от свободни образуващи $x_1, x_2, \ldots$. С Q_n означаваме пространството от всички полилинейни полиноми в L_∞ от степен n от образуващите $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ако V е произволен вербален (напълно инвариантен) идеал на алгебрата на Ли L_∞, то с V_n означаваме подпространството $V \cap Q_n$.

Основен резултат на настоящата статия е следната теорема:

Теорема. Ако вербалният идеал V на свободната алгебра на Ли L_∞ съдържа полином от степен d, $2 \leq d \leq n$, то $\dim_F Q_n/V_n \leq (d-1)^{2n}$.

Като следствие от този резултат се получава следната теорема:

Теорема. Нека G и H са алгебри на Ли, удовлетворяващи някои нетривиални полиномни тъждества. Тогава съществува ненулев полилинеен елемент $f(x)$ в свободната алгебра на Ли L_∞, такъв, че той се явява тъждество в алгебрите на Ли G и H и в тяхното тензорно произведение $G \otimes_F H$.

За асоциативни алгебри аналогичните теореми са доказани най-напред от Регев, а по-късно В. Н. Латишев публикува красиво и кратко доказателство на резултатите на Регев.

EXISTENCE OF POLYNOMIAL IDENTITIES IN THE TENSOR PRODUCT OF LIE ALGEBRAS

Georgi Genov

(Summary)

Let L_∞ be a free Lie algebra over a field F, L_∞ possesses a countable set of free generators $x_1, x_2, \ldots$ and let Q_n be a space of all polylinear polynomials in L_∞ of $x_1, \ldots, x_n$. If V is a verbal ideal of the Lie algebra L_∞, then V_n denotes the subspace $V \cap Q_n$.

The main result of this paper is the following theorem.

Theorem. If a verbal ideal V of the free Lie algebra L_∞ contains a polynomial of degree d, $2 \leq d \leq n$, then $\dim_F Q_n/V_n \leq (d-1)^{2n}$.

As a corollary the following result is obtained.

Theorem. Let G and H be Lie algebras over a field F, satisfying nontrivial polynomial identities. Then there exists non-trivial polylinear element $f(x)$ in the free Lie algebra L_∞ such that it is an identity in Lie algebras G, H and in the algebra $G \otimes_F H$.