БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

ВЪРХУ УМНОЖЕНИЕТО НА МНОГООБРАЗИЯ ОТ АСОЦИАТИВНИ АЛГЕБРИ

Иван К. Тонов

Доказаните в тази работа резултати се отнасят към теорията на многообразията от асоциативни алгебри над поле с характеристика нула. Тази теория не е съвсем близка с теорията на многообразия от групи, многообразия от алгебри на Ли и многообразия от комутативни и антикомутативни алгебри, тъй като невинаги подалгебра на свободна асоциативна алгебра е свободна, и заради което възникват и по-големи затруднения в работата. Основната ни цел е да покажем, че групоидът от многообразия от асоциативни алгебри е групоид със съкращение — теоремата от § 2.

§ 1. НЯКОИ НЕОБХОДИМИ РЕЗУЛТАТИ И ОЗНАЧЕНИЯ

Тук се използват следните означения:

$\{f_i, i\in I\}$ множество от елементи f_i, $i\in I$;

$(f_i, i\in I)$ — асоциативна алгебра, породена от някакво множество елементи f_i, $i\in I$;

$\{f_i, i\in I\}^T$ — T-идеал, породен от f_i, $i\in I$.

$F[x]$ $F[x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots]$ — свободна асоциативна алгебра над поле F с характеристика нула на изброимо количество променливи x_i;

V_{ass} — многообразие от всички асоциативни алгебри,

$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{A}$ — многообразия от асоциативни алгебри над полето F;

$T(\mathfrak{M}), T(\mathfrak{N}), T(\mathfrak{A})$ — напълно-характеристични идеали (T-идеали), отговарящи на многообразията $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{A}$;

$T(A)$ — множеството от тъждества в алгебрата A;

$\deg f(x)$ — степента на хомогенния полином $f(x)\in F[x]$.

Нека F е поле с характеристика нула, а $F[x]$ $F[x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots]$ е свободната асоциативна алгебра, породена от изброимо множество образуващи

$$(x)=x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Образуващите x_i понякога ще бележим с $y, z, u, \ldots$ Елементите на $F[x]$ ще наричаме полиноми. В работата ще се разглеждат само асоциативни алгебри над F, затова по-надолу под алгебра ще се разбира асоциативна алгебра над F, освен ако изрично не е уговорено нещо друго.

Един идеал T в $F[x]$ ще наричаме напълно характеристичен (или по-кратко T-идеал), ако от $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T$ следва, че

$$f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)) \in T$$

за произволни $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x) \in F[x]$, т. е. когато T е инвариантен относно всеки ендоморфизъм на $F[x]$. Нека A е алгебра над F. Полиномът $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F[x]$ ще наричаме тъждество в алгебрата A, ако $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ за всеки набор елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, т. е. когато $f(x)$ се съдържа в ядрото на всеки хомоморфизъм от $F[x]$ в A. Множеството от тъждествата в A ще бележим с $T(A)$. Лесно се вижда, че $T(A)$ е T-идеал в $F[x]$ и, обратно, че всеки T-идеал в $F[x]$ е множество от всичките тъждества за някоя алгебра A.

Един елемент $f(x) \in F[x]$ се нарича хомогенен, ако f е линейна комбинация на думи, всяка от които съдържа еднакво количество елементи на (x). Хомогенният елемент $f(x)$ ще наречем полилинеен, ако пораждащите, влизащи в думите на $f(x)$, участвуват точно по веднаж. Под степен на един хомогенен елемент $f(x)$ (ще бележим с $\deg f(x)$) ще разбираме дължината на всяка от думите, влизащи в $f(x)$.

Ще казваме, че тъждеството $f(x) = 0$ ще следва от тъждествата $f_i(x) = 0$, $i \in I$, ако $f(x)$ принадлежи на T-идеала, породен от $f_i(x)$, $i \in I$, който ще бележим с $\{f_i(x), i \in I\}^T$, или което е все едно $f(x) = 0$ да е тъждество във всяка алгебра, в която $f_i(x) = 0$, $i \in I$ са тъждества. Известно е, че [2] всички тъждества, важащи в една алгебра A, следват от полилинейните тъждества, важащи в A.

Класът $\mathfrak{M}$ от всички алгебри, удовлетворяващи някаква фиксирана система тъждества

$$(1) \qquad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}), \ i \in I,$$

ще наричаме многообразие от асоциативни алгебри. Ясно е, че без да ограничаваме общността, можем да считаме тъждествата (1) полилинейни. T-идеалът, породен от тях, ще бележим с $T(\mathfrak{M})$. Очевидно е, че ако $T(\mathfrak{M}) = T(\mathfrak{N})$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$. Ако $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ са две многообразия от алгебри, под произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ на тези многообразия ще разбираме класа на всички алгебри, състоящ се от всевъзможни разширения на произволна алгебра от $\mathfrak{M}$ с помощта на произволна алгебра от $\mathfrak{N}$, т. е. една алгебра $C \in \mathfrak{M}\mathfrak{N}$, ако съществува такъв идеал A на C, че $A \in \mathfrak{M}$ и фактор-алгебрата $B = C/A$ да принадлежи на $\mathfrak{N}$. Под произведение $T_1 . T_2$ на два T-идеала T_1 и T_2 ще разбираме [1] T-идеала, породен от всички елементи от вида

$$f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)),$$

където $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_1$, а $g_1(x) \in T_2$. Лесно се вижда [1], че ако $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ са многообразия, то и $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ е многообразие и $T(\mathfrak{M}\mathfrak{N}) = T(\mathfrak{M}) . T(\mathfrak{N})$. Следователно съвкупността V_{ass} от всички многообразия е групоид. Оказва се [1], че този групоид е неасоциативен. В теорията на многообразия от алгебри на Ли този групоид е свободна полугрупа с нула и единица [3], а в теорията на многообразия от комутативни и антикомутативни алгебри той [4] е свободен групоид с нула и единица.

Както в [3] и [4], въвеждаме норма $N(\mathfrak{M})$ на едно многообразие $\mathfrak{M}$ като минимална степен на полином $f(x)$, определящ многообразието $\mathfrak{M}$. Ясно е, че нормата на $\mathfrak{M}$ съвпада с минималната степен на полилинейните елементи от $T(\mathfrak{M})$.

Предложение 1. Ако $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ са многообразия от асоциативни алгебри над полето F, то

$$N(\mathfrak{M}\mathfrak{N})=N(\mathfrak{M})N(\mathfrak{N}).$$

Доказателството не се отличава от доказателството на съответния факт в многообразия от алгебри на Ли [3].

§ 2. ОСНОВНИ РЕЗУЛТАТИ

Теорема. Нека $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ са многообразия от асоциативни алгебри над полето F и $\mathfrak{A}\mathfrak{M}=\mathfrak{A}\mathfrak{N}$, тогава $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$.

Доказателство. Да означим с $s=N(\mathfrak{A})$, а с $k=N(\mathfrak{M})=N(\mathfrak{N})$. Нека още $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ да е от минимална степен полилинеен полином, лежащ в $T(\mathfrak{M})$, $\varphi=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ да е от минимална степен и полилинеен от $T(\mathfrak{A})$, а $q=q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ да е произволен от $T(\mathfrak{N})$. Да си образуваме полинома $\varphi(q, f_1, f_2, \ldots, f_{s-1})$, където $f_i=f(x_{(i-1)k+1}, \ldots, x_{ik})$. Ясно е, че той е от $T(\mathfrak{A}\mathfrak{M})$ и поради това, че $T(\mathfrak{A}\mathfrak{M})=T(\mathfrak{A}\mathfrak{N})$ ще бъде в сила равенството

$$\varphi(q, f_1, f_2, \ldots, f_{s-1})=\sum_i a_i U_i \psi_i(g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{ic_i}) V_i, \tag{2}$$

където $\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{c_i})\in T(\mathfrak{A})$ и $\deg \psi_i=c_i\geq s$, а g_{ij} са от $T(\mathfrak{N})$ и следователно $\deg g_{ij}\geq \deg f=k$.

Нека g_{ij} е някой от тези полиноми, които участвуват в равенство (2). Както при предходната теорема, събираемите

$$A_i=a_i U_i \psi_i(g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{ic_i}) V_i$$

са полилинейни полиноми, записани на същите образуващи, на които е записан и полиномът $A=U(q, f_1, f_2, \ldots, f_{s-1})$. Тъй като

$$\deg A=\deg q+\sum_{t=1}^{s-1}\deg g_{it}=\deg q+(s-1)k,$$

$$\deg A_i=\deg U_i+\sum_{t=1}^{c_i}\deg g_{it}+\deg V_i$$

и

$$\deg A=\deg A_i,$$

получаваме

$$\deg q+(s-1)k=\deg U_i+\sum_{t=1}^{c_i}\deg g_{it}+\deg V_i$$

$$=\deg U_i+\deg g_{ij}+\sum_{t\neq j}\deg g_{it}+\deg V_i \geq \deg U_i+\deg g_{ij}$$

$$+\min_{t\neq j}\deg g_{it}+\deg V_i \geq \deg U_i+\deg g_{ij}+(s-1)k+\deg V_i,$$

откъдето

$$\deg q \geqq \deg U_i+\deg g_{ij}+\deg V_i \tag{3}$$

За доказателството на неравенство (3) използувахме, че $\deg g_{ij} = \deg f = k$ и $\deg \varphi_i = c_i \geqq s$. Това неравенство показва, че $\deg U_i < \deg q$; $\deg V_i < \deg q$ и $\deg g_{ij} \leqq \deg q$ за всички U_i, V_i и g_{ij}, участвуващи в (4).

Да разгледаме елемента $qf_1f_2\ldots f_{s-1}$, от лявата страна на (2). Той ще бъде равен на някаква сума от думи в дясната страна на (2), които започват с y-ци, т. е. ще можем да запишем, че

$$qf_1f_2\ldots f_{s-1}=\sum U_i g_{ij} W_i R_i, \tag{4}$$

където $g_{ij}\in T(\mathfrak{N})$ и зависи само от y-ци, а W_i, R_i са думи, като първите зависят само от y-ци, а вторите само от x-ве. Тогава, като си изберем по един едночлен $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_{s-1}$ (например пак главните едночлени), ще получим

$$q\bar{f}_1\bar{f}_2\ldots\bar{f}_{s-1}=\left(\sum U_i g_{ij} W_i\right)\bar{f}_1\bar{f}_2\ldots\bar{f}_{s-1}. \tag{5}$$

Поради това, че в свободната асоциативна алгебра $F[x]$ няма делители на нулата, ще получим, че

$$q=\sum U_i g_{ij} W_i, \tag{6}$$

което показва, че $q\in T(\mathfrak{N})$, т. е. $T(\mathfrak{M})\subset T(\mathfrak{N})$. От съображение за симетрия получаваме, че и $T(\mathfrak{N})\subset T(\mathfrak{M})$, което показва, че $T(\mathfrak{M})=T(\mathfrak{N})$, а оттук и $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$.

Теоремата показва, че групоидът V_{ass} от многообразия от асоциативни алгебри е групоид със съкращение.

В заключение искам да изкажа моята благодарност към М. Б. Гаврилов и Г. К. Генов за постановката на задачата и за редицата ценни съвети и забележки, които получих от тях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврилов, М. Б. О многообразиях ассоциативных алгебр. Докл. БАН, 21, 1968, № 10, 989—992.
2. Мальцев, А. И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями. — Матем. сб., 26 (68), 1950, № 1, 19—23.
3. Парфенов, В. А. О многообразиях алгебр Ли. Алгебра и логика, 6, 1967, № 4, 67—73.
4. Урман, А. А. Группоид многообразий некоторых алгебр. — Алгебра и логика, 8, 1969, № 2, 241—250.

Постъпила на 16. XII. 1972 г.

ОБ УМНОЖЕНИИ МНОГООБРАЗИЙ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

Иван Тонов

(Резюме)

Пусть F поле нулевой характеристики. Рассматриваются многообразия ассоциативных алгебр над полем F. Доказано, что группоид ассоциативных алгебр является группоидом со сокращением, точнее имеет место следующее утверждение:

Теорема. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ многообразия ассоциативных алгебр над полем F и $\mathfrak{A}\mathfrak{M}=\mathfrak{A}\mathfrak{N}$, тогда $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$.

ON THE PRODUCT OF VARIETIES OF ASSOCIATIVE ALGEBRAS

Ivan Tonov

(Summary)

Let F be a field with characteristic 0. In this paper we prove the following theorem:

Theorem. Let $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ be varieties of associative algebras over the field F and $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$ $\mathfrak{A}\mathfrak{N}$, then $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$.