БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

ЧЕТЫРЕ ТЕОРЕМЫ Е. МАЙКЛА О НЕПРЕРЫВНЫХ СЕЧЕНИЯХ

Стоян Й. Недев

Поставим себе целью показать, как при помощи греческой буквы τ и нескольких замечаний, из четырех теорем Майкла, доказанных в [1], мы получим бесчисленное множество теорем, которые можно установить, приводя только два доказательства; причем, даже эти два доказательства мы также, в основном, займем из работы Е. Майкла. Таким образом, речь идет о легком обобщении, пользу от которого, на данном этапе развития, нужно искать только в унификации формулировок и доказательств теорем. Надо, однако, отметить и те две леммы, благодаря которым эту унификацию стало возможно заметить и которые представляют, быть может, некоторый самостоятельный интерес.

Отметим еще, что не имея перед собой работы [1] Е. Майкла, читать эти несколько страниц не имеет смысла.

Вот и теоремы Е. Майкла, о которых идет речь:

Теорема 2′ ([1], теор. 3.1′). Следующие свойства T_1-пространства X эквивалентны:

a) X нормально;

b) любое п. н. сн. соответствие $\Phi: X \to C(R)$ допускает сечение;

c) если Y — сепарабельное банахово пространство, то любое п. н. сн. соответствие $\Phi: X \to C(Y)$ допускает сечение.[1]

Теорема 2″ ([1], теор. 3. 2′). Следующие свойства T_1-пространства X эквивалентны:

a) X — коллективно нормально;

b) если Y — банахово пространство, то любое п. н. сн. соответствие $\Phi: X \to C(Y)$ допускает сечение.

Теорема 1′ ([1], теор. 3. 1″). Следующие свойства T_1-пространства X эквивалентны:

a) X — нормально и счетно паракомпактно;

b) любое п. н. сн. соответствие $\Phi: X \to \mathfrak{F}(R)$ допускает сечение;

c) если Y — сепарабельное банахово пространство, то любое п. н. сн. соответствие $\Phi: X \to \mathfrak{F}(Y)$ допускает сечение.

---

[1] Здесь Φ — многозначное соответствие X в Y, принимающее значения из $C(Y)$. Однозначное непрерывное соответствие $f: X \to Y$ называется сечением для Φ, если $f(x) \in \Phi(x)$ для всех $x \in X$.

Теорема 1'' ([1], теор. 3. 2''). Следующие свойства T_1-пространства X эквивалентны

a) X — паракомпакт.

b) если Y — банахово пространство, то любое п. н. сн. соответствие $\Phi: X \to \mathfrak{F}(Y)$ допускает сечение.

Тут $\mathfrak{F}(Y) = \{F \in 2^Y / F$ — выпукло и замкнуто$\}$,

$C(Y) = \{K \in \mathfrak{F}(Y)/$, если $K \neq Y$, то K — компакт$\}$, а п. н. сн. означает „полунепрерывное снизу".

Теперь напомним два определения, для чего пусть τ обозначает кардинальное число, $\tau \geqq \aleph_0$.

Определение 1. Топологическое пространство X называется τ-коллективно нормальным, если для любой дискретной системы φ замкнутых подмножеств пространства X, мощность которой не превосходит τ, найдется дизъюнктная система $\mathfrak{A} = \{u_F / F \in \varphi\}$ открытых подмножеств, разделяющая ее, т. е. такая, что $F \subset u_F$ для любого $F \in \varphi$.

Определение 2. Топологическое пространство X называется τ-паракомпактным, если в любое открытое покрытие ω, мощность которого не превосходит τ, можно вписать локальноконечное покрытие.

Нам будут полезны такие очевидные, однако, замечания:

I. Пространство X коллективно нормально тогда и только тогда, когда X τ-коллективно нормально при любом τ.

II. Пространство X нормально тогда и только тогда, когда оно $\aleph_0$-коллективно нормально.

III. Счетная паракомпактность и $\aleph_0$-паракомпактность это одно и то же.

IV. Пространство X паракомпактно тогда и только тогда, когда X τ-паракомпактно при любом τ.

Сформулируем теперь наше бесчисленное множество теорем.

Теорема 1. Следующие свойства T_1-пространства X эквивалентны:

а) X — нормально и τ-паракомпактно;

б) если Y — банахово пространство веса $\leqq \tau$, то любое п. н. сн. соответствие $\Phi: X \to \mathfrak{F}(Y)$ допускает сечение.

Теорема 2. Следующие свойства T_1-пространства X эквивалентны

а) X — τ-коллективно нормально;

б) если Y — банахово пространство веса $\leqq \tau$, то любое п. н. сн. соответствие $\Phi: X \to C(Y)$ допускает сечение.

Доказательство теоремы 1. а) $\to$ б) дословно повторяет доказательство теоремы 1' ([1], т. 3. 2''), учитывая то обстоятельство, что в силу условия $w(Y) \leqq \tau$, покрытия, с которыми иметь будем дело, можно считать мощности $\leqq \tau$.

Что касается импликации а) $\to$ б) теоремы 2, то опять мы обратимся к соответствующему месту (теорема 3.2', а) $\to$ b)) работы [1] Е. Майкла, доказав сначала такую лемму:

Лемма 1. Пусть X' — замкнутое подмножество τ-коллективно нормального пространства X, ω — семейство открытых подмножеств пространства X мощности $\leqq \tau$, которое покрывает X' и точечно конечно в точках X'. Существует тогда локально конечное семейство γ открытых подмножеств X, покрывающее X' и вписанное в ω.

Доказательство леммы 1. Для каждого $x \in X'$ обозначим через n_x число элементов ω, содержащих точку x, и пусть для каждого натурального n $X'_n = \{x \in X' / n_x \leq n\}$. Легко видеть, что X'_n является замкнутым подмножеством X. Для каждого $u \in \omega$ положим $F^1_u = X'_1 \cap u$. Семейство $\{F^1_u / u \in \omega\}$ — дискретное семейство замкнутых подмножеств X мощности $\leq \tau$. Следовательно, существует дискретное семейство $\{v^1_u / u \in \omega\}$ открытых множеств таких, что $v^1_u \supset F^1_u$ для каждого $u \in \omega$. Положим $w_1 = \cup\{v^1_u / u \in \omega\}$. Так как $w_1 \supset \cup\{F^1_u / u \in \omega\} = X'_1$, то существует открытое множество G_1 такое, что $X'_1 \subset G_1 \subset [G_1] \subset w_1$. Теперь для каждого натурального n положим $A_n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \omega^n / u_i \neq u_j$, как только $i \neq j\}$. Пусть $F^2_{u_1 u_2} = (X'_2 \setminus w_1) \cap u_1 \cap u_2$ для любого $(u_1, u_2) \in A_2$. Опять без особого труда можно видеть, что семейство $\{F^2_{u_1 u_2} / (u_1, u_2) \in A_2\}$ — дискретное семейство замкнутых подмножеств X мощности $\leq \tau$. Существует поэтому дискретное семейство $\{v^2_{u_1 u_2} / (u_1, u_2) \in A_2\}$ открытых подмножеств X таких, что $F^2_{u_1 u_2} \subset v^2_{u_1 u_2} \subset u_1 \cap u_2 \setminus [G_1]$. Пусть $w_2 = \cup\{v^2_{u_1 u_2} / (u_1, u_2) \in A_2\}$. Тогда $X'_2 \subset w_1 \cup w_2$, и поэтому существует открытое множество G_2 такое, что $X'_2 \cup [G_1] \subset G_2 \subset [G_2] \subset w_1 \cup w_2$.

Теперь полагаем $F^3_{u_1 u_2 u_3} = (X'_3 \setminus (w_1 \cup w_2)) \cap u_1 \cap u_2 \cap u_3$ для любого $(u_1, u_2, u_3) \in A_3$. Замечаем, что $\{F^3_{u_1 u_2 u_3} / (u_1, u_2, u_3) \in A_3\}$ — дискретное семейство замкнутых подмножеств и так далее.

Положим $A = \cup\{A_n / n = 1, 2, \dots\}$ и пусть G такое открытое множество, что $X' \subset G \subset [G] \subset \cup\{G_n / n = 1, 2, \dots\}$. Пусть еще для каждого $a \in A$, $a = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ $v_a = G \cap v^n_{u_1 u_2 \dots u_n}$. Тогда $\gamma = \{v_a / a \in A\}$ — искомое семейство открытых множеств. В самом деле, то, что γ покрывает X' и вписано в ω, очевидно. Если теперь $x \in X \setminus [G]$, то $X \setminus [G]$ является окрестностью для x, не пересекающей ни одного элемента γ. Если $x \in [G]$, то $x \in G_n$ для некоторого n и, следовательно, G_n является окрестностью для x, пересекающейся самое большее с элементами семейства $\{v_a / a \in A_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$. Но семейства $\{v_a / a \in A_i\}$ дискретны и, следовательно, для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ существует окрестность O_i точки x, пересекающая самое большее один элемент семейства $\{v_a / a \in A_i\}$. Поэтому $G_n \cap O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n$ является окрестностью точки x, пересекающей самое большее n элементов семейства γ. Лемма 1, а вмете с ней импликация а) $\to$ б) теоремы 2 доказаны.

Теперь докажем импликацию б) $\to$ а) теоремы 2. Пусть φ — дискретное семейство замкнутых подмножеств пространства X мощности $m \leq \tau$. Пусть еще H^m — гильбертово пространство $H^m = \{y : \varphi \to R / \Sigma\{y^2(F) / F \in \varphi\} < \infty\}$ с нормой $\|y\| = \sqrt{\Sigma\{y^2(F) / F \in \varphi\}}$ и $P = \cup\{F / F \in \varphi\}$. Рассмотрим соответствие $f : P \to H^m$, определенное равенством $f(x) = e_F$, где F — единственный элемент φ такой, что $x \in F$, а e_F определяется правилом: $e_F(F') = 0$, если $F' \neq F$, и $e_F(F) = 1$. Без труда проверяется, что соответствие f непрерывно. Поэтому, соответствие $\Phi : X \to C(H^m)$, определенное по правилу: $\Phi(x) = f(x)$, если $x \in P$, и $\Phi(x) = H^m$, если $x \in X \setminus P$, полунепрерывно снизу. По условию б) теоремы существует непрерывное сечение $\tilde{f} : X \to Y$ для Φ, причем, очевидно, $\tilde{f}$ является продолжением для f. Положим теперь $u_F = \tilde{f}^{-1}(O_{1/3}(e_F))$ для любого $F \in \varphi$. Тогда семейство открытых множеств $\{u_F / F \in \varphi\}$ дискретно и $u_F \supset F$ для каждого $F \in \varphi$. (Тут $O_\varepsilon(y)$ — шар радиуса ε с центром в точке $y \in H^m$).

Таким образом мы получили теорему:

Теорема 3. Для T_1-пространства X следующие условия эквивалентны:

а) X — τ-коллективно нормально.

б) Если Y — банахово пространство веса $\leqq\tau$, A — замкнутое подмножество X и $f: A\to Y$ — непрерывное соответствие, то f допускает непрерывное продолжение $\tilde{f}: X\to Y$.

Остается теперь только доказать импликацию б) $\to$ а) теоремы 1. Методом доказательства импликации b) $\to$ a) теотемы 3.2″ из [1] мы покажем, что для произвольно взятого открытого покрытия ω мощности $\leqq\tau$ пространства X существует подчиненное ω разбиение единицы, и потом применим следующую лемму:

Лемма 2. Пусть для открытого покрытия ω пространства X существует подчиненное ω разбиение единицы φ. Тогда в ω можно вписать локально конечное[1] покрытие.

Доказательство. Для каждого $f\in\varphi$ и каждого натурального i положим $v_f^i=\left\{x\in X/f(x)>\frac{1}{i}\right\}$. Как известно [2], семейство $\{v_f^i/f\in\varphi\}$ локально конечно для каждого i и семейство $\{v_f^i/f\in\varphi,\ i=1,2,\ldots\}$ является σ-локально конечным покрытием пространства X, вписанным в ω. Теперь для каждого $f\in\varphi$ и каждого натурального i положим: $p_f^i=\left\{x\in X/f(x)\geq\frac{i+1}{i^2}\right\}$ и $G_f^i=\left\{x\in X/f(x)>\frac{i+1}{i^2}\right\}$, $p_i=\cup\{p_f^i/f\in\varphi\}$, $G_i=\cup\{G_f^i/f\in\varphi\}$. Без труда проверяются такие утверждения: для любых $f\in\varphi$, i — натуральное p_f^i — замкнуто, G_f^i — открыто, $G_f^i\subset p_f^i\subset v_f^i$ и семейство $\{G_i/i=1,2,\ldots\}$ покрывает X. Теперь для любых f и i положим: $u_f^1=v_f^1$, $u_f^i=v_f^i\setminus(p_1\cup p_2\cup\ldots\cup p_{i-1})$. Тогда семейство $\gamma=\{u_f^i/f\in\varphi,\ i=1,2,\ldots\}$ является локально конечным покрытием для X, вписанным в ω. В самом деле, если для данной точки $x\in X$ $i_x=\min\{i/x\in v_{f_i}^i$ для некоторого $f_i\in\varphi\}$, то $x\in u_{f_{i_x}}^{i_x}$. Кроме того, если $x\in G_n$, O_i — окрестность точки x, пересекающаяся самое большее с конечным числом элементов семейства $\{v_f^i/f\in\varphi\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$, то $G_n\cap O_1\cap O_2\cap\ldots\cap O_n$ является окрестностью точки x, пересекающейся с конечным числом элементов семейства γ.

Этим все обещанное доказано.

Ясно, что аналогичное обобщение допускает и теорема 8.2 из [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Michael, E. Continuous selections. — Annals of Math., 63, 1956, № 2, 361—382.
2. Michael, E. A note on paracompact spaces. — Proc. Amer. Math. Soc., 4, 1953, № 5, 831—838.

Поступила 22. I. 1973 г.

[1] Если слова „локально конечное“ заменить на „σ-локально конечное“, получится утверждение, доказанное Е. Майклом ([2], предл. 2, с) $\to$ а)).

Замечание при корректуре: Автору стало известно, что другим методом лемма 2 была доказана ранее другими авторами; см. R. Engelking. Outline of General Topology. Amsterdam, 1968, p. 208, Lemma 2.

ЧЕТИРИ ТЕОРЕМИ НА МАЙКЪЛ ЗА НЕПРЕКЪСНАТИТЕ СЕЧЕНИЯ

Стоян Недев

(Резюме)

Някои теореми на Е. Майкъл от [1] са обобщени по такъв естествен начин, че е получена унификация както на формулировките на твърденията, така и на техните доказателства, като последните са и упростени.

Като естествено следствие обобщени са и известните теореми на Титце—Урисон и на Даукер—Дъгънджи—Ханер за непрекъснато продължаване.

•

FOUR THEOREMS OF MICHAEL FOR CONTINUOUS SECTIONS

Stojan Nedev

(Summary)

Some theorems of E. Michael from [1] are generalized in such a natural way that a unification of both the formulations and the proofs of the statements is obtained, and moreover, the latter are simplified.

As a natural corollary, the well known theorems of Tietze-Urysohn and of Dowker-Dugundji-Hanner for continuous continuation are generalized.