БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ, НЕПРЕРЫВНО ДЕЙСТВУЮЩИХ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Юрий Ф. Коробейник

§ 1. Вопросу о представлении линейного непрерывного (в каком-то смысле) оператора, действующего в пространстве H аналитических функций (из H в H) и перестановочного с операцией дифференцирования, посвящено довольно много работ.

Уже при рассмотрении простейшего векторного пространства, а именно множества S всех многочленов, в работах Боаса [1], Райчинова [2, 3] и Джоковича [4] было показано, что всякий линейный оператор L, действующий из S в S и перестановочный с операцией дифференцирования или сдвига аргумента, представляется в виде линейного дифференциального оператора бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$Ly=\sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{(k)}(z), \quad b_k=\frac{Lz^k}{k!}\bigg|_{z=0}. \tag{1.1}$$

В работах [5—9] такое же представление было найдено для операторов, действующих в других классах H аналитических функций. В настоящей работе рассматривается наиболее общая ситуация, когда оператор L действует из одного пространства H_1 аналитических функций в другое пространство H_2. Мы будем всюду в данной работе предполагать, что $H_i \subset \bar{A}_0$, где $\bar{A}_0$ — множество всех аналитических в начале координат функций. Кроме того, будет все время предполагаться, что пространства H_i, $i=1, 2$, инвариантны относительно дифференцирования (если $g(z) \in H_i$, то $g'(z) \in H_i$) и нормальны по Теплицу (если $f(z) \in H_i$ и $|h^{(k)}(0)| \leqq |f^{(k)}(0)|$, $k=0, 1, \ldots$, то $h(z) \in H_i$).

Положим для любого множества H из $\bar{A}_0$,

$$G_H=(\{c_n\}: c_n=y^{(n)}(0),\ n=0, 1, 2, \ldots;\quad y(z) \in H);$$

$$G_H=(\{d_n\}: \text{ ряд } \sum_{n=0}^{\infty} c_n d_n \text{ сходится для любой последовательности } \{c_n\} \text{ из } G_H).$$

Множество G_H всегда является векторным пространством и непусто (содержит все финитные последовательности).

Вначале мы исследуем некоторые классы операторов вида (1.1). Обозначим через $D(H)$ класс операторов вида

$$Ly = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z) \tag{1.2}$$

таких, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(0)$ сходится для всех y из H. Очевидно, что $L \in D(H)$ тогда и только тогда, когда $\{a_k\} \in \tilde{G}_H$.

Символом $D_1(H)$ обозначим подкласс $D(H)$, состоящий из тех операторов (1.1), для которых ряд (1.2) сходится равномерно внутри круга $|z| < \delta(y)$ для $\forall y \in H$.

Будем говорить, что на H (или G_H) определена сдвижка, если для $\forall X = \{x_k\} \in \tilde{G}_H$ и $\forall Y = \{y_k\} \in G_H$ ряды $w_s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{k+s}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, сходятся; последовательность $\{w_s\}$ будем обозначать символом $[Y; X]$. Легко убедиться в том, что сдвижка определена на H, тогда и (если H совершенно) только тогда, когда H инвариантно относительно дифференцирования. (При этом говорят, что множество H или G_H совершенно, если $G_H = \tilde{\tilde{G}}_H$).

Обозначим через m_{12} множество тех и только тех последовательностей $g = \{g_k\}$ из G_{H_1}, таких, что $[Y; g] \in G_{H_2}$ для $\forall Y \in G_{H_1}$. В дальнейшем ради краткости положим

$$G_{H_i} = G_i,\ \tilde{G}_{H_i} = \tilde{G}_i,\ i = 1, 2.$$

Множество m_{12} линейно и непусто (всегда содержит $O(0, 0, \ldots)$).

Если T — какое-либо множество операторов, действующих из H_1 в H_1, то символом T^2 обозначим подмножество тех из них, которые действуют из H_1 в H_2.

Лемма 1.1. Оператор L вида (1.2) из $D_1(H_1)$ принадлежит $D_1^2(H_1)$ тогда и только тогда, когда $\{a_k\} \in m_{12}$.

Доказательство. Если $y \in H_1$ и $|z| < \delta(y)$, то

$$Ly = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{m=k}^{\infty} \frac{y_m z^{m-k}}{(m-k)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s!} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y_{k+s}.$$

Очевидно, что $Ly \in H_2$ тогда и только тогда, когда $[Y; A] \in G_2$, где $Y = \{y_k\}$, $A = \{a_k\}$.

На множестве последовательностей конечных чисел введем операцию умножения (свёртки) по обычному правилу: если $C = \{c_k\}$ и $D = \{d_k\}$, то $(C \times D)_k = \sum_{s=0}^{k} c_s d_{k-s}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Множество последовательностей F называется нормальным, если из $\{d_k\} \in F$, $|c_k| \leq d_k$, $k = 0, 1, \ldots$, следует, что $\{c_k\}\in F$. Таким образом, множество H из $\bar{A}_0$ нормально тогда и только тогда множество последовательностей G_H нормально.

Лемма 1.2. Пусть B — нормальное подмножество m_{12}. Тогда, если $X\in B$, а $Y\in\tilde{G}_2$, то $X\times Y\in\tilde{G}_1$. Если еще $G_1\subset G_2$, а $X, Y\in B$, то $X\times Y\in m_{12}$.

Доказательство. Пусть $\{v_k\}$ — произвольная последовательность из G_1, $X\in B$, $Y\in G_2$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |v_k|\,|(X\times Y)_k| \le \sum_{k=0}^{\infty} |v_k| \sum_{s=0}^{k} |y_s|\,|x_{k-s}| = \sum_{s=0}^{\infty} |y_s|\, w_s < \infty,$$

где $w_s=\sum_{k=s}^{\infty} |x_{k-s}|\,|v_k|$, $\{w_s\}\in G_2$. Итак, ряд абсолютно сходится и $X\times Y\in\tilde{G}_1$.

Пусть теперь $X, Y\in B$, $C=X\times Y$, V — любой элемент G_1 и $D=[V; C]$. Имеем

$$D_l=\sum_{k=0}^{\infty} v_{k+l}\, c_k=\sum_{k=0}^{\infty} v_{k+l}\sum_{s=0}^{k} x_s\, y_{k-s}=\sum_{s=0}^{\infty} x_s\, r_{s+l},$$

где $r_m=\sum_{j=0}^{\infty} y_j\, v_{j+m}$, $m=0, 1, 2, \dots$, и $\{r_m\}\in G_2\subset G_1$. Так как $\{x_s\}\in\tilde{G}_1$, то $\sum_{s=0}^{\infty} x_s\, r_{s+l}$, $l=0, 1, 2, \dots$ и $D_l=\sum_{s=0}^{\infty} x_s\, r_{s+l}$, $l=0, 1, 2, \dots$, откуда $\{D_l\}\in\tilde{G}_2$. Итак, $[V; C]\in m_{12}$.

Справедливо и утверждение, в известной мере обратное лемме (1.2).

Лемма 1.3. Пусть G_2 совершенно, а B — нормальное множество последовательностей такое, что $X\times Y\in\tilde{G}_1$ для $\forall X\in B$ и $\forall Y\in\tilde{G}_2$. Тогда $B\subset m_{12}$.

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность, $V\{v_n\}$ из G_1 и образуем сдвижку $[V; X]$, где X — любой элемент из B. Нам надо показать, что все ряды $[V; X]_k=\sum_{m=0}^{\infty} v_{k+m}\, x_m$, $k=0, 1, \dots$, сходятся и что $[V; X]\in G_2$. Возьмем еще произвольную последовательность $Y\{y_k\}$ из $\tilde{G}_2$ и составим (пока формально) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k\,[V; X]_k=\sum_{k=0}^{\infty} y_k\sum_{s=0}^{\infty} v_{k+s}\, x_s. \tag{1.3}$$

Положим $\lambda_r=\sum_{k=0}^{r} y_k\, x_{r-k}$, $t_r=\sum_{k=0}^{r} |y_k|\,|x_{r-k}|$. По условию леммы $\{t_r\}\in\tilde{G}_1$, и, следовательно,

$$\sum_{r=0}^{\infty} |v_r|\, t_r=\sum_{k=0}^{\infty} |y_k| \sum_{s=0}^{\infty} |v_{k+s}|\,|x_s| < \infty.$$

Полагая, в частности, $Y=(1, 0, 0, \ldots)$, находим, что $\sum_{s=0}^{\infty} |v_s| |x_s| < \infty$ для $\forall V \in G_1$; отсюда $\{x_s\} \in \widetilde{G}_1$. Аналогично находим, что при любом $k \geqq 1$ $\sum_{s=0}^{\infty} |x_s| |v_{k+s}| < \infty$, и сдвижка $[V; X]$ определена. Более того, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} y_k [V; X]_k$ сходится абсолютно при $\forall Y \in \widetilde{G}_2$, откуда $[V; X] \in \widetilde{\widetilde{G}}_2 = G_2$.

Обозначим символом R_{12} подмножество m_{12}, состоящее из тех и только тех последовательностей $G=\{g_k\}$ таких, что $G=\{|g_k|\} \in m_{12}$. Очевидно, что R_{12} является максимальным нормальным подпространством m_{12}.

Лемма 1.4. Если $G_2 \subseteq G_1$, то R_{12} является коммутативным кольцом по отношению к операции умножения — свертки и обычной операции сложения последовательностей.

Доказательство. Пусть $X, Y \in R_{12}$, $C=X \times Y$, V — любой элемент G_1 и $F=[V; |C|]$. Как при доказательстве леммы 1.2, получим

$$F_l \leqq \sum_{k=0}^{\infty} v_{k+l} |c_k| \leqq \sum_{s=0}^{\infty} |x_s| \tau_{s+l} = [\tau; |X|]_l,$$

где $\tau\{\tau_m\} \subseteq G_2 \subseteq G_1$. Но $|X| \in m_{12}$ и потому $[\tau; |X|] \in G_2$. Тем более и $\{F_l\} \in G_2$ то-есть, $|C| \in m_{12}$.

Если $y(z)$ аналитична в круге $|z| < \varrho$, то, как обычно, положим $M(r, y) = \max\{|y(z)|: |z| = r\}$ при любом $r < \varrho$.

Теорема 1.1. Пусть $\sup_n |a_k^n| \leqq a_k$, $k=0, 1, 2, \ldots$, и $\{a_n\} \in m_{12}$.

Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^n| M(r, y^{(k)}) < \infty$ для $\forall y \in H_1$ и $\forall r < r(y)$.

Доказательство. Пусть $y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{k!} z^k \in H_1$.

Тогда $\widetilde{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y_k|}{k!} z^k \in H_1$, $\{a_k\} = \{|a_k|\} \in m_{12}$ и $\{w_s\} \in G_2$, где

$$w_s = \sum_{m=0}^{\infty} a_m |y_{s+m}|, \quad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Так как $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{w_s}{s!} z^s \in H_2 \subseteq A_0$, то $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{w_s}{s!} r^s < \infty$ для $r < \varrho(w)$. Для тех же r и $n \geqq 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^n| M(r, y^{(k)}) \leqq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{w_s}{s!} r^s < \infty.$$

Из леммы 1.1 и теоремы 1.1 вытекает

Следствие. Если $\{a_k\} \in R_{12}$, то $Ly = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z) \in D_1^2(H_1)$.

Обозначим символом Q множество операторов вида (1.2), где $\{a_k\} \in R_{12}$.

Теорема 1.2. Если $H_2 \subseteq H_1$, то Q является коммутативным кольцом (относительно сложения и умножения с суперпозиции) операторов:

$$(L_1 \times L_2)y = L_1(L_2 y) = L_2(L_1 y) \quad (L_2 \times L_1)y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{s=0}^{\infty} b_s y^{(k+s)}(z)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \sum_{s=0}^{\infty} a_s y^{(k+s)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} y^{(m)}(z) \sum_{s=0}^{m} b_s a_{m-s},$$

если $L_1 y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$, $L_2 y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{(k)}(z)$.

Доказательство. По лемме 1.4 $\gamma = A \times B \in R_{12}$, где $|A = \{ a_k \}$, $B = \{ b_k \}$. По теореме 1.1 для $\forall y \in H_1$, при $z < \delta(y)$:

$$\infty > \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l \quad y^{(l)}(z) \quad \sum_{l=0}^{\infty} y^{(l)}(z) \sum_{s=0}^{l} a_s \quad b_{l-s}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s \sum_{m=0}^{\infty} b_m \quad y^{(m+s)}(z)$$

Изменяя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{l=0}^{\infty} y^{(l)}(z) \sum_{s=0}^{l} a_s b_{l-s} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \sum_{m=0}^{\infty} b_m y^{(m+s)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sum_{s=0}^{\infty} a_s y^{(m+s)}(z),$$

или $L_1(L_2 y) \quad L_2(L_1 y) \quad \sum_{m=0}^{\infty} v_m y^{(m)}(z)$, где $V = A \times B \in R_{12}$.

§ 2. До сих пор H_i были векторными пространствами без топологии. Введем теперь понятие T-сходимости. Пусть $H \subset \bar{A}_0$. Назовем условно теплицевской (T-) окрестностью (нуля) множество V_C^{ε} функций $y \in H$ таких, что $\sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(0) c_k < \varepsilon$, где число $\varepsilon < 0$ и последовательность $C\{c_k\}$ из $\tilde{G}_H$ определяют данную T-окрестность. Хотя множество всех T-окрестностей ($C \in G_H$, $0 < \varepsilon < \infty$), вообще говоря, не обладает всеми свойствами топологических окрестностей (см., например, свойства № 1 — № 4 из [10]), тем не менее, как мы убедимся, они окажутся весьма полезными. Последовательность $y_n \in H$ назовем T-сходящейся к $y \in H$, если

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_k [y^{(k)}(0) - y_n^{(k)}(0)] = 0$$

для $\forall B = \{b_k\} \in \tilde{G}_H$.

Наконец, оператор Ly, действующий из H_1 в H_2, назовем T-непрерывным, если для любой T-окрестности V_A^{ε} в H_2 найдется T-окрестность W_B^{δ} в H_1 такая, что $Ly \in V_A^{\varepsilon}$ для $\forall y \in W_B^{\delta}$.

Теорема 2.1. Пусть $\{a_k\} \in R_{12}$ и $Ly = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$. Тогда L является T-непрерывным оператором из H_1 в H_2.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $\{b_k\} \in \widetilde{G}_2$,

$$V_B^\varepsilon = \left\{ y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} z^k \in H_2 : \left| \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(0) b_k \right| < \varepsilon \right\}.$$

Положим $r_m = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} b_k$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Имеем $|r_m| \leq \sum_{k=0}^{m} |a_{m-k}| |b_k| = h_m$, где $\{h_m\} \in \widetilde{G}_1$ по лемме 1.2. Тем более и $\{r_m\} \in \widetilde{G}_1$. Если $y(z)$ — любая функция из H_1, то

$$\sum_{m=0}^{\infty} r_m y^{(m)}(0) = \sum_{m=0}^{\infty} y^{(m)}(0) \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sum_{s=0}^{\infty} a_s y^{(s+k)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (Ly)^{(k)}_{z=0}.$$

Последнее равенство получено на основании теоремы 1.1. Изменение порядка суммирования в предыдущих равенствах законно, так как

$$\sum_{m=0}^{\infty} |y^{(m)}(0)| \sum_{k=0}^{m} |a_{m-k}| |b_k| = \sum_{m=0}^{\infty} |y^{(m)}(0)| h_m < \infty.$$

Положим
$$W_R^\varepsilon = \left\{ y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} z^k \in H_1 : \left| \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(0) r_k \right| < \varepsilon \right\}.$$

Из полученных выше равенств следует, что если $y(z) \in W_R^\varepsilon$, то $Ly \in V_B^\varepsilon$ и теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть последовательность операторов

$$L_n y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^n y^{(k)}(z)$$

удовлетворяет следующим условиям: 1) $\sup_{n \geq 0} |a_k^n| \leq w_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где $\{w_k\} \in m_{12}$; 2) $\lim_{n \to \infty} a_k^n = a_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда для $\forall y \in H_1$

а) последовательность (2.1) T-сходится в H_2 к $Ly = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$;

б) ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$ и $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^n y^{(k)}(z)$ сходится абсолютно и равномерно в некотором круге $|z| < \delta(y)$;

в) операторы L_n и L T-непрерывно действуют из H_1 в H_2.

Доказательство. Прежде всего, $\{a_k\}$ и $\{a_k^n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — последовательности из R_{12}, и утверждения б) и в) следуют из теорем 1.1 и 2.1. Возьмем теперь любые $\{\gamma_k\} \in G_2$, $y(z) \in H_1$ и оценим σ_n:

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{\infty}|\gamma_k|\,|(Ly)^{(k)}_{z=0}-(L_ny)^{(k)}_{z=0}|.$$

Имеем при любых произвольно взятых натуральных N_1 и N:

$$\sigma_n\leq 2\sum_{k=0}^{N_1}|\gamma_k|\sum_{s=N+1}^{\infty}w_s\,y^{(s+k)}(0)+\sum_{k=0}^{N_1}\gamma_k\sum_{s=0}^{N}|a_s-a_s^n|\,|y^{(s+k)}(0)|$$

$$+2\sum_{k=N_1+1}^{\infty}\gamma_k\sum_{s=0}^{\infty}w_s\,y^{(s+k)}(0)=\sigma_n^1+\sigma_n^2+\sigma_n^3.$$

Зададим число $\varepsilon>0$, а N_1 выберем так, чтобы $\sum\limits_{k=N_1+1}^{\infty}\gamma_k\,d_k<\frac{\varepsilon}{6}$,

где $d_k=\sum\limits_{s=0}^{\infty}w_s\,y^{(s+k)}(0)$, $\{d_k\}\in G_2$.

Зафиксировав найденное число N_1, возьмем N таким, чтобы

$$\sum_{k=0}^{N_1}\gamma_k\sum_{s=N+1}^{\infty}w_s\,y^{(s+k)}(0)<\frac{\varepsilon}{6}$$

Наконец, при фиксированных N и N_1 найдем N_2 так, чтобы $\sigma_n^2<\frac{\varepsilon}{3}$ для $\forall n>N_2$. Тогда $\sigma_n<\varepsilon$ при $n>N_2$, и теорема доказана.

Следствие. Пусть $\{a_k\}\in R_{12}$. Тогда оператор $Ly=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}(z)$ действует T-непрерывно из H_1 в H_2. Последовательность $L_ny=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k y^{(k)}(z)$ при $\forall y\in H_1$ T-сходится в H_2 к Ly. Наконец, для $\forall r<r_0(y)$

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\,M(r,y^{(k)})<$$

Предположим, что пространства H_i удовлетворяют всем указанным выше условиям и, кроме того, содержат множество S всех многочленов. Тогда билинейная форма $<y(z);f>=\sum\limits_{k=0}^{\infty}y^{(k)}(0)f_k$, $y(z)\in H_i$, $f\{f_k\}\in G_i$, устанавливает, как легко проверить, двойственность (см. [10]) каждой пары $(H_i,\widetilde{G}_i)$, $i=1,2$.

В пространствах H_i можно ввести различные отделимые топологии, согласующиеся с двойственностью $(H_i,\widetilde{G}_i)$, например, слабую топологию $\sigma(H_i,\widetilde{G}_{H_i})$, или топологию Макки $\tau(H_i,\widetilde{G}_i)$. Во всех таких топологиях общий вид линейного непрерывного на H_i функционала дается формулой

$$f(y)=<y;f>=\sum_{k=0}^{\infty}y^{(k)}(0)f_k,$$

где $\{f_k\}$ — последовательность из $\tilde{G}_i$, взаимно-однозначно отвечающая функционалу f и его определяющая (иными словами, H_i' алгебраически изоморфно $\tilde{G}_i$).

Очевидно, что T-сходимость последовательности $\{v_n\}$ в H_i эквивалентна ее сходимости в топологии $\sigma(H_i, \tilde{G}_i)$, а T-непрерывность оператора L — слабой непрерывности оператора L, то-есть непрерывности L как оператора из (H_1, σ) в (H_2, σ); последнее же (см. [10]) эквивалентно непрерывности L как оператора из (H_1, τ) в (H_2, τ). Это дает возможность получить из теоремы 2.2.

Следствие 1. Пусть последовательность операторов $L_n y$ удовлетворяет условиям 1) — 2) теоремы 2.2. Тогда операторы $L_n y$ и Ly непрерывно действуют из (H_1, σ) в (H_2, σ), а также из (H_1, τ) в (H_2, τ). При $\forall y \in H_1$ последовательность $L_n y$ слабо сходится к Ly в H_2. Выделим особо частный случай, когда $L_n y = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(z)$.

Следствие 2. Пусть L — оператор вида (1.2), где $\{a_k\} \in R_{12}$. Тогда L σ- и τ-непрерывно действует из H_1 в H_2. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$ при $\forall y \in H_1$ сходится в $(H_2, \sigma(H_2, \tilde{G}_2))$.

Мы постараемся сейчас усилить теорему 2.2, показав при некоторых дополнительных предположениях, что $L_n y \to Ly$ и в топологии (H_2, τ). Предварительно отметим, что для $y \in H_i$ последовательность S_n^y частных сумм ряда Тейлора σ-сходится, так как если $f \in H_i'$, то

$$f(y - s_n^y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (y - s_n^y)_z^{(k)}{}_0 \quad \sum_{k=n+1} f_k y^{(k)}(0) \to 0$$

при $n \to \infty$, так как $\{f_k\} \in \tilde{G}_i$. Поэтому выпуклое множество S всех многочленов плотно в (H_i, σ), а также плотно (см. [10]) в любой топологии H_i, согласующейся с двойственностью.

Для любых $P \in S$ и $n > N(P)$

$$LP - L_n P = \sum_{k=0}^{N} (a_k - a_k^n) P^{(k)}(z).$$

Но если H — любое локально выпуклое пространство (л. в. п.) над полем скаляров Φ и если $x \in H$, $a_k \in \Phi$ и $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ (в Φ), то $\lim_{k\to\infty} a_k x = ax$ (в H). Поэтому для любого P из S $L_n P \to LP$ в H_2 в любой л. в. топологии и, в частности, в топологии $\tau_2 = \tau$ $(H_2, \tilde{G}_2)$.

При любом $y(z)$ из H_1 последовательность $L_n y$ σ-сходится в (H_2, σ) и потому σ-ограничена; но тогда она и τ-ограничена (см. [10]) в H_2.

Предположим теперь, что в H_1 топология $\tau_1 = \tau(H_1, \tilde{G}_1)$ бочечна, то-есть, что $\tau(H_1, \tilde{G}_1) = \beta(H_1, \tilde{G}_1)$.

Последовательность τ-непрерывных линейных операторов $L_n y$ поточечно (τ_2)-ограничена; в силу бочечности (H_1, τ_1) семейство $\{L_n\}$ равностепенно непрерывно (см. [10], или [11], стр. 105). Кроме того, $L_n y \to Ly$ в (H_2, τ_2) на множестве S. Наконец, L — непрерывный оператор из (H_1, τ_1) в (H_2, τ_2). Отсюда легко получить, что $L_n y \to Ly$ в (H_2, τ_2). Действительно, по любой абсолютно выпуклой окрестности нуля w в (H_2, τ_2) найдем окрестности v_1, $v_2 \in (H_1, \tau_1)$ так, чтобы $L(v_1) \subseteq \frac{w}{6}$ и $L_n(v_2) \subseteq \frac{w}{6}$ для $n = 1, 2, \ldots$.

Если v_0-окрестность (H_1, τ_1) такая, что $v_0 \subset v_1 \cap v_2$, то $L(v_0) \subseteq \frac{w}{6}$ и $L_n(v_0) \subseteq \frac{w}{6}$, $n \geq 1$. Пусть y — произвольный элемент из H_1. Найдем $P \in S$ так, чтобы $y - P \in v_0$ и номер N такой, что $LP - L_nP \in \frac{w}{6}$ для $\forall n > N$. Тогда для тех же n

$$Ly - L_n y = L(y - P) + \{LP - L_nP\} + L_n(P - y) \subseteq \frac{w}{6} + \frac{w}{6} + \frac{w}{6} \subseteq w.$$

Заметим, что из сходимости $L_n y$ к Ly в (H_2, τ_2) при любом фиксированном y из H_1 следует, что $L_n y \to Ly$ равномерно на любом предкомпактном множестве H_1 (см. [10, 11]).

Сформулируем полученный результат, перечислив также хотя бы раз в одном месте все условия на пространства H_i.

Теорема 2.3. Предположим, что пространства H_i обладают следующими свойствами:

I) $S \subseteq H_i \subseteq \bar{A}_0$, $i = 1, 2$;

II) H_i нормальные инвариантные относительно дифференцирования векторные пространства, $i = 1, 2$;

III) топология H_1 бочечна и согласуется с двойственностью $(H_1, \tilde{G}_1)$.

Пусть, далее, последовательность операторов $L_n y$ удовлетворяет условиям 1) — 2) теоремы 2.2. Тогда последовательность $L_n y$ τ-сходится к Ly в H_2 равномерно на каждом предкомпактном множестве H_1.

Следствие. Пусть пространства H_i обладают свойствами, указанными в теореме 2.3, и пусть $\{a_k\} \in R_{12}$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$ τ-сходится в H_2 при $\forall y \in H_1$.

В одном частном, но довольно важном случае формулировки полученных результатов существенно упрощаются. Напомним предварительно одно определение из [8]. Говорят, что множество $H \subseteq \bar{A}_0$ обладает свойством A, если на H определена сдвижка и если $[Y; b] \in G_H$ для любых $Y \in G_H$ и $b \in \tilde{G}_H$. В работе [8] построена классификация, охватывающая практически все обычно употребляемые пространства аналитических функций, и указаны критерии выполнимости свойства A у пространств, входящих в классификацию. Пользуясь случаем, отметим, что формулировки теорем 10—13 из [8], дающие критерии выполнимости свойства A, содержат неточности: именно, в теоремах 10 и 11 критерием является выполнение не одного условия (6) из (9), а двух условий одновременно — условия (6) и условия $\sup_{n \geq 0} \left(\frac{A_{n+s}}{A_n}\right)^{\frac{1}{\varphi(n+s)}} < +\infty$, $s = 0, 1, 2, \ldots$

В теоремах 12 и 13 условие (7) надо заменить следующим:

$$\sup_{n \geq 0} \sup_{s \geq 0} \left(\frac{A_{n+s}}{A_n A_s}\right)^{\frac{1}{\varphi(n+s)}} < +\infty.$$

В случае, если $H_1 = H_2 = H$, H—нормально и обладает свойством A, имеем $m_{12} = R_{12} = \widetilde{G}_H$. Заметим еще (см. [8]), что, если H обладает свойством A, то оно инвариантно относительно дифференцирования. Из теорем 2.2—2.3 получаем, например, такой результат.

Теорема 2.4. Пусть H — нормальное обладающее свойством A, содержащее S векторное подпространство A_0. Тогда любой оператор вида (1.2), где $\{a_k\} \in \widetilde{G}_H$, является непрерывным оператором в топологиях $(H, \sigma(H, \widetilde{G}_H))$ и $(H, \tau(H, \widetilde{G}_H))$, причем ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$ сходится в (H, σ) для $\forall y \in H$. Если еще топология H бочечна и согласуется с двойственностью $(H, \widetilde{G}_H)$, то указанный ряд сходится и в (H, τ).

Можно было бы на основании теорем 2.2—2.3 сформулировать более общий результат о последовательностях операторов в пространстве H, обладающем свойством A; читатель легко сделает это сам.

Отметим, что в работе [8] указаны простые способы эффективного построения $\widetilde{G}_H$ по данному пространству H, входящему в классификацию. Из полученных в той же работе критериев, о которых уже говорилось выше, следует, в частности, что пространство $[\varrho, \sigma]$ (где $0 < \varrho, \sigma <$) целых функций $y(z)$, таких, что $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-\varrho} \ln M(r, y)$ σ, обладает свойством A тогда и только тогда, когда $\varrho \leq 1$; пространство $[\varrho, \sigma)$ целых функций, для которых $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-\varrho} \ln M(r, y) < \sigma$ $(0 < \varrho, \sigma <$) — также только при ϱ 1; пространства $[\varrho, 0]$, $[\varrho,$), $[\varrho,$], $[\varrho, 0)$ при любом $\varrho > 0$ (здесь $[\varrho,$] совокупность всех целых функций порядка $\leq \varrho$, а $[\varrho, 0)$ — порядка $< \varrho$).

§ 3. Как мы убедились, операторы вида (1.2), в которых $\{a_k\} \in R_{12}$, обладают рядом „хороших“ свойств (непрерывность оператора и сходимость ряда (1.2) в определенных топологиях). В силу теоремы 1.1 такой ряд 1.2 можно почленно дифференцировать, и тем самым к числу „хороших“ свойств присоединяется еще перестановочность с оператором Dy y'

В настоящем параграфе при некоторых дополнительных предположениях мы покажем, что, обратно, любой линейный перестановочный с Dy и непрерывный в определенных топологиях оператор представляется в виде (1.2), где $\{a_k\} \in R_{12}$.

Обозначим символом $M^{\sigma}(H_1, H_2)$ множество перестановочных с Dy линейных операторов, непрерывно действующих из (H_1, σ_1) в (H_2, σ_2), где, по-прежнему, например, (H_2, σ) — пространство H_2 с топологией $\sigma(H_2, \widetilde{G}_{H_2})$.

Рассмотрим вначале случай, когда $S \subset H_1 \subset H_2 \subset A_0$ и H_1 обладает свойством A. Тогда $G_1 \subseteq G_2$. Если $X \in G_1$ и $b \in \widetilde{G}_1$, то $[X; b] \subset G_1 \subset G_2$. Поэтому в данном случае $m_{12} = R_{12} = \widetilde{G}_1$.

Пусть $L \in M^{\sigma}(H_1, H_2)$. Положим $L1 = g_0$, $g_0 \in H_2 \subset A_0$. Тогда $D(L1) = LD1 = L0 = 0$ и $L1 = \mathrm{const}$ b_0. Действуя по индукции, легко получаем, что если P многочлен степени $\leq n$, то и LP многочлен степени $\leq n$.

Таким образом, сужение оператора L на S является линейным перестановочным с Dy оператором, действующим из S в S. На основании работ [1—4] получаем, что оператор L имеет на S представление (1.1).

Пусть $y(z)\in H_1$. Как мы знаем, $S_n^y\to y$ в (H_1,σ), откуда $LS_n^y\to Ly$ в (H_2,σ). В частности, для функционала $f_0(y)=y(0)\cdot 1$ из H_2' $\lim\limits_{n\to\infty} f_0(S_n^y)=f_0(Ly)$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} b_k (S_n^y)^{(k)}=Ly|_{z=0}$. Но $(S_n^y)^{(k)}_{z=0}=y^{(k)}(0)$ для $k\leqq n$; поэтому $Ly|_{z=0}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} b_k y^{(k)}(0)$. Таким образом, для $\forall y\in H_1$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k y^{(k)}(0)$ сходится (к $Ly|_{z=0}$), откуда $\{b_k\}\in \widetilde{G}_1=m_{12}=R_{12}$. Но тогда, как мы знаем из § 1 (лемма 1.1 и теорема 1.1), оператор $L_1 y=\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k y^{(k)}(z)$ действует из H_1 в H_1, причем ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k y^{(k)}(z)$ сходится абсолютно и равномерно в круге $|z|<\delta(y)$ для $\forall y\in H_1$. По следствию 2 теоремы 2.2 $L_1 y$ непрерывно действует из (H_1,σ) в (H_2,σ). При этом на множестве S, плотном в (H_1,σ), операторы Ly и $L_1 y$ совпадают. Отсюда $Ly=Ly_1$ для $\forall y\in H_1$. Мы получили следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть $S\subset H_1\subset H_2\subset \bar{A}_0$, H_i — нормальны, H_2 инвариантно относительно дифференцирования, H_1 обладает свойством A. Тогда общий вид оператора L из класса $M^\sigma(H_1, H_2)$ $M^\tau(H_1, H_2)$ дается формулой (1.1), в которой $\{b_k\}\in\widetilde{G}_1$. При этом ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k y(z)$ σ-сходится в H_2 при $\forall y\in H_1$.

Если еще $\beta(H_1,\widetilde{G}_1)=\tau(H_1,\widetilde{G}_1)$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k y^{(k)}(z)$ в представлении оператора L из $M^\tau(H_1,H_2)$ сходится в (H_2,τ) для $\forall y$ из H_1.

Замечание. Так как H_1 обладает свойством A, то $R_{11}=m_{11}=\widetilde{G}_1$. По следствию 2 теоремы 2.2 оператор $Ly=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$, где $\{a_k\}\in\widetilde{G}_1$, непрерывно действует из (H_1,σ) в (H_1,σ). Следовательно, в условиях теоремы 3.1

$$M^\tau(H_1,H_2)=M^\sigma(H_1,H_2)=M^\sigma(H_1,H_1)=M^\tau(H_1,H_1).$$

Иначе говоря, любой перестановочный с Dy линейный оператор, непрерывно преобразующий (H_1,σ) в (H_2,σ), где $H_1\subseteq H_2$, фактически непрерывно преобразует (H_1,σ) в (H_1,σ), если H_1 обладает свойством A — мы видим здесь проявление свойства „заразительности", характерного для пространств, обладающих свойством A (ср. [8]).

Обратимся теперь к общей ситуации, когда H_1 не обязательно обладает свойством A. В этом случае мы покажем, что общий вид оператора из $M^\sigma(H_1,H_2)$ дается формулой (1.1), где $\{b_k\}\in R_{12}$; этот результат будет получен при условии, что H_2 обладает еще одним свойством. Предварительно заметим, что если множество Q функций из пространства (H,σ) имеет покоординатную мажоранту $F(z)\in(H,\sigma)$ то оно σ-ограничено: если $\varphi\in H'$, а $f(z)\in Q$, то

$$\varphi(f)|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k f^{(k)}(0)\right|\leq\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k||f^{(k)}(0)|\leq\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k||F^{(k)}(0)|,$$

и $\sup\{|\varphi(f)|: f\in Q\}\leq\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k||F^{(k)}(0)|<\infty$.

Назовем теперь нормальное л. в. п. (H,σ) мажорантно ограниченным, если любое его ограниченное подмножество имеет покоординатную мажоранту из H.

Заметим, что если пространство (H,σ) мажорантно ограничено, то таким же будет пространство (H,λ), где λ—любая топология, согласующаяся с двойственностью $(H,\widetilde{G}_H)$.

Теорема 3.2. Пусть $S\subseteq H_1$, $H_2\subseteq\bar{A}_0$, H_i — нормальные, инвариантные относительно дифференцирования векторные пространства, причем H_2 мажорантно ограничено. Тогда общий вид операторов L из класса $M^\sigma(H_1,H_2)=M^\tau(H_1,H_2)$ дается формулой (1.1), в которой $\{b_k\}\in R_{12}$; при этом ряд $\sum_{k=0}^{\infty}b_k y^{(k)}(z)$ для $\forall y\in H_1$ сходится в (H_1,σ) и (и сходится в (H_2,τ), если $\tau(H_2,\widetilde{G}_2)=\beta(H_2,\widetilde{G}_2)$).

Доказательство. Пусть $L\in M^\sigma(H_1,H_2)$. Тогда точно так же, как при доказательстве теоремы (3.1), устанавливаем, что Ly на множестве S имеет вид (1.1) и что

$$f_0(Ly)=Ly|_{z=0}=\lim_{n\to\infty}LS_n^y|_{z=0}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k y^{(k)}(0).$$

Отсюда следует, что $\{b_k\}\in\widetilde{G}_1$.

Заметим, далее, что если $H\subseteq\bar{A}_0$ и инвариантно относительно дифференцирования, то оператор $Dy=y'$ T-непрерывен (как оператор из H в H). Этот результат (даже без предположения о нормальности H) доказан в [12] (стр. 122—123). Если же предположить, что H нормально, то этот результат можно получить из теоремы 2.1, заметив, что из инвариантности H относительно дифференцирования следует такое свойству $\widetilde{G}_H$: если $(v_0,v_1,v_2,\ldots)\in\widetilde{G}_H$, то $(0,v_0,v_1,\ldots)\in\widetilde{G}_H$. Тогда оператор $Dy=y'$ можно представить в виде $L_0y=0\cdot y+1\cdot y'+0\cdot y''+\cdots$ а последовательность $(0,1,0,0,\ldots)\in R_{11}$ в силу только что отмеченного свойства $\widetilde{G}_H$ (так как $(1,0,0,\ldots)\in R_{11}$).

Поэтому для $\forall y\in H_1$ и любого $m\geq 1$ $D^mS_n^y\to D^my$ в (H_1,σ), откуда $LD^mS_n^y\to LD^my$ в (H_2,σ).

Но тогда, по доказанному,

$$LD^my|_{z=0}=\lim_{n\to\infty}LD^mS_n^y|_{z=0}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-m}b_j y^{(j+m)}(0)$$

или

$$D^mLy|_{z=0}=\sum_{j=0}^{\infty}b_j y^{(j+m)}(0).$$

Пока мы установили, что если $L \in M^{\circ}(H_1, H_2)$, то оператору L соответствует последовательность $\{b_k\}$, где $k!\, b_k = Lz^k{}_{z=0}$, $\{b_k\} \in \widetilde{G}_1$ и при любом $s \geq 0$

$$(Ly)^{(s)}{}_{z=0} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{(k+s)}(0);$$

при этом все ряды справа сходятся.

Пусть теперь $v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{k!} z^k$ — произвольная функция из H_1. Рассмотрим множество $Q = \{w_s(z)\}$, где

$$w_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \frac{z^k}{k!} \exp(-i \arg b_k),$$

$$w_s(z) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{v_k}{k!} z^k + \sum_{k=s}^{\infty} \frac{z^k}{k!} v_k \exp(-i \arg b_{k-s}), \quad s = 1, 2, \ldots$$

Так как $|w_s^{(m)}(0)| \leq v_m$ при $\forall s \geq 0$, то множество Q ограничено в (H_1, σ). Тогда множество $\{Lw_s\}$ ограничено в (H_2, σ), то-есть

$$|(Lw_s)^{(k)}{}_{z=0}| \leq h_k, \quad \{h_k\} \in \widetilde{G}_2; \quad s, k = 0, 1, 2, \ldots$$

В частности $|(Lw_s)^{(s)}{}_{z=0}| \leq h_s$,

или
$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| v_{s+k} \leq h_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Мы получили, что если $\{v_k\} \in G_1$, то $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| v_{s+k} \in G_2$, и $\{b_k\} \in m_{12}$, то-есть, $\{b_k\} \in R_{12}$.

По следствию 2 теоремы 2.2 оператор $L_1 y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{(k)}(z)$ σ-непрерывно действует из H_1 в H_2, причем на S $L_1 y = Ly$. Отсюда, в силу плотности S в (H_1, σ) и σ-непрерывности L, $L_1 y = Ly$ на H_1.

В заключение этого параграфа приведем одно довольно общее условие, обеспечивающее мажорантную ограниченность H_2. Пусть B — произвольное множество последовательностей. Обозначим через B^0 множество тех и только тех последовательностей $v\{v_n\}$, для которых $k(d) = \sup\limits_{n \geq 0} |v_n d_n| < \infty$ для $\forall d\{d_n\} \in B$. Очевидно, что $\widetilde{B} \subseteq B^0$, $B \subseteq B^{00}$, откуда $B \subseteq \widetilde{\widetilde{B}} \subseteq \widetilde{B}^0$.

Предположим, что H — содержащее S нормальное подпространство $\bar{A}_0$. Пусть, далее, $G_H = \widetilde{G}_H^0$. Покажем, что H мажорантно ограничено. Введем в H нормальную топологию Кете (см. [13]) с помощью преднорм

$$p_u(X) = \sum_{k=0}^{\infty} |X^{(k)}(0)|\, u_k, \quad U\{u_k\} \in \widetilde{G}_H.$$

Известно [13], что нормальная топология в случае, когда $S \subseteq H$, согласована с двойственностью $(H, \widetilde{G}_H)$, и потому всякое слабо ограниченное множество F в H будет ограниченным и в нормальной топологии. Пусть $\beta_m = \sup\{|y^{(m)}(0)|;\ y(z) \in F\}$, $m=0, 1, 2, \ldots$ Если $\{\beta_m\} \in G_H$, то множество F имеет покоординатную мажоранту $\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \frac{z^m}{m!}$ в H. Допустим теперь, что $\{\beta_m\} \overline{\in} G_H = \widetilde{G}_H^0$. Это означает, что найдется последовательность $D\{d_k\} \in \widetilde{G}_H$ такая, что $\sup\{|\beta_m d_m| : m \geq 0\} = \infty$. В то же время $p_D(y) = \sum_{k=0}^{\infty} |y_k|\ |d_k| \leq C_0 < +\infty$ для $\forall \{y_k\} \in G_H$. Найдем номер n_1 такой, что $|d_{n_1}|\ \beta_{n_1} > C_0 + 3$. В F найдется элемент $v(z)$ такой, что $|v^{(n_1)}(0)| > \beta_{n_1} - \frac{1}{|d_{n_1}|}$ (очевидно, что $d_{n_1} \neq 0$).

Тогда $p_D(v) = \sum_{k=0}^{\infty} |v^{(k)}(0)\, d_k| \geq |v^{(n_1)}(0)|\ |d_{n_1}| > C_0 + 2$. И мы пришли к противоречию, откуда $\{\beta_m\} \in G_H$.

В частности, все нормальные пространства H, у которых G_H входит в классификацию статьи [8] (то-есть, G_H принадлежит одному из четырех введенных там координатных пространств $G_1^{\{A_n\}}(\varphi)$, $\widetilde{G}_1^{\{A_n\}}(\varphi)$, $G_0^{\{A_n\}}(\varphi)$, $G_\infty^{\{A_n\}}(\varphi)$), таковы, что $G_H = \widetilde{G}_H^0$, и потому все они мажорантно ограничены.

§ 4. Для того, чтобы применить общие результаты §§ 2—3 к конкретным пространствам аналитических функций, необходимо найти множество R_{12} по пространствам H_1 и H_2. Вообще говоря, эта задача является непростой; однако ряд результатов довольно общего характера можно получить.

Прежде всего, R_{12} всегда является нормальным векторным подпространством $\widetilde{G}_1$; оно всегда непусто, так как содержит нулевую последовательность $O(0, 0, 0, \ldots)$.

Оказывается, что в ряде случаев множество R_{12} этой последовательностью и исчерпывается.

Пространство $H \subseteq \bar{A}_0$ назовем строго инвариантным относительно дифференцирования, если оператор $Dy = y'$ определен на всем пространстве H и отображает H на H.

Теорема 4.1. Пусть H_1 и H_2 — нормальные векторные подпространства $\bar{A}_0$, инвариантные относительно дифференцирования. Для того, чтобы $R_{12} = \{O\}$, необходимо, а в случае, если H_1 строго инвариантно относительно дифференцирования, и достаточно, чтобы $H_1 \cap (\bar{A}_0 \setminus H_2) \neq \varnothing$ ($\varnothing$ — символ пустого множества).

Необходимость. Если $H_1 \cap (A_0 \setminus H_2) = \varnothing$, то $H_1 \subseteq H_2$. Оператор $Ey = y$ отображает H_1 в H_1 и, следовательно, $e_0(1, 0, 0, \ldots) \in R_{12}$. Достаточность. Пусть $H_1 \cap (A_0 \setminus H_2) \neq \varnothing$, но существует последовательность $q\{q_k\} \in R_{12}$ такая, что хоть одно q_k, скажем, $q_{k_0} \neq 0$. Так как R_{12} — нормальное векторное пространство, то орт e_{k_0} ($\{e_{l,k_0}\} : e_{l,k_0} = 0$, $l \neq k_0$, $e_{k_0,k_0} = 1$) принадлежит R_{12}. Но тогда $[Y; e_{k_0}] \in G_2$ для $\forall Y \in G_1$. Если

$Y\{c_k\}\in G_1$, то $y(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k!}z^k\in H_1$, и наоборот. При этом

$$[Y; c_{k_0}] = \{c_{k_0}, c_{k_0+1}, \dots\}.$$

Заметим, что если Dy отображает H_1 на H_1, то при любом $m\geq 1$ $D^m y$ также отображает H_1 на H_1.

Пусть $v_0(z)\in H_1$, но $v_0(z)\notin H_2$. Найдем функцию $w(z)\in H_1$ такую, что

$$D^{k_0}w = v_0;\quad w(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w_k}{k!}z^k,\quad W\{w_k\}\in G_1.$$

Тогда

$$[W; c_{k_0}] = (w_{k_0}, w_{k_0+1}, \dots)\notin G_2,$$

ибо $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{w_{k_0+m}}{m!}z^m = v_0(z)\notin H_2$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если $H\subset A_0$ инвариантно относительно оператора Dy и относительно оператора $Jy=\int\limits_0^z y(t)dt$, то оно строго инвариантно относительно оператора Dy. Действительно, если $v(z)\in H$ и $w = Jv$, то $Dw = v$.

Обратно, если $1\in H\subset A_0$ и H строго инвариантно относительно Dy, то H инвариантно относительно Jy. Пусть $v\in H$; найдем $\varphi\in H$ так, что $D\varphi = v$. Тогда (так как $\varphi, Jv\in A_0$) $Jv-\varphi = \mathrm{const}=c$, и $Jv=\varphi+c\in H$.

Замечание 2. Интересно отметить, что теорема 4.1, вообще говоря, несправедлива, если H_1 не строго инвариантно относительно Dy. Убедимся в этом на довольно общем примере. Пусть $\beta_k>0$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k\beta_k}{\beta_{k+1}} = 0.$$

Тогда подавно $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k^{\frac{1}{k}} = \infty$. Рассмотрим пространство B целых функций $y(z)$ таких, что $T(y)=\sup\limits_{k\geq 0}\left|\frac{y^{(k)}(0)}{k!}\right|\beta_k < \infty$. Пространство B нормально и инвариантно относительно Dy: если $y(z)\in B$, то

$$T(y')= \sup_{k\geq 0}\left|\frac{y^{(k+1)}(0)}{k!}\right|\beta_k = \sup_{k\geq 0}\left|\frac{y^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}\beta_{k+1}\frac{(k+1)\beta_k}{\beta_{k+1}}\right|\leq CT(y)<\infty.$$

С другой стороны, $y_0(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\beta_k}\in B$, но

$$T(Jy_0)= \sup_{k\geq 0}\left|\frac{k!}{\beta_k}\frac{\beta_{k+1}}{(k+1)!}\right| = \sup_{k\geq 0}\left|\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k(k+1)}\right|=\infty,$$

$Jy_0\overline{\in}B$ и B не инвариантно относительно Jy (а, следовательно, не строго инвариантно относительно Dy).

Введем еще множество B_1 целых функций таких, что

$$T_1(y)=\sup_{k\geq 0}\left|\frac{y^{(k)}(0)}{k!}\frac{\beta_{k+1}}{k+1}\right|<\infty.$$

Легко проверить, что B_1 является собственным подмножеством B ($y_0(z)\overline{\in} B_1$), инвариантным относительно Dy. Более того, если $y(z)\in B$, то $y'(z)\overline{\in} B_1$:

$$T_1(y')=\sup_{k\geq 0}\left|\frac{y^{(k+1)}(0)\beta_{k+1}}{(k+1)!}\right|\leq T(y)<\infty.$$

Поэтому оператор $Dy=y'$ действует из B в B_1; в переводе на язык последовательностей это означает, что $e_1(0, 1, 0, 0, \ldots)\in R_{12}$. Укажем еще один случай, когда $R_{12}=\{O\}$.

Теорема 4.2. Пусть $S\subset H_i$; H_i — нормальные векторные подпространства $\overline{A}_0$, $i=1, 2$; H_1 обладает свойством A, H_2 строго инвариантно относительно дифференцирования. Тогда, если $H_1\cap(\overline{A}_0\diagdown H_2)\neq\varnothing$, то $R_{12}=\{O\}$.

Доказательство. Если $q\{q_k\}\in R_{12}$, причем $q_{k_0}\neq 0$, то как в доказательстве предыдущей теоремы получим, что $e_{k_0}\in R_{12}$.

Пусть $v(z)\in H_1$, но $v(z)\overline{\in} H_2$. Тогда $v^{(k_0)}(z)\in H_2$, ибо в противном случае $v(z)=J^{k_0}v^{(k_0)}(z)+P_{k_0}(z)\in H_2$. Если $v=\{v^{(k)}(0)\}$, то $v\in G$, но $[v; e_{k_0}]$ $(v^{(k_0)}(0), v^{(k_0+1)}(0), \ldots)\overline{\in} G_2$, что противоречит включению $e_{k_0}\in R_{12}$.

Теоремы 4.1—4.2 дают возможность получить соответствующий результат для класса $M^\sigma(H_1, H_2)$. Предварительно условимся называть линейное множество операторов из H_1 в H_2 тривиальным, если оно содержит только оператор, равный тождественно нулю (нулевому элементу H_2).

Из теорем 3.2, 4.1—2 следует непосредственно

Теорема 4.3. Пусть $S\subseteq H_1$, $H_2\subseteq\overline{A}_0$, H_i — нормальные векторные пространства, $i=1, 2$; H_2 — мажорантно ограничено. Пусть, далее, выполняется одно из следующих двух условий:

а) H_2 инвариантно, а H_1 строго инвариантно относительно Dy;

б) H_1 обладает свойством A, H_2 строго инвариантно относительно дифференцирования.

Тогда для тривиальности класса $M^\sigma(H_1, H_2)$ необходимо и достаточно, чтобы $H_1\cap(\overline{A}_0\diagdown H_2)\neq\varnothing$.

Довольно часто встречается и другой экстремальный случай, когда R_{12} совпадает со всем пространством G_1. Это будет, как мы видели, например, в случае, если $H_1\subseteq H_2$ и H_1 обладает свойством A.

Если B и C — произвольные множества последовательностей, то символом $(B\times C)$ обозначим множество всех последовательностей v таких, что $v=X\times Y$, где $X\in B$, $Y\in C$.

На основании леммы 1.2 и 1.3 можно утверждать, что если G_2 совершенно и $(\widetilde{G}_1\times\widetilde{G}_2)\subseteq\widetilde{G}_1$, то $R_{12}=\widetilde{G}_1$; вообще, если G_2 совершенно, то R_{12} является максимальным векторным нормальным подпространством $\widetilde{G}_1$ таким, что $(R_{12}\times\widetilde{G}_2)\subseteq\widetilde{G}_1$.

Пусть, в частности, $[1, 0] \subseteq H_i$, $i = 1, 2$. Тогда $G_{[1,0]} \subseteq G_i$, $\tilde{G}_i \subseteq \tilde{G}_{[1,0]}$, то-есть (см. [8]), $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} |y_k|^{\frac{1}{k}} < \infty$ для $\forall Y\{y_k\} \in \tilde{G}_i$, $i = 1, 2$.

Введем множества

$$\tilde{H}_i \quad \left\{ y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k \quad \{y_k\} \in \tilde{G}_i \right\}, \qquad i = 1, 2,$$

$$\hat{R}_{12} = \left\{ y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k \quad \{y_k\} \in R_{12} \right\}.$$

Тогда $\tilde{H}_i \subset \bar{A}_0$, $\hat{R}_{12} \subseteq \tilde{H}_1$. Если H_2 совершенно, то $\hat{R}_{12}$ можно определить как максимальное нормальное подпространство $\tilde{H}_1$, такое, что $(\hat{R}_{12} \cdot \tilde{H}_2) \subset \tilde{H}_1$.

Здесь символом $(\hat{R}_{12} \cdot \tilde{H}_2)$ мы обозначили множество всех функций из A_0 вида $h(z) = g(z) f(z)$, где $g(z) \in \hat{R}_{12}$, $f(z) \in \tilde{H}_2$.

Если $H_1 \subseteq H_2$ и если $\tilde{H}_1$ является кольцом относительно обычных операций сложения и умножения функций, то $\hat{R}_{12}$ $\tilde{H}_1$ (предполагается при этом, что G_1 совершенно).

Если $H_1 = H_2 = H$ и H совершенно, то R_{11} R является максимальным нормальным подпространством $\tilde{G}_H$, таким, что $(R \times \tilde{G}_H) \subseteq \tilde{G}_H$ или еще (по леммам 1.2—1.3) максимальным нормальным коммутативным кольцом (относительно умножения — свертки) из $\tilde{G}_H$ таким, что $\tilde{G}_H$ будет R-модулем (относительно той же операции).

В частности, если $[1, 0] \subseteq H$ и H совершенно, то $\hat{R}$ — максимальное нормальное подпространство $\tilde{H}$, такое, что $\tilde{H}$ является $\hat{R}$-модулем (относительно операции обычного умножения функций из $\bar{A}_0$).

§ 5. Проиллюстрируем полученные выше общие результаты на некоторых конкретных пространствах аналитических функций.

Пусть H_i — пространства вида $[\varrho_i, \sigma_i]$ или $[\varrho_i, \sigma_i)$, $i = 1, 2$, где $0 < \varrho_1, \varrho_2$ и $0 \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq \infty$. Все эти векторные пространства нормальны, совершенны, строго инвариантны относительно дифференцирования. Кроме того, G_{H_i} $\tilde{G}_{H_i}^{\prime}$ (все эти пространства входят в классификацию статьи [8] и каждое пространство (H_i, σ) мажорантно ограничено. В данном случае возможны четыре различные пары (H_1, H_2), составленные из указанных пространств. На основании результатов предыдущего параграфа $R_{12} = \{O\}$ (или класс $M^{\sigma}(H_1, H_2)$ тривиален) тогда и только тогда, когда $H_1 \cap (\bar{A}_0 \setminus H_2) \neq \emptyset$, то-есть, когда (для любой из четырех пар) $\varrho_2 < \varrho_1$ или $\varrho_2 = \varrho_1$, но $\sigma_2 < \sigma_1$ или, наконец (для пары $[\varrho_1, \sigma_1]$, $[\varrho_2, \sigma_2)$), когда $\varrho_2 = \varrho_1$ и $\sigma_2 = \sigma_1$.

Во всех остальных случаях (а это будут все случаи, когда $H_1 \subseteq H_2$) R_{12} содержит ненулевые последовательности и класс $M^{\sigma}(H_1, H_2)$ нетривиален. Если H_1 — пространство вида $[\varrho_1, \sigma_1]$, $[\varrho_1, \sigma_1)$, $0 < \varrho_1 \leq 1$, $0 \leq \sigma_1 \leq \infty$, или $[\varrho_1, 0]$, $[\varrho_1, 0)$, $[\varrho_1, \infty]$, $[\varrho_1, \infty)$, $\varrho_1 > 1$, то по теореме 3.1 в силу того, что H_1 обладает свойством A и $H_1 \subseteq H_2$, $R_{12} = \tilde{G}_1$ и

$$M^{\tau}(H_1, H_2) = M^{\sigma}(H_1, H_2) = M^{\tau}(H_1, H_1)$$

$$= M^{\sigma}(H_1, H_1) = \left\{ Ly = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z) \quad \{a_k\} \in \widetilde{G}_1 \right\}.$$

Пусть теперь $\varrho_1 > 1, 0 < \sigma_1 <$ Тогда $\varrho_2 \geqq \varrho_1 > 1$ и множество $\hat{R}_{12}$ определяется как максимальное нормальное подпространство $\widetilde{H}_1$, такое, что $(\hat{R}_{12} . \widetilde{H}_2) \subseteq \widetilde{H}_1$. При этом $\widetilde{H}_i \subseteq A_\infty$.

Если воспользоваться выражением для $\widetilde{G}_1$ из [8], то найдем, что $\widetilde{H}_1 = [a_1, b_1)$, если $H_1 = [\varrho_1, \sigma_1]$, и $\widetilde{H}_1 = [a_1, b_1]$, если $H_1 = [\varrho_1, \sigma_1)$; здесь $a_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho_1 - 1}$, $b_1 = \frac{\varrho_1 - 1}{\varrho_1} (\varrho_1 \sigma_1)^{\frac{1}{1-\varrho}}$

Если $\varrho_2 > \varrho_1$, то $\widetilde{H}_2 \subseteq \left[\frac{\varrho_2}{\varrho_2 - 1}, \infty \right] \subset \left[\frac{\varrho_1}{\varrho_1 - 1}, 0 \right]$ и $(\widetilde{H}_1 . \widetilde{H}_2) \subseteq \widetilde{H}_1$. Следовательно, $\hat{R}_{12} = \widetilde{H}_1$.

Если же $\varrho_2 = \varrho_1$, но $\sigma_2 = \infty$, то $\widetilde{H}_2 = \left[\frac{\varrho_1}{\varrho_1 - 1}, 0 \right]$, когда $H_2 = [\varrho_1, \infty)$, и $\widetilde{H}_2 = \left[\frac{\varrho_1}{\varrho_1 - 1}, 0 \right)$, если $H_2 = [\varrho_1, \infty]$.

В обоих случаях $(\widetilde{H}_1 . \widetilde{H}_2) \subseteq \widetilde{H}_1$ и $\hat{R}_{12} = \widetilde{H}_1$. Итак, если $\varrho_1 > 1, 0 < \sigma_1 < \infty$, и или $\varrho_2 > \varrho_1$ (σ_2 — любое), или $\varrho_2 = \varrho_1$, но $\sigma_2 = \infty$, то

$$M^{\sigma}(H_1, H_2) = M^{\tau}(H_1, H_2) = \left\{ Ly = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z) : \{a_k\} \in \widetilde{G}_1 \right\}.$$

Осталось рассмотреть случай, когда

$$\varrho_1 > 1, \ 0 < \sigma_1 < \infty, \ \varrho_2 \quad \varrho_1, \ \sigma_1 \leqq \sigma_2 < \infty.$$

В этом случае $\widetilde{H}_i$ будет одним из пространств $[a_1, b_i]$ или $[a_1, b_i)$, в зависимости от того, к какому типу принадлежит само H_i; $b_2 = \frac{\varrho_1 - 1}{\varrho_1} (\varrho_1 \sigma_2)^{\frac{1}{1-\varrho_1}}$

Несложный подсчет показывает, что $\hat{R}_{12} = [a_1, b_1 - b_2]$ для трех пар $[\varrho_1, \sigma_1)$, $[\varrho_1, \sigma_2)$; $[\varrho_1, \sigma_1]$, $[\varrho_1, \sigma_2]$; $[\varrho_1, \sigma_1)$, $[\varrho_1, \sigma_2]$, где $\sigma_2 \geqq \sigma_1$, и $\hat{R}_{12} = [a_1, b_1 - b_2)$ для пары $[\varrho_1, \sigma_1]$, $[\varrho_1, \sigma_2)$, где $\sigma_2 > \sigma_1$.

Покажем этот расчет на паре $H_1 = [\varrho_1, \sigma_1]$, $H_2 = [\varrho_1, \sigma_2]$ (в остальных трех случаях рассуждения проводятся совершенно аналогично). Положим $Q = [a_1, b_1 - b_2]$. Очевидно, что $Q \subseteq \hat{R}_{12}$, так как $(Q . \widetilde{H}_2) \subseteq \widetilde{H}_1$ и $Q \subseteq \widetilde{H}_1$ (в данном случае $\widetilde{H}_1 = [a_1, b_1)$, $\widetilde{H}_2 = [a_1, b_2)$).

Пусть теперь целая функция $f(z)$ из $\widetilde{H}_1$ не входит в Q. Тогда

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} n!^{\frac{1}{a_1}} \right|^{\frac{1}{n}} > (a_1(b_1 - b_2))^{\frac{1}{a_1}}$$

Если $\tilde{f}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}z^k$, то $\tilde{f}(z)$ — целая функция порядка a_1 и типа τ, где $b_1>\tau>b_1-b_2$.

Найдем в классе $\tilde{H}_2$ функцию $h(z)$ с такими свойствами:

$$h^{(k)}(0)\geq 0,\ k=0,1,2,\ \ldots;\quad \lim_{r\to\infty} r^{-a_1}\ln M(r,h)>b_1-\tau.$$

Тогда $M(r,h\tilde{f})=h(r)\tilde{f}(r)$ и

$$\lim_{r\to\infty} r^{-a_1}\ln M(r,h\tilde{f})=\tau+\lim_{r\to\infty} r^{-a_1}\ln M(r,h)>b_1.$$

Следовательно, $h(z)\tilde{f}(z)\bar{\in}H_1$; значит, $\tilde{f}(z)\bar{\in}\hat{R}_{12}$, но тогда и $f(z)\bar{\in}\hat{R}_{12}$. Итак, $\hat{R}_{12}=Q$.

Во всех только что рассмотренных четырех случаях общий вид оператора L из $M^{\sigma}(H_1,H_2)$ дается формулой (1.1), в которой $\overline{\lim_{k\to\infty}}\,|b_k k!|^{\frac{1}{a_1}}\leq b_1-b_2$ для первых указанных выше трех пар, и $\overline{\lim_{k\to\infty}}\,|b_k k!|^{\frac{1}{a_1}}<b_1-b_2$ для пары $[\varrho_1,\sigma_1]$, $[\varrho_1,\sigma_2)$, где $0<\sigma_1<\sigma_2<\infty$.

Во всех рассмотренных в этом параграфе случаях ряд (1.1) в представлении оператора L из $M^{\sigma}(H_1,H_2)$ σ-сходится в H_2 для $\forall y\in H_1$; более того, так как для всех рассматриваемых пространств $\beta(H_i,\tilde{G}_i)=\tau(H_i,\tilde{G}_i)$, то ряд (1.1) τ-сходится в H_2 и $M^{\tau}(H_1,H_2)=M^{\beta}(H_1,H_2)=M^{\sigma}(H_1,H_2)$. Аналогично рассматриваются и другие пространства. Например, если H_i — пространства из пары A_R, $0<R\leq\infty$, и $\bar{A}_R$, $0\leq R<\infty$, то класс $M^{\sigma}(H_1,H_2)$ тривиален в двух (и только двух) случаях: а) $R_2>R_1$; б) $R_2=R_1$, $H_1=A_R$, $H_2=\bar{A}_{R_1}$. Если $H_1=A_0$, $H_2=\bar{A}_0$, то ($\bar{A}_0$ обладает свойством A!),

$$M^{\sigma}(H_1,H_2)=M^{\tau}(H_1,H_2)=\left\{Ly=\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}(z),\ \lim_{k\to\infty}|a_k k!|^{\frac{1}{k}}=0\right\}.$$

Если $H_1=A_\infty$, а H_2 — любое из рассматриваемых двух типов, то (опять A_∞ обладает свойством A)

$$M^{\sigma}(H_1,H_2)=M^{\sigma}(H_1,H_1)=M^{\lambda}(H_1,H_2)=M^{\lambda}(H_1,H_1),\quad \lambda=\tau,\beta.$$

Общий вид операторов из $M^{\sigma}(H_1,H_1)$ дается формулой (1.1), в которой $\overline{\lim_{k\to\infty}}\,|b_k k!|^{\frac{1}{k}}<\infty$.

Наконец, если $0<R_1<\infty$, а $R_2\leq R_1$, причем $R_2<R_1$ для пары A_{R_1}, $\bar{A}_{R_2}$, то общий вид операторов из класса $M^{\sigma}(H_1,H_2)=M^{\tau}(H_1,H_2)$ дается формулой (1.1), в которой $\overline{\lim_{k\to\infty}}\,|b_k k!|^{\frac{1}{k}}<R_1-R_2$ для пары $A_{R_1},\bar{A}_{R_2}$ и $\overline{\lim}\,|b_k k!|^{\frac{1}{k}}\leq R_1-R_2$ для остальных трех пар.

Во всех случаях ряд (1.1) в представлении операторов из $M^{\sigma}(H_1,H_2)$ τ-сходится в H_2 для $\forall y\in H_1$.

§ 6. Пусть теперь H — нормальное векторное подпространство $\overline{A}_0$, содержащее S и инвариантное относительно Dy.

Введем такие обозначения (полагая $H_1=H_2=H$): $R=R_{11}$; $M^\lambda(H)=M^\lambda(H,H)$, где $\lambda=\sigma$ или τ;

$$D_R(H)=\left\{ Ly=\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z) : \{a_k\}\in R\right\}.$$

Множество изоморфизмов H из класса $M^\lambda(H)$ обозначим символом $M_0^\lambda(H)$. В этом параграфе мы дадим описание $M_0^\lambda(H)$, предполагая, что выполнены условия, обеспечивающие равенство $M^\lambda(H)=D_R(H)$ (как мы видели, для этого достаточно, например, чтобы H обладало свойством A — и тогда $R=\widetilde{G}_H$ — или чтобы H было мажорантно ограниченным).

Легко показать, что если оператор $L\in M^\lambda(H)$ имеет обратный L^{-1} (даже не обязательно непрерывный), то L^{-1} также перестановочен с Dy. Поэтому, если $L\in M_0^\lambda(H)$, то $L^{-1}\in M^\lambda(H)$. Можно предполагать, что оператор L из $M^\lambda(H)$ задан в виде (1.1), где $k!\,b_k=Lz^k\,_{z=0}$, $k=0, 1, \ldots$; $\{b_k\}\in R$. В частности, $b_0=L1\,_{z=0}$. Но $DL1=LD1=L0=0$, и $L1\equiv\mathrm{const}=b_0$. Если $b_0=0$, то $LC=CL1=Cb_0=0$ при любом C, и L не может быть изоморфизмом H. Итак, если $L\in M_0^\lambda(H)$, то $L1|_{z=0}=L1\neq 0$.

Допустим, что $Ly=\sum_{k=0}^{\infty} c_k y^{(k)}(z)$ — оператор из $M_0^\lambda(H)$. Тогда в $M^\lambda(H)$ существует обратный оператор $L^{-1}y$, который также имеет вид $L_1y=\sum_{k=0}^{\infty} d_k y^{(k)}(z)$, $\{d_k\}\in R$. При этом по теореме 1.2 для $\forall y\in H$

$$y\equiv LL_1y=L_1Ly=\sum_{m=0}^{\infty} y^{(m)}(z)\sum_{k=0}^{\infty} d_k c_{m-k}.$$

В частности, если $y(z)=1$, то $1=d_0c_0$; если $y(z)=z$, то $z=zd_0c_0+1(d_0c_1+d_1c_0)$, откуда $d_1c_0+d_0c_1=0$. Вообще, полагая $y(z)=z^n$, найдем

$$c_0d_0=1;\ c_0d_1+c_1d_0=0;\ \ldots;\ c_0d_n+c_1d_{n-1}+\ldots+c_nd_0=0.$$

Теорема 6.1. Пусть H — нормальное содержащее S подпространство $\overline{A}_0$, удовлетворяющее любому из таких двух условий:

1) H обладает свойством A;

2) H инвариантно относительно дифференцирования и мажорантно ограничено.

Тогда для того, чтобы оператор $L\in M^\lambda(H)$ ($\lambda=\sigma, \tau$) был изоморфизмом H, необходимо и достаточно, чтобы система

$$(6.1)\qquad \begin{cases} c_0d_0=1\\ c_1d_0+c_0d_1=0\\ \cdot\\ c_nd_0+c_{n-1}d_1+\ldots+c_0d_n=0\end{cases}$$

имела решение $\{d_k\}$ в R. Если система (6.1) разрешима в R, то оператор $L^{-1}y$ представляется в виде

$$L^{-1}y=\sum_{k=0}^{\infty}d_k y^{(k)}(z). \tag{6.2}$$

Необходимость условий теоремы вытекает из рассуждений, предшествующих ее формулировке. Пусть теперь система (6.1) разрешима в R и $\{d_s\}$—ее решение из R. Тогда $L_1 y=\sum_{k=0}^{\infty}d_k y^{(k)}(z)\in D_R(H)=M^{\lambda}(H)$ и по теореме 1.2 $LL_1 y=L_1 Ly=\sum_{m=0}^{\infty}y^{(m)}(z)\sum_{k=0}^{m}c_k d_{m-k}\equiv y(z)$ (в силу того, что $\{d_k\}$ — решение системы (6.1)).

Следствие 1. Пусть пространство H удовлетворяет условиям теоремы 6.1. Тогда общий вид операторов из класса $M_0^{\lambda}(H)(\lambda=\sigma,\tau)$ дается формулой (1.1), в которой последовательность $\{c_k\}$, $c_k=\left.\frac{Lz^k}{k!}\right|_{z=0}$, такова, что $\{c_k\}\in R$ и система (6.1) разрешима в R.

Следствие 2. В условиях теоремы 6.1 решение уравнения $Ly=f$, где f — любой элемент из H, а $L\in M_0^{\lambda}(H)$, записывается в виде $y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k f^{(k)}(z)$, где $\{d_k\}$ —решение системы (6.1), в которой $c_k=\left.\frac{Lz^k}{k!}\right|_{z=0}$.

Заметим, что если система (6.1) вообще разрешима в пространстве S_0 всех последовательностей конечных чисел, то, как нетрудно заметить, $c_0\neq 0$ и система (6.1) имеет в этом случае единственное решение в S_0 (хотя, разумеется, оно не всегда принадлежит R).

Если $[1,0]\subseteq H$, то $\hat{R}\subseteq\tilde{H}\subseteq A_0$, где, как выше,

$$\hat{R}=\left\{v(z)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k z^k:\{v_k\}\in R\right\},$$

$$\tilde{H}=\left\{y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k z^k:\{y_k\}\in\tilde{G}_H\right\}.$$

Система (6.1) в этом случае эквивалентна уравнению $c(z)d(z)=1$, где $c(z)$ — известная, а $d(z)$ — подлежащая определению функция из $\hat{R}$. Таким образом, теореме 6.1 можно придать в данном случае более наглядную формулу:

Теорема 6.2. Пусть H удовлетворяет условиям теоремы 6.1 и, кроме того, $[1,0]\subseteq H$. Тогда оператор $Ly=\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}(z)$ из $M^{\lambda}(H)$ с характеристической функцией $A(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ является изоморфизмом H в том и только в том случае, когда $\frac{1}{A(z)}\in\hat{R}$.

Пусть B и D — два множества аналитических функций, причем $B \subseteq D$. Будем говорить, что B замкнуто в D относительно деления на функцию $g_0 \in B$, если из соотношений $g \in B$, $\frac{g}{g_0} \in D$ следует, что $\frac{g}{g_0} \in B$.

Аналогично, B замкнуто относительно деления в D, если из соотношений $g_1, g_2 \in B$, $\frac{g_1}{g_2} \in D$ следует, что $\frac{g_1}{g_2} \in B$. Из теоремы 6.2 непосредственно вытекают такие следствия:

Следствие 1. а) Пусть H удовлетворяет условиям теоремы 6.1, и, кроме того, H содержит класс $[1, r]$ при некотором r, $0 < r < \infty$ (или класс $[1, r)$, где $0 < r \leq \infty$). б) Пусть, далее, $\hat{R}$ замкнуто в $\bar{A}_r$ (соответственно, в A_r) относительно деления на функцию $A(z)$ из $\hat{R}$.

Тогда оператор $L \in M^\lambda(H)$ с характеристический функцией $A(z)$ является изоморфизмом H тогда и только тогда, когда $A(z) \neq 0$ в круге $|z| \leq r$ (соответственно, в круге $|z| < r$).

Следствие 2. Предположим, что H удовлетворяет условию а) предыдущего следствия, и, кроме того, $\hat{R}$ замкнуто относительно деления в $\bar{A}_r$ (в Ar).

Тогда оператор L из $M^\lambda(H)$ с характеристической функцией $A(z)$ является изоморфизмом H в том и только в том случае, если $A(z) \neq 0$ в круге $|z| \leq r$ (соответственно, в круге $|z| < r$).

§ 7. Рассмотрим некоторые конкретные пространства H аналитических функций и опишем классы $M^\lambda(H)$ и $M_0^\lambda(H)$ на основании полученных выше общих результатов.

1. Пусть $H = [\varrho, \sigma]$, где $0 < \varrho < 1$, $0 < \sigma < \infty$. Это пространство обладает (см. [8]) свойством A. В данном случае ([8])

$$\widetilde{G}_H = \left(\{b_k\} : \overline{\lim} \left| b_k \, k!^{-\frac{1}{\varrho_1}} \right|^{\frac{1}{k}} < (\varrho\sigma)^{-\frac{1}{\varrho}}, \ \varrho_1 = \frac{\varrho}{1-\varrho} \right), \quad R = \widetilde{G}_H,$$

и $M^\lambda(H) = D_R(H)$ по теореме 3.1 ($\lambda = \sigma, \tau, \beta$; $\tau = \beta$).

Пусть $\{c_k\} \in \widetilde{G}_H$. Для того чтобы система (6.1) имела решение в классе S_0 всех последовательностей, необходимо и достаточно, чтобы $c_0 \neq 0$. По теореме 6.1 получаем отсюда, что для того, чтобы оператор L из $M^\lambda(H)$ был изоморфизмом H, необходимо, чтобы $L1|_{z=0} = c_0 \neq 0$. Пусть теперь $c_0 \neq 0$; тогда система (6.1) имеет единственное решение $\{d_k\}$ в S_0. Покажем, что $\{d_k\} \in R = \widetilde{G}_H$.

Так как $\{c_k\} \in \widetilde{G}_H$, то найдутся числа $q < (\varrho\sigma)^{-\frac{1}{\varrho}}$, $A(q) < \infty$, такие, что $|c_n| \leq A(q) q^n (n!)^{-\frac{1}{\varrho}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Возьмем любое q_1 из $\left(q, (\varrho\sigma)^{-\frac{1}{\varrho}}\right)$ и оценим выражение

$$M_n = \sum_{s=1}^{n} h^s \left(\frac{(n-s)!s!}{n!} \right)^a,$$

где $a = \frac{1}{\varrho_1} > 0$, $h = \frac{q}{q_1}$, $0 < h < 1$.

Так как $(n-s)!s! \leq (n-1)!$ для $1 \leq s \leq n-1$, то

$$\mu_n \leqq h^n + \frac{h}{1-h} \cdot n^{-a} < \varepsilon$$

для $\forall n > N(\varepsilon)$. Число $N(\varepsilon)$ можно взять настолько большим, чтобы также $\mu_n < \frac{|c_0|}{2A(q)}$ для $\forall n > N(\varepsilon) = N$.

Найдем число $B = B(q_1)$ так, чтобы

$$|d_m| \leqq B q_1^m (m!)^{\frac{1}{\varrho_1}}, \qquad m = 0, 1, \ldots, N. \tag{7.1}$$

Возьмем любое $n \geq N+1$. Если предположить, что оценка (7.1) имеет место для всех $m \leq n-1$, то при $m = n$ из (6.1) получим

$$|d_n| \leq \frac{1}{|c_0|} [|d_{n-1}| |c_1| + |d_{n-2}| |c_2| + \ldots + |d_0| |c_n|] \leq$$

$$\leq \frac{A(q) B(q_1)}{|c_0|} q_1^n (n!)^{\frac{1}{\varrho_1}} \mu_n < B(q_1) q_1^n (n!)^{\frac{1}{\varrho_1}}.$$

Используя принцип математической индукции, получаем, что оценка (7.1) справедлива для всех $m \geq 0$, откуда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[|d_n| (n!)^{-\frac{1}{\varrho}} \right]^{\frac{1}{n}} \leq q_1 < (\varrho\sigma)^{-\frac{1}{\varrho}} \quad \text{и} \quad \{d_n\} \in \tilde{G}_H.$$

Мы получили такой результат:

Теорема 7.1. Общий вид операторов из $M_0^\lambda[\varrho, \sigma]$, где $\lambda = \sigma, \tau, \beta$, $0 \leq \varrho < 1$, $0 < \sigma < \infty$, дается формулой (1.1), в которой $b_0 \neq 0$ и $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} [|b_k| k!^{(\varrho-1)/\varrho}]^{1/k} < \infty$.

Точно такие же результаты получаются для классов $H = [\varrho, \sigma)$, $0 < \varrho < 1$, $0 < \sigma \leq \infty$; $H = [\varrho, 0]$, $0 < \varrho < 1$, $H = [\varrho, \infty]$, $0 \leq \varrho < 1$ (вместо $[\varrho, \sigma]$ надо взять любой из этих классов H и воспользоваться выражением для $R = \tilde{G}_H$ из [8]).

2. Пусть $H = l[\varrho, 0]$ — класс целых функций $y(z)$, таких, что $\lim\limits_{r\to\infty} (\ln r)^{-\varrho} \ln M(r, y) = 0$, где $1 < \varrho < \infty$. Известно (см. [8]), что H обладает свойством A, причем

$$\tilde{G}_{l[\varrho, 0]} = \left(\{b_k\} : \lim |b_k|^{\frac{1}{k}\frac{\varrho}{\varrho-1}} < \infty \right) = R.$$

По теореме 3.1 $M^\lambda(H) = D_R(H)$. И здесь условие $L1|_{z=0} \neq 0$ необходимо для того, чтобы $L \in M_0^\lambda(H)$ (в данном случае $\lambda = \sigma, \tau, \beta$, так как $\beta(H, \tilde{G}_H) = \tau(H, \tilde{G}_H)$).

Пусть теперь $c_0 \neq 0$ и $\{c_k\} \in \tilde{G}_{l[\varrho, 0]}$. Система (6.1) имеет решение $\{d_k\}$ в S_0. Найдем конечное положительное число M так, чтобы

$$|c_k| \leq A \cdot M^{k^{\frac{\varrho}{\varrho-1}}}, \quad A = A(M), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Возьмем число $M_1>M+1$ так, чтобы $\frac{A}{|c_0|}\frac{M}{M-M_1}<1$, и положим $B(M_1)=|d_0|=\frac{1}{|c_0|}$. Допустим, действуя по индукции, что для $\forall m\leqq n-1$, где $n\geqq 1$, справедливы неравенства $d_m\leqq B(M_1)M_1^{m^{\varrho_1}}$, $\varrho_1=\frac{\varrho}{\varrho-1}$. Тогда при $m=n$, полагая $h=\frac{M}{M_1}$ и $B=B(M_1)$, получим

$$d_n\leqq\frac{A\cdot B}{|c_0|}[h^{(n-1)^{\varrho_1}}+h^{(n-2)^{\varrho_1}}+\ldots+h]M_1^{n^{\varrho_1}}$$

$$\leqq\frac{A\cdot B}{|c_0|}[h+h^2+\ldots+h^{n-1}]M_1^{n^{\varrho_1}}<\frac{A\cdot B}{|c_0|}\frac{M}{M_1-M}M_1^{n^{\varrho_1}}<BM_1^{n^{\varrho_1}}$$

(мы использовали здесь неравенство $n^{\varrho_1}-k^{\varrho_1}\geqq(n-k)^{\varrho_1}$, где $1\leqq k\leqq n-1$, $\varrho_1>1$).

Таким образом, $\{d_k\}\in\widetilde{G}_{l[\varrho,0]}$.

Мы видим, что для пространства $l[\varrho,0]$ справедлива теорема, совершенно аналогичная теореме 7.1 (надо только вместо $[\varrho,\sigma]$ взять $l[\varrho,0]$, а в формуле (1.1) $\{b_k\}$ должны быть такими, что

$$\varlimsup_{k\to\infty}|b_k|^{k^{-\frac{1}{\varrho_1}}}<\infty,\quad \varrho_1=\frac{\varrho}{\varrho-1}$$

Точно так же показываем, что совершенно аналогичный теореме 7.1 результат справедлив для пространств $H=[0,+\infty]$, $[1,0)$ и (при $1<\varrho<\infty$) $l[\varrho,\infty]$, $l[\varrho,\infty)$, $l[\varrho,0)$, $l[\varrho,\sigma]$, $l[\varrho,\sigma)$, $0<\sigma<\infty$ (относительно обозначений этих классов H см. [8]; там же показано, что все они обладают свойством A, и приведены выражения G_H и $\widetilde{G}_H$). И здесь $\tau=\beta$.

3. $H=\overline{A}_0$; H обладает свойством A и потому $\hat{R}=\widetilde{H}=[1,0]$;

$$M^\lambda(\overline{A}_0)=D_R(\overline{A}_0)=\left(Ly=\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}(z):\lim_{k\to\infty}|a_k k!|^{\frac{1}{k}}=0\right),$$

$\lambda=\sigma,\tau,\beta$. Так как $[1,\infty)\in\overline{A}_0$ и $[1,0]$ замкнуто относительно деления в A_∞, то общий вид изоморфизмов $\overline{A}_0$, перестановочных с Dy, дается формулой (1.1), в которой $B(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k\in[1,0]$ и $B(z)\neq 0$ в $|z|<\infty$. Отсюда $B(z)=\exp g(z)$, $g(z)\in A_\infty$, и из условия $B(z)\in[1,0]$ получаем, что $g(z)\equiv\text{const}$. Окончательно $M_0^\lambda(\overline{A}_0)=(Ly=Cy(z),\ C\neq 0)$.

4. $H=A_\infty$. Здесь $\hat{R}=\widetilde{H}$; при $\lambda=\sigma,\tau,\beta$

$$M^\lambda(A_\infty)=D_R(A_\infty)=\left\{Ly=\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}(z):\varlimsup_{k\to\infty}|a_k k!|^{\frac{1}{k}}<\infty\right\}.$$

Применяя следствие 2 теоремы 6.1, найдем, что

$$M_0^\lambda(A_\infty)=\{Ly=by(z+a),\ b\neq 0\}.$$

Последний результат был ранее получен другим путем (см. [7]).

5. $H=A_R$, $\overline{A}_R$ $(0<R<\infty)$. Здесь $\hat{R}=[1, 0]$; пространства A_R и $\overline{A}_R$ не обладают свойством A, но мажорантно ограничены. В данном случае получаем (при $\lambda=\sigma,\ \tau,\ \beta$):

$$M^\lambda(A_R)=M^\lambda(\overline{A}_R)=D_R(A_R)=D_R(\overline{A}_R)$$

$$=\left\{Ly=\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}(z):\lim_{k\to\infty}\ a_k k!^{\frac{1}{k}}=0\right\};$$

$$M_0^\lambda(A_R)=M_0^\lambda(\overline{A}_R)=\{Ly=Cy(z),\ C\neq 0\}.$$

Эти результаты также известны (см. [5], [6]).

6. $H=[\varrho, \sigma]$, $[\varrho, \sigma)$, $1<\varrho<\infty$, $0<\sigma<\infty$. И здесь H не обладает свойством A, но мажорантно ограничено. Как мы раньше установили (в § 5), $\hat{R}=[\varrho_1, 0]$, где $\varrho_1=\frac{\varrho}{\varrho-1}$ для обоих классов H. Кроме того, $\tau=\beta$ и $\hat{R}$ замкнуто относительно деления в A_∞. Применяя теорему 3.2 и следствие 2 из теоремы 6.1, получаем (при $\lambda=\sigma,\ \tau,\ \beta$)

$$M^\lambda([\varrho, \sigma))=M^\lambda([\varrho,\sigma))=\left\{Ly=\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}(z),\ A(z)\in[\varrho_1, 0]\right\};$$

$$M_0^\lambda([\varrho,\sigma])=M_0^\lambda([\varrho,\sigma))=\left\{Ly=\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}(z),\ A(z)=\exp P(z),\ \text{где степень многочлена } P(z) \text{ меньше, чем } \varrho_1\right\}.$$

В частности, если $\varrho>2$, то $\varrho_1<2$ и

$$M_0^\lambda([\varrho,\sigma])=M_0^\lambda([\varrho,\sigma))=\{Ly=by(z+a),\ b\neq 0\},\quad \varrho>2.$$

В пространствах 1—6 ряд в представлении оператора L из $M^\lambda(H)$ сходится при $\forall y\in H$ в топологии $\tau(H, \tilde{G}_H)$; в частности, в пространствах A_∞, $[\varrho, \sigma]$, $[\varrho, \sigma)$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}(z)$ сходится к $Ly(z)$ во всяком случае равномерно внутри $|z|<\infty$.

§ 8. В заключение мы покажем, что результаты настоящей статьи распространяются еще на одну топологию, помимо σ и τ, а именно нормальную топологию ν, о которой речь шла в конце § 3. Пусть, попрежнему, $S\subseteq H_1$, $H_2\subseteq\overline{A}_0$ и H_i — нормальные пространства. Нормальная топология в H_i вводится набором преднорм $p_u^i(y)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k\ |y^{(k)}(0)|$, где $u\{u_k\}\in\tilde{G}_i$. Справедливо такое усиление теоремы 2.1.

Теорема 8.1. Пусть $\{a_k\}\in R_{12}$ и $Ly=\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$. Тогда L — непрерывный оператор из (H_1, ν) в (H_2, ν) (то-есть, $L\in M^\nu(H_1, H_2)$).

Доказательство. Пусть $p_u^2(y)$ — произвольная преднорма в (H_2, ν). Оценим $p_u^2(Ly)$:

$$p_u^2(Ly)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k \ |(Ly)^{(k)}|_{z=0} \le \sum_{k=0}^{\infty} u_k \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \ |y^{(m+k)}(0)|$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} h_s |y^{(s)}(0)| , \quad h_s = \sum_{k=0}^{s} |a_k| \ u_{s-k}$$

По лемме 1.2 $h\{h_s\}\in\widetilde{G}_1$, откуда для $\forall y\in H_1$ $p_u^2(Ly)\leq p_h^1(y)$.

Полученное неравенство и доказывает теорему.

Обозначим через $D_{R_{12}}$ класс операторов вида (1.2), у которых $\{a_k\}\in R_{12}$. Из теоремы 8.1 следует, что $D_{R_{12}}\subseteq M^\nu(H_1, H_2)$. Кроме того, так как топология ν согласована с двойственностью $(H, \widetilde{G}_H)$, то всегда (см. [10]) $M^\nu(H_1, H_2)\subseteq M^\sigma(H_1, H_2)$.

Поэтому, если при каких-то условиях мы получим равенство $D_{R_{12}} = M^\sigma(H_1, H_2)$ (как например, в теоремах 3.1 и 3.2), то тогда обязательно

$$D_{R_{12}}=M^\sigma(H_1, H_2)=M^\nu(H_1, H_2). \tag{8.1}$$

Далее, при доказательстве теоремы 2.2 фактически показано, что последовательность (2.1) ν-сходится в H_2 к Ly при $\forall y\in H_1$, так как там доказано стремление к нулю при $n\to\infty$ величины $\sigma_n=p_\gamma^2(Ly-Ly_n)$, где $\gamma\{|\gamma_n|\}\in\widetilde{G}_2$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 8.2. Пусть пространства H_i, $i=1, 2$, удовлетворяют условием I)—II) теоремы 2.3, а последовательность операторов $L_n y$(2.1) — условиям 1)—2) теоремы 2.2. Тогда последовательность $L_n y$ ν-сходится в H_2 при $\forall y\in H_1$.

Следствие. Пусть пространства H_i обладают свойствами I)—II) теоремы 2.3 и пусть $\{a_k\}\in R_{12}$. Тогда ряд $Ly=\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$ ν-сходится в H_2 при $\forall y\in H_1$, и оператор Ly непрерывно действует из (H_1, ν) в (H_2, ν).

Из теорем 8.1 и 8.2 следует также такое дополнение к теореме 2.4.

Теорема 8.3. Пусть H — нормальное обладающее свойством A содержащее S векторное подпространство $\bar{A}_0$. Тогда любой оператор вида (1.2), где $\{a_k\}\in\widetilde{G}_H$, является непрерывным оператором в топологии (H, ν), причем при $\forall y\in H$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$ ν-сходится в H.

Равенство (8.1) и предшествующие ему рассуждения позволяют получить из теорем 3.1 и 3.2 следующие результаты.

Теорема 8.4. Пусть $S \subseteq H_1$, $H_2 \subseteq \tilde{A}_0$, H_i нормальны H_2 инвариантно относительно дифференцирования, H_1 обладает свойством A. Тогда общий вид оператора L из класса

$$M^{\nu}(H_1, H_2) = M^{\sigma}(H_1, H_2) = M^{\tau}(H_1, H_2)$$

дается формулой (1.1), в которой $\{b_k\} \in \tilde{G}_1$. При этом ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{(k)}(z)$ ν-сходится в H_2 при $\forall y \in H_1$.

Теорема 8.5. Если пространства H_i удовлетворяют условиям теоремы 3.2, то общий вид оператора L из класса

$$M^{\nu}(H_1, H_2) \quad M^{\sigma}(H_1, H_2) = M^{\tau}(H_1, H_2)$$

дается формулой (1.1), в которой $\{b_k\} \in R_{12}$. При этом ряд $\sum_{k=0} b_k y^{(k)}(z)$ для $\forall y \in H_1$ сходится в (H_2, ν).

Критерий тривиальности класса $M^{\sigma}(H_1, H_2)$ — теорема 4.3 — остается в силе и для класса $M^{\nu}(H_1, H_2)$ (надо только в формулировке теоремы 4.3 сделать одно изменение — вместо σ написать ν (в последней фразе теоремы).

Все результаты § 6, а именно, теоремы 6.1 и 6.2 и их следствия, остаются в силе без всяких изменений в формулировках и для топологии ν. Иначе говоря, в теоремах 6.1—6.2 символ λ может принимать значения $\lambda = \sigma, \tau, \nu$.

Во всех конкретных пространствах аналитических функций, рассмотренных в § 5 и § 7, $\nu = \tau$ β.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boas, R. P. Functions of exponential type, III. — Duke Math. J., 1944, 11, 507—511.
2. Raitchinov, Iv. Sur un théorème de G. Pólya. — Publ. inst. math., Beograd, 2 (16), 1963, 141—144.
3. Райчинов, Ив. Върху една класа линейни оператори. —Год. Минно-геол. инст., 9, 1964, 425—430.
4. Djocovic, D. A remark on the paper of Iv. Raitchinov „Sur un théorème de G. Pólya". — Publ. Inst. math., Beograd, 3, 1963, 41—42.
5. Delsartes, Y., Y. L. Lions. Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe. — Comment. Math. Helv., 32, 1957, 113—128.
6. Нагнибида, Н. И. К вопросу об изоморфизмах аналитического пространства, перестановочных со степенью дифференцирования. — Докл. АН СССР, 167, 1966, № 6, 1230—1233.
7. Mascartes, H. Sur quelques opérateurs linéaires différentiels. — Annales Sci. Univ. de Toulouse, J. sci. math. phys., 24, 1960, 5—75.
8. Коробейник, Ю. Ф. Общий вид перестановочных с оператором дифференциальных операторов бесконечного порядка. — Изв. АН СССР, сер. Мат., 30, 1966, № 5, 993—1016.
9. Коробейник, Ю. Ф. Общий вид перестановочных с оператором дифференцирования линейных операторов в пространствах аналитических функций. — Функциональный анализ и его приложения, 7, № 1, 1973, 74—76.
10. Робертсон, А. П., В. Дж. Робертсон. Топологические векторные пространства. М., 1969.
11. Шефер, Х. Топологические векторные пространства. М., 1971.

12. Коробейник, Ю. Ф. Общий вид линейного функционала в некоторых пространствах аналитических функций и его приложения в теории дифференциальных операторов бесконечного порядка. — Математический анализ и его приложения. Ростов-на-Дону, 1969, 116—132.
13. Köthe, G. Topologische lineare Räume. Bd. I, Berlin, 1960.
14. Левин, Б. Я. Распределение корней целых функций. М., 1956.

Поступила 9. I. 1973 г.

ВЪРХУ ПРЕДСТАВЯНЕТО НА ЛИНЕЙНИТЕ ОПЕРАТОРИ, НЕПРЕКЪСНАТО ДЕЙСТВУВАЩИ В ПРОСТРАНСТВА ОТ АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ И КОМУТИРАЩИ С ОПЕРАТОРА НА ДИФЕРЕНЦИРАНЕТО

Юрий Коробейник

(Резюме)

Нека H_i са нормалните по Тьоплиц векторни подпространства на пространството $\bar{A}_0$ на всички аналитични в точката $z=0$ функции:

$$G_{H_i}=(\{c_n\}: c_n=y^{(n)}(0),\ y(z)\in H);$$

$\widetilde{G}_{H_i}=\widetilde{G}_i$ е векторното пространство на всички редици $d\{d_k\}$, такива, че редът $\sum_{k=0}^{\infty} d_k c_k$ е сходящ за $\forall c\{c_n\}\in G_{H_i}$. Ако всяко пространство H_i съдържа множеството S на всички многочлени, то билинейната форма

$$\langle y(z); f\rangle=\sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(0) f_k,\quad y(z)\in H_i,\ f\{f_k\}\in\widetilde{G}_i$$

установява двойствеността на двойките $(H_i, \widetilde{G}_i)$, $i=1, 2$. Нека σ_i е най-слабата, а τ_i — най-силната топология в H_i, съгласуваща се с тази двойственост, и нека ν_i е нормалната топология на Кьоте, която, както е известно, също се съгласува с тази двойственост.

Да означим с $M^{\lambda}(H_1, H_2)$ класа на линейните оператори, комутиращи с оператора $Dy=y'$ и непрекъснато действуващи от линейното топологично пространство (H_1, λ_1) в (H_2, λ_2); тук λ_i е коя да е топология в H_i, съгласуваща се с двойствеността.

В работата се показва, че при някои ограничения на H_i общият вид на операторите Ly от $M^{\lambda}(H_1, H_2)$, където $\lambda=\sigma, \tau, \nu$, се дава с формулата

$$Ly=\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z),$$

където $\{a_k\}$ е редица от определеното векторно пространство R_{12}; при това редът (1) е сходящ в (H_2, ν) за $\forall y \in H_1$.

При някои допълнителни предположения за H_i са получени необходими и достатъчни условия, при които класът $M^\lambda(H_1, H_2)$ $(\lambda = \sigma, \tau, \nu)$ съдържа само оператора Ly 0.

Подробно се изследва случаят $H_1 = H_2 = H$; описва се класът изоморфизми H от $M^\lambda(H, H)$ $(\lambda = \sigma, \tau, \nu)$.

Разгледани са приложения в различни конкретни пространства от аналитични функции.

ON THE REPRESENTATION OF LINEAR OPERATORS CONTINUOUSLY OPERATING IN SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS AND COMMUTING WITH THE DIFFERENTIATION OPERATOR

Yuri Korobeynik

(Summary)

Let H_i be the normal (in the sense of Toeplitz) vector subspace of the A_0 of all functions analytic in the z 0:

$$G_{H_i} \quad (\{c_n\} : c_n \quad y^{(n)}(0),\ y(z) \in H);$$

$\widetilde{G}_{H_i} = G_i$ is the vector space of all the sequences $d\{d_k\}$ such that the series $\sum_{k=0}^{\infty} d_k c_k$ is convergent for any $c\{c_n\} \in G_{H_i}$.

If every space H_i contains the set S of all polynomials then the bilinear form

$$\langle y(z); f \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(0) f_k, \quad y(z) \in H_i, \quad f\{f_k\} \in \widetilde{G}_i$$

determines the duality of the pairs $(H_i, \widetilde{G}_i)$, $i = 1, 2$. Let σ_i be the weakest and τ_i the strongest topology in H_i in conformity to this duality and let ν_i be the normal topology of Köthe which, as it is known, is also in conformity to this duality.

Let us denote by $M^\lambda(H_1, H_2)$ the class of the linear operators commuting with the operator $Dy = y'$ and continuously operating from the linear topological space (H_1, λ_1) into (H_2, λ_2); here λ_i is any of the topologies in H_i in conformity to the duality.

It is shown in the paper that with some restrictions imposed on H_i the general form of the operators Ly from $M^{\lambda}(H_1, H_2)$, where $\lambda=\sigma, \tau, \nu$ is given by the formula

$$Ly=\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z),$$

where $\{a_k\}$ is a sequence from a certain vector space R_{12}; the series (1) is convergent in (H_2, ν) for any $y \in H_1$.

Under some additional assumptions for H_i the necessary and sufficient conditions for the class $M^{\lambda}(H_1, H_2)$ $(\lambda=\sigma, \tau, \nu)$ to contain only the operator $Ly=0$ are obtained.

The case $H_1=H_2=H$ is studied in detail. The class of isomorphisms H from $M^{\lambda}(H, H)$ $(\lambda=\sigma, \tau, \nu)$ is described.

Applications in various particular spaces of analytic functions are considered.