БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНЫМИ КОНЦАМИ

Митко М. Цветанов

0. Статья посвящена применению двойственных методов, подробно разработанных в [2] и [3], к одному классу вариационных задач — к задачам со свободными концами, в которых функционал, нижнюю грань которого отыскивается, имеет вид

$$I(x)=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt. \tag{A}$$

В начале статьи коротко изложены те основные понятия и результаты теории двойственности, которые используются в дальнейшем. Дальше вводятся пространства B^k — пространства функций с абсолютно непрерывной k-ой производной, и доказывается, что при некоторых ограничениях, наложенных на функцию $f(t, x)$, входящую в функционал

$$F(x) \quad \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))dt,$$

где $x \in B^k$, двойственный к функционалу F определен тоже в пространстве B^k.

Двойственная к задаче (A), состоящая в отыскании нижней грани функционала

$$J(y)=\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y^{(n)}(t), ay^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \ldots, y(t))dt, \tag{B}$$

где $a=\frac{(-1)^n+3}{2}$ получается задачей с фиксированными концами и нулевыми граничными условиями. При этом минимум в задаче (B) достигается на некоторой кривой $y_0 \in B^{n-1}[t_0, t_1]$, для которой

$$y^{(i)}(t_0)=y^{(i)}(t_1)=0, \quad i=0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

В [2] рассматривается выпуклая функция

$$\varphi(\xi)=\inf_x f(x, Ax),$$

где f — выпуклая и полунепрерывная снизу по обеим переменным функция, A — линейный оператор, и доказано, что необходимым и достаточным условием для достижения равенства

$$\inf_x f(x, Ax)+\inf_y f^*(-A^*y, y)=0$$

является равенство $\varphi(0)=\varphi^{**}(0)$ (что называется замкнутость функции φ в нуле). Через φ^{**} обозначается вторая сопряженная к φ функция.

Субдифференцируемость функции φ в нуле является необходимым и достаточным условием для достижения $\min f^*(-A^*y, y)$.

В рассматриваемой нами задаче функция $\varphi(\xi)$ имеет вид

$$\varphi(\xi)=\inf_x \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t)+\xi(t), \ldots, x^{(n)}(t)+\xi^{(n-1)}(t))dt.$$

Как отмечается в статье, достаточным условием для достижения нижней грани в задаче (B), что эквивалентно замкнутости и субдифференцируемости функции $\varphi(\xi)$ в нуле, является выпуклость функции $f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)})$ по $(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)})$ для всех $t\in[t_0, t_1]$ и непрерывность по $(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)})$ на $[t_0, t_1]\times R^{n+1}$.

В статье не рассматривается вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий для замкнутости и субдифференцируемости функции φ в нуле. Этот вопрос рассмотрен в [2] в линейных топологических пространствах.

1. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ вещественные линейные пространства, находящиеся в двойственности относительно (канонической) билинейной формы $\langle x, y\rangle$.*

Отношение двойственности приводит к топологии в каждом из пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$. Эта топология, обычно называемая слабой, задается как слабейшая из топологий, в которых непрерывны все линейные формы вида $x \to \langle x, y\rangle$ в $\mathfrak{X}$ и $y \to \langle x, y\rangle$ в $\mathfrak{Y}$ и обозначается $\sigma(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ в $\mathfrak{X}$ и $\sigma(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$ в $\mathfrak{Y}$.

Наделенные топологией двойственности $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ превращаются в отделимые локально выпуклые вещественные линейные пространства и при этом равноправие $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ не нарушается, т. е. $\mathfrak{X}\overset{\langle\cdot,\cdot\rangle}{\longrightarrow}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}\overset{\langle\cdot,\cdot\rangle}{\longrightarrow}\mathfrak{X}$ [1].

---

* Говорят, что два линейных вещественных пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ находятся в двойственности, если существует билинейный функционал $B(x,y)$: $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}\to R^1$ такой, что выполнены следующие два условия:

а) для любого $x\in\mathfrak{X}$, $x\neq0$, существует элемент $y\in\mathfrak{Y}$ такой, что $B(x, y)\neq0$;

б) для любого $y\in\mathfrak{Y}$, $y\neq0$ существует элемент $x\in\mathfrak{X}$ такой, что $B(x, y)\neq0$.

Поскольку (см. [1]) всегда можно считать $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}'$, где $\mathfrak{X}'$ — пространство всех линейных функционалов, заданных на $\mathfrak{X}$, то в качестве $B(x, y)$ можно взять $\langle x, y\rangle$ — каноническая билинейная форма на $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}'$ и двойственность между $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ понимать относительно сужения на $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ этой билинейной формы.

Пусть в пространстве $\mathfrak{X}$ задана функция $f(x)$, принимающая значения в расширенной области вещественных чисел, т. е.

$$f(x)\in[-\infty, +\infty].$$

Обозначим

$$\operatorname{dom} f = \{x\in\mathfrak{X} : f(x)<\infty\},$$
$$\operatorname{det} f = \{(x, \lambda)\in\mathfrak{X}\times R^1 : f(x)\leq\lambda\}.$$

Множество $\operatorname{dom} f$ называют эффективной областью определения, а множество $\operatorname{det} f$ – эпиграфом или надграфиком функции f.

Функцию $f(x)$ называют выпуклой, если для любых чисел $\alpha\geq0$, $\beta\geq0$, $\alpha+\beta=1$ справедливо следующее неравенство (называемое неравенством Иенсена):

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)\leq\alpha f(x_1)+\beta f(x_2),$$

где $x_1\in\operatorname{dom} f$, $x_2\in\operatorname{dom} f$, и полунепрерывной снизу, если

$$f(x_0)\leq\varliminf_{x\to x_0} f(x)$$

для любого $x_0\in\operatorname{dom} f$.

Мы назовем функцию f выпуклой, если $\operatorname{det} f$ выпукло, и замкнутой (полунепрерывной снизу), если $\operatorname{det} f$ замкнуто в $\mathfrak{X}\times R^1$. Эквивалентность этих двух определений очевидна.

Функцию $g(y)$, $y\in\mathfrak{Y}$, определяемую равенством

$$g(y)=\sup_{x\in\mathfrak{X}}[\langle x, y\rangle-f(x)], \tag{1}$$

называют двойственной (или сопряженной) по Юнгу к функции f и обозначают $f^*(y)$, а преобразование (1) — преобразованием Юнга функции f.

Двойственную к $f^*(y)$ функцию, определяемую равенством, подобным (1), называют второй сопряженной к $f(x)$ и обозначают $f^{**}(x)$.

Для любой функции f функции f^* и f^{**} выпуклы и замкнуты, а если f выпукла и замкнута, то $f(x)=f^{**}(x)$.

Функцию $f(x)$ называют собственной (или нетривиальной), если $f(x)>-\infty$ для всех $x\in\mathfrak{X}$ и $f(x)<\infty$ по крайней мере для одного $x\in\mathfrak{X}$.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать функцию f собственной.

Из (1) следует важное неравенство

$$f(x)+f^*(y)\geq\langle x, y\rangle \tag{2}$$

называемое неравенством Юнга.

Из (1) следует еще, что

$$\inf f(x)=-f^*(0).$$

С другой стороны, поскольку f^* выпукла и замкнута и, следовательно, справедливо

$$f^*(y)=\sup_x[\langle x, y\rangle-f^{**}(x)],$$

то

(3) $$\inf f^{**}(x)=\inf f(x)=-f^{*}(0).$$

Равенство (3) дает, что при исследовании задачи о нижней грани функции f мы можем, не уменьшая общности, предполагать ее выпуклой и замкнутой (иначе будем рассматривать функцию $f^{**}(x)$).

Элемент $y_0\in\mathfrak{Y}$ называют субградиентом функции $f(x)$ в точке x_0, если выполнено равенство

$$f(x_0)+f^{*}(y_0)=\langle x_0, y_0\rangle.$$

Совокупность всех субградиентов функции f в точке x_0 называют субдифференциалом и обозначают $\partial f(x_0)$. Если в точке x_0 имеем $\partial f(x_0)\neq\varnothing$, то функцию f называют субдифференцируемой в x_0.

Пусть пространства $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ находятся в двойственности к пространствам $\mathfrak{Y}_1$ и $\mathfrak{Y}_2$ относительно билинейных форм $\langle x_1, y_1\rangle$ и $\langle\langle x_2, y_2\rangle\rangle$ соответственно, где $x_i\in\mathfrak{X}_i, y_i\in\mathfrak{Y}_i$, $i=1, 2$. Пусть в пространстве $\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_2$ задана выпуклая замкнутая по совокупности переменных функция $f(x_1, x_2)$. Очевидно, что двойственная к f функция задается формулой

(4) $$f^{*}(y_1, y_2)=\sup_{x_1, x_2}[\langle x_1, y_1\rangle+\langle\langle x_2, y_2\rangle\rangle-f(x_1, x_2)].$$

Рассмотрим задачу о нижней грани функции f при условиях, что $x_1\in X$, где $X\subseteq\mathfrak{X}_1$ — некоторое выпуклое замкнутое множество и $x_2=Ax_1$, где $A:\mathfrak{X}_1\to\mathfrak{X}_2$ — линейный оператор.

Обозначим через $A^{*}:\mathfrak{Y}_2\to\mathfrak{Y}_1$ оператор, сопряженный к A, т. е. $\langle\langle Ax_1, y_2\rangle\rangle=\langle x_1, A^{*}y_2\rangle$.

Обозначим

(5) $$\tilde{f}(x_1, x_2)=f(x_1, x_2)+\delta_{X\times\mathfrak{X}_2}(x_1, x_2)$$

где функцию

$$\delta_D(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in D,\\ \infty, & \text{если } x\bar{\in} D,\end{cases}$$

называют индикаторной функцией множества D.

Двойственную к $\tilde{f}$ функцию обозначим через $\tilde{f}^{*}$.

Из (4) и (5) получаем

$$\tilde{f}(x, Ax)+\tilde{f}^{*}(-A^{*}y, y)\geq\langle x, -A^{*}y\rangle+\langle\langle Ax, y\rangle\rangle=0$$

для всех $x\in\mathfrak{X}_1$, $y\in\mathfrak{Y}_2$, откуда следует, что

$$\inf_x\tilde{f}(x, Ax)+\inf_y\tilde{f}^{*}(-A^{*}y, y)\geq 0.$$

В дальнейшем мы будем предполагать $\inf_x\tilde{f}(x, Ax)>-\infty$ (поскольку иначе, как легко видно, для функции $\tilde{f}^{*}$ получаем $\tilde{f}^{*}(-A^{*}y, y)\equiv+\infty$).

В [2] доказано, что если существует точка $(x_0, Ax_0)\in\operatorname{dom}\tilde{f}$, $x_0\in X$, в которой функция f непрерывна (при этих условиях мы называем функцию $\tilde{f}$ N-функцией), то справедливо

(6) $$\inf_x\tilde{f}(x, Ax)+\min_y\tilde{f}^{*}(-A^{*}y, y)=0.$$

2. Рассмотрим множество $B^1[t_0, t_1]$ функций $x(t)$, заданных на отрезке $[t_0, t_1]$, у которых первая производная абсолютно непрерывна. Введем в B^1 норму следующим образом:

$$(7)\qquad \|x\|_{B^1}=|x(t_0)|+|\dot{x}(t_0)|+\int_{t_0}^{t_1}|\ddot{x}(t)|\,dt.$$

Очевидно здесь $\int_{t_0}^{t_1}|\ddot{x}(t)|dt=\|\ddot{x}\|_{L^1}$.

Таким образом множество B^1 превратилось в линейное нормированное пространство, которое мы тоже будем обозначать $B^1[t_0, t_1]$.

Докажем, что $B^1[t_0, t_1]$ является банаховским (т. е. полным нормированным) пространством. Пусть $\{x_n(t)\}$ — фундаментальная последовательность в $B^1[t_0, t_1]$, т. е.

$$\lim_{m,n\to\infty}\|x_n-x_m\|=0.$$

Тогда

$$\lim_{m,n\to\infty}\|x_n-x_m\|_{B^1}=\lim_{m,n\to\infty}\Big[|x_n(t_0)-x_m(t_0)|+|\dot{x}_n(t_0)-\dot{x}_m(t_0)|$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}|\ddot{x}_n(t)-\ddot{x}_m(t)|\,dt\Big]=\lim_{m,n\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}|\ddot{x}_n(t)-\ddot{x}_m(t)|\,dt$$

и полноту $B^1[t_0, t_1]$ следует из полноты пространства $L^1[t_0, t_1]$.

Общий вид непрерывного линейного функционала, заданного на $B^1[t_0, t_1]$, следующий:

$$(8)\qquad f(x)=\alpha x(t_0)+\beta\dot{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\ddot{x}(t)\,y(t)dt,$$

где $\alpha\in R^1$, $\beta\in R^1$, $y\in L^\infty[t_0, t_1]$.

Подобным образом множество $B^k[t_0, t_1]$ — функций с абсолютно непрерывной K-ой производной превращается в полное линейное нормированное пространство, если в нем введем норму

$$(9)\qquad \|x\|_{B^k}=\sum_{i=0}^{k}|x^{(i)}(t_0)|+\int_{t_0}^{t_1}|x^{(k+1)}(t)|\,dt.$$

Общий вид непрерывного линейного функционала, заданного на пространстве $B^k[t_0, t_1]$, следующий:

$$(10)\qquad f(x)=\sum_{i=0}^{k}a_i x^{(i)}(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}x^{(k+1)}(t)\,y(t)dt,$$

где $a_i\in R^1$, $i=0, 1, 2, \ldots, k$ и $y\in L^\infty[t_0, t_1]$.

Пусть в пространстве $B^k[t_0, t_1]$ задан функционал

$$F(x)=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))dt, \tag{11}$$

где функция f предполагается выпуклой по x для всех $t \in [t_0, t_1]$, и непрерывной по совокупности (t, x) на $[t_0, t_1]\times R^1$. Используя (1) и (10), мы получаем, что двойственный к F функционал задается следующей формулой:

$$F^*(y)=F^*(a_0, a_1, \ldots, a_k, y)=\sup_{x\in B^k}\left[\sum_{i=0}^{k} a_i x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x^{(k+1)}(t)\,y(t)dt-\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))dt\right]. \tag{12}$$

Для получения двойственного функционала в виде, подобном (11), т. е. выразить его через функцию $f^*(t, \bar{y})$, где

$$f^*(t, \bar{y})=\sup_x [x\bar{y}-f(t, x)],$$

нам надо (если, конечно, это возможно) так преобразовать функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} x^{(k+1)}(t)\,y(t)dt, \tag{13}$$

чтобы получить его в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)z(t)dt.$$

Проинтегрируем (формально) (13) $k+1$ раз по частям:

$$\int_{t_0}^{t_1} x^{(k+1)}(t)\,y(t)dt=\left.\sum_{i=0}^{k}(-1)^i x^{(k-i)}(t)\,y^{(i)}(t)\right|_{t_0}^{t_1} +(-1)^{k+1}\int_{t_0}^{t_1} x(t)\,y^{(k+1)}(t)dt. \tag{14}$$

Отсюда видно, что если $y\in B^k[t_0, t_1]$, то

$$F^*(y)=\sup_{x\in B^k}\left\{\sum_{i=0}^{k}\left[a_i x^{(i)}(t_0)+(-1)^i x^{(k-i)}(t)\,y^{(i)}(t)\Big|_{t_0}^{t_1}\right] +\int_{t_0}^{t_1}[x(t)(-1)^{k+1}y^{(k+1)}(t)-f(t, x(t))]dt\right\}. \tag{15}$$

Теперь мы покажем, что при наложенных выше на f ограничениях равенство (15) имеет место.

Лемма. $\operatorname{dom} F^* \subseteq \{(a_0, a_1, \ldots, a_k, y) : y \in B^k[t_0, t_1],$

$$y^{(i)}(t_1) = 0, \quad y^{(i)}(t_0) = (-1)^{i+1} a_{k-i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k\},$$

Доказательство. Обозначим, для краткости $(a_0, a_1, \ldots, a_k, y) = \tilde{y}$. Пусть $F^*(\tilde{y}) < \infty$. Тогда для каждого $x \in B^k[t_0, t_1]$ имеет место неравенство (Юнга)

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x^{(k+1)}(t)\, y(t) dt \leq F(x) + F^*(\tilde{y}). \tag{16}$$

Обозначим $M = \max\limits_{\substack{t_0 \leq t \leq t_1 \\ |x| \leq 1}} f(t, x)$

Тогда

$$F(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t)) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} |f(t, x(t))|\, dt \leq M(t_1 - t_0)$$

для всех $x \in C[t_0, t_1]$, $\|x\|_C \leq 1$, т. е. функционал F ограничен на единичной сфере пространства $C[t_0, t_1]$. Отсюда, поскольку $\tilde{y}$ фиксировано, следует, что функционал

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x^{(k+1)}(t) y(t) dt$$

непрерывен в топологии пространства $C[t_0, t_1]$ на множестве $B^k[t_0, t_1]$ плотном в C. Но, тогда его можно продолжить, при том однозначно, до непрерывного линейного функционала, заданного на C, т. е. существует такой (непрерывный на C) линейный функционал

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} x(t) d\mu(t),$$

что для всех $x \in B^k$ имеет место равенство

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x^{(k+1)}(t)\, y(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t) d\mu t.$$

Но для функционала φ при тех же самых ограничениях на f (выпуклость по x для всех t и непрерывность по (t, x) на $[t_0, t_1] \times R$) доказано (см. [3], лемма 1), что мера μ абсолютно непрерывна, т. е. мы получаем такой непрерывный линейный функционал

$$\varphi(x)=\int_{t_0}^{t_1} x(t)z(t)dt, \qquad z\in L^1[t_0, t_1]$$

заданный на $C[t_0, t_1]$, что для всех $x\in B^k[t_0, t_1]$ имеет место равенство

$$(17) \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i x^{(i)}(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} x^{(k+1)}(t)\, y(t)dt=\int_{t_0}^{t_1} x(t)z(t)dt.$$

Обозначим $z(t)=u^{(k+1)}(t)$ и проинтегрируем правую часть (17) $k+1$ раз по частям (отметим, что в (17) $x\in B^k[t_0, t_1]$):

$$(18) \quad \int_{t_0}^{t_1} x(t)u^{(k+1)}(t)dt=\left.\sum_{i=0}^{k}(-1)^i x^{(i)}(t)\, u^{(k-i)}(t)\right|_{t_0}^{t_1}+(-1)^{k+1}\int_{t_0}^{t_1} x^{(k+1)}(t)u(t)dt.$$

Поскольку (17) справедливо, для всех $x\in B^k[t_0,t_1]$, то из (18) следует, что $y(t)=(-1)^{k+1}u(t)$, $y^{(i)}(t_0)=(-1)^{i+1}a_{k-i}$,

$$y^{(i)}(t_1)=0, \quad i=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ k, \quad y\in B^k[t_0, t_1].$$

Действительно, пусть $x(t)=P_k(t)$ — произвольный полином степени k. Тогда (поскольку $x^{(k+1)}(t)\equiv 0$) имеет место равенство

$$\sum_{i=0}^{k} a_i P_k^{(i)}(t_0)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i P_k^{(i)}(t)u^{(k-1)}(t)\Big|_{t_0}^{t_1},$$

$$\sum_{i=0}^{k} P_k^{(i)}(t_0)[a_i+(-1)^i u^{(k-i)}(t_0)]+\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+1}P_k^{(i)}(t_1)u^{(k-i)}(t_0)=0.$$

Поскольку $P_k^{(i)}(t_0)$ и $P_k^{(i)}(t_1)$ могут быть произвольными числами, то отсюда следует, что

$$(19) \qquad a_i=(-1)^{i+1}u^{(k-i)}(t_0), \quad u^{(k-i)}(t_1)=0, \quad i=0,\ 1, \ldots,\ k.$$

Из (17) и (19) получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} x^{(k+1)}(t)\, y(t)dt=(-1)^{k+1}\int_{t_0}^{t_1} x^{(k+1)}(t)u(t)dt$$

для любого $x\in B^k[t_0, t_1]$. Но, поскольку оба функционала невырождены, то отсюда следует, что $y(t)=(-1)^{k+1}u(t)$ для почти всех $t\in[t_0, t_1]$. Итак, мы получили, что

$$F^*(y)=\sup_x \int_{t_0}^{t_1}[(-1)^{k+1}x(t)\, y^{(k+1)}(t)-f(t, x(t))]dt.$$

Далее

$$(20)\qquad F^*(y)=\int_{t_0}^{t_1}\sup_x\,[x(-1)^{k+1}y^{(k+1)}(t))-f(t,x)]dt.$$

Мы не будем здесь излагать доказательство справедливости равенства (20), т. е. что

$$\sup\int=\int\sup,$$

поскольку это сделано в [3].

Из (20) следует, что

$$(21)\qquad F^*(y)=\int_{t_0}^{t_1}f^*(t,(-1)^{k+1}y^{(k+1)}(t))dt.$$

Обозначим

$$(-1)^{k+1}y^{(k+1)}=z^{(k+1)}$$

Тогда

$$(22)\qquad F^*(z)=\int_{t_0}^{t_1}f^*(t,z^{(k+1)}(t))dt.$$

3. Рассмотрим задачу классического вариационного исчисления, состоящую в отыскании нижней грани функционала

$$(23)\qquad F(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\int_{t_0}^{t_1}f(t,x_0(t);x_1(t),\ldots,x_n(t))dt$$

при условиях, что подынтегральная функция f выпукла по совокупности переменных $(x_0, x_1,\ldots,x_n)$ для всех $t\in[t_0,t_1]$ и непрерывна по совокупности $(t,x_0,x_1,\ldots,x_n)$ на $[t_0,t_1]\times R^1\times R^1\times \quad \times R^1 \quad [t_0,t_1]\times R^{n+1}$. Для функции $x_i(t)$, $i=0,1,\ldots,n-1$, предполагаем

$$(24)\qquad x_i\in B^{n-1-i}[t_0,t_1],\ x_n\in L^1[t_0,t_1],\ x_i(t)=\frac{d^i}{dt^i}x_0(t),\ i=1,2,\ldots,n.$$

Задача, которую мы будем рассматривать, есть так называемая задача со свободными концами, т. е.

$$x_i(t_0)\in R^1,\quad x_i(t_1)=R^1,\quad i=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Для решения задачи (23)—(24) мы будем пользоваться двойственными методами, коротко изложенными в пунктах 1 и 2. Мы заменим задачу (со свободными концами) о нижней грани функционала (23) при условиях (24) задачей с фиксированными концами и нулевыми граничными условиями. (Кроме того в двойственной задаче минимум достигается на некоторой кривой $y_0\in B^{n-1}[t_0,t_1]$.)

Итак, при верхних ограничениях f имеет место следующая

Теорема.

$$\inf_{x\in B^{n-1}}\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt \tag{25}$$
$$+\min_{y\in B_0^{n-1}}\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \ldots, y(t))dt \geqq 0,$$

где под $B_0^{n-1}[t_0, t_1]$ мы понимаем множество тех $y\in B^{n-1}[t_0, t_1]$, для которых $y^{(i)}(t_0)=y^{(i)}(t_1)=0$, $i=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Доказательство. Двойственный к функционалу (23) имеет вид

$$F^*(y_0, y_1, \ldots, y_n)=F^*(a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n-1}, y_0, a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n-2}, y_1, \ldots, y_n) \tag{26}$$
$$=\sup_{x_0, x_1, \ldots, x_n}\Bigg[\sum_{i=0}^{n-1} a_{0i}x_0^{(i)}(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} x_0^{(n)}(t)\, y_0(t)dt+\sum_{i=0}^{n-2} a_{1i}x_1^{(i)}(t_0)$$
$$+\int_{t_0}^{t_1} x_1^{(n-1)}(t)\, y_1(t)dt+\ldots+a_{n-10}x_{n-1}(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} x_{n-1}(t)\, y_{n-1}(t)dt$$
$$+\int_{t_0}^{t_1} x_n(t)\, y_n(t)dt-\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))dt\Bigg].$$

Если мы зафиксируем все x_i, $i=0, 1, 2, \ldots, n$, кроме x_j, проинтегрируем функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} x_j^{(n-j)}(t)\, y_j(t)dt$$

$n-j$ раз по частям и используем доказанную выше лемму, то меняя последовательно j от 0 до $n-1$ для функционала F^*, получаем

$$F^*(y_0, y_1, \ldots, y_n)=\sup_{x_0, x_1, \ldots, x_n}\int_{t_0}^{t_1}[(-1)^n x_0(t)\, y_0^{(n)}(t) \tag{27}$$
$$+(-1)^{n-1}x_1(t)\, y_1^{(n-1)}(t)+\ldots+x_n(t)\, y_n(t)-f(t, x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))]dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\sup_{x_0, x_1, \ldots, x_n}[(-1)^n x_0 y_0^{(n)}(t)+(-1)^{n-1}x_1 y_1^{(n-1)}(t)+\ldots+x_n y_n(t)$$
$$-f(t, x_0, x_1, \ldots, x_n)]dt=\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, (-1)^n y_0^{(n)}(t), (-1)^{n-1} y_1^{(n-1)}(t), \ldots, y_n(t))dt.$$

Справедливость равенства

$$\sup \int = \int \sup$$

легко получить из доказанного в [3].

Из (27) следует неравенство Юнга

$$(28)\qquad \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))dt$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1} f^*(t, (-1)^n y_0^{(n)}(t), (-1)^{n-1} y_1^{(n-1)}(t), \quad , y_n(t))\, dt \geqq \int\limits_{t_0}^{t_1} [(-1)^n x_0(t) y_0^{(n)}(t)$$

$$+(-1)^{n-1} x_1(t) y_1^{(n-1)}(t) + \ldots + x_n(t) y_n(t)]dt.$$

Теперь мы докажем, что $y_j^{(n\ j-1)}(t_0)\quad 0$, $j=0, 1, 2, \ldots, n-1$ (то, что $y_j^{(n-j-1)}(t_1)\quad 0$, получено при доказательстве леммы). Доказательство мы проведем от противного. Допустим, что $y_j^{(n-j-1)}(t_0)=k>0$ для некоторого j. Возьмем $x_i(t)=0$, $i=0, 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, и

$$x_j(t)=\begin{cases} \lambda N & \text{при} \quad t - t_0, \\ 0 & \text{при} \quad t \quad t_0+\varepsilon, \end{cases}$$

где $\lambda=(-1)^{n-j-1}$, $\varepsilon>0$ и $N>0$ — произвольное фиксированное число. Предположим, что $f(t, 0, 0, \ldots, 0]=0$ для всех $t\in[t_0, t_1]$. Обозначим

$$M=\max_{\substack{x_j\quad N\\ t\quad t\quad t_0}} f(t, 0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0)$$

Тогда (27) принимает вид

$$F^*=\int\limits_{t_0}^{t_1} f^*(t, (-1)^n y_0^{(n)}(t), (-1)^{n-1} y_1^{(n-1)}(t), \ldots, y_n(t))dt$$

$$\geqq \int\limits_{t_0}^{t_0+\varepsilon} (-1)^{n-j} x_j(t) y_j^{(n-j)}(t)dt - \int\limits_{t_0}^{t_0+\varepsilon} f(t, 0, \ldots, 0, x_j(t), 0, \ldots, 0)dt$$

$$\geqq |(-1)^{n-j} x_j(t) y_j^{(n-j-1)}(t) \Big|_{t_0}^{t_0+\varepsilon} - M\varepsilon + (-1)^{n-j+1} \int\limits_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \dot{x}_j(t) y_j^{(n-j-1)}(t)dt$$

$$=(-1)^{n-j+1}\lambda Nk + (-1)^{n-j+1} \int\limits_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \dot{x}_j(t) y_j^{(n-j-1)}(t)dt - M\varepsilon$$

$$\geqq Nk + N \frac{y_j^{(n-j-2)}(t_0+\varepsilon) - y_j^{(n-j-2)}(t_0)}{\varepsilon} - M\varepsilon$$

$$=N[k + y_j^{(n-j-1)}(t_0+\theta\varepsilon)] - M\varepsilon, \qquad 0 \leqq \theta \leqq 1.$$

Поскольку неравенство

$$F^* \geq N[k + y_j^{(n-j-1)}(t_0+\theta\varepsilon)] - M\varepsilon$$

выполнено для любого $\varepsilon > 0$, то отсюда следует

$$F^* \geq 2Nk. \tag{29}$$

Но, ввиду того, что $N>0$ — произвольно и $k \neq 0$, то неравенство (29) нарушится при достаточно больших N, так как $k>0$, а F^* — фиксированное число.

Итак, мы получили, что $y_j^{(n-j-1)}(t_0)=0$.

Вернемся к неравенству (28). Проинтегрируем правую часть несколько раз по частям:

$$\int_{t_0}^{t_1} [(-1)^n x_0(t) y_0^{(n)}(t) + (-1)^{n-1} x_1(t) y_1^{(n-1)}(t) + \ldots + x_n(t) y_n(t)] dt$$

$$= |(-1)^n [x_0(t) y_0^{(n-1)}(t) - \dot{x}_0(t) y_0^{(n-2)}(t) + \ldots + (-1)^{n-1} x_0^{(n-1)}(t) y_0(t)]$$

$$+ (-1)^{n-1}[x_1(t) y_1^{(n-2)}(t) - \dot{x}_1(t) y_1^{(n-3)}(t) + \ldots + (-1)^{n-2} x_1^{(n-2)}(t) y_1(t)]$$

$$+ x_{n-2}(t)\dot{y}_{n-2}(t) - \dot{x}_{n-2}(t) y_{n-2}(t) - x_{n-1}(t) y_{n-1}(t) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$+ (-1)^n \int_{t_0}^{t_1} [x_0^{(n)}(t) y_0(t) - x_1^{(n-1)}(t) y_1(t) + \ldots + (-1)^n x_n(t) y_n(t)] dt.$$

Далее, в зависимости от n возможны два случая:

а) n — нечетное число. Учитывая доказанное в лемме, что $y_i^{(j)}(t_1) = 0$, $i - 0, 1, 2, \ldots, n$, $j=0, 1, \ldots, n-1$, и то, что $y_j^{(n-j-1)}(t_0) - 0$, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} [(-1)^n x_0(t) y_0^{(n)}(t) + (-1)^{n-1} x_1(t) y_1^{(n-1)}(t) + \qquad + x_n(t) y_n(t)] dt \tag{30}$$

$$= (-1)^n [\dot{x}_0(t_0) y_0^{(n-2)}(t_0) - \ddot{x}_0(t_0) y_0^{(n-3)}(t_0) + \qquad + (-1)^{n-2} x_0^{(n-1)}(t_0) y_0(t_0)]$$

$$+ (-1)^{n-1}[\dot{x}_1(t_0) y_1^{(n-3)}(t_0) - x_1(t_0) y_1^{(n-4)}(t_0) + \qquad + (-1)^{n-3} x_1^{(n-2)}(t_0) y_1(t_0)]$$

$$+ \dot{x}_{n-2}(t_0) y_{n-2}(t_0) + (-1)^n \int_{t_0}^{t_1} [x_0^{(n)}(t) y_0(t) - \ldots + (-1)^n x_n(t) y_n(t)] dt.$$

Если $y_1(t) = -y_0(t)$, $y_2(t) = -y_1(t), \ldots$, $y_{n-1}(t) = -y_n(t)$, т. е. $y_i(t) = (-1)^i y_0(t)$, то внеинтегральное слагаемое равно нулю. Действительно, из того, что $y_{n-2}(t) = -y_{n-1}(t)$, следует $y_{n-2}(t_0) = 0$, $\dot{y}_{n-3}(t_0) = 0$. Из того, что

$y_{n-3}(t) \; -y_{n-2}(t)$, следует $y_{n-3}(t_0) \; 0$, $\dot{y}_{n-4}(t_0)=0$ и т. д. Наконец из того, что $y_0(t) \; -y_1(t)= \quad =(-1)^n y_n(t)$, следует, что $y_j^{(i)}(t_0)=0$, $i=0, 1, 2, \ldots, n-1$, $j \; 0, 1, 2, \ldots, n$.

Если $x_i(t) \; \frac{d^i}{dt} x_0(t)$, $i \; 1, 2, \ldots, n$, то и подынтегральное слагаемое равно нулю, поскольку оно имеет вид

$$x^{(n)}(t)[y(t)-y(t)+y(t)- \ldots -y(t)],$$

где в квадратных скобках число слагаемых четно (оно равно $n+1$) и знаки меняются альтернативно. Неравенство (28) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt + \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \ldots, y(t))dt \geq 0. \tag{31}$$

Ввиду того, что функционал

$$F(x)=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt$$

является N-функцией, согласно определения пункта 1 (здесь множество X совпадает со всем пространством $B^{n-1}[t_0, t_1]$, поскольку концы $x^{(i)}(t_0)$ и $x^{(i)}(t_1)$, $i \; 0, 1, \ldots, n-1$ свободны), то справедливо

$$\inf_{x \in B^{n-1}} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt \tag{32}$$

$$+ \min_{y \in B_0^{n-1}} \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \ldots, y(t))dt \geq 0.^*$$

Рассмотрим случай

б) n — четное число. Положив $y_i(t) \; (-1)^i y_0(t)$, $i \; 2, 3, \ldots, n$, $y_1(t)= -2y_0(t)$, получаем, что в (30) внеинтегральное слагаемое равно нулю, а если $x_i(t)=\frac{d^i}{dt^i} x_0(t)$, то и подынтегральное слагаемое равно нулю и, следовательно, справедливо

$$\inf_{x \in B^{n-1}} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt \tag{33}$$

$$+ \min_{y \in B_0^{n-1}} \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y^{(n)}(t), 2y^{(n-1)}(t), \ldots, y(t))dt \geq 0^*$$

---

* Равенство достигается, если $y_0(t)+y_1(t)+\ldots y_n(t)=0$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

(Напомним, что под $B_0^{n-1}[t_0, t_1]$ мы понимаем множество тех $y \in B^{n-1}[t_0, t_1]$, для которых $y^{(i)}(t_0) = y^{(i)}(t_1) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.)

4. При доказательстве некоторых утверждений в [2] использовались функции

$$\varphi(\xi) = \inf_x f(x, Ax + \xi) \quad \text{и} \quad \psi(\eta) = \inf_y f^*(-A^*y - \eta, y).$$

Там, например, доказано, что необходимым и достаточным условием для справедливости равенства (основная теорема двойственности)

$$\inf_x f(x, Ax) + \inf_y f^*(-A^*y, y) = 0 \tag{34}$$

является замкнутость функции $\varphi(\xi)$ (или $\psi(\eta)$) в нуле, что означает $\varphi(0) = \varphi^{**}(0)$ $(\psi(0) = \psi^{**}(0))$.

Для вариационных задач (в случае $n = 1$) функционал $\varphi(\xi)$ имеет вид

$$\varphi(\xi) = \inf_{x \in B^0} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t) + \xi(t))dt \tag{35}$$

(поскольку $x \in B^0[t_0, t_1]$, то $\dot{x} \in L^1[t_0, t_1]$ и, следовательно, мы можем предположить $\xi \in L^1[t_0, t_1]$).

Найдем двойственный к функционалу $\varphi(\xi)$:

$$\varphi^*(y) = \sup_{\xi \in L^1} \left[\int_{t_0}^{t_1} \xi(t) y(t) dt - \inf_{x \in B^0} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t) + \xi(t))dt \right.$$

$$= \sup_{\xi \in L^1,\, x \in B^0} \left[\int_{t_0}^{t_1} [\dot{x}(t) + \xi(t)] y(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t) y(t) dt \right.$$

$$\left. - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t) + \xi(t))dt \right].$$

Для того, чтобы мы могли проинтегрировать функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t) y(t) dt \tag{36}$$

по частям, функция $y(t)$ должна быть по меньшей мере абсолютно непрерывна. Но абсолютная непрерывность этой функции следует из того, что (36) является непрерывным линейным функционалом на B^0 при $a \neq 0$ (см. лемму). Из того, что $a = 0$, следует $y(t_0) = 0$, а $y(t_1) = 0$ следует также из доказательства леммы. Следовательно,

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t) y(t) dt = -\int_{t_0}^{t_1} x(t) \dot{y}(t) dt. \tag{37}$$

Используя (37) и обозначая $\dot{x}+\xi=x_1$, для функционала $\varphi^*(y)$ получаем

$$\varphi^*(y)=\sup_{x\in B^r,\ x_1\in L^1}\int_{t_0}^{t_1}[x(t)\dot{y}(t)+x_1(t)y(t)-f(t,x(t),x_1(t))]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sup_{x,x_1}[x\dot{y}(t)+x_1y(t)-f(t,x,x_1)]dt=\int_{t_0}^{t_1}f^*(t,\dot{y}(t),y(t))dt=F^*(y).$$

Итак, мы получили, что $\varphi^*(y)=F^*(y)$, где $F^*(y)$ — двойственный к функционалу

$$F(x)=\int_{t_0}^{t}f(t,x(t),\dot{x}(t))dt.$$

Если функционал $\varphi(\xi)$ замкнут в нуле, т. е. $\varphi(0)=\varphi^{**}(0)$, то из соотношения $\varphi(0)=\varphi^{**}(0)=-\inf\varphi^*(y)$ следует, что

$$\varphi(0)=\inf_{x\in B^r}\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t))dt=-\inf_{\substack{y\in B^0\\ y(t_0)=y(t_1)=0}}\int_{t_0}^{t_1}f^*(t,\dot{y}(t)y(t))dt.$$

Но, как легко видно, замкнутость, даже субдифференцируемость функционала $\varphi(\xi)$ в нуле (т. е. $\varphi(0)=-\min\varphi^*(y)$) следует из непрерывности выпуклой функции f по $(t,x,\dot{x})$ на $[t_0,t_1]\times R^1\times R^1]$.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$F(x)=\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t),\ldots,x^{(n)}(t))dt,$$

$$x\in B^{n-1}[t_0,t_1],\quad x^{(i)}(t_0)\in R^1,\quad x^{(i)}(t_1)\in R^1,\quad i=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Здесь функционал φ будет иметь вид

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)=\inf_x\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t)+\xi_1(t),\ldots,x^{(n)}(t)+\xi_n(t))dt,$$

$$\xi_i\in B^{n-1-i}[t_0,t_1],\quad \xi_n\in L^1[t_0,t_1].$$

Для двойственного к φ функционала, применяя лемму, получаем

$$\varphi^*(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\sup_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}\left[\int_{t_0}^{t_1}(-1)^{n-1}\xi_1(t)y_1^{(n-1)}(t)dt\right.$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}(-1)^{n-2}\xi_2(t)y_2^{(n-2)}(t)dt+\ldots+\int_{t_0}^{t_1}\xi_n(t)y_n(t)dt$$

$$= \inf_x \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t) + \xi_1(t), \ldots, x^{(n)}(t) + \xi_n(t))dt \Bigg].$$

В зависимости от n здесь тоже возможны два случая:

а) n — нечетное. Прибавляя и вычитая

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} (-1)^{i-1} x^{(i)}(t) y_i^{(n-i)}(t)dt,$$

получаем

$$\varphi^*(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sup_{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n} \Bigg\{ \int_{t_0}^{t_1} [\dot{x}(t) + \xi_1(t)] y_1^{(n-1)}(t)dt$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} [\ddot{x}(t) + \xi_2(t)] y_2^{(n-2)}(t)dt + \ldots + \int_{t_0}^{t_1} [x^{(n)}(t) + \xi_n(t)] y_n(t)dt$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t) y_1^{(n-1)}(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} \ddot{x}(t) y_2^{(n-2)}(t)dt - \ldots - \int_{t_0}^{t_1} x^{(n)}(t) y_n(t)dt$$

$$- \inf_x \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t) + \xi_1(t), \ldots, x^{(n)}(t) + \xi_n(t))dt \Bigg\}.$$

Функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t) y_1^{(n-1)}(t)dt$$

является непрерывным линейным функционалом, заданным на $B^{n-1}[t_0, t_1]$ и проинтегрированным $n-2$ раз по частям. Но, согласно лемме $y_1^{(n-1)}(t)$ является абсолютно непрерывной функцией, т. е. мы можем проинтегрировать еще раз по частям:

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t) y_1^{(n-1)}(t)dt = - \int_{t_0}^{t} x(t) y_1^{(n)}(t)dt$$

(равенства $y_1^{(n-1)}(t_0) = y_1^{(n-1)}(t_1) = 0$ следуют из того, что мы рассматриваем задачу со свободными концами).

Обозначим $y_i(t) = (-1)^{i+1} y(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $x^{(i)}(t) + \xi_i(t) = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\varphi^*(y)=\sup_{x,x_1,\ldots,x_n}\left\{\int_{t_0}^{t_1}[x(t)y^{(n)}(t)+x_1(t)y^{(n-1)}(t)+\ldots+x_n(t)y(t)\right.$$

$$-f(t,x(t),x_1(t),\ldots,x_n(t))]dt$$

$$\left.-\int_{t_0}^{t_1}[\ddot{x}(t)y^{(n-2)}(t)+\dddot{x}(t)y^{(n-3)}(t)+\ldots+x^{(n)}(t)y(t)]dt\right\}.$$

В выражении

$$\int_{t_0}^{t_1}[x(t)y^{(n-2)}(t)+\ldots+x^{(n)}(t)y(t)]dt$$

четное число слагаемых (их $n-1$). Выше было доказано, что такое выражение, при условиях $x^{(i)}(t_0)\in R^1$, $x^{(i)}(t_1)\in R^1$, $i=0,1,\ldots,n-1$, равно нулю. Это дает

$$\varphi^*(y)=\int_{t_0}^{t}\sup_{x,x_1,\ldots,x_n}[xy^{(n)}(t)+x_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+x_ny(t)$$

$$-f(t,x,x_1,\ldots,x_n)]dt=\int_{t_0}^{t}f^*(t,y^{(n)}(t),y^{(n-1)}(t),\ldots,y(t))dt.$$

Положим $\xi_i(t)=\xi^{(i-1)}(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, тогда мы получаем

$$f(\xi)=\inf_x\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t)+\xi(t),\ldots,x^{(n)}(t)+\xi^{(n-1)}(t))dt.$$

$$\varphi^*(y)\quad\int_{t_0}^{t_1}f^*(t,y^{(n)}(t),y^{(n-1)}(t),\ldots,y(t))dt.$$

Если функционал $\varphi(\xi)$ замкнут в нуле, то $\varphi(0)\geqq-\inf\varphi^*(y)$, а если, кроме того, $\varphi(\xi)$ и субдифференцируем в нуле, т. е. $\varphi(0)\geqq-\min\varphi^*(y)$, то мы получаем (32).

б) n — четное число. Положив $y_i(t)=(-1)^{i-1}y(t)$, $i=1,3,4,\ldots,n$, $y_2(t)=-2y(t)$, получаем после простых выкладок (при условии, что функционал $\varphi(\xi)$ замкнут и субдифференцируем в нуле) (33).

Интересным является вопрос об отыскании необходимых и достаточных условий замкнутости (и соответственно субдифференцируемости) функционала φ в нуле, но это не является предметом настоящей работы и мы его обсуждать не будем.

Отметим только то, что, как доказано в [2], необходимым и достаточным условием для замкнутости функции

$$\varphi(\xi)=\inf_x\tilde{f}(x,Ax+\xi)$$

является существование гиперплоскости L, отделяющей множества $\det \tilde{f}$ и $L_z(x_1, x_2)$, где

$$L_z(x_1, x_2) = \{x_1, x_2, z): x_2 = Ax_1, \ x_1 \in X, \ z \leq M - \varepsilon\}.$$

Здесь $M = \inf_x \tilde{f}(x, Ax)$, а $\varepsilon > 0$ — произвольно, что такое X, было сказано в пункте 1 при определении функции $\tilde{f}(x_1, x_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки, Н. Топологические векторные пространства. М., 1959.
2. Цветанов, М. М. Двойственность в экстремальных задачах. — Укр. матем. ж., 23, 1971, № 2, 201—217.
3. Цветанов, М. М. Двойственность в задачах вариационного исчисления и оптимального управления. — Изв. Мат. инст. БАН, 13, 1972, 277—318.

Поступила 21. XII. 1972 г.

ДВОЙНСТВЕНОСТ ВЪВ ВАРИАЦИОННИ ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДНИ КРАИЩА

Митко Цветанов

(Резюме)

Разглежда се задачата за намиране инфимума на функционала

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt$$

за $x \in B^{n-1}[t_0, t_1]$ — пространство от функции с абсолютно непрекъсната $(n-1)$-ва производна. Прилагайки двойнствени методи, подробно описани в [2] и [3], получаваме двойнствения функционал

$$J(y) = \int_{t_0}^{t} f^*(t, y^{(n)}(t), ay^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \ldots, y(t))dt,$$

където $a = \frac{(-1)^n + 3}{2}$.

Доказва се, че

$$\inf_{x \in B^{n-1}} I(x) + \min_{y \in B_0^{n-1}} J(y) \geq 0,$$

където с B_0^{n-1} означаваме множеството на тези функции $y \in B^{n-1}[t_0, t_1]$, за които $y^{(i)}(t_0) = y^{(i)}(t_1) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. При това, както се вижда от горното равенство, минимум в двойнствения функционал се достига за някакво $y_0 \in B_0^{n-1}$.

DUALITY IN VARIATION PROBLEMS WITH FREE ENDPOINTS

Mitko Cvetanov

(Summary)

The problem of finding the greatest lower bound of the functional

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt$$

for $x \in B^{n-1}[t_0, t_1]$ (the space of functions with absolutely continuous derivative of $(n-1)^{th}$ order) is considered. Applying duality methods, described in detail in [2] and [3], we obtain the dual functional

$$J(y) = \int_{t_0}^{t} f^*(t, y^{(n)}(t), ay^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \ldots, y(t))dt,$$

where

$$a = \frac{(-1)^n + 3}{2}$$

It is proved that

$$\inf_{x \in B^{n-1}} I(x) + \min_{y \in B_0^{n-1}} J(y) = 0,$$

where by B_0^{n-1} we denote the set of the functions $y \in B^{n-1}[t_0, t_1]$ for which $y^{(i)}(t_0) = y^{(i)}(t_1) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. As it is seen from the above equality, minimum of the dual functional is reached for some $y_0 \in B_0^{n-1}$.