БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА КРОФТОНА В ТЕОРИИ КОНГРУЭНЦИЙ ПРЯМЫХ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Г. Станилов и Р. Зуланке

В работе выводятся интегральные формулы типа Крофтона для конгруэнций прямых в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Эти формулы являются обобщением соответствующих формул для конгруэнций прямых в трехмерном евклидовом пространстве E^3 [8]. Нам кажется, что эти формулы являются интересными примерами в общей интегральной геометрии пространств Клейна, начала которой положил S. Chern в [10] (о дальнейшем развитии общей теории см.[7]). Для получения этих формул нам понадобились некоторые сведения из теории конгруэнций прямых в евклидовом пространстве E^n, которые мы изложили в § 2 настоящей работы. При этом наше изложение отличается от представлений [2, 3, 9] и дает только то, что нам нужно в § 3. Некоторые сведения о пространстве прямых $G(n)$ в пространстве E^n приводятся в § 1.

§ 1. Пространство прямых $G(n)$

Пусть $G(n)$ пространство всех ориентированных прямых в n-мерном евклидовом пространстве E^n, $L(n)$ — группа движений в E^n, $O(n)$ — ортогональная группа в E^n и R — тело вещественных чисел. Пространство $G(n)$ является однородным пространством $L(n)/_{R\times O(n-1)}$ размерности $2(n-1)$. Рассмотрим сферическое отображение

$$g\in G(n)\to g_n\in S^{n-1}, \tag{1}$$

где g_n единичный вектор прямой g и S^{n-1} гиперсфера в E^n. Каждой прямой g, принадлежащей координатной окрестности U пространства $G(n)$, ставим в соответствие сопровождающий репер

$$g\in U\to(x,\ g_i),\quad i=1,2,\dots,n, \tag{2}$$

причем векторы g_i ортонормированны и

$$x\in g,\quad g_n\in g. \tag{3}$$

Переход к другому реперу осуществляется пресбразованием группы изотропии $R\times O(n-1)$:

(4) $$\hat{x} = x + tg_n,$$

(5) $$\hat{g}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n-1} A_{\alpha\beta} g_\beta, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n-1; \quad (A_{\alpha\beta}) \in O(n-1).$$

Как обычно имеют место деривационные уравнения

(6) $$dx = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i g_i, \quad dg_i = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} g_k; \quad \omega_{ik} + \omega_{ki} = 0,$$

и соответствующие уравнения структуры

(7) $$D\sigma_k = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \wedge \omega_{ik}, \quad D\omega_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \wedge \omega_{jk}.$$

Формы σ_i, ω_{ik} преобразуются при преобразовании (4) по законам

(8) $$\hat{\omega}_{ij} = \omega_{ij}, \quad \hat{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha + t\omega_{n\alpha}, \quad \hat{\sigma}_n = \sigma_n + dt$$

и при преобразовании (5) следующим образом:

(9) $$\hat{\sigma}_\alpha = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \varrho_\beta, \quad \hat{\sigma}_n = \sigma_n,$$

(10) $$\hat{\omega}_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma, \delta} A_{\alpha\delta} A_{\beta\gamma} \omega_{\delta\gamma} + \sum_{\gamma} A_{\beta\gamma} dA_{\alpha\gamma},$$

(11) $$\hat{\omega}_{n\alpha} = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \omega_{n\beta};$$

при этом $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n-1$.

Из (8)—(11) легко получаются следующие инвариантные формы пространства $G(n)$:

(12) $$\varphi = \sum_{\alpha} (\omega_{n\alpha})^2,$$

(13) $$\Phi = \omega_{n1} \wedge \omega_{n2} \wedge \quad \wedge \omega_{n, n-1};$$

φ — линейный елемент и Φ — объем сферического отображения. Дальше из (8), (9) следует соотношение

$$D\hat{\sigma}_n = D\sigma_n,$$

а из (7) следует существование второй инвариантной формы степени два

(14) $$\Psi = D\sigma_n = \sum_{\gamma} \omega_{n\gamma} \wedge \sigma_\gamma.$$

Из [5, 6] известно, что в $G(n)$ существует инвариантная плотность

(15) $$dg = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_{n-1} \wedge \omega_{n1} \wedge \quad \wedge \omega_{n,n-1}.$$

В пространстве $G(3)$ прямых пространства E^3 существует инвариантная псевдо-римановая метрика индекса два [4], а в других пространствах $G(n)$, $n>3$, нет инвариантных невырожденных псевдо-римановых метрик. Все-таки возможно, как будет показано в § 2, определить на конгруэнции $K^2 \subset G(n)$ инвариантную форму, обобщающую индуцированную метрикой пространства $G(3)$ вторую квадратическую форму ψ (момент двух бесконечно близких прямых) конгруэнции.

§ 2. Конгруэнции прямых в пространстве $G(n)$

Рассмотрим двухпараметрическое многообразие K^2 прямых

$$g(u, v) \in K^2 \subset G(n), \tag{16}$$

которое коротко будем называть конгруэнцией. Конгруэнция K^2 назовем регулярной, если отображение

$$\pi: \quad g \in K^2 \to g_n \in S^{n-1} \tag{17}$$

регулярно (локально взаимно однозначно). В дальнейшем предполагается регулярность и достаточная гладкость рассматриваемых конгруэнций.

Пусть $V_g^2 = T_g[\pi(K^2)]$ касательная плоскость сферического образа конгруэнции K^2 в точке g_n. Каждой прямой g соответствует разложение пространства E^n в прямую сумму взаимно ортогональных подпространствах:

$$E^n = V_g^2 \oplus W_g^{n-3} \oplus \bar{g}, \tag{18}$$

где $\bar{g}$ — векторное пространство прямой g. Выбираем сопровождающий репер конгруэнции K^2 так, что

$$\begin{aligned} & x \in g, \quad g_1, g_2 \in V_g^2, \\ & g_a \in W_g^{n-3}, \quad g_n \in \bar{g}, \quad a = 3, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{19}$$

По определению V_g^2 ясно, что

$$dg_n = \omega_{n1} g_1 + \omega_{n2} g_2 \tag{20}$$

и следовательно выполнены равенства

$$\omega_{na} = 0, \quad a = 3, \ldots, n. \tag{21}$$

Формы φ, Φ, Ψ пространства $G(n)$ индуцируют соответствующие инвариантные формы конгруэнции, которые мы обозначаем теми же буквами:

$$\varphi = (\omega_{n1})^2 + (\omega_{n2})^2, \quad \Phi = \omega_{n1} \wedge \omega_{n2}, \tag{22}$$

$$\Psi = \omega_{n1} \wedge \sigma_1 + \omega_{n2} \wedge \sigma_2. \tag{23}$$

Рассмотрим преобразование (4) начала репера. Пусть P_V (соответственно P_W) проекция пространства E^n на V (соответственно W), соответствующие разложению (18). Из

$$(24) \qquad d\hat{x}=dx+dtg_n+tdg_n$$

следует

$$(25) \qquad P_V d\hat{x}=P_V dx+t\,dg_n,$$

$$(26) \qquad P_W d\hat{x}=P_W dx.$$

Теперь построим инвариантную билинейную форму на K^2 со значениями в пространстве бивекторов $\bigwedge_2 E^n$. Пусть $\sigma, \tau \in T_g(K^2)$ — касательное пространство конгруэнции. Из (25) получим

$$(27) \qquad P_V d\hat{x}(\sigma)\wedge dg_n(\tau)=P_V dx(\sigma)\wedge dg_n(\tau)+dg_n(\sigma)\wedge dg_n(\tau).$$

Отсюда следует, что бивектор

$$(28) \qquad \Omega(\sigma,\tau)=\frac{1}{2}\,[P_V dx(\sigma)\wedge dg_n(\tau)+P_V dx(\tau)\wedge dg_n(\sigma)]$$

является инвариантным относительно преобразования начала (4); инвариантность относительно вращения в V_g или W_g тривиальна. По определению, $\Omega(\sigma,\tau)$ принадлежит подпространству $\bigwedge_2 V_g^2$ и поэтому имеет только один компонент, являющийся инвариантной симметрической билинейной формой:

$$(29) \qquad \Omega(\sigma,\tau)=-\psi(\sigma,\tau)\,g_1\wedge g_2.$$

Выражение квадратической формы $\psi=\psi(\sigma,\tau)$ через формы σ_i, ω_{ni} конгруэнции то же самое как в E^3([1], § 27):

$$(30) \qquad \psi=\sigma_2\omega_{n1}-\sigma_1\omega_{n2}.$$

Можно доказать, что эта форма ψ совпадает с формой $\psi^{(2)}$ у Ю. Г. Лумисте, определенной для $K^2\subset G(4)$ [3]. Положим

$$(31) \qquad \sigma_a=\lambda_a\omega_{n1}+\mu_a\omega_{n2}, \quad a=1, 2, \dots, n.$$

Тогда форма ψ принимает вид

$$(32) \qquad \psi=\lambda_2(\omega_{n1})^2+(\mu_2-\lambda_1)\omega_{n1}\omega_{n2}-\mu_1(\omega_{n2})^2.$$

При подходящем выборе векторов $g_1, g_2 \in V_g^2$ (отнеся формы ψ к главным осям относительно формы φ, определяющей евклидову метрику в $T_g(K^2)$), получим

$$(33) \qquad \mu_2-\lambda_1=0$$

и собственные значения $\lambda_2, -\mu_1$ являются инвариантами конгруэнции. Как и в пространстве E^3 конгруэнция K^2 называется эллиптической, гиперболической или параболической, если форма ψ соответственно знако-определенная, знако-переменная или вырожденная.

Из (22), (23) и (31) получаем как и в E^3

$$(34) \qquad \Psi=(\mu_1-\lambda_2)\,\Phi.$$

Точно так же, как и в E^3, можно определить центр и граничные точки прямой конгруэнции. Положим начало x в центр прямой. Получим

(35) $$\lambda_1+\mu_2=0.$$

Следовательно

(36) $$\lambda_1=\mu_2=0$$

Принимая во внимание (26), определим инвариантное линейное отображение

(37) $$\Lambda_g:\quad \sigma\in T_g(K^2)\to \Lambda_g(\sigma)=P_W dx(\sigma)\in W.$$

Простейший инвариант — ранг ϱ этого отображения дает возможность рассмотреть три случая: $\varrho=0, 1, 2$. В дальнейшем предполагается, что для всех прямых конгруэнции K^2 имеется тот же самый ранг.

Если ранг $\varrho=0$, то

$$\Lambda_g(\sigma)=\sum_{a=3}^{n-1}\sigma_a(\sigma)g_a=0\,.$$

Это означает, что

(38) $$\sigma_a=0,\quad \lambda_a=\mu_a=0,\quad a=3,\ldots,n-1.$$

Если ранг $\varrho=1$, то выбираем в качестве g_3 единичный вектор одномерного образа отображения Λ_g. Следовательно

(39) $$\Lambda_g(\sigma)=\sigma_3 g_3,\quad \sigma_a=0,\quad a=4,\ldots,n-1.$$

Ядра отображения Λ_g определяет поле особых направлений на K^2:

(40) $$\sigma_3=\lambda_3\omega_{31}+\mu_3\omega_{n2}=0.$$

Функции λ_3, μ_3 инварианты. Так как ориентация векторов g_1, g_2, g_3 пока произвольна, можно потребовать чтобы

(41) $$\lambda_3>0,\quad \mu_3\geqq 0.$$

Если ранг $\varrho=2$, возьмем векторы g_3, g_4 из образа отображения Λ_g, требуя чтобы

(42) $$\Lambda_g(m_1)=\lambda_3 g_3,\quad \lambda_3>0,$$

(43) $$\Lambda_g(m_2)=\mu_3 g_3+\mu_4 g_4,\quad \mu_4>0,$$

где m_1, m_2 некоторые направления из $T_g(K^2)$. Это дает

(44) $$\sigma_3=\lambda_3\omega_{n1}+\mu_3\omega_{n2},$$

(45) $$\sigma_4=\qquad\mu_4\omega_{n2},$$

(46) $$\lambda_4=0,$$

(47) $$\sigma_a=0,\quad a=5,\ldots,n-1$$

И так мы получили следующая

Теорема 1. Каждой регулярной конгруэнции K^2 можно присоединить семейство реперов x, g_i таким образом, что имеет место (20), где ω_{n1}, ω_{n2} линейно независимы и имеют место равенства

$$\lambda_1=\mu_2=\lambda_4=\lambda_a=\mu_a=0, \quad a=5, \dots, n-1. \tag{48}$$

Кроме того, в случае $\varrho=0$ имеет место равенство (38); в случае $\varrho=1$ имеют место (39), (44); в случае $\varrho=2$ имеют место (42)—(47). Остальные коэффициенты $\lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_3, \mu_4$ являются инвариантами конгруэнции.

Дальнейшая канонизация репера нам не нужна и мы ее в этой работе не приводим. Теперь дадим еще несколько теорем, толкующих геометрически полученные инварианты.

Определение. Конгруэнция K^2 называется нормальной, если существует (локально в окрестности каждой прямой) такая поверхность $F^2 \subset E^n$, что K^2 является системой нормалей поверхности F^2.

Теорема 2. Регулярная конгруэнция K^2 является нормальной тогда и только тогда, когда $\Psi=0$ на K^2.

Действительно, $\Psi=D\sigma_n=0$ является условием интегрируемости уравнения

$$\tilde{\sigma}_n=\sigma_n+dt=0.$$

Последнее уравнение определяет искомую поверхность:

$$\tilde{x}=x+t g_n.$$

Замечание. Эта теорема является частным случаем теоремой 6 в [3].

Теперь допустим, что конгруэнция K^2 содержит развертывающаяся поверхность:

$$F^2: \quad s \to g(s) \in K^2[u=u(s), \ v=v(s)], \tag{49}$$

где u, v параметры на K^2. Прямая $g(s)$ имеет представление

$$Y=x(s)+t g_n. \tag{50}$$

Линейчатая поверхность будет развертывающейся, если ее касательная плоскость вдоль образующей не изменяется. Пусть

$$\Pi(t, s)=\frac{\partial Y}{\partial s} \wedge \frac{\partial Y}{\partial t} \tag{51}$$

направляющий бивектор касательной плоскости. В случае развертывающейся поверхности существует функция $\lambda(t, s)$ так, что

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}=\lambda(t, s)\Pi \tag{52}$$

или функция $\mu(s)$ со свойством

$$\frac{dx}{ds} \wedge g_n=\mu(s) \frac{dg_n}{ds} \wedge g_n. \tag{53}$$

Пусть σ касательный вектор центральной кривой на K^2, соответствующий поверхности F^2. Из

$$dx=\sigma_a(\sigma)g_a, \quad dg_n=\omega_{n1}g_1+\omega_{n2}g_2 \tag{54}$$

легко следует, что (52) эквивалентно одновременному выполнению условий

$$(54^*) \qquad \Lambda(\sigma)=0, \quad \psi(\sigma)=0$$

для касательного вектора „кривой" (49). Непосредственно получается

Теорема 3. Для того, чтобы через каждую прямую регулярной конгруэнции можно было бы провести по меньшей мере одну развертывающуюся поверхность, необходимо $\varrho \leqq 1$, если через каждую прямую проходят две такие поверхности, то необходимо $\varrho=0$ для всех $g \in K^2$. При этом эти поверхности могут быть и мнимыми. Если наоборот $\varrho=0$, то для гиперболических K^2 существуют две вещественные, для параболических K^2 — одна вещественная и для эллиптических K^2 — две мнимые развертывающиеся поверхности через каждую прямую g. Если $\varrho=1$, то для существования такой поверхности необходимо и достаточно существование поля направлений, удовлетворяющих условиям (54).

Определение. Конгруэнция, для которой $\varrho=0$, называется фокальной.

Замечание. Для того, чтобы избежать недоразумений, заметим, что конгруэнция K^2, для которой $\varrho=0$, Ю. Г. Лумисте [2] называет конгруэнцией ранга 2.

§ 3. Интегральные формулы

Рассмотрим регулярную конгруэнцию K^2 и гиперплоскость E. Многообразие $G(n-1)$ прямых гиперплоскости зависит от $2(n-2)$ параметров. Поэтому число $\nu(E)$ прямых $g \in K^2$, инцидентных с гиперплоскостью E, для почти всех E конечно (или счетно). Пусть dE инвариантная плотность в пространстве гиперплоскостей. Интегрально-геометрическое определение площади конгруэнции K^2 можно дать формулой

$$(55) \qquad O(K^2)=\int \nu(E)dE.$$

Поставим себе задачу выразить этот интеграл через дифференциально-геометрические инварианты конгруэнции.

С каждой гиперплоскостью E можно связать репер (y, f_i), причем $y \in E$ и f_1 — нормальный вектор гиперплоскости. Пусть

$$(56) \qquad dg=\tau_i f_i, \quad df_i=\theta_{ik} f_k.$$

Тогда имеет место формула [5, 6]

$$(57) \qquad dE=|\tau_1 \wedge \theta_{12} \wedge \quad \wedge \theta_{1n}|$$

(плотность и мера всегда берутся со знаком $+$).

Теперь зафиксируем g и проинтегрируем по всем гиперплоскостям через g. Это значит, что вектор f_1 пробегает полугиперсферу S^{n-2} радиуса единицы в гиперплоскости $E(x, g_1, \ldots, g_{n-1})$. Так как dE не зависит от выбора реперов, можно потребовать

$$(58) \qquad x=y, \quad g_n=f_n.$$

Векторы $f_2, \dots, f_{n-1}$ — касательные векторы гиперсферы в точке f_1. Поэтому имеет место

$$(59)\qquad \theta_{12}\wedge \qquad \wedge\theta_{1n-1}=d\hat{S}^{n-2}$$

— плотность площади на $\hat{S}^{n-2}$. Дальше из равенств

$$(60)\qquad f_1=\sum_{a=1}^{n-1} a_a g_a, \quad \sum_{a=1}^{n-1}(a_a)^2=1,$$

получим

$$(61)\qquad \tau_1=\left< dx, \sum_{a=1}^{n-1} a_a g_a \right> = \sum_{a=1}^{n-1} a_a\sigma_a = \sum_{a=1}^{4} a_a\sigma_a,$$

ибо $\sigma_a=0$ для $a>4$. Таким же образом имеем

$$(62)\qquad \theta_{1n}=-a_1\omega_{n1}-a_2\omega_{n2}.$$

Обратимся к (61). Выражая σ_a через ω_{na} по (31) и принимая во внимание теорему 1 (48), получим

$$(63)\qquad \tau_1\wedge\theta_{1n}=\gamma(a_1, a_2, a_3, a_4)\omega_{n1}\wedge\omega_{n2},$$

где γ, в самом общем случае $\varrho=2$, является квадратичной формой индекса два:

$$(64)\qquad \gamma=\mu_1 a_1^2-\lambda_2 a_2^2+\mu_3 a_1 a_3-\lambda_3 a_2 a_3+\mu_4 a_1 a_4.$$

Из (51), (57) и (63) получим

$$(65)\qquad dE=|\gamma\omega_{n1}\wedge\omega_{n2}\wedge d\hat{S}^{n-2}|.$$

Так как при интегрировании, описанном выше, каждая гиперплоскость встречается $\nu(E)$ раз, существует интегральная формула типа Крофтона:

$$(66)\qquad \int_E \nu(E)dE=\int F(\mu_1, \lambda_2, \mu_3, \lambda_3, \mu_4)\ \Phi .$$

При этом Φ определяется уравнением (22), а F — универсальная функция указанных инвариантов конгруэнции, вид которой не зависит от специальных K^2, но зависит от ранга ϱ и индекса формы φ. Функция F возникает при интегрировании по полугиперсфере $\hat{S}^{n-2}$. Вычисление этого интеграла довольно громоздко и мы его выполним только для фокальных конгруэнций.

Пусть $\varrho=0$. Тогда имеет место

$$(67)\qquad \gamma=\gamma(a_1, a_2)=\mu_1 a_1^2-\lambda_2 a_2^2.$$

Используем следующее представление гиперсферы

$$a_1=r\cos a, \qquad a_2=r\sin a,$$

$$(68)\qquad \begin{aligned} &a_3=\sqrt{1-r^2}\cos\varphi_1,\quad a_4=\sqrt{1-r^2}\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\ldots\\ &a_{n-2}=\sqrt{1-r^2}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-5}\cos\varphi_{n-4},\\ &a_{n-1}=\sqrt{1-r^2}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-4}\sin\varphi_{n-3}. \end{aligned}$$

В случае $n=3$ имеем просто $a_1=\cos\varphi_1$, $a_2=\sin\varphi$, а при $n=4$ $a_1=r\cos a$, $a_2=r\sin a$, $a_3=\sqrt{1-r^2}$. Область интегрирования:

$$(69)\qquad 0\leqq r\leqq 1,\quad 0\leqq a\leqq\pi,\quad 0\leqq\varphi_1\leqq 2\pi,\quad 0\leqq\varphi_k\leqq\pi,\quad k=2,\ldots,n-4.$$

Для плотности гиперсферы получим

$$(70)\qquad d\hat{S}^{n-2}=r(1-r^2)^{\frac{n-5}{2}}\,dr\wedge da\wedge d\hat{S}^{n-4},\quad n\geqq 4.$$

Таким образом имеем

$$(71)\qquad \int\nu(E)dE\int_{(k^2,}\int_0^\pi|\mu_1\cos^2 a-\lambda_2\sin^2 a\,da\,|\,\omega_{n1}\wedge\omega_{n2}|\int_0^1 r^3(1-r^2)^{\frac{n-5}{2}}\,dr.O(\hat{S}^{n-4}).$$

Интеграл по r — бэта-функция

$$(72)\qquad \frac{1}{2}B\left(2,\frac{n-3}{2}\right)=\frac{2}{(n-1)(n-3)},\quad n>3.$$

Как известно, для площади гиперсферы радиуса единицы имеем

$$(73)\qquad O(\hat{S}^{n-4})=\frac{2(\pi)^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)},\quad n>3.$$

В случае $n=3$, вместо второй строки формулы (71) стоит просто единица, а в случае $n=4$ имеем $O(\hat{S}^{n-4})=O(S^0)=2$. Интеграл по a вычисляется точно так же как в трехмерном случае [8]. Следовательно, имеет место

Теорема 4. Для любой регулярной конгруэнции определенного ранга имеет место формула (66), где функция F от инвариантов λ_a, μ_a конгруэнции зависит от типа конгруэнции. В случае $\varrho=0$ и если конгруэнция эллиптическая или параболическая, имеет место формула

$$(74)\qquad \int_{(E)}\nu(E)\,dE=C_n\int_{(K^2)}|\Psi|,$$

а если конгруэнция гиперболическая, имеет место

$$(75)\qquad \int_{(E)}\nu(E)\,dE=\frac{4}{\pi}C_n\int_{(K^2)}\left\{\sqrt{\lambda_2\mu_1}+(\mu_1-\lambda_2)\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\mu_1}{\lambda_2}}-\frac{\pi}{4}\right]\right\}|\Phi|.$$

При этом

$$(76)\qquad C_{2m}=\frac{(2\pi)^{m-1}}{(2m-1)!!},\quad m>1,$$

$$C_{2m+1}=\frac{1}{2}\frac{\pi^m}{m!},\quad m\geq 1. \tag{77}$$

В конце отметим, что эти результаты мы сообщили коротко на Третьей Всесоюзной конференции по геометрии в 1967 году, Казан, СССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников. С. П. Теория конгруэнций. Москва — Ленинград, 1950.
2. Лумисте, Ю. Г. Дифференциальная геометрия линейчатых поверхностей V_3 в R_4. тем. сборн., Матем. сборн., **50**, 1960, 203—220.
3. Лумисте, Ю. Г. Многомерные линейчатые поверхности евклидова пространства. Ма- **55**, 1961, 411—420.
4. Норден, А. П., М. Е. Цыпкин. О соответствии между линейчатыми поверхностями и кривыми риманова пространства. ДАН СССР, **86**, 1952, 23—26.
5. Petkantschin, B., Integralgeometrie 6. Zusammenängen zwischen den Dichten der linearen Unterräume im *n*-dimensionalen Raum. Hamburger Abh., **11**, 1936, 249—310.
6. Blaschke, W. Integralgeometrie 1. Ermittlungen den Dichten für lineare Unterräume im E_n. Exposee de géometrie differentielle I.Paris, 1935.
7. Sulanke, R. Croftousche Formeln in Kleinschen Räumen. Math. Nacht., **32**, 1966, 217—241.
8. Snlankc, R. Croftonsche Formeln für Strahlensysteme des euklidischen Raumes. Math. Nachn., 1968 (im Drusk).
9. Švec, A. Congruences de droites dans E_n. Čescoslov. Mat. jurnal, 8 (83), 1958, 552—562.
10. Chern, C. On integral geometry in Klein spaces, Ann. of Math., **43**, 1942, 178—189.

Поступила 30. X. 1967 г.

ФОРМУЛИ НА КРОФТОН В ТЕОРИЯТА НА КОНГРУЕНЦИИТЕ ОТ ПРАВИ В ЕВКЛИДОВОТО ПРОСТРАНСТВО E^n

Гр. Станилов и Р. Зуланке

(*Резюме*)

В работата се дават формулите (74), (75) от Крофтонов тип. Първата от тях се отнася за една фокална елиптична или параболична конгруенция от прави, а втората — за реална хиперболична конгруенция от прави. Константите C_n се дават с формулите (76), (77). dE е плътността на хиперравнините, $\nu(E)$ е броят на правите от конгруенцията K^2, инцидентни с една хиперравнина, Φ, Ψ са инвариантните външни форми (13), (14) на конгруенцията, λ_2, μ_1 са единствените инварианти от първи ред на правата от конгруенцията.

CROFTONSCHE FORMELN IN DER GERADENKONGRUENZEN IM EUKLIDISCHEN RAUM E^n

G. Stanilow und R. Sulanke

(Zusammeufassung)

In der vorliegeneen Arbeit stellen wir die Formeln (74), (75) vom Croftonschen Typ auf. Die erste Formel (74) gilt für eine fokale elliptisch oder parabolische Geradenkongruenz; die zweite Formel — für eine fokale hyperbolische Geradenkongruenz. Die Konstanten C_n werden durch (76), (77) gegeben. dE ist Hyperebenendichte und $\nu(E)$ ist die Anzahl der Geraden g, die zu der Geradenkongruenz K^2 und einer Hyperebene E gehören. Φ, Ψ sind die Invarianten äußeren Formen (13), (14) der Kongruenz; λ_2, μ_1 — die einzige Invarianten erster Ordnung der Geraden $g \in K^2$.