БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

ПОРЯДКИ ВТОРОГО РОДА ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

Калчо Ж. Тодоров

§ 1. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. В современной теории алгебры часто приходится рассматривать такие множества, где одновременно определены ассоциативное действие и порядок. В последнее время вместе с исследованиями упорядоченных алгебраических систем (см. например [11]) усиливается интерес и к алгебраическим системам, порядок которых не является стабильным.

В качестве примеров полугрупп с порядком, не являющихся упорядоченными, можно назвать мультипликативную полугруппу всех целых чисел и мультипликативную полугруппу всех действительных чисел, обе упорядоченные их естественным порядком (см. [9], где указаны и другие часто встречающиеся примеры).

Начальные исследования полугрупп с нестабильным порядком приведены в работе Dov Tamari [13]. Более сильные результаты, однако, содержат работы Конторовича и Кокорина [4], Clifford [12], Keimel Klans [14]. Необходимость таких исследований отмечена и Фуксом в его книге ([11], 225).

1.2. Пусть $\leq$ — порядок на абелевой полугруппе A (здесь и всюду ниже имеется в виду частичный порядок) и пусть

$$C=\{x\in A:(a,b\in A)(a\leq b)\Rightarrow(xa\leq xb)\},$$

$$I=\{x\in A:(a,b\in A)(a\leq b)\Rightarrow(xb\leq xa)\}.$$

Полугруппу $A(\leq)$ назовем упорядоченной полугруппой второго рода, если $A=C\cup I$ и $I\neq\emptyset$, а сам порядок назовем порядком второго рода.

1.3. Цель настоящей работы описать все порядки второго рода* циклических полугрупп.

Аналогичные исследования упорядоченных полугрупп проводились, например, авторами работ [1] и [3].

Все необходимые сведения по теории полугрупп содержатся в книгах [4], [5], по теории упорядоченных алгебраических систем — в книге [11].

1.4. Как известно [5], в любой конечной циклической полугруппе $A=\langle a\rangle$ выполняется тождество $a^{r+m}=a^{r}$, где r называют индексом, а

* Ниже, говоря о числе порядков на данной полугруппе, мы будем иметь ввиду порядки, которые попарно не двойственны.

m — периодом элемента a (полугруппы A). Подмножество $K_a=\{a^r, a^{r+1}, \ldots, a^{r+m-1}\}$ является ее максимальной (циклической) подгруппой. Пару чисел (r, m) называют типом полугруппы.

Каждый порядок на полугруппе A является продолжением порядка, индуцированного на K_a. Поэтому исследование порядков циклических полугрупп требует предварительного исследования порядков циклических групп.

1.5. По определению, для множеств C, I имеем

(*) $CC \subset C, \quad IC \subset I, \quad II \subset C.$

Таким образом, подмножество C является нормальной подполугруппой, а I — нормальным комплексом полугруппы $A=C\cup I$.

Из включений (*) следует, что если порядок второго рода циклической полугруппы A существует, тогда подмножества C, I состоят всегда из элементов, являющихся соответственно четными и нечетными степенями образующего элемента a. Тогда $I\cap C=\varnothing$ и в любой циклической группе $K_a=\langle a\rangle$ нечетного порядка n ее единица e, с одной стороны, принадлежит C, а с другой стороны, $e=a^n\in I$. Следовательно, такие группы не могут быть упорядоченными полугруппами второго рода.

Ниже, для простоты, в начале сформулируем основные утверждения для бесконечных полугрупп, после чего укажем, для каких из конечных полугрупп они остаются верными.

1.6. Пусть $A(\leqq)$ упорядоченная циклическая полугруппа (у. ц. п.) второго рода и $a^{k_i}<a^{k_i+t_i}$ $(i=1, 2, \ldots)$ — некоторые соотношения предшествования. Согласно [10], следствиями этих соотношений являются следующие соотношения:

$$a^{k_i+2s}<a^{k_i+t_i+2s}, \quad a^{k_i+t_i+2s+1}<a^{k_i+2s+1*} \quad (s=0, 1, \ldots)$$

Если порядок полугруппы состоит только из таких соотношений предшествования, будем говорить, что совокупность соотношений предшествования $a^{k_i}<a^{k_i+t_i}$ $(i=1, 2, \ldots)$ порождает его.

Понятие „порождающая совокупность соотношенийи предшествования" и примыкающие к ней понятия для упорядоченных полугрупп определены впервые Е. С. Ляпиным [7], а для у. п. второго рода модифицированы автором в работе [10].

Порядки второго рода циклических полугрупп удобно изучать с помощью порождающих их совокупностей соотношений предшествования.

1.7. При любом порядке второго рода бесконечной циклической полугруппы $A=\langle a\rangle$ одновременно не имеют место

а) $a^{k_1}<a^{k_1+2t_1}$ и $a^{k_2+2t_2}<a^{k_2}$

или

б) $a^{k_1}<a^{k_1+2s_1+1}$ и $a^{k_2+2s_2+1}<a^{k_2}$,

где $k_1-k_2\equiv 0 \pmod 2$.

---

* Здесь, как и всюду ниже в случае конечной циклической полугруппы, под a^s подразумеваем как элемент a^s, если $0<s\leqq r+m$, так (не оговаривая это) и элемент $a^{\bar{s}}$, где $\bar{s}\equiv s \pmod m$, если $r+m\leqq s$.

Доказательство. а). Предположим, что при некотором порядке $<$ одновременно имеем $a^{k_1}<a^{k_1+2t_1}$ и $a^{k_2+2t_2}<a^{k_2}$. Тогда следующие соотношения предшествования: $a^{k_1k_2}<a^{k_1k_2+2t_1}$ и $a^{k_1k_2+2t_2}<a^{k_1k_2}$ $(a^{(k_1-1)k_2}, a^{(k_2-1)k_1} \in C)$ являются следствиями этих соотношений. Соотношения предшествования цепочки

$$a^{k_1k_2}<a^{k_1k_2+2t_1}<a^{k_1k_2+4t_1}< \cdots <a^{k_1k_2+2t_1t_2-2t_1}<a^{k_1k_2+2t_1t_2}$$

являются следствиями соотношения предшествования $a^{k_1k_2}<a^{k_1k_2+2t_1}$, а соотношения цепочки

$$a^{k_1k_2}>a^{k_1k_2+2t_2}>a^{k_1k_2+4t_2}> \cdots >a^{k_1k_2+2t_1t_2-2t_2}>a^{k_1k_2+2t_1t_2}$$

соотношения $a^{k_1k_2+2t_2}<a^{k_1k_2}$.

Следствием этих цепочек является соотношение $a^{k_1k_2+2t_1t_2}<a^{k_1k_2+2t_1t_2}$. Полученное противоречие показывает справедливость утверждения леммы.

Аналогичным образом доказывается и случай б).

Доказательство леммы легко переносится и на случай конечных циклических полугрупп.

1.8. Напомним, что, по определению, подмножество S называют связной компонентой упорядоченного множества $A(\leq)$, если для любых $s_1, s_2 \in S$ существует конечная совокупность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов из S, таких, что x_{j-1} сравним с x_j $(j=2, \ldots, n)$ и $s_1=x_1$, $s_2=x_n$.

1.9. Пусть $a^k<a^{k+s}$ какое-нибудь соотношение предшествования бесконечной у. ц. п. второго рода $A\ (<)$. При $s\equiv 0 \pmod 2$ следствиями этого соотношения являются следующие соотношения:

$$a^t<a^{t+s}<a^{t+2s}< \cdots <a^{t+\tau s}< \cdots,$$

если $t-k\equiv 0 \pmod 2$, и

$$a^t>a^{t+s}>a^{t+2s}> \cdots >a^{t+\tau s}> \cdots,$$

если $t-k\not\equiv 0 \pmod 2$.

А при $s\not\equiv 0 \pmod 2$ — соотношения

$$a^t<a^{t+s}>a^{t+2s}< \cdots >a^{t+2ls}<a^{t+(2l+1)s}> \cdots, \tag{1}$$

если $t-k\equiv 0 \pmod 2$, и

$$a^t>a^{t+s}<a^{t+2s}> \cdots <a^{t+2ls}>a^{t+(2l+1)s}< \cdots, \tag{2}$$

если $t-k\not\equiv 0 \pmod 2$.

Следовательно, все элементы полугруппы A, степенные показатели которых не меньше k и принадлежат некоторому классу вычетов по $\bmod s$, образуют связную компоненту. Если $s\equiv 0 \pmod 2$, то каждая компонента линейно упорядочена, любые две из них о-изоморфны, если степенные показатели их элементов имеют одинаковую четность, и о-антиизоморфны в противном случае.

1.10. Каждому естественному числу m соответствуют классы вычетов $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$ по $\bmod m$. (Здесь и ниже индекс i символа C_i означает остаток деления степенных показателей элементов полугруппы A на m. Допуская вольность, иногда мы будем говорить, что эти элементы составляют класс вычетов по $\bmod m$.) Существует порядок второго рода бесконечной циклической полугруппы, скажем, порожденный соотношением $a<a^{m+1}$, при котором каждый класс вычетов C_i является связной компонентой, линейно упорядоченной при $m\equiv 0 \pmod 2$, упорядоченной соотношениями

предшествования типа (1) или (2) в противном случае. Два класса вычетов будут о-изоморфными, если степенные показатели их элементов имеют одинаковую четность, и о-антиизоморфными в противном случае.

1.11. Лемма. Каждая из совокупностей соотношений предшествования

а) $a^{k_i} < a^{k_i+2s_i}$;

б) $a^{k_i} < a^{k_i+2s_i+1}$;

в) $a^{k_i} < a^{k_i+2s_i}$, $a^{k_j} < a^{k_j+2s_j+1}$;

г) $a^{k_i} < a^{k_i+2s_i}$, $a^{k_j+2s_j+1} < a^{k_j}$ $(i, j = 1, \dots)$

при $k_{i_1} - k_{i_2} \equiv 0 \pmod 2$ порождает порядок второго рода бесконечной циклической полугруппы $A = C \cup I$.

Доказательство. Если в какой-нибудь из указанных совокупностей а) — г) $k_{i_1} - k_{i_2} \not\equiv 0 \pmod 2$ для некоторых k_{i_1}, k_{i_2}, как и при доказательстве леммы 1.7, пришли бы к противоречию.

а) Пусть в циклической полугруппе $A = C \cup I$ задана совокупность соотношений предшествования $a^{k_i} < a^{k_i+2s_i}$ $(i = 1, \dots, n)$. Тогда для каждого $a^t : t - k_i \equiv 0 \pmod 2$ $(a^{t-k_i} \in C,\ i = 1, \dots, n)$ будет верно

(3) $$a^t < a^{t+\tau_1} < \dots < a^{t+\tau_1+\dots+\tau_s},$$

где $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s \in \{2s_1, 2s_2, \dots, 2s_n\}$, а для каждого $a^t : t - k_i \not\equiv 0 \pmod 2$ $(a^{t-k_i} \in I,\ i = 1, \dots, n)$

(3′) $$a^t > a^{t+\tau_1} > \dots > a^{t+\tau_1+\dots+\tau_s}.$$

Цепочки (3), (3′) показывают, что связная компонента, содержащая элемент a^t, содержит и любой элемент a^{t+l}, где l — произвольная линейная комбинация чисел $2s_1, \dots, 2s_n$ и что любое подмножество элементов из A, сравнимых по некоторым из $\mathrm{mod}\, 2s_i$ $(i = 1, \dots, n)$, линейно упорядочено.

Если $d = (2s_1, \dots, 2s_n)$, тогда классы вычетов C_i, C_j по $\mathrm{mod}\, d$ о-изоморфны в случае $i \equiv j \pmod 2$ и о-антиизоморфны в противном случае. Элементы множества C несравнимы с элементами множества I.

б) Аналогично случаю а), для каждого $a^t : t - k_i \equiv 0 \pmod 2$ $(i = 1, \dots, n)$ имеем $a^{t-k_i} \in C$, $a^{t-k_i-2s_i-1} \in I$

(4) $$\dots < a^{t-\tau_1} > a^t < a^{t+\tau_1} > a^{t+\tau_1+\tau_2} < \dots$$

Два элемента a^{t_1}, a^{t_2} являются сравнимыми (нетривиально) только в случае, когда $|t_1 - t_2| \in \{2s_1+1, \dots, 2s_n+1\}$. Элемент a^t является минимальным, если $t - k_i \equiv 0 \pmod 2$ и максимальным в противном случае.

Каждая связная компонента, содержащая элемент a^t, содержит и любой элемент a^{t+l}, где l — линейная комбинация чисел $2s_1+1, \dots, 2s_n+1$. Если $d = (2s_1+1, \dots, 2s_n+1)$, тогда число связных компонент равно d. Классы вычетов C_i, C_j по $\mathrm{mod}\, d$ о-изоморфны в случае, когда $i \equiv j$

(mod 2), и о-антиизоморфными в противном случае. Элементы множества C, I несравнимы между собой.

Случаи в) и г) сводятся к случаям а) и б). К сказанному для случая а) нужно прибавить еще то, что каждый элемент a^s из C будет сравнимым с теми элементами a^t из I, для которых $s-t \in \{2s_1+1, \ldots, 2s_n+1\}$.

§ 2. ПОРЯДКИ ВТОРОГО РОДА ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

2.1. Справедливость лемм 1.7 и 1.11 для любой циклической группы очевидна. Более того, в циклической группе A a соотношению предшествования $a^k < a^l$ $(l > k)$ соответствует или соотношение $e < a^{l-k}$, если $a^k \in C$, или соотношение $a^{l-k} < e$ в противном случае.

Обратно, для каждого $a^k \in C$ соотношение предшествования $a^k < a^l$ является следствием соотношения $e < a^{l-k}$, а для $a^k \in I$ — соотношения $a^{l-k} < e$. Таким образом, порядки, порожденные соотношениями $a^k < a^l$ и $e < a^{l-k}$ при $a^k \in C$, или $a^{l-k} < e$ при $a^k \in I$, совпадают. Следовательно, совокупности α) $e < a^{2s_i}$; β) $e < a^{2s_i+1}$ γ) $e < a^{2s_i}$, $e < a^{2s_j+1}$; δ) $e < a^{2s_i}$, $a^{2s_j+1} < e$ $(i, j = 1, \ldots)$ и им эквивалентыми порождают порядки второго рода бесконечной циклической группы $A = C \cup I$.

2.2. Как показано автором в работе [9] и согласно п. 1.5, число порядков второго рода любой бесконечной циклической группы, подгруппа C которой нетривиально упорядочена, равно числу подполугрупп, содержащихся в C, т. е. порожденных некоторой (положительной) степенью порождающего элемента.

Не во всякой циклической группе конечного порядка существуют порядки второго рода, при которых два элемента множества C (отсюда и множества I) были бы сравнимые, иначе подгруппа C являлась бы упорядоченной группой [1]. Следовательно, положительный конус второго рода [9] конечной циклической группы состоит только из ее единицы e.

2.3. Результаты пп. 1.5 1.7, 1.11, 2.1—2.2 можно сформулировать в следующей теореме:

Теорема. В циклической группе порядка $n = 2l + 1$ порядки второго рода не существуют.

В любой циклической группе порядка $n = 2l$ все порядки второго рода порождаются совокупностями соотношений предшествования, указанными в п. 2.1 β). Если d $(n, 2s_1+1, \ldots, 2s_2+1)$, то каждый класс вычетов по mod d является связной компонентой. Связные компоненты C_i, C_j (см. п. 1.10) являются о-изоморфными, если i j (mod 2), и о-антиизоморфными в противном случае. Порядки, порожденные соотношениями предшествования $e <_1 a^{2s_1+1}$, $e <_2 a^{2s_2+1}$, где $(2s_1+1)+(2s_2+1) \equiv 0 \pmod{n}$, являются о-изоморфными.

2.4. Лемма 1.7 и пп. 1.10—1.11, 2.1—2.2 приводят к следующей теореме для бесконечных циклических групп.

Теорема. В бесконечной циклической группе A порядки второго рода порождаются совокупностями соотношений предшествования, указанными в п. 2.1 α) — δ), или им эквивалентными совокупностями* и только ими.

---

* Определения согласно [2].

Каждому разбиению множества естественных чисел на классы вычетов по некоторому из них m соответствует порядок второго рода, при котором каждый класс вычетов $\mathrm{mod}\, m$ является связной компонентой. Связные компоненты C_i, C_j являются о-изоморфными, если они состоят из элементов, степенные показатели которых имеют одинаковые остатки по $\mathrm{mod}\, m$, и о-антиизоморфными в противном случае.

Обратно, при каждом порядке второго рода бесконечной циклической группы связные компоненты состоят из элементов, степенные показатели которых составляют классы вычетов по наибольшему общему делителю чисел $s_1, s_2, \ldots, s_r$ (см. п. 2.1).

Среди элементов подгруппы C будут нетривиально сравнимые тогда и только тогда, когда совокупности соотношений предшествования, указанные в п. 2.1 α), γ), δ), непусты. Среди элементов совокупности C, с одной стороны, и I, с другой стороны, будут нетривиально сравнимые тогда и только тогда, когда совокупности соотношений предшествования, указанные в п. 2.1 β), δ), непусты.

2.5. Следствие. Порядок второго рода совокупностей C и I будет линейным тогда и только тогда, когда совокупность, порождающая порядок циклической группы $A=C\cup I$, содержит соотношение $e<a^2$.

Доказательство. Если совокупность, порождающая порядок циклической группы A, содержит соотношение $e<a^2$, то его следствиями будут соотношения предшествования цепи

$$\cdot<a^{-2l}<a^{-2l-2}<\quad\cdot<a^{-2}<e<a^2<\quad\cdot<a^{2l}<\cdot$$

и

$$\cdot<a^{2l+1}<a^{2l-1}<\quad\cdot<a<a^{-1}<\quad\cdot<a^{-(2l+1)}<$$

Обратно, если порядок подгруппы C линейный, тогда для элементов e, $a^2\in C$ будем иметь либо $e<a^2$, либо $a^2<e$ дуально.

2.6. Следствие. Порядок второго рода циклической группы $A=C\cup I$ будет линейным тогда и только тогда, когда его порождающая совокупность состоит из соотношения $e<a^2$ и для каждого элемента $c\in C$ и $i\in I$ либо $c<i$, либо $i<c$.

§. 3. ПОРЯДКИ ВТОРОГО РОДА ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

3.1. Пусть порядок второго рода $<_1$ полугруппы A порожден соотношением $a^{k_1}<_1 a^{k_1+s}$, а порядок $<_2$ — соотношением $a^{k_2}<_2 a^{k_2+s}$, при этом $k_1>k_2$ и $k_1-k_2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$. Так как соотношение предшествования $a^{k_1}<_1 a^{k_1+s}$, порождающее $<_1$, является следствием (как элемент $<_2$) соотношения предшествования $a^{k_2}<_2 a^{k_2+s}$, то каждое соотношение предшествования порядка $<_1$ принадлежит к порядку $<_2$. Без умаления общности, при рассмотрении порядка второго рода мы в большинстве случаев будем полагать, что он является максимальным, или, что то же самое, порождается соотношением предшествования $a<a^s$.

3.2. Очевидно, в конечной циклической полугруппе типа (r, m) для любого m (см. пп. 1.4 и 2.4) соотношение предшествования $a<a^{m+1}$ порождает порядок второго рода, при котором каждая связная компонента содержит лишь один элемент подгруппы K_a.

3.3. Согласно п. 2.3 в циклической полугруппе типа (r, m), где $m=2l+1$ $(l=1, 2, \ldots)$, не существует других порядков второго рода, кроме указанных в п. 3.2. Если $m=2l$ $(l=2, \ldots)$, совокупности соотношений предшествования

$$(^{**})\ a<a^{m+1} \text{ и } a<a^{2s_i+2} \quad (s_i \geqq 0,\ i=1, \ldots, r)$$

являются единственными порождающими совокупностями.

3.4. Отметим некоторые из характерных особенностей порядков второго рода циклических полугрупп A типов $(h, 2)$ и $(h, 1)$.

В конечной циклической полугруппе $A=\langle a\rangle$ типа (r, m) $(m=1, 2)$ порядки второго рода порождаются одной из совокупностей

а$_1$) $a<a^{1+2s_i}$;

б$_1$) $a<a^{2s_i+2}$

в$_1$) $a<a^{1+2s_i}$; $\quad a<a^{2+2s_j}$;

г$_1$) $a<a^{1+2s_i}$; $\quad a^{2s_j+2}<a \quad (i, j=1, \ldots)$.

В случае а$_1$) для определенности положим, что $s_1<s_2<\ldots<s_n$, тогда:

1) В полугруппах типа $(r, 2)$ порядок состоит из двух связных компонент. Элементы a^s, где $s \equiv 1 \pmod 2$, образуют связную компоненту с минимальными элементами $a, a^3, \ldots, a^{2s_i-1}$ и максимальным элементом $a^s \in K_a$ (см. п. 1.4), для которого $s \equiv 1 \pmod 2$, а элементы a^s, где $s \equiv 0 \pmod 2$ — другую связную компоненту с максимальными элементами $a^2, a^4, \ldots, a^{2s_i}$ и минимальным элементом $a^s \in K_a$, для которого $s \equiv 0 \pmod 2$.

2) Результаты пункта 1) легко перенести на случай полугрупп типа $(r, 1)$, склеивая элементы подгруппы K_a.

В случае б) порядки полугрупп типов $(r, 2)$, $(r, 1)$ состоят из одной связной компоненты с минимальными элементами те $a^s \in A$, где $s \equiv 1 \pmod 2$, и максимальными — те $a^s \in A$, где $s \equiv 0 \pmod 2$.

3.5. На основании пп. 3.1—3.4 сформулируем следующую теорему:

Теорема. В любой конечной полугруппе типа (r, m) существуют порядки второго рода. Порядки, порожденные соотношениями предшествования, указанные в п. 3.2, являются единственными в полугруппах, для которых $m=2l+1$ $(l=1, \ldots)$. В полугруппах типа $m=2l$ $(l=2, \ldots)$ порядки второго рода порождаются совокупностями, указанными в п. 1.11а) — 1.11 г). В полугруппах типа (r, m) $(m=1, 2)$ порядки второго рода порождаются совокупностями, указанными в п. 3.4.

3.6. Теорему п. 2.4 можно легко модифицировать и для случая бесконечных циклических полугрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габович, Е. Я. Эндоморфизмы некоторых упорядоченных полугрупп. — Лит. матем. сб., 3, 1963, № 2, 69—76.
2. Зыбина, Л. Д. Совокупности соотношений, определящие упорядоченность частичных эндоморфизмов. — Учен. зап. Ленингр. гос. пед. инст., **274**, 1965, 122—142.
3. Каргополов, М. И. и др. К теории упорядочиваемых групп. — Алгебра и логика, 4, 1965, № 6, 21—27.
4. Конторович, П. Г., А. И. Кокорин. Об одном типе частично упорядоченных групп. — Матем. зап. Уральск. унив., 3, 1962, № 3, 39—44.
5. Клиффорд, А., Г. Престон. Алгебраическая теория полугрупп. М., 1972.
6. Ляпин, Е. С. Полугруппы. М., 1960.
7. Ляпин, Е. С. Соотношения, определяющие упорядоченность в упорядоченных полугруппах. — Изв. АН СССР, сер. матем, **25**, 1961, 671—684.
8. Тодоров, К. Ж. Упорядоченные полугруппы и группы второго и третьего рода. — Год. Соф. унив., Мат. фак., **65**, 1970/71, 249—264.
9. Тодоров, К. Ж. Упорядоченные полугруппы второго и третьего рода. — Докл. БАН, 25, 1972, № 7, 873—875.
10. Тодоров, К. Ж. Соотношения, определяющие порядок в полугруппах с упорядоченностью. — Учен. зап. Ленингр. гос. пед. инст., **464**, 1971, № 2, 144—173.
11. Фукс, Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М., 1965.
12. Clifford, A. H. Partially ordered groups of the second and third kind. — Proc. Amer. Math. Soc., 17, 1966, 218—222.
13. Tamari, D. Groupoides reliés et demi-groupes ordonnés. — C. R. Acad. Sci., Paris, **228**, 1949, 1184—1186.
14. Klaus Keimel. Demi-groupes partiellement ordonnés des deuxième et troisième espèce. — Atti Acad. Lincei Rend. Cl. fis. mat. et natur., **44**, 1968, No 1, 21—32.

Поступила 25. XII. 1972 г.

НАРЕДБИ ОТ ВТОРИ РОД НА ЦИКЛИЧЕСКИТЕ ПОЛУГРУПИ

Калчо Тодоров

(Резюме)

Нека A да означава едновременно наредено множество и абелева полугрупа. Означаваме с C множеството от всички елементи на A, които при умножение съхраняват всички неравенства в A, а с I множеството от всички елементи на A, които при умножение обръщат всички неравенства в A. Ако $A=C\cup I$ и $I\neq 0$, полугрупата се нарича наредена от втори род, а самата наредба — наредба от втори род.

В работата се дава пълно описание на всички наредби от втори род на циклическите полугрупи, като изучаването им се свежда към изучаването на пораждащите ги съвкупности от неравенства (за дефинициите на съответните понятия вж. [7] и [8]).

Описани са съвкупностите от неравенства, които единствени могат да пораждат разглежданите наредби — т. 1.7 и 1.11, и е дадено пълно описание на наредбите от втори род на циклическите групи — т. 2.3 и 2.4, и на циклическите полугрупи — т. 3.5.

ORDERS OF SECOND KIND OF CYCLIC SEMIGROUPS

Kalčo Todorov

(Summary)

Let A denote both an ordered set and an Abelian semigroup. By C we denote the set of all the elements of A which at multiplication conserve all the inequalities in A, and by I — the set of all the elements of A which at multiplication invert all the inequalities in A. If $A = C \cup I$ and $I \neq 0$, the semigroup is called ordered of second kind and the order itself — an order of second kind.

Detaied description of all the orders of second kind of cyclic semigroups is given in the paper, the investigation of the orders being reduced to investigation of all the sets of inequalities generating them. (For the definitions of the corresponding terms see [7] and [8].)

The unique sets of inequalities that can generate the orders under consideration are described — 1.7 and 1.11; detailed description of the orders of second kind of cyclic groups (2.3 and 2.4) and cyclic semigroups (3.5) is given.