БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE DES SCIENCES DE BULGARIE
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Vol.) VII

ВЪРХУ НЯКОИ ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ ЗА УРАВНЕНИЕТО $u_{xx}+\operatorname{sign} y u_{yy}=0$. I

Г. Каратопраклиев

В настоящата работа се разглеждат две гранични задачи за уравнението на Лаврентиев-Бицадзе

$$u_{xx}+\operatorname{sign} y u_{yy}=0 \tag{1}$$

от типа на задачата T_1 [1—3].

1. Нека D е едносвързана област в равнината xOy, ограничена от линия на Жордан σ с краища в точките $A(-1,0)$, $B(1,0)$, разположена в горната полуравнина $y>0$ и характеристиките $AC: y=-x-1$ и $BC: y=x-1$ на уравнението (1), излизащи от точката $C(0,-1)$. Нека $E_k(a_k, 0)$, $k=1,\ldots,n$, $-1<a_1<\ldots<a_n<1$ са дадени точки от отсечката AB. Точките $A_k\left(\frac{a_k-1}{2}, -\frac{a_k+1}{2}\right)$ и $B_k\left(\frac{a_k+1}{2}, \frac{a_k-1}{2}\right)$, $k=0,1,\ldots,n+1$ ($a_0=-1$, $a_{n+1}=1$) лежат съответно на характеристиките AC и BC. Означаваме с $E_{ik}\left(\frac{a_i+a_k}{2}, \frac{a_i-a_k}{2}\right)$, $i\leqslant k$, $i=0,1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,n+1$ пресечната точка на характеристиките E_iB_i и E_kA_k ($E_0=A$, $E_{n+1}=B$, $E_{0k}=A_k$, $E_{k,n+1}=B_k$).

Означаваме с D_1 елиптичната, а с D_2 хиперболичната част на смесената област D.

Задача T_1^1. Търси се функция $u(x,y)$ със следните свойства:

1) $u(x,y)$ удовлетворява уравнението (1) в областта D навсякъде с изключение на точките от отсечката AB и характеристиките E_kA_k, E_kB_k, $k=1,\ldots,n$;

2) $u(x,y)$ е непрекъсната в затворената област $\overline{D}$;

3) частните производни u_x и u_y са непрекъснати в областта D с изключение може би на точките от характеристиките E_kA_k, E_kB_k, $k=1,\ldots,n$ и точките A, B, в които u_x и u_y могат да се обръщат в безкрайност от ред, по-малък от единица;

4) $u(x,y)$ приема зададени стойности

$$u\Big|_{\sigma}=\varphi, \tag{2}$$

$$u\Big|_{E_k E_{k-1,k}}=\psi_k(x) \quad \text{при нечетни } k, \tag{3}$$

$$u\Big|_{E_{k-1} E_{k-1,k}}=\psi_k(x) \quad \text{при четни } k, \tag{4}$$

където функцията φ е непрекъсната, а $\psi_k(x)$, $k=1,\ldots,n+1$ са двукратно диференцируеми функции, вторите производни на които удовлетворяват условието на Хьолдер; при това $\psi_{2k-1}(a_{2k-1})=\psi_{2k}(a_{2k-1})$, $k=1,2,\ldots$ (при четно n трябва да бъде изпълнено и условието $\psi_{n+1}(1)=\varphi(1)$).

Задачата T_1^1 при $n=1$ и $a_1=0$ е изследвана в работата[1] на Т. Д. Джураев [4].

Задача от типа T_1^1 при $n=1$ за първи път е поставена и изследвана за уравнението $y^m z_{xx}+z_{yy}=0$ в работата на Геллерстедт [5].

Ще предполагаме, че $n=2m$. Случаят $n=2m-1$ се разглежда аналогично.

Доказателство за единственост на решението. Означаваме с Δ_k областта, ограничена от оста Ox и отсечките $E_k E_{k,k+1}$, $E_{k+1} E_{k,k+1}$, $k=0,1,\ldots,2m$.

Общото решение на уравнението (1) в областта Δ_k се дава с известната формула

$$u(x,y)=\varphi_{1,k}(x+y)+\varphi_{2,k}(x-y),\quad k=1,\ldots,2m+1, \tag{5}$$

където $\varphi_{1,k}(t)$ и $\varphi_{2,k}(t)$ са произволни непрекъснати при $a_k \leqq t \leqq a_{k+1}$ функции, вторите производни на които са непрекъснати при $a_k<t<a_{k+1}$, а първите производни могат да се обръщат в безкрайност от ред, помалък от единица в краищата на тези интервали.

От формулата (5) заключаваме, че общото решение на уравнението (1) в областта $\Delta_{2k-1}, k=1,\ldots,m+1$, удовлетворяващо условието (3), и в областта Δ_{2k}, $k=1,\ldots,m$, удовлетворяващо условието (4), има съответно вида

$$u(x,y)=\varphi_{2,2k-1}(x-y)+\psi_{2k-1}\left(\frac{x+y+a_{2k-1}}{2}\right)-\varphi_{2,2k-1}(a_{2k-1}),\quad k=1,\ldots,m+1, \tag{6}$$

$$u(x,y)=\varphi_{1,2k}(x+y)+\psi_{2k}\left(\frac{x-y+a_{2k-1}}{2}\right)-\varphi_{1,2k}(a_{2k-1}),\quad k=1,\ldots,m. \tag{7}$$

От (6) и (7) непосредствено следва, че

$$u_x-\lambda(x)\,u_y=f(x),\ y=0,\ a_k<x<a_{k+1},\ k=0,1,\ldots,2m, \tag{8}$$

където

$$\lambda(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } x\in L_1,\\ \ \ 1 & \text{при } x\in L_2\end{cases} \tag{9}$$

и

---

[1] Фигуриращите произволни константи c_1 и c_2 не могат да бъдат определени по начина, предложен в [4]. Наистина, лесно се вижда, че $F(z)$ удовлетворява условието $F\left(\frac{1}{z}\right)=-F(z)$, от което следва, че $\operatorname{Re} F(z)=0$ при $z=-1$ и $z=1$, каквито и да бъдат константите c_1 и c_2. Тези константи могат да се определят от условията $F(-1)=0$ и $\operatorname{Re} F(0)=\psi_1(0)-\omega_2(0)-W(0,0)$.

$$f(x)=\begin{cases} 2\dfrac{d}{dx}\psi_{2k-1}\left(\dfrac{x+a_{2k-1}}{2}\right) & \text{при } x\in L_1, \\ 2\dfrac{d}{dx}\psi_{2k}\left(\dfrac{x+a_{2k-1}}{2}\right) & \text{при } x\in L_2, \end{cases} \tag{10}$$

а L_1, L_2 означават съответно съвкупността от интервалите (a_{2k-2}, a_{2k-1}), $k=1,\ldots,m+1$ и $(a_{2k-1}, a_{2k}), k=1,\ldots,m$.

Оттук, както в задачата T_1, заключаваме, че ако $\psi_k(x)\equiv 0$, $k=1,\ldots,2m+1$, решението $u(x,y)$ на задачата T_1^1 в затворената област $\bar{D}_1$ не може да достига отличен от нула екстремум в интервалите $a_k<x<a_{k+1}$, $k=0,1,\ldots,2m$ на отсечката AB. Да допуснем, че функцията $u(x,y)$ достига отличен от нула екстремум в някоя от точките E_{2k}, $k=1,\ldots,m$, например в точката E_{2k_0} Отделяме[1] E_{2k_0} от останалите точки E_k с линия на ниво Γ: $u(x,y)=\text{const}$ с краища на отсечката AB и изцяло лежаща в областта D_1. Означаваме с S областта, ограничена от линията Γ и оста Ox, а с l — контура на тази област. За областта S прилагаме формулата на Грин

$$\iint_S (u_x^2+u_y^2)dxdy=-\int_l (u-\text{const})\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

където n е вътрешната нормала. От тази формула, като вземем пред вид равенствата $u_x+u_y=0$ при $x\in L_1$ и $u_x-u_y=0$ при $x\in L_2$, заключаваме, че $u(x,y)=\text{const}$ в цялата област D_1, което е невъзможно при $\varphi\neq 0$.

Следователно, ако $\psi_k(x)\equiv 0$, $k=1,\ldots,2m+1$, решението $u(x,y)$ на задачата T_1^1 в затворената област $\bar{D}_1$ достига отличен от нула екстремум върху дъгата σ (принцип за екстремум).

От принципа за екстремум непосредствено следва единствеността на решението на задачата T_1^1.

Доказателство за съществуването на решение. Без ограничение на общността можем да предполагаме [6], че

$$u|_\sigma=0.$$

Допълнително ще предполагаме, че σ е гладка дъга, удовлетворяваща условието на Ляпунов, а u_x и u_y са непрекъснати в затворената област $\bar{D}_1$ навсякъде с изключение може би на точките E_k, $k=0,1,\ldots,2m+1$.

Чрез конформно изображение може да се направи σ да съвпадне с полуокръжността σ_0 с краища в точките A и B [6]. Ще предполагаме, че σ съвпада със σ_0.

Означаваме с $\Phi(z)$ функцията $u(x,y)+iv(x,y)$, която е холоморфна в областта D_1 и удовлетворява условието $\Phi(-1)=0$.

Посредством функцията $\Phi'(z)=u_x-iu_y$ условията (8) могат да бъдат записани във вида

---

[1] В задачата T_1 при $n=2m-1$ е необходимо да се отделя с линия на ниво някоя от точките E_{2k-1}, $k=1,\ldots,m$. В противен случай от формулата на Грин не може да се заключи, че $u(x,y)=\text{const}$ в D_1.

$$\begin{aligned}(11)\qquad & \operatorname{Re}(1-i)\Phi'(x)=f(x) \quad \text{при } x\in L_2,\\ & \operatorname{Im}(1-i)\Phi'(x)=-f(x) \quad \text{при } x\in L_1.\end{aligned}$$

От условието $u|_{\sigma_0}=0$ следва, че функцията $\Phi(z)$ аналитически се продължава през σ_0 в цялата горна полуравнина; при това

$$(12)\qquad \Phi(z)=\begin{cases} u(x,y)+iv(x,y) & \text{в } D_1,\\ -u\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)+ & \\ \quad +iv\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{y}{x^2+y^2}\right) & \text{извън } D_1.\end{cases}$$

Оттук следва, че функцията $\Phi(z)$ трябва да удовлетворява условието

$$(13)\qquad \overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar z}\right)}=-\Phi(z).$$

В безкрайност функцията $\Phi'(z)$ има нула от втори ред поради ограничеността на $u(x,y)$ [7].

Нека $a_{2j-1}<0<a_{2j}$. От (12) и (11) получаваме

$$\begin{aligned}(14)\qquad & \operatorname{Re}(1-i)\Phi'(x)=\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x\in \bar L_1,\\ & \operatorname{Im}(1-i)\Phi'(x)=-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x\in \bar L_2,\end{aligned}$$

където $\bar L_1$ и $\bar L_2$ означават съответно съвкупността от интервалите (b_{2k-1}, b_{2k-2}), $k=1,\ldots,m+1$ и (b_{2k}, b_{2k-1}), $k=1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,m$, $(-\infty, b_{2j-1})$, (b_{2j},∞), а $b_k=\dfrac{1}{a_k}$.

По този начин намирането на функцията $\Phi'(z)$ се свежда до намирането на функция частично-холоморфна в горната полуравнина, притежаваща нула от втори ред в безкрайност, по граничните условия (11) и (14).

Решението на тази задача от класа h_0 се дава с известната формула на Келдиш—Седов [7,8]

$$(15)\qquad (1-i)\Phi'(z)=\frac{1}{\pi i}\frac{R_1(z)}{R_2(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_2(t)}{R_1(t)}\frac{g(t)}{t-z}\,dt+ + \frac{C_0+C_1z+\cdots+C_{2m-1}z^{2m-1}}{R(z)}$$

където

(16)
$$g(x)=\begin{cases} -if(x) & \text{при } x\in L_1, \\ f(x) & \text{при } x\in L_2, \\ \dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{при } x\in \bar{L}_1, \\ -i\dfrac{1}{x^2}\,f\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{при } x\in \bar{L}_2 \end{cases}$$

и

(17)
$$R_1(z)=\sqrt{(z-1)\prod_1^m (z-a_{2k-1})(z-b_{2k-1})}$$

$$R_2(z)=\sqrt{(z+1)\prod_1^m (z-a_{2k})(z-b_{2k})}$$

$$R(z)=\sqrt{(z^2-1)\prod_1^{2m} (z-a_k)(z-b_k)}\ ;$$

при това под $\dfrac{R_1(z)}{R_2(z)}$ подразбираме клона, холоморфен в разрязаната по L_2 и $\bar{L}_1$ равнина, който в безкрайност приема стойност 1, а под $R(z)$— клона, холоморфен в разрязаната по същия начин равнина, който приема положителна стойност при $x>b_{2j}$; $C_0, C_1, \ldots, C_{2m-1}$ са произволни реални константи.

Както е известно [7], функцията $F(z)=(1-i)\Phi'(z)$ удовлетворява условието

(18)
$$\overline{F(\bar{z})}=F(z).$$

Като вземем пред вид (16), от (15) получаваме

(19)
$$\Phi'(z)=\frac{1-i}{2\pi i}\frac{R_1(z)}{R_2(z)}\int_{L_1}\frac{R_2(t)}{R_1(t)}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{t}{1-tz}\right)f(t)\,dt+$$
$$+\frac{1+i}{2\pi i}\frac{R_1(z)}{R_2(z)}\int_{L_2}\frac{R_2(t)}{R_1(t)}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{t}{1-tz}\right)f(t)\,dt+$$
$$+\frac{1+i}{2}\,\frac{C_0+C_1z+\cdots+C_{2m-1}z^{2m-1}}{R(z)}$$

След определянето на $\Phi'(z)$ функцията $\Phi(z)$ намираме по формулата

(20)
$$\Phi(z)=\int_{-1}^{z}\Phi'(\zeta)\,d\zeta.$$

Като вземем пред вид (18), лесно се вижда, че за да удовлетворява функцията $\Phi(z)$, условието (13) е необходимо и достатъчно:

$$C_k=-C_{2m-k-1},\qquad k=0,1,\ldots,m-1.$$

За определянето на константите $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$ имаме следните условия:

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{Re}\int_{-1}^{a_{2k-1}} \Phi'(\zeta)\,d\zeta=\psi'_{2k-1}(a_{2k-1}),\ k=1,\ldots,m,$$

където интегрирането се извършва по произволна линия, която съединява точките -1 и a_{2k-1} и не пресича отсечката AB.

Условията (21) представляват система от m линейни уравнения относно C_0, $C_1,\ldots,C_{m-1}$:

$$\text{(22)} \qquad \sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{kj}C_j=\gamma_k, \quad k=1,\ldots,m,$$

където коефициентите γ_{kj} не зависят от функциите $\psi_k(x)$, а $\gamma_k=0$ при $\psi_k(x)\equiv 0$.

От единствеността на решението на задачата T_1^1 непосредствено следва, че системата (22) има само едно решение.

Реалната част на функцията $\Phi(z)$ дава търсената функция $u(x,y)$ в областта D_1. От (6) и (7) следва, че в областта Δ_{2k-1} и Δ_{2k} решението $u(x,y)$ се дава съответно с формулите

$$\text{(23)} \qquad u(x,y)=u(x-y,0)-\psi_{2k-1}\left(\frac{x-y+a_{2k-1}}{2}\right)+\psi_{2k-1}\left(\frac{x+y+a_{2k-1}}{2}\right),$$
$$k=1,\ldots,m+1,$$

$$\text{(24)} \qquad u(x,y)=u(x+y,0)-\psi_{2k}\left(\frac{x+y+a_{2k-1}}{2}\right)+\psi_{2k}\left(\frac{x-y+a_{2k-1}}{2}\right),$$
$$k=1,\ldots,m.$$

В останалата част на областта D_2 функцията $u(x,y)$ се намира по елементарен начин.

Както в задачата T[3], принципът за екстремум позволява да се докаже съществуването на решение на задачата T_1^1 без допълнителните ограничения за частните производни на търсената функция и за гладкостта на дъгата σ.

Забележка 1. Решението, което съответствува на случая $a_{2j-1}=0$, или $a_{2j}=0$, се получава от формулата (20) чрез граничен преход.

Забележка 2. Съществуването на решение на задачата T_1^1 може да се докаже и посредством метода на интегралните уравнения. Както в задачата T_1[2], за определянето на функцията $\nu(x)=u_y(x,0), -1<x<1$ (предполагаме, че σ съвпада със σ_0 и $\varphi=0$) получаваме сингулярното интегрално уравнение

$$\text{(25)} \qquad \lambda(x)\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-tx}\right)\nu(t)\,dt=-f(x),$$

където функциите $\lambda(x)$ и $f(x)$ са същите, както по-горе.

Както в работата [9], заключаваме, че общото реално решение на това уравнение[1], което удовлетворява условието на Хьолдер и принадлежи към класа h_0, се дава с формулата

$$\nu(x) = -\mathrm{Im}\,\Phi'^{+}(x),$$

където $\Phi'^{+}(x)$ се определя от (19) по формулата на Сохоцки-Племел [7]. След прости преобразувания получаваме

$$\nu(x) = \pm\frac{1}{2}f(x) \pm \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{2m}\int_{a_i}^{a_{i+1}}(-1)^i\frac{\Pi(x)}{\Pi(t)}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-tx}\right)f(t)\,dt - \tag{26}$$

$$-\mathrm{Im}\frac{1+i}{2}\frac{C_0+C_1x+\cdots+C_{2m-1}x^{2m-1}}{R(x)},$$

където

$$\Pi(x) = \sqrt{\left|(x-1)\prod_1^m(x-a_{2k-1})(x-b_{2k-1}):(x+1)\prod_1^m(x-a_{2k})(x-b_{2k})\right|}$$

и знакът $+$ се взема при $x \in L_1$, знакът $-$ при $x \in L_2$.

2. Сега ще разгледаме една гранична задача за уравнението (1), представляваща обобщение на задачата на Трикоми [1,3] в случая, когато първата производна на граничната функция в хиперболичната част на областта D има краен брой точки на прекъсване от първи род.

Задача T_0. Търси се функция $u(x,y)$ със следните свойства:

1) $u(x,y)$ удовлетворява уравнението (1) в областта D навсякъде с изключение на точките от отсечката AB и характеристиките E_kA_k, E_kB_k, $k=1,\ldots,n$;

2) $u(x,y)$ е непрекъсната в затворената област $\bar{D}$;

3) частните производни u_x и u_y са непрекъснати в областта D с изключение може би на точките от характеристиките E_kA_k, E_kB_k, $k=1,\ldots,n$, в които u_x и u_y могат да се обръщат в безкрайност от логаритмичен тип, и точките A, B, в които u_x и u_y могат да се обръщат в безкрайност от ред, по-малък от единица;

4) $u(x,y)$ приема зададени стойности

$$u|_{\sigma} = \varphi, \tag{27}$$

$$u|_{A_kA_{k+1}} = \psi_k(x), \qquad k=0,1,\ldots n, \tag{28}$$

където функцията φ е непрекъсната, а $\psi_k(x)$ са двукратно диференциру-

[1] В работата [2] е получено само едно частно решение на сингулярното интегрално уравнение (11), принадлежащо към класа на търсените решения. Посредством него не може да се построи решение на задачата T_1 при $n>1$. Това е очевидно, ако $\psi_k(x)=a_k$, $k=0,1,\ldots,n$, където a_k са константи, и $\varphi=0$. Общото реално решение от класа h_0 може да се намери, както в задачата T_1^1.

Задачата T_1 при $n>1$ може да няма решение. Например при $n=2m$, като работим, както в задачата T_1^1, за определянето на константите $C_0, C_1,\ldots,C_{m-1}$ ще имаме $2m$ условия, понеже функцията $u(x,y)$ трябва да приема определени стойности в точките E_k, $k=1,\ldots,2m$.

еми функции, вторите производни на които удовлетворяват условието на Хьолдер; при това

$$\varphi(-1)=\psi_0(-1),\ \psi_k\left(\frac{a_{k+1}-1}{2}\right)=\psi_{k+1}\left(\frac{a_{k+1}-1}{2}\right),\ k=0,1,\ldots,n-1.$$

По същество T_0 е задача от типа на задачата T_1^1.

В областта D_2 решението $u(x,y)$ има вида

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu(t)\,dt, \tag{29}$$

където

$$\tau(x)=u(x,0),\ -1\leq x\leq 1 \ \text{ и } \ \nu(x)=u_y(x,0),\ -1<x<1. \tag{30}$$

От (29) и (28) получаваме

$$\tau(-1)+\tau(x)-\int_{-1}^{x}\nu(t)\,dt=2\psi_k\left(\frac{x-1}{2}\right),\ a_k\leq x\leq a_{k+1},$$

$$k=0,1,\ldots,n,$$

или като диференцираме и вземем пред вид означенията (30),

$$u_x-u_y=f(x),\ a_k<x<a_{k+1},\ k=0,1,\ldots,n, \tag{31}$$

където $f(x)=2\dfrac{d}{dx}\psi_k\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$.

Оттук, както в задачата T_1^1, заключаваме, че ако $\psi_k(x)\equiv 0, k=0,1,\ldots,n$, решението $u(x,y)$ на задачата T_0 в затворената област $\bar{D}_1$ достига отличен от нула екстремум върху дъгата σ (принцип за екстремум).

От принципа за екстремум непосредствено следва единствеността на решението на задачата T_0.

За простота ще предполагаме, че σ съвпада с полуокръжността σ_0 и $u|_{\sigma_0}=0$. Допълнително ще предполагаме, че u_x и u_y са непрекъснати в $\bar{D}_1$ с изключение може би на точките E_k, $k=0,1,\ldots,n$.

Означаваме с $\Phi(z)$ функцията $u(x,y)+iv(x,y)$, която е холоморфна в областта D_1 и удовлетворява условието $\Phi(-1)=0$.

Нека $a_j<0<a_{j+1}$. Както в задачата T_1^1 намирането на функцията $\Phi'(z)$ се свежда до намирането на функция, частично-холоморфна в горната полуравнина, притежаваща нула от втори ред в безкрайност по граничните условия[1]

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}(1-i)\,\Phi'(x)=f(x), && -1<x<1,\\ &\operatorname{Im}(1-i)\,\Phi'(x)=-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right), && -\infty<x<-1,\ 1<x<\infty.\end{aligned} \tag{32}$$

Решението на тази задача се дава с формулата на Келдиш-Седов, която след прости преобразувания добива вида

[1] Подразбираме, че точките на прекъсване на функцията $f(x)$, a_k, $k=1,\ldots,n$ се изключват.

$$\Phi'(z)=\frac{1-i}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{1-tz}\right)f(t)\,dt, \tag{33}$$

където под $\sqrt{z^2-1}$ подразбираме клон, холоморфен в разрязаната по $(-1,1)$ равнина, който приема положителна стойност при $x>1$.

Функцията $\Phi'(z)$ е ограничена в точката -1, обръща се в безкрайност от ред $\frac{1}{2}$ в точката 1 и има логаритмична особеност в точките a_k, $k=1,\ldots,n$.

Като интегрираме (33), получаваме

$$\Phi(z)=\frac{1-i}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{t^2-1}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{1-tz}\right)\psi(t)\,dt, \tag{34}$$

където $\psi(x)=2\psi_k\left(\frac{x-1}{2}\right)$, $a_k<x<a_{k+1}$, $k=0,1,\ldots,n$.

Реалната част на функцията $\Phi(z)$ дава търсената функция $u(x,y)$ в областта D_1. В областта D_2 решението се дава с формулата (29), където $\tau(x)$ и $\nu(x)$ се определят съответно от (34) и (33) по известната формула на Сохоцки—Племел

$$\tau(x)=\frac{1}{2}\psi(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{t^2-1}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-tx}\right)\psi(t)\,dt,\qquad -1\leq x\leq 1, \tag{35}$$

$$\nu(x)=-\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-tx}\right)f(t)\,dt,\qquad -1\leq x\leq 1. \tag{36}$$

При $n=0$ от формулата (34), (35), (36) и (29) получаваме решението на задачата на Трикоми.

По аналогичен начин[1] могат да бъдат обобщени задачите T_2, T_3 [3] и T_1^1.

Постъпила на 3. IX. 1962 г.

[1] Кратко изложение на резултатите, получени в настоящата работа, е дадено в [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., А. В. Бицадзе, К проблеме уравнений смешанного типа, ДАН СССР, **70**, № 3, 1950, 373—376.
2. Бицадзе А. В., О некоторых задачах смешанного типа, ДАН СССР, **70**, № 4, 1950, 561—564.
3. Бицадзе А. В., К проблеме уравнений смешанного типа, Труды Мат. ин-та АН СССР, **41**, 1953.
4. Джураев Т. Д., Об уравнениях смешанно-составного типа, Изв. АН Уз. ССР, 6, 1961, 3—14.
5. Gellerstedt S., Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx}+z_{yy}=0$, Arkiv f. M. A. O. F., **26A**, 3, 1937, 1—32.
6. Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, Итоги науки, Физ.-мат. науки, **2**, изд. АН СССР, 1959.
7. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, Москва, 1962.
8. Келдыш М. В., Л. И. Седов, Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций, ДАН СССР, **16**, № 1, 1937, 7—10.
9. Бицадзе А. В., Об одном элементарном способе решения некоторых граничных задач теории голоморфных функций и связанных с ними особых интегральных уравнений, УМН, XII, вып. 5, 1957, 185—190.
10. Каратопраклиев Г., О некоторых краевых задачах для уравнения $u_{xx}+\operatorname{sign} y u_{yy}=0$, ДАН СССР, 149, № 6 (1963).

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $u_{xx}+\operatorname{sign} y u_{yy}=0$. I

Г. Каратопраклиев

(Резюме)

В настоящей работе рассматриваются две краевые задачи для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (1), типа задачи T_1 [1—3].

Пусть D односвязная область плоскости xOy, ограниченная линией Жордана σ с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$, расположенной в верхней полуплоскости $y>0$, и характеристиками $AC: y=-x-1$ и $BC: y=x-1$, выходящими из точки $C(0,-1)$. Пусть $E_k(a_k,0)$, $k=1,\ldots,n$, $-1<a_1<\ldots<a_n<1$ — заданные точки отрезка AB. Точки $A_k\left(\frac{a_k-1}{2}, -\frac{a_k+1}{2}\right)$ и $B_k\left(\frac{a_k+1}{2}, \frac{a_k-1}{2}\right)$, $k=0,1,\ldots,n+1$ $(a_0=-1,\ a_{n+1}=1)$ лежат, соответственно, на характеристиках AC и BC. Обозначим через $E_{ik}\left(\frac{a_i+a_k}{2}, \frac{a_i-a_k}{2}\right)$, $i\leq k$, $i=0,1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,n+1$ точку пересечения характеристик E_iB_i и E_kA_k $(E_0=A,\ E_{n+1}=B,\ E_{0k}=A_k,\ E_{k,n+1}=B_k)$. Обозначим через D_1 и D_2, соответственно, эллиптическую и гиперболическую части смешанной области D.

Задача T_1^1. Требуется определить функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x,y)$ является решением уравнения (1) в области D всюду, кроме точек отрезка AB и характеристик E_kA_k, E_kB_k, $k=1,\ldots,n$; 2) $u(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$; 3) частные производные u_x и u_y непрерывны в области D всюду, кроме, быть может, точек характеристик E_kA_k, E_kB_k, $k=1,\ldots,n$ и точек A, B, в которых u_x и u_y могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы; 4) $u(x,y)$ принимает заданные значения

$$u=\varphi \qquad \text{на } \sigma,$$

$$u=\psi_k(x) \text{ на } E_k E_{k-1,k} \text{ при нечетных } k,$$

$$u=\psi_k(x) \text{ на } E_{k-1} E_{k-1,k} \text{ при четных } k,$$

где φ — непрерывная, а $\psi_k(x)$ — дважды дифференцируемые функции, вторые производные которых удовлетворяют условию Гельдера, причем $\psi_{2k-1}(a_{2k-1})=\psi_{2k}(a_{2k-1})$, $k=1,2$, (для четных n должно выполнятся и условие $\psi_{n+1}(1)=\varphi(1)$).

Рассмотрен случай $n=2m$. Доказывается существование и единственность решения задачи T_1^1.

Задача T_0. Требуется определить функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x,y)$ является решением уравнения (1) в области D всюду, кроме точек отрезка AB и характеристик $E_k A_k$, $E_k B_k$; 2) $u(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$; 3) u_x и u_y непрерывны в области D всюду, кроме, быть может, точек характеристик $E_k A_k$, $E_k B_k$, $k=1,\ldots,n$, в которых u_x и u_y могут иметь логарифмическую особенность и точек A, B, в которых u_x и u_y могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы; 4) $u(x,y)$ принимает заданные значения

$$u=\varphi \qquad \text{на } \sigma,$$

$$u=\psi_k(x) \qquad \text{на } A_k A_{k+1},\ k=0,1,\ldots,n,$$

где φ — непрерывная, а $\psi_k(x)$ — дважды дифференцируемые функции, вторые производные которых удовлетворяют условию Гельдера, причем

$$\varphi(-1)=\psi_0(-1),\ \psi_k\left(\frac{a_{k+1}-1}{2}\right)=\psi_{k+1}\left(\frac{a_{k+1}-1}{2}\right),\ k=0,1,\ldots,n-1.$$

Эта краевая задача является обобщением задачи Трикоми [1, 3] в случае, когда первая производная граничной функции в гиперболической части области D имеет конечное число точек разрыва первого рода.

Доказывается существование и единственность решения задачи T_0.

Отмечается, что аналогичным способом могут быть обобщены задачи T_2, T_3 [3] и T_1^1.

Превел авторът

ON CERTAIN BOUNDARY PROBLEMS FOR THE EQUATION $u_{xx}+\operatorname{sign} y\, u_{yy}=0$. I

G. Karatoprakliev

(*Summary*)

The paper treats two boundary problems for the equation of Lavrentef-Bitsadze (1) of the type of problem T_1 [1—3].

Let us assume that D is a simple-connected region in the plane xOy bounded by a Jordan-line σ with ends at $A(-1,0)$, $B(1,0)$, situated in the upper half-plane $y>0$, and the characteristics $AC=y=-x-1$ and BC: $y=x-1$ of equation (1), proceeding from point $C(0,-1)$. Let $E_k(a_k,0)$, $k=1,\dots,n$, $-1<a_1<\dots<a_n<1$, are given points of the segment AB. The points $A_k\left(\frac{a_k-1}{2}, -\frac{a_k+1}{2}\right)$ and $B_k\left(\frac{a_k+1}{2}, \frac{a_k-1}{2}\right)$, $k=0,1,\dots,n+1$ $(a_0=-1,\ a_{n+1}=1)$ lie on the characteristics AC and BC respectively. We denote by $E_{ik}\left(\frac{a_i+a_k}{2}, \frac{a_i-a_k}{2}\right)$, $i\leq k$, $i=0,1,\dots,n$, $k=1,\dots,n+1$, the point of intersection of the characteristics $E_i B_i$ and $E_k A_k$ $(E_0=A$, $E_{n+1}=B$, $E_{0k}-A_k$, $E_{k,n+1}=B_k)$. D_1 is used to denote the elliptical part of the mixed region D, while D_2 denotes the hyperbolic part.

Problem T_1^1. A function $u(x,y)$ is asked possessing the following properties: 1) $u(x,y)$ is a solution of the equation (1) in the whole region D, with the exception of the points of the segment AB and the characteristics E_kA_k and $E_kB_k, k=1,\dots,n$; 2) $u(x,y)$ is continuous in $\bar{D}$; 3) u_x and u_y are continuous in D, with the probable exception of the points of the characteristics E_kA_k, E_kB_k, $k=1,\dots,n$, and points A, B, in which u_x and u_y can be infinite of an order smaller than one; 4) $u(x,y)$ assumes the determined values (2), (3) and (4).

The case of $n=2m$ has been examined and the existence and uniqueness has been demonstrated of a solution to problem T_1^1.

Problem T_0. A function $u(x,y)$ is asked possessing the following properties: 1) $u(x,y)$ is a solution of the equation (1) in the whole region D, with the exception of the points of the segment AB and the characteristics E_kA_k, E_kB_k, $k=1,\dots,n$; 2) $u(x,y)$ is continuous in $\bar{D}$; 3) u_x and u_y are continuous in D, with the probable exception of the points of characteristics E_kA_k, E_kB_k, $k=1,\dots,n$, wherein u_x and u_y can be infinite of a logarithmic type and of points A and B in which u_x and u_y can be infinite of an order smaller than one; 4) $u(x,y)$ assumes given values (27) and (28).

This boundary problem is a generalization of Tricomi's problem [1—3] in the case when the first derivative of the boundary function in the hyperbolic part of D has a finite number of discontinuities of the first type.

It is stated in the paper that problems T_2, T_3 [3] and T_1^1 can be generalized in an analogous manner.

Превел Г. Чакалов