Теория на Експоненциалните Функционали на Процеси на Леви

Младен С. Савов

Институт по Математика и Информатика
Българска Академия на Науките

Автореферат

на дисертационен труд
за присъждане на научна степен доктор на науките в направление
4.5 Математика, научна специалност Теория на вероятностите и
Математическа статистика

гр. София, 2016

Съдържание

Благодарности

Бих искал да изкажа благодарност на проф. Е. Панчева и проф. Р. Дони, че насочиха моите интереси към една съвременна област на теория на вероятностите, а именно теорията на процесите на Леви. По време на моето развитие те винаги стимулираха моята независимост като учен и с това допринесоха за възможността да открия самостоятелно нови области за изследванията ми.

Също така искам да благодаря на проф. Н. Янев и доц. Н. Нейков, които неколкократно ме подкрепиха за написването на този труд.

Благодаря и на съавтора си П. Пати, с когото нееднократно сме дискутирали математика във всевъзможни моменти и от всевъзможни места.

Благодаря най-искрено и на най-близките ми хора, които ме подкрепят през цялата ми досегашна кариера.

Глава 1

Увод

1.1 Цели и кратък обзор на дисертационния труд

Дисертацията е посветена на глобалното изучаване на експоненциалните функционали на процеси на Леви - една съвременна област от теорията на вероятностите, която придоби важност през последните две десетилетия. Най-общо, основният принос на кандидата се състои в разработването на единна методология, която позволи общото изучаване на експоненциалните функционали. Преди резултатите, отразени в Глава 5 на дисертацията, може да се каже, че теорията на експоненциалните функционали бе силно фрагментирана в смисъл, че различни методи се използваха за добиването на различни частични резултати. Такива са и проследените приноси на Глави 2,3 от дисертационния труд, които са част от процеса на достигане на цялостната разработка.

Първите стъпки в разработването на единна методология са направени в Глава 2 и Глава 3 от дисертационния труд, където сравнително обща факторизация на закона на експоненциалния функционал бе добита с помощта на теория на стационарните Марковски процеси, разнообразни трансформации и едно фундаментално рекурентно уравнение. Постепенно се изясни, че основната съществена връзка се състои между експоненциалните функционали на процеси на Леви и клас от специални функции, обобщаващи известната Гама функция и са решение на въпросното рекурентно уравнение. Тази връзка, установена в Глава 5 и анонсирана в Глава 4, позволява множество нови и общи резултати за разпределението на закона на експоненциалния функциал на процеси на Леви като: асимптотика, факторизация, гладкост, развитие в ред и т.н. Глава 6 синтезира основните научни приноси на дисертационния труд.

Експоненциалните функционали на процеси на Леви играят роля в редица други области и изследвания като: спектрална теория на себеподобните Марковски процеси; оценяването на Азиатски опции; разклоняващи се процеси в случайни среди; случайна фрагментация и др.

1.2 Структура на дисертационния труд

Дисертацията съдържа шест глави. Първата е уводна и въвежда накратко проблемите, които ще се разискват, прави обзор на литературата и въвежда някои понятия от дисертацията. Глава 2 представлява всъщност статия [46] ([1] в Секция 1.3.1), докато Глава 3 съдържа обобщението на [46] добито в статия [51]([2] в Секция 1.3.1). Глава 4 съдържа краткия доклад [52]([3] в Секция 1.3.1), който анонсира основните резултати представени в Глава 5, която се базира на препринта [54]([4] в Секция 1.3.1). Изрично трябва да се отбележи, че в процеса на разглеждане на [52] бяха представени и рецензирани основните идеи зад доказателствата на анонсираните резултати. Нещо повече, резултатите от Глава 5 са представени на седем международни конференции и на четири семинара. Резултатите от Глава 5 зависят ключово от следните разработки на кандидата [19, 22] ([5,6] в Секция 1.3.2), допълват се от статията [39]([8] в Секция 1.3.2), надграждат работата [21]([7] в Секция 1.3.2) и играят съществена роля в [55, 53]([9,10] в Секция 1.3.2). Глава 6 синтезира основните научни приноси на дисертационния труд. Понеже всяка глава, изключая Глави 1 и 6, по същество е статия, то основните идеи и сметки зад ключовите резултати са представени в настоящия автореферат.

1.3 Публикации на кандидата

Прилагаме списък от публикувани статии и статии в рецензия, които са свързани с дисертацията. Логически ги разделяме на следните групи, като прилагаме и съответния брой на цитиранията (общо 52), намерени в базата данни Скопус, изключвайки самоцитирания:

1.3.1 Статии, на които се базират главите в дисертационния труд

[1] Pardo, J.C., Patie, P. and Savov, M. (2012) “*A Wiener-Hopf type of factorization for the exponential functional of Lévy processes*”, *J. of London Math. Soc.* **96** (2), 930–956, **IF: 0.80**; **Citations: 3**

[2] Patie, P. and Savov, M. (2012) “*Extended factorizations of exponential functionals of Lévy processes*”, *Electron. J. of Probab.* **17**, No.38, 1–22, **IF: 0.785**; **Citations: 2**

[3] Patie, P. and Savov, M. (2013) “*Exponential functional of Lévy processes: Generalized Weierstrass products and Wiener-Hopf factorization Comptes Rendus Mathematique* **351**, No.9-10, 393–396. **IF: 0.477**; **Citations: 2**

[4] Patie, P. and Savov, M. (2016+) Bernstein-gamma functions and the exponential functional of Lévy processes

1.3.2 Статии, директно свързани с дисертационния труд

[5] Chan, T., Kyprianou A. and Savov, M. (2011) "*Smoothness of scale functions for spectrally negative Lévy processes*", *Probab. Theory and Related Fields* **150**, 691–708, **IF: 1.53**; **Citations: 22**

[6] Doering, L. and Savov, M. (2010) "*Application of renewal theorems to exponential moments of local times*", *Electron. Comm. in Probab.* **38**, No.15, 263–269, **IF: 0.56**; **Citations: 1**

[7] Doney, R. and Savov, M. (2010) "*The asymptotic behavior of densities related to the supremum of a stable process*", *Ann. of Probab.* **38**, No.1, 316–326,**IF: 1.47**; **Citations: 12**

[8] Kuznetsov A., Pardo J.C. and Savov, M. (2012) "*Distributional properties of exponential functionals of Lévy processes*", *Electron. J. of Probab.* **17**, No.8, 1–35, **IF: 0.785**; **Citations: 4**

[9] Patie, P. and Savov, M. (2016+) "*Cauchy problem of the non-self-adjoint Gauss-Laguerre semigroups and uniform bounds of generalized Laguerre polynomials*", *Journal of Spectral Theory*, **accepted**, **IF: 1.21**

[10] Patie, P. and Savov, M. (2016+) Spectral expansion of non-self-adjoint generalized Laguerre semigroups

1.3.3 Някои други публикации

[11] Savov, M. (2009) "*Small time two-sided LIL behavior for Levy processes at zero*", *Probab. Theory and Related Fields* **144**, No.1-2, 79–98, **IF: 1.39**; **Citations: 5**

[12] Savov, M. (2010) "*Small time one-sided LIL behaviour for Lévy processes at zero*", *J. of Theoret. Probab.* **23**, No.1, 209–236, **IF: 0.60**; **Citations: 1**

[13] Savov, M. (2014) "*On the range of subordinators*", *Electron. Commun. Probab.*, **19**, No: 84, 1–10, **IF: 0.49**

1.4 Обем на дисертационния труд

Дисертацията е в обем приблизително сто и осемдесет страници, които включват увод, четири основни глави, глава, отразяваща научните приноси на дисертационния труд, и цитирана литература. Текстът е на английски език.

1.5 Процеси на Леви

В тази секция разглеждаме основни постулати и дефиниции от добре развитата теория на процесите на Леви. Някои специфики ще бъдат разглеждани в съответните глави, а тази част може да се счита за въведение, съобразно нуждите на дисертацията.

1.5.1 Въведение

В тази дисертация разглеждаме стохастични процеси $\xi := (\xi_t)_{t\geq 0}$, индексирани по времето и вземащи стойности в пространството на дясно-непрекъснатите функции със съществуващи поточково леви граници (днлг), означено за краткост с $D\,[0,\infty) := \{w : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} : \text{ w е днлг}\}$, където $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ и $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, и което е снабдено с филтрация $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ и вероятностна мярка $\mathbb{P} : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$.

Definition 1.5.1. *Едномерен процес на Леви или просто процес на Леви $\xi := (\xi_t)_{t\geq 0}$ наричаме стохастичен процес във вероятностното пространство $(D\,[0,\infty)\,,\mathcal{F},\mathbb{P})$, стартиран от нулата, т.е. $\xi_0 = 0$, който има следните свойства*

1. *За всеки набор $t, s \geq 0$ нарастването на процеса след момента t е независимо от миналото на процеса, т.е.*

$$\xi_{t+s} - \xi_t \perp (\xi_v)_{v\leq t}\,.$$

2. *За всяко $t \geq 0$ имаме равенството по разпределение на процесите, т.е.*

$$(\xi_{t+s} - \xi_t)_{s\geq 0} \stackrel{w}{=} (\xi_s)_{s\geq 0}\,.$$

3. *Съществува $q \geq 0$ и независима от ξ експоненциално разпределена случайна величина $e_q \sim Exp(q)$, така че $\xi_t = \infty$, $t \geq e_q$, т.е. ξ е убит с интензитет q.*

Remark 1.5.1. *Необходимо е да отбележим, че точка 3 не присъства в стандартната дефиниция на процес на Леви, но за нашите цели тази тривиална модификация е много удобна. Също така $e_0 = \infty$ почти сигурно (п.с.) и в този случай процесът се нарича консервативен или неубит процес на Леви.*

От дефиниция 1.5.1 имаме за всяко $n \geq 1$, че

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_{\frac{i}{n}} - \xi_{\frac{i-1}{n}},$$

т.е ξ_1 е безгранично делима случайна величина спрямо вероятностната мярка $\mathbb{P}$, виж [59, Глава 5]. Основното следствие от този факт е добре известната формула на Леви-Хинчин за характеристичната експонента на безгранично делимите случайни величини, получена първо от Пол Леви, и която ние използваме в следната форма:

Theorem 1.5.2. *Нека ξ е процес на Леви. Тогава за всяко $t \geq 0$ и поне за всяко $z \in i\mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}\left[e^{z\xi_t}\right] = e^{t\Psi(z)}. \tag{1.5.1}$$

Също така функцията $\Psi : i\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, където $\mathbb{C}$ е комплексната равнина, има следната форма

$$\Psi(z) = cz + \frac{\sigma^2 z^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{zy} - 1 - zy\mathbb{I}_{\{y \leq 1\}}\right) \Pi(dy) - q, \tag{1.5.2}$$

където $c \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, $q \in [0,\infty)$ и Π е сигма-крайна мярка, такава че $\Pi(\{0\}) = 0$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \min\left\{1, y^2\right\} \Pi(dy) < \infty. \tag{1.5.3}$$

Remark 1.5.3. *Отбелязваме, че функцията Ψ по принцип се дефинира в литературата чрез равенството $\mathbb{E}\left[e^{i\theta\xi_1}\right] = e^{-\Psi(\theta)}$, виж [8, 20, 59]. За нашите цели е много по-удобно да използуваме* (1.5.2).

Remark 1.5.4. *Във формула* (1.5.2) *количествата c, σ са съответно линейният дрифт и дисперсията на Брауновия компонент на ξ, докато Π е Леви мярката на процеса. Мярката Π съдържа информация за големината и интензитета на възможните скокове на процеса на Леви ξ. Също така $q \in [0,\infty)$ е интензитетът на убиване на ξ, виж Забележка 1.5.1.*

Съществува директна и любопитна връзка между процесите на Леви и класа на отрицателно дефинитните функции върху $i\mathbb{R}$ означени с $\overline{\mathcal{N}}$, която е доказана например в [31, 59].

Theorem 1.5.5. *За функция Ψ е в сила $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}$, тогава и само тогава, когато съществува процес на Леви ξ, такъв че $\mathbb{E}\left[e^{z\xi_1}\right] = e^{\Psi(z)}$, $z \in i\mathbb{R}$.*

Преди следващия резултат ще въведем универсална нотация. За всяко комплексно число $z \in \mathbb{C}$ означаваме с $\mathtt{Re}(z)$ и $\mathtt{Im}(z)$ съответно неговата реална и имагинерна част. Също така използуваме за всяко $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}_a = \{z \in \mathbb{C} : \mathtt{Re}(z) = a\}$ и за всички $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $\mathbb{C}_{(a,b)} = \{z \in \mathbb{C} : \mathtt{Re}(z) \in (a,b)\}$. Отбелязваме, че $\mathbb{C}_a$ и $\mathbb{C}_{(a,b)}$ са съответно права и ивица в комплексната равнина. Под $\mathbb{C}_{[a,b)}$, $a > -\infty$ разбираме равенството $\mathbb{C}_{[a,b)} = \mathbb{C}_{(a,b)} \cup \mathbb{C}_a$ и идентично дефинираме $\mathbb{C}_{[a,b]}$, $a > -\infty, b < \infty$, и $\mathbb{C}_{(a,b]}$, $b < \infty$. С $\mathtt{A}_{(a,b)}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ означаваме множеството на холоморфните функции върху ивицата $\mathbb{C}_{(a,b)}$, докато например $\mathtt{A}_{(a,b]}$, $-\infty \leq a < b < \infty$ стои за множеството на холоморфните функции $\mathtt{A}_{(a,b)}$, които имат непрекъснато продължение до $\mathbb{C}_b$.

Следващият съществен за нашите изследвания резултат свързва аналитичните (холоморфните) свойства на функцията Ψ с вероятностното поведение на процеса на Леви ξ и най-вече с неговите опашки. Доказателството може да се намери в [59].

Proposition 1.5.6. *Следните твърдения са еквивалентни за всеки процес на Леви:*

1. $\left|\mathbb{E}\left[e^{z\xi_1}\right]\right| < \infty$ *за* $z \in \mathbb{C}_{(a,b)}$, $a \leq 0$, $b \geq 0$, $a^2 + b^2 > 0$.

2. *Ако* $b > 0$, *то* $\int_1^\infty e^{xy}\Pi(dy) < \infty, \forall x \in [0, b)$ *и ако* $a < 0$, *то* $\int_{-\infty}^{-1} e^{xy}\Pi(dy) < \infty, \forall x \in (a, 0]$.

3. $\Psi \in \mathtt{A}_{(a,b)}$, *като допълнително* $\Psi \in \mathtt{A}_{[0,b)}$, *ако* $a = 0$ *и* $\Psi \in \mathtt{A}_{(a,0]}$,*ако* $b = 0$.

1.5.2 Субординатори

Субординаторите съставляват важен подклас на процесите на Леви.

Definition 1.5.2. *Казваме, че процесът на Леви* ξ *е субординатор или ненамаляващ процес на Леви, ако* $\xi_t \geq \xi_s$ *п.с., за всяко* $t \geq s$.

Следващият резултат съдържа основно твърдение за субординаторите, което може да се намери например в [8, Глава III].

Theorem 1.5.7. *За всеки субординатор* ξ *е вярно, че*

$$\phi(z) = -\log\left(\mathbb{E}\left[e^{-z\xi_1}\right]\right) = \phi(0) + dz + \int_0^\infty \left(1 - e^{-zy}\right)\mu(dy) \in \mathtt{A}_{[0,\infty)}, \tag{1.5.4}$$

където $\phi(0) \geq 0$ *е интезитетът на убиване на субординатора,* $d \geq 0$ *е неговият линеен дрифт и* μ *е неговата мярка на Леви, която удовлетворява по-стриктното условие* $\int_0^\infty \min\{1, y\}\,\mu(dy) < \infty$. *Ако* Ψ *е експонентата на Леви-Хинчин на* ξ, *то имаме връзката* $\Psi(z) = -\phi(-z)$.

Функцията ϕ се нарича експонента на Лаплас на ξ. За нашите цели отбелязваме и още едно важно свойство на субординаторите. За целта въвеждаме следния клас от функции, който е подробно изучен в [62] и за който някои нови елементарни свойства са добити в [55].

Definition 1.5.3. *Функцията* $\phi : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ *е функция на Бернщайн или* $\phi \in \mathcal{B}$, *ако* $\phi(0) \geq 0$ *и* $f = \phi'$ *е напълно монотонна върху* $(0,\infty)$, *т.е. за всяко* $n \in \mathbb{N}$ *и за всяко* $x > 0$ *е вярно* $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$.

С предходната дефиниция е в сила резултатът, чието доказателство може да се намери например в [8, 62]:

Theorem 1.5.8. *Функцията* ϕ *е функция на Бернщайн, тогава и само тогава когато* (1.5.4) *е изпълнено за някой субординатор* ξ.

1.5.3 Факторизация на Винер-Хопф

Всички методи и резултати в тази дисертация се основават на известната факторизация на Винер-Хопф. В аналитичния си вариант за отрицателно дефинитни функции, т.е. $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}$, тази факторизация приема формата

$$\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z),\ z \in i\mathbb{R}, \tag{1.5.5}$$

където $\phi_\pm \in \mathcal{B}$ и (1.5.5) е валидно за всяко $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}$. Уравнение (1.5.5) отразява факта, че функцията Ψ, дефинирана априори само върху $i\mathbb{R}$, всъщност е прозведение на $\phi_- \in \mathtt{A}_{[0,\infty)}$ и $h(z) = -\phi_+(-z) \in \mathtt{A}_{(-\infty,0]}$ и е напълно в духа на факторизациите на Винер-Хопф. Именно тази декомпозиция ни позволява в Глава 4 да решим в общност уравнение (1.6.4) и да добием в последствие резултатите за експоненциалните функционали на Леви.

Факторизацията (1.5.5) има и вероятностна интерпретация, която всъщност е полезна в други ситуации, и която ще скицираме за удобството на читателя. Нека означим с $R^+ := \left(R_t^+\right)_{t\geq 0} = \left(\sup_{s\leq t}\xi_s - \xi_t\right)$ и с $R^- := \left(R_t^-\right)_{t\geq 0} = \left(\xi_t - \inf_{s\leq t}\xi_s\right)_{t\geq 0}$ така наречените отразени процеси на Леви, където отражението е съответно в текущия максимум или в текущия минимум. Процесите $R^\pm$ са процеси на Фелър, вземащи стойности в $[0,\infty)$ и като такива имат локално време в нулата, т.е. ненамаляващи процеси $(L_t^\pm)$, които най-общо казано измерват престоя на $(R_s^\pm)_{s\leq t}$ в нулата. Повече информация може да бъде намерена в [8, Глави 4 и 6]. Процесите $(L_t^\pm)$, бидейки ненамаляващи, притежават дясно обратни процеси, дефинирани чрез $\left(L_t^\pm\right)^{-1} = \inf\left\{s > 0 : L_s^\pm > t\right\}$. Последните дефинират субординатори, известни като процес на епохите на нарастване на ξ, т.е. $\left(L^+\right)^{-1}$, и процес на епохите на намаляване на ξ, т.е. $\left(L^-\right)^{-1}$. Тази терминология намира и основание в добре известните релации

$$
\begin{aligned}
H_t^+ &= \xi_{\left(L_t^+\right)^{-1}} = \sup_{s\leq\left(L_t^+\right)^{-1}} \xi_s \\
H_t^- &= \xi_{\left(L_t^-\right)^{-1}} = \inf_{s\leq\left(L_t^-\right)^{-1}} \xi_s,
\end{aligned}
\tag{1.5.6}
$$

където $H^\pm$ представляват процесите на максимум и минимум на процеса на Леви ξ и на свой ред също са субординатори. Тогава с равенствата

$$
\phi_-(z) = \log\left(\mathbb{E}\left[e^{-zH_1^-}\right]\right); \quad \phi_+(z) = \log\left(\mathbb{E}\left[e^{-zH_1^+}\right]\right),\ z \in \mathbb{C}_{[0,\infty)} \tag{1.5.7}
$$

имаме равенство (1.5.5) и

$$
\phi_\pm(z) = \phi_\pm(0) + d_\pm z + \int_0^\infty \left(1 - e^{-zy}\right)\mu_\pm(dy) \in \mathcal{B}, \tag{1.5.8}
$$

където количествата $d_\pm, \mu_\pm$ са описани в (1.5.4). Този факт може да бъде намерен в [8, Глава 6] или в [20, Глава 4] и е стандартен от фолклора на теорията на процесите на Леви.

За повече информация относно теорията на процесите на Леви предлагаме монографиите [3, 8, 20, 59].

1.6 Експоненциални функционали на процеси на Леви

Експоненциалните функционали на процеси на Леви са основният изследван обект в тази дисертация. Тези количества означаваме с

$$I_\Psi = \int_0^\infty e^{-\xi_s} ds = \int_0^{e_q} e^{-\xi_s} ds \in [0, \infty), \tag{1.6.1}$$

където припомняме, че $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}$ е експонентата на Леви-Хинчин, асоциирана чрез (1.5.2) към процеса на Леви ξ и e_q е независимата експоненциално разпределена случайна величина в Дефиниция 1.5.1(3), такава че $\xi_t = \infty$, $t \geq e_q$. Последното оправдава второто равенство в (1.6.1), когато $q > 0$. От силния закон за големите числа и факторизацията (1.5.5) е добре известно, че

$$I_\Psi < \infty \text{ п.с.} \iff q > 0 \text{ or } q = 0; \lim_{t\to\infty} \xi_t = \infty \text{ п.с.} \iff \phi_-(0) > 0 \tag{1.6.2}$$

Така обособяваме и класа

$$\mathcal{N} = \left\{\Psi \in \overline{\mathcal{N}} : \phi_-(0) > 0\right\} = \left\{\Psi \in \overline{\mathcal{N}} : I_\Psi < \infty \text{ п.с.}\right\} \subsetneq \overline{\mathcal{N}}. \tag{1.6.3}$$

Оттук нататък, докато не отбележим изрично друго, ще разискваме само $\Psi \in \mathcal{N}$.

Remark 1.6.1. *Отбелязваме, че в Глава 2 и Глава 3 на дисертацията експоненциалния функционал е дефиниран като $\int_0^\infty e^{\xi_s} ds$, което е просто субституция на $\xi \to -\xi$ и $\Psi(z) \to \Psi(-z)$. В Глава 2 зависимостта на експоненциалния функционал от процеса на Леви ξ се отразява директно чрез $I_\xi = \int_0^\infty e^{\xi_s} ds$, но това отговаря по-добре на методологията, използвана там.*

Ще използваме означенията $F_\Psi(x) = \mathbb{P}(I_\Psi \leq x)$, $x \geq 0$, и $\overline{F}_\Psi(x) = 1 - F_\Psi(x)$, $x \geq 0$, съответно за кумулативната функция на разпределение и опашката на I_Ψ. Количеството $f_\Psi(x) = \frac{\mathbb{P}(I_\Psi \in dx)}{dx}$, $x > 0$ е плътността на I_Ψ, която е известно, че винаги съществува, когато $\Psi \in \mathcal{N}$, т.е. $I_\Psi < \infty$ п.с, благодарение на [11] .

Основен обект при изучаването на I_Ψ е трансформацията на Мелин (или трансформацията на комплексните моменти) на I_Ψ, т.е. $\mathcal{M}_{I_\Psi}(z) = \mathbb{E}\left[I_\Psi^{z-1}\right]$, където $\mathcal{M}_{I_\Psi}$ е добре дефинирана поне за $z \in \mathbb{C}_1$. Основен резултат на този труд е фундаменталното рекурентно уравнение

$$\mathcal{M}_{I_\Psi}(z+1) = \frac{-z}{\Psi(-z)} \mathcal{M}_{I_\Psi}(z), \tag{1.6.4}$$

което е валидно за всяко I_Ψ поне върху $\mathcal{Z}_0(\Psi) = \{z \in i\mathbb{R} \setminus \{0\} : \Psi(-z) \neq 0\}$ и в общност равенството трябва да се разбира като такова между функции потенциално продължени в комплексната равнина, а не между моменти. В частни случаи (1.6.4) е добито в литературата преди настоящата работа и те ще бъдат отбелязани по-долу в обзора на литературата.

1.6.1 Историографични бележки и обзор на литературата

Първо ще представим ключовите статии в развитието на общата теория на експоненциалните функционали на процеси на Леви.

1.6.1.1 Ключови резултати

Експоненциалните функционали, когато ξ е консервативен или неубит субординатор, са въведени от Урбаник [64] във връзка с изучаването на мултипликативната безгранична делимост, която е еквивалентна на безграничната делимост в мултиплкативна група на $\mathbb{R}^+$. Поради техническата трудност при четенето на тази разработка последващо опростяване на експозицията е направено в послената секция на [30]. В частния случай, когато ξ е Брауново движение с положителен дрифт, законът на I_Ψ е пресметнат от [23] или по-точно $I_\Psi \stackrel{d}{=} \frac{2}{\sigma^2 G\left(\frac{2c}{\sigma^2},1\right)}$, където $G\left(\frac{2c}{\sigma^2},1\right)$ е Гама разпределена случайна величина с параметри $\frac{2c}{\sigma^2}, 1$ и $c > 0$ е дрифта на Брауновото движение с дисперсия σ^2.

Следващата статия със съществен принос към теорията на експоненциалните функционали на процеси на Леви е работата на Кармона, Пети и Йор [17]. Основният резултат е интегрално-диференциално уравнение за плътността f_Ψ, виж [18, (1.1)], когато ξ е консервативен процес на Леви с ограничена вариация, т.е. по-стриктното изискване $\int_{-\infty}^{\infty} \min\{|y|,1\}\,\Pi(dy) < \infty$ е наложено. Това уравнение е добито с помощта на факта, че I_Ψ е стационарното разпределение на клас от процеси на Орнщайн-Уленбек. Тази връзка е използвана и в нашата разработка в Глава 2. Основният недостатък на това уравнение е, че то практически не дава съществена информация за f_Ψ освен в няколко конкретни примера, виж [18, Секция 2]. Много интересен е фактът, че в [18, Твърдение 3.1] е доказано фундаменталното уравнение (1.6.4) за реални неотрицателни стойности на $z = a > 0$, когато $\Psi(-a) < 0$ и $\Psi \in \mathtt{A}_{(0,a+\epsilon)}$, за някое $\epsilon > 0$. Основен проблем е, че не е доказано, че $\mathcal{M}_{I_\Psi}(a) < \infty$ или $\mathcal{M}_{I_\Psi}(1+a) < \infty$, освен когато $\mathbb{E}[\xi_1] \in (0,\infty)$ и тривиално $\mathcal{M}_{I_\Psi}(1) = \mathbb{E}[I_\Psi^0] = 1$, когато $a = 0$. Работата на Маулик и Шварт [44, Лема 2.1] показва, че уравнение (1.6.4) е валидно с $\mathcal{M}_{I_\Psi}(a) < \infty$ и $\mathcal{M}_{I_\Psi}(1+a) < \infty$ за всички $a > 0$, такива че $\Psi(-a) < 0, \Psi \in \mathtt{A}_{(0,a+\epsilon)}$, за някое $\epsilon > 0$, при положение, че $\mathbb{E}[\xi_1] \in (0,\infty)$. Крайността на $\mathcal{M}_{I_\Psi}(a) < \infty$ и $\mathcal{M}_{I_\Psi}(1+a) < \infty$, която следва директно от новото доказателство на (1.6.4) в тази ситуация, виж [44], за първи път извежда на преден план важността на (1.6.4) за изучаването на I_Ψ. В същата работа реалните моменти на I_Ψ, т.е. $\mathcal{M}_{I_\Psi}(1+a)$, са изчислени в някои много рестриктивни случаи, решавайки (1.6.4) в явен вид. В общност валидността и решението на уравнение (1.6.4) са анонсирани в [52] и [54] и може да се видят съответно в Глава 4 и в Глава 5, като валидността на (1.6.4), когато $\Psi \in \mathtt{A}_{[0,\epsilon)}$ за някое $\epsilon > 0$, е също добита в [4] и неявно допусната и използвана в [37].

В целия процес на добиване и решаване на (1.6.4) ролята на (1.6.4) в разбирането на случайната величина I_Ψ нараства, измествайки редица методи, разработени порано за изучаването на I_Ψ. Така например в [57, Лема 4] се използва факта, че $I_\Psi \stackrel{d}{=} A + I_\Psi B$, където $(A,B) \perp I_\Psi$, за да се добие $\overline{F}_\Psi(x) = 1 - F_\Psi(x) \stackrel{\infty}{\approx} Cx^\kappa, C > 0$, когато $\exists\kappa \in (-1,0)$, така че $\Psi(-\kappa) = 0, |\Psi'(-\kappa)| < \infty$. Този резултат е доказан при същите условия без $\kappa \in (-1, 0)$ от [44]. С помощта на (1.6.4) в Глава 5 сме добили този резултат за всяко $\kappa < 0$ и сме изчислили явно C. Нещо повече подобна асимптотика сме разработили за f_Ψ и нейните производни, което по същество е много по-трудна задача. Сходни примери могат да се намерят за редица други въпроси и ще ги посочим при разискването на конкретните глави на дисертацията.

1.6.1.2 Експоненциалните функционали на процеси на Леви в различни области от теорията и практиката

В следващите части на тази секция се описват някои съществени приложения на експоненциалните функционали на процеси на Леви в теорията и практиката.

1.6.1.2.1 Спектрална теория на себеподобни положителни Марковски процеси и на обобщени полугрупи на Лагер Както ще се види в Глава 5, (1.6.4) е частен случай на още по-общо уравнение. Мотивацията за изследването на последното е разработената от кандидата и П. Пати методология за развитието на спектралната теория на даден клас от несамоспрегнати Марковски процеси, чиито полугрупи се наричат обобщени полугрупи на Лагер и които са тясно свързани с едномерните положителни себеподобни Марковски процеси, виж [55]. Всъщност решението на тези уравнения и неговите свойства предоставят ключова информация за спектралните количества на тези Марковски процеси като: вид на спектъра; форма на собствените и кособствените функции; гладкост, аналитичност и асимптотика на тези функции; оценка на нормата на кособствените функции в подходящи претеглени L^2 пространства и така добиването на спектрално разлагане на някои обобщени полугрупи на Лагер.

1.6.1.2.2 Едномерни положителни себеподобни Марковски процеси За изучаването едномерните положителни себеподобни Марковски процеси директна роля играят и експоненциалните функционали I_Ψ. Така например се знае, че

$$\mathbb{E}\left[f\left(X_1^0\right)\right] = \frac{1}{\mathbb{E}\left[I_\Psi^{-1}\right]}\mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{I_\Psi}\right)\right],$$

където f е непрекъсната, ограничена функция и $X_1^{(0)}$ е стойността в момент 1 на себеподобения положителен Марковски процес X, стартиран от нулата и X и I_Ψ са свързани чрез трансформацията на Ламперти, виж [13]. Така разбирането на I_Ψ води до информация за X. Когато процесът X има скокове само надолу и нараства непрекъснато, то с помощта на резултатите от секция 1.6.1.2.1 може да се пресметне в голяма общност

$$\mathbb{P}\left(X_t^{(x)} \in dy\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+t)^{-n-1}\,\mathcal{P}_n(x)\mathcal{V}_n\left(\frac{y}{1+t}\right),$$

където $\mathcal{P}_n$ са обобщените полиноми на Лагер, а $\mathcal{V}_n$ са директно свързани с f_Ψ и нейните производни, виж [55, Зебележка 1.16 и Теорема 1.11]

1.6.1.2.3 Други приложения в теорията Случайните величини I_Ψ играят роля и в следните области: случайни планарни изображения, виж [9]; гранични теореми за Марковски вериги, виж [10]; разклоняващи се процеси с имиграция [48]; случайна фрагментация [15]; случайни процеси в случайна среда [42, 45].

1.6.1.2.4 Оценяване на Азиатски опции Азиатските опции се базират на средната цена на актив, чиято стойност се предполага, че се движи от процес на Леви, или по-точно тя се задава чрез $S_t = S_0 e^{-\xi_t}$. Тогава средната цена се задава чрез

$$\frac{I_\Psi(T)}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\xi_s} ds,\ T > 0.$$

Разбирането на закона на $I_\Psi(T)$ е изклютелно трудна задача и затова с въвеждането на $\Psi_q = \Psi - q$, $q > 0$ се преминава към изучаването на трансформацията на Лаплас на $I_\Psi(T)$, т.е. $I_{\Psi_q} = \int_0^{e_q} e^{-\xi_s} ds$, чрез нейната трансформация на Мелин, т.е. $\mathcal{M}_{I_{\Psi_q}}(z)$ и техните числени обръщания за приближение на закона на $I_\Psi(T)$ по схемата

$$\mathcal{M}_{I_{\Psi_q}} \to I_{\Psi_q} \to I_\Psi(T).$$

Глава 5 предлага изчисляване на $\mathcal{M}_{I_{\Psi_q}}$, но аналитичното или ефективното числено обръщане остава неразработено. За конретни класове от процеси на Леви Кузнецов и Хакман [29] (виж също [50]) използват факта, че за тези класове I_Ψ се разлага на безкрайно произведение от независими Бета разпределени случайни величини, за да разработят алгоритъм за приближението на разпределението на $I_\Psi(T)$. В Глава 5 се съдържа безкрайно разлагане на I_Ψ в абсолютна общност и кандидатът възнамерява да изследва неговата пригодност за числената апроксимация на $I_\Psi(T)$.

1.6.1.2.5 Някои странични резултати-класът на функциите на Бернщайн-Гама Изучаването на I_Ψ чрез $\mathcal{M}_{I_\Psi}$ върви успоредно с изучаването на класа от специални функции, наречени от П. Пати и кандидатът функции на Бернщайн-Гама. Последните имат връзка с много количества от теория на специалните функции. Така например двойната функция на Барнс, виж [5], попада в този клас и основни нейни количества могат да се изведат от общи формули и изрази.

Глава 2

Факторизация от тип Винер-Хопф за експоненциалните функционали на процеси на Леви

Тази глава разисква основните достижения на Глава 2 от дисертацията, която се базира на статия [46]. Основната цел е да изложим най-важните резултати и очертаем тяхните доказателства. Преди да започнем ще отбележим една разлика от пренебрежима важност в нотацията на Глава 2 и тази в целия автореферат. Тук използваме $I_\Psi = \int_0^\infty e^{-\xi_s} ds$ докато в Глава 2 на дисертацията се разглежда обекта $I_\xi = \int_0^\infty e^{\xi_s} ds$. Двете случайни величини са еквивалентни със смяната $\xi_s \to -\xi_s$.

Работата по публикация [46] съвпада с началото на интензивното използване от редица автори на уравнение (1.6.4), т.е.

$$\mathcal{M}_{I_\Psi}(z+1) = \frac{-z}{\Psi(-z)} \mathcal{M}_{I_\Psi}(z), \tag{2.0.1}$$

където Ψ е експонентата на Леви-Хинчин, виж (1.5.2), за изучаването на закона и плътността на случайната величина I_Ψ. В този период работите на Кузнецов и др., виж [34, 35, 38, 29], използват (2.0.1), когато Ψ има най-общо вида

$$\Psi(z) = cz + \frac{\sigma^2 z^2}{2} + z^2 \left(\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\rho_n(\rho_n - z)} + \sum_{n \geq 1} \frac{\hat{a}_n}{\hat{\rho}_n(\hat{\rho}_n + z)} \right), \tag{2.0.2}$$

за да предвидят едно възможно решение на (2.0.1) и в последствие да докажат, че това решение е трансформацията на Мелин на I_Ψ, т.е. $\mathcal{M}_{I_\Psi}(z)$. Основният недостатък на този подход се състои във факта, че той се прилага за ограничен клас от функции $\Psi \in \mathcal{N}$ и предвиденото решение не съвпада априори с $\mathcal{M}_{I_\Psi}(z)$. Всъщност в основата си проблемите възникват от факта, че (2.0.1) е обикновено валидно най-много върху крайна ивица от вида $\mathbb{C}_{[0,b)}$, $b > 0$, или дори само върху $\mathbb{C}_0$. Въпреки това резултатите [34, 35, 38, 29] дори само за ограничен клас от функции Ψ бяха неочаквани.

2.1 Основна идея и някои евристични коментари

Припомняме, че за всяко $\Psi \in \mathcal{N}$ е в сила

$$\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z),\ z \in i\mathbb{R}, \tag{2.1.1}$$

където $\phi_\pm$ са дефинирани чрез (1.5.8). Понеже $\phi \in \mathcal{B} \implies \phi \in \mathtt{A}_{[0,\infty)}$ е ясно, че ако системата

$$\begin{cases} f_1(z+1) = \frac{z}{\phi_+(z)} f_1(z) & \text{if } z \in D_1 \subset \mathbb{C} \\ f_2(z+1) = \frac{1}{\phi_-(-z)} f_2(z) & \text{if } z \in D_2 \subset \mathbb{C} \end{cases} \tag{2.1.2}$$

има решение върху $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, то $f = f_1 f_2$ изпълнява следното свойство върху $D_1 \cap D_2$:

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f_1(z+1) f_2(z+1) \\ &= \frac{z}{\phi_+(z)} \frac{1}{\phi_-(-z)} f_1(z) f_2(z) \overset{(2.1.1)}{=} \frac{-z}{\Psi(-z)} f(z),\ z \in D, \end{aligned}$$

т.е. f е решение на уравнението (2.0.1). Предимството на системата (2.1.2) е, че благодарение на $\phi_\pm \in \mathtt{A}_{[0,\infty)}$ имаме, че $D_1 \supseteq \mathbb{C}_{(0,\infty)}$, $D_2 \supseteq \mathbb{C}_{(-\infty,0)}$ и ако докажем, че от общите свойства на функциите на Бернщайн $D_1 \cap D_2 \supseteq \mathbb{C}_0$, то вероятно $f = \mathcal{M}_{I_\Psi}$.

Факт е, че система (2.1.2) може да се реши благодарение на факта, че $D_1 \supseteq \mathbb{C}_{(0,\infty)}$, $D_2 \supseteq \mathbb{C}_{(-\infty,0)}$, но това бе използувано в Глава 5. В настоящата статия [46] тръгваме по друг път.

2.2 Основен резултат

Нека разгледаме следния подклас от функции

$$\mathcal{N}_m^c = \{\Psi \in \mathcal{N} :\ \Psi(0) = 0, \Psi'(0) \in (0,\infty)\}. \tag{2.2.1}$$

Класът $\mathcal{N}_m^c$ обхваща всички консервативни (неубити) процеси на Леви с математическо средно $\mathbb{E}[\xi_1] = \Psi'(0) \in (0,\infty)$. В този случай от (1.5.2) имаме, че

$$\Psi(z) = \Psi'(0)z + \frac{\sigma^2 z^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{zy} - 1 - zy)\,\Pi(dy). \tag{2.2.2}$$

Да означим $\Pi_+(dy) = \Pi(dy)\mathbb{I}_{\{y>0\}}$ и с $\Pi_-(dy) = \Pi(-dy)\mathbb{I}_{\{y>0\}}$.
Въвеждаме дефиницията

Definition 2.2.1. *Със символа $\mathcal{P}$ означаваме класа на всички неотрицателни мерки върху $\mathbb{R}^+$, които притежават ненамаляваща плътност, т.е. $\nu(dy) = v(y)dy$, $y > 0$, и $v : \mathbb{R}^+ \mapsto [0,\infty)$ е ненамаляваща.*

С тези означения можем да формулираме основния резултат от Глава 2 на дисертацията и съответно от [46].

Theorem 2.2.1. *Нека* $\Psi \in \mathcal{N}_m^c$ *и нека* $\Pi_- \in \mathcal{P}$. *Тогава имаме следната факторизация*

$$I_\Psi \stackrel{d}{=} I_{\phi_+} \times I_\psi, \tag{2.2.3}$$

където $\times$ *означава произведение на независими случайни величини;* $I_{\phi_+} = \int_0^\infty e^{-H_s^+} ds$, *където* H^+ *е процесът на максимум на* ξ, *виж* (1.5.6); *и* $\psi \in \mathcal{N}_m^c$ *която има вида*

$$\psi(z) = z\phi_-(z) \tag{2.2.4}$$

е експонента на Леви-Хинчин на Леви процес ξ^-, *който притежава само отрицателни скокове и*

$$I_\psi = \int_0^\infty e^{-\xi_s^-} ds$$

Remark 2.2.2. *Факторизацията* (2.2.3) *може да се добие и при наличието на две други условия за* Ψ, *т.е. условията наречени* $\mathbf{E}_+$ *и* $\mathbf{P}_\pm$ *в Глава 2 и в [46]. Тук тях няма да разглеждаме като по същество идеите са сходни.*

Remark 2.2.3. *Изискването за* $\Psi \in \mathcal{N}_m^c$ *и* $\Pi_- \in \mathcal{P}$ *по същество е по-слабо от условията в статиите [35, 38, 29]. Всъщност формата на* Ψ *в* (2.0.2) *води до факта, че* $\Psi \in \mathcal{N}_m^c$ *и* $\Pi_- \in \mathcal{P}$. *Изключение прави само разработката [34] където имаме* $\Pi_- \notin \mathcal{P}$.

Преминаваме към някои незабавни следствия от Теорема 2.2.1, които демонстрират потенциала на (2.2.3).

Corollary 2.2.4. *Нека* $\Psi \in \mathcal{N}_c^m$ *и* ξ *притежава само положителни скокове, т.е.* $\Pi_-(dy)\mathbb{I}_{\{y>0\}} = 0dy \in \mathcal{P}$. *Тогава е в сила*

$$I_\Psi \stackrel{d}{=} I_{\phi_+} \times \frac{1}{G(-\gamma, 1)}, \tag{2.2.5}$$

където $\gamma < 0$ *решава уравнението* $\Psi(\gamma) = 0$. *В следствие е вярно, че*

$$f_\Psi(x) = \frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)} \int_0^\infty e^{-\frac{y}{x}} y^{-\gamma} f_{\phi_+}(y) dy, \; x > 0, \tag{2.2.6}$$

където f_{ϕ_+} *е плътността на* I_{ϕ_+}. *Нещо повече за всички* $x > \lim_{s\to\infty} \frac{s}{\Psi(s)} \in [0, \infty)$ *имаме развитието в ред*

$$f_\Psi(x) = \frac{\mathbb{E}\left[I_{\phi_+}^{-\gamma}\right]}{\Gamma(-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} x^{\gamma-1} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\Gamma(n+1-\gamma)}{\prod_{k=1}^n \Psi(k-\gamma)} x^{-n}. \tag{2.2.7}$$

Remark 2.2.5. *Отбелязваме, че в настоящето твърдение се съдържа основният резултат на [49], който отговаря на разлагането* (2.2.7). *Усилията положени там за добиването на този резултат демонстрират най-добре потенциална на Теорема 2.2.1.*

Други приложения и следствия от Теорема 2.2.1 могат да се намерят в Глава 2 на дисертацията или в [46], но за яснота няма да ги разискваме тук.

2.3 Някои идеи от доказателството на Теорема 2.2.1

Доказателството заема основна част от Глава 2 и съответно от [46]. Навсякъде подолу допускаме, че $\Psi \in \mathcal{N}_m^c$ и $\Pi_- \in \mathcal{P}$. От [46, Лема 4.11] имаме $\Pi_- \in \mathcal{P} \implies \mu_- \in \mathcal{P}$, където припомняме, че в (2.1.1)

$$\phi_\pm(z) = \phi_\pm(0) + d_\pm z + \int_0^\infty \left(1 - e^{-zy}\right) \mu_\pm(dy) \in \mathcal{B}. \tag{2.3.1}$$

Понеже $\mu_- \in \mathcal{P}$, елементарно следва $\mu_-(dy) = m_-(y)dy = \int_y^\infty h(v)dvdy$ и чрез интегриране по части получаваме

$$\begin{aligned} z\phi_-(z) &= \phi_-(0)z + d_- z^2 + \int_0^\infty \left(zy + e^{-zy} - 1\right) h(y)dy \\ &= \phi_-(0)z + d_- z^2 + \int_{-\infty}^0 \left(-zy + e^{zy} - 1\right) h(-y)dy \end{aligned}$$

Директно сравнение с (2.2.2) води до $\psi(z) = z\phi_-(z) \in \mathcal{N}_m^c$, тъй като $\phi_-(0) > 0$. Тогава система (2.1.2) придобива вида

$$\begin{cases} f_1(z+1) = \frac{z}{\phi_+(z)} f_1(z) = \frac{-z}{-\phi_+(z)} f_1(z) & \text{if } z \in D_1 \subset \mathbb{C} \\ f_2(z+1) = \frac{1}{\phi_-(-z)} f_2(z) = \frac{-z}{\psi(-z)} f_2(z) & \text{if } z \in D_2 \subset \mathbb{C} \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Тогава от [44, Лема 2.1] или (2.0.1) за специалния случай, когато ξ няма положителни скокове, използвайки факта, че I_ψ^{-1} е определена от моментите си, виж [14], получаваме, че $f_2 = \mathcal{M}_{I_\psi}$ решава второто уравнение в (2.3.2). Също от (2.0.1) за специалния случай когато ξ е субординатор, т.е. когато $\xi = H^+$, имаме, че $\mathcal{M}_{I_{\phi_+}}$ решава първото уравнение в (2.3.2). Така $\left(\mathcal{M}_{I_{\phi_+}}, \mathcal{M}_{I_\psi}\right)$ е решение на системата (2.3.2). Нещо повече $D_1 \supseteq (0,\infty)$ и ако $\Psi \in \mathtt{A}_{(-\epsilon,0]}$, $\epsilon > 0$ и следователно $\psi \in \mathtt{A}_{(-\epsilon,0]}$ то за някое $\epsilon < \eta < 0$ имаме $D_2 \supseteq \mathbb{C}_{(-\infty,-\eta)}$, което пак следва от [44, Лема 2.1]. Тогава $D_1 \cap D_2 \supseteq \mathbb{C}_{(0,-\eta)}$ и трансформацията на Мелин на случайната величина $I_{\phi_+} \times I_\psi$, т.е.

$$\mathcal{M}_{I_{\phi_+} \times I_\psi} = \mathcal{M}_{I_{\phi_+}} \mathcal{M}_{I_\psi}$$

решава (2.1.1) върху $\mathbb{C}_{(0,-\eta)}$, тъй като факторите и решават съответно двете уравнения на (2.3.2).

За да покажем, че имаме равенството $I_\Psi \stackrel{d}{=} I_{\phi_+} \times I_\psi$ в случая когато $\Pi_- \in \mathcal{P}$ и $\Psi \in \mathtt{A}_{(-\epsilon,0]}$, $\epsilon > 0$, знаейки, че $\mathcal{M}_{I_\Psi}$ и $\mathcal{M}_{I_{\phi_+}} \mathcal{M}_{I_\psi}$ са две решения на (2.1.1), е достатъчно да покажем единственост на решението на (2.1.1) поне за клас от трансформации на Мелин на случайни величини, в който попадат и $\mathcal{M}_{I_\Psi}, \mathcal{M}_{I_{\phi_+}} \mathcal{M}_{I_\psi}$. Това ще постигнем по следния начин: ще покажем, че I_Ψ е случайна величина, чиято вероятностна мярка е единственото стационарно разпределение на даден обобщен процес на Орнщайн-Уленбек; ще покажем също, че всяко решение на (2.1.1) с определени свойства, удовлетворени от $\mathcal{M}_{I_{\phi_+}} \mathcal{M}_{I_\psi}$, е задължително стационарна мярка за дадения процес на Орнщайн-Уленбек; от единствеността получаваме $I_\Psi \stackrel{d}{=} I_{\phi_+} \times I_\psi$.

2.3.1 Връзка с обобщените процеси на Орнщайн-Уленбек

За даден процес на Леви обобщеният процес на Орнщайн-Уленбек се задава чрез равенството

$$U_t^\xi(x) = xe^{-\xi_t} + e^{-\xi_t}\int_0^t e^{\xi_s}ds,\ x \geq 0,\ t \geq 0. \tag{2.3.3}$$

Използвайки известното $(\xi_s)_{s\leq t} = \left(\xi_t - \xi_{(t-s)-}\right)_{s\leq t}$, виж [8, Глава I], получаваме

$$U_t^\xi(x) \stackrel{d}{=} xe^{-\xi_t} + \int_0^t e^{-\xi_s}ds.$$

Скицираме основните стъпки от доказателството в следните отделни точки.

2.3.2 I_Ψ като единственото стационарно разпределение на U^ξ

Ако $\Psi \in \mathcal{N}_m^c$, то

$$\lim_{t\to\infty} U_t^\xi(x) \stackrel{d}{=} \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-\xi_s}ds = \int_0^\infty e^{-\xi_s}ds = I_\Psi,$$

понеже $\lim\limits_{t\to\infty}\xi_t = \infty$. Следователно заключаваме, че законът на I_Ψ е единственото стационарно разпределение на U_t^ξ.

2.3.3 Генератор на U^ξ и връзката му със стационарните разпределения

Генераторът на процеса U^ξ е тясно свързан с генератора на процеса ξ, където припомняме, че генераторът на Марковски процес X се дефинира чрез

$$L^X f := \lim_{t\to 0}\frac{P_t^X f(x) - f(x)}{t},$$

където P_t^X е полугрупата на X и f е подходящо подмножество от функции на Банаховото пространство $\mathtt{C}_0(\mathbb{R}^+)$, т.е. пространството на непрекъснатите функции, такива че $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. За повече информация препоръчваме книгите [24, 25]. Имаме следното твърдение, което съдържа най-важната за този автореферат информация, виж [46, Твърдение 3.1] или Глава 2 за повече детайли.

Proposition 2.3.1. *Нека*

$$\mathcal{K} = \left\{ f \in \mathtt{C}_b^2(\mathbb{R}) : \lim_{x\to\infty}\left(|f_e'(-x)| + |f_e''(-x)|\right), \int_{-\infty}^\infty \left(|f_e'(-x)| + |f_e''(-x)|\right)dx < \infty \right\}, \tag{2.3.4}$$

където $f_e(x) = f(e^x)$ *и* $\mathsf{C}_b^2(\mathbb{R})$ *е пространството на ограничените, два пъти диференцируеми функции с ограничени производни. Тогава, ако* $f \in \mathcal{K}$, $g(x) = xf'(x)$ *и* $h(x)$ *е такава функция, че* $\int_0^\infty |h(y)| \left(\min\{1, y^{-1}\}\right) dy < \infty$, *то*

$$\left(L^{U^\xi} f, h\right) = \left(g', \mathcal{L}h\right), \tag{2.3.5}$$

където $\mathcal{L}, L^{U^\xi}$ *могат да се намерят в [46, Твърдение 3.1] и* $(f,g) = \int_0^\infty f(x)g(x)dx$.

Съществeният резултат е уравнение (2.3.5), защото ако h е плътност на стационарно разпределение, то имаме класическия резултат

$$0 = \left(L^{U^\xi} f, h\right)$$

виж [25]. Ако в допълнение h удовлетворява $\int_0^\infty h(y) \left(\min\{1, y^{-1}\}\right) dy < \infty$, то от (2.3.5) имаме с $g(x) = xf'(x)$, че

$$0 = \left(L^{U^\xi} f, h\right) = \left(g', \mathcal{L}h\right).$$

Използвайки теорията на разпределенията на Шварц и факта, че $\mathcal{K}$ е гъсто, получаваме, че $\mathcal{L}h = C\ln(x) + D$ почти навсякъде и понеже h е вероятностна плътност, можем да покажем, че $\mathcal{L}h = 0$ навсякъде.

2.3.4 Единственост на $\mathcal{L}h = 0$ върху клас от вероятностни плътности

Тъй като f_Ψ е плътността на I_Ψ, което на свой ред е стационарното рапределение на U^ξ, и $\mathbb{E}\left[I_\Psi^{-1}\right] = \int_0^\infty f_\Psi(x)dx/x < \infty$, когато $\Psi \in \mathcal{N}_m^c$, то следва, че $\mathcal{L}f_\Psi = 0$. В сила е следното твърдение

Theorem 2.3.2. *Ако* h *е вероятностна плътност, удовлетворяваща* $\int_0^\infty h(x)dx/x < \infty$ *и* $\mathcal{L}h = 0$ *почти навсякъде, то* $f_\Psi = h$ *почти навсякъде.*

Доказателството е нетривиално, но следва добре познати контури. Използва се първо, че $P_t^{U^\xi}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, т.е. полугрупата на U^ξ изобразява $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}$ и понеже

$$0 = \left(L^{U^\xi} f, h\right) = \left(g', \mathcal{L}h\right)$$

получаваме за всяко $t > 0$

$$0 = \left(L^{U^\xi} P_t^{U^\xi} f, h\right) = \left(g', \mathcal{L}h\right). \tag{2.3.6}$$

За всяко $f \in \mathcal{K}$ от стандартното уравнение на Колмогоров

$$P_t^{U^\xi} f(x) = f(x) + \int_0^t L^{U^\xi} P_s^{U^\xi} f(x) ds,$$

интегрирайки спрямо $h(x)dx$ уравнение (2.3.6) добиваме за всяко $t > 0$

$$\int_0^\infty P_t^{U^\xi} f(x)h(x)dx = \int_0^\infty f(x)h(x)dx,$$

откъдето заключаваме, че $h(x)dx$, $x > 0$ е стационарна мярка за U^ξ. Понеже стационарната мярка на U^ξ е единствена, стигаме до извода, че $h = f_\Psi$ почти навсякъде.

2.3.5 Еквивалентност на $\mathcal{L}h = 0$ с (2.1.1)

Следващата основна стъпка е в доказването, че ако h е плътност, такава че $\int_0^\infty h(y)dy/y < \infty$ то с $\mathcal{M}_h(z+1) = \int_0^\infty x^z h(x)dx$ имаме еквивалентността

$$\mathcal{M}_h(z+1) = \frac{-z}{\Psi(-z)}\mathcal{M}_h(z),\ z \in \mathbb{C}_{(0,-\eta)} \iff \mathcal{L}h = 0. \tag{2.3.7}$$

Тази еквивалентност се показва с помощта на теория на разпределенията на Шварц. Тъй като $\mathcal{L}$ е интегрално-диференциален оператор с мултипликативна структура, то обобщените трансфомации на Мелин ни дават, че

$$\int_0^\infty x^{z-1}\mathcal{L}(x)dx = \mathcal{M}_{\mathcal{L}h}(z) = \frac{\Psi(z)}{z^2}\mathcal{M}_h\left(z+1\right) + \frac{1}{z}\mathcal{M}_h\left(z\right),$$

където равенствата са в обобщен смисъл. Тогава $\mathcal{L}h = 0 \iff \mathcal{M}_{\mathcal{L}h} = 0$ и понеже последният израз по-горе е функция в класическия смисъл, когато $\int_0^\infty h(y)dy/y < \infty$ и $z \in \mathbb{C}_{(0,-\eta)}$, виждаме, че (2.3.7) е валидно.

Понеже $\mathcal{M}_{I_{\phi_+}}\mathcal{M}_{I_\psi}$ е решение на (2.3.7) и $\mathcal{M}_{I_{\phi_+}}(0)\mathcal{M}_{I_\psi}(0) = \mathbb{E}\left[I_\psi^{-1}I_{\phi_+}^{-1}\right] < \infty$, заключаваме, че ако κ е плътността на $I_\psi \times I_{\phi_+}$, то $\mathcal{L}\kappa = 0$ и така κ е плътност на стационарна мярка на U^ξ. От единствеността следва, че $\kappa = f_\Psi$.

Напомняме, че дотук работим с допълнително условие $\Psi \in \mathtt{A}_{(-\epsilon,0]}$ за някое $\epsilon > 0$.

2.3.6 Отстраняване на ограничението $\Psi \in \mathtt{A}_{(-\epsilon,0]}$

Ще очертаем само бегло контура на доказателството. За началния процес на Леви ξ модифицираме неговата мярка на Леви по следния начин

$$\Pi^n(dy)\mathbb{I}_{\{y<-1\}} = e^{\frac{y}{n}}\Pi(dy)\mathbb{I}_{\{y<-1\}}$$

и означаваме новият процес на Леви с $\xi^{(n)}$. Модификацията на мярката на Леви показва, че всъщност $\xi^{(n)}$ се получава от ξ чрез премахването на някои скокове по-малки от -1. И така имаме, че за всяко $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{\Psi^{(n)}} \leq I_\Psi \text{ п.с. и } \lim_{n\to\infty} I_{\Psi^{(n)}} = I_\Psi,$$

където $\Psi^{(n)}$ е експонентата на Леви-Хинчин на $\xi^{(n)}$. Нещо повече, очевидно имаме, че $\Pi^n(dy) \in \mathcal{P}_-$ и $\Psi^{(n)} \in \mathtt{A}_{\left(-\frac{1}{n},0\right]}$. Последното следва от факта, че

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{ay}\Pi^{(n)}(dy) = \int_{-\infty}^{-1} e^{ay}e^{\frac{y}{n}}\Pi(dy) \leq \int_{-\infty}^{-1} \Pi(dy) < \infty,$$

стига $a \in \left(-\frac{1}{n}, 0\right)$, виж Твърдение 1.5.6(2). Тогава

$$I_{\Psi^{(n)}} \stackrel{d}{=} I_{\phi_+^{(n)}} \times I_{\psi^{(n)}},$$

където от факторизацията на Винер-Хопф за $\Psi^{(n)}$, виж (2.1.1), имаме $\Psi^{(n)}(z) = -\phi_+^{(n)}(-z)\phi_-^{(n)}(z)$ и $\psi^{(n)}(z) = z\phi_-^{(n)}(z)$. Понеже $\lim_{n\to\infty} I_{\Psi^{(n)}} = I_\Psi$, последното равенство води до

$$I_\Psi = \lim_{n\to\infty} I_{\Psi^{(n)}} \stackrel{d}{=} \lim_{n\to\infty} I_{\phi_+^{(n)}} \times I_{\psi^{(n)}},$$

като сходимостите

$$\lim_{n\to\infty} I_{\phi_+^{(n)}} = I_{\phi_+} \text{ и } \lim_{n\to\infty} I_{\psi^{(n)}} = I_\psi$$

са съответно следствие от

$$\mathbb{E}\left[I^k_{\phi_+^{(n)}}\right] = \frac{k!}{\prod_{j=1}^k \phi_+^{(n)}(j)},\ k \in \mathbb{N}, \tag{2.3.8}$$

виж [46, Твърдение 4.6], и

$$\mathbb{E}\left[I^{-k}_{\psi^{(n)}}\right] = \frac{1}{\left(\psi^{(n)}\right)'(0)} \frac{\prod_{j=1}^{k-1}\psi^{(n)}(j)}{(k-1)!},\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 1, \tag{2.3.9}$$

виж [46, Твърдение 4.7], и $\lim_{n\to\infty} \phi_+^{(n)} = \phi_+$, $\lim_{n\to\infty} \phi_-^{(n)} = \phi_-$, което е доказано в [46, Лема 4.9], но е част от фолклора в областта на процесите на Леви.

С това е и завършено доказателството на Теорема 2.2.1.

2.4 Доказателство на Следствие 2.2.4

Когато $\Pi_-(dy) = \Pi(-dy) = 0dy$, тогава H^- или процесът на минимум на процеса на Леви няма скокове и тогава

$$\phi_-(z) = -\log \mathbb{E}\left[e^{-zH_1^-}\right] = \phi_-(0) + d_- z,$$

виж (1.5.6). Следователно $\psi(z) = z\phi_-(z) = \phi_-(0)z + d_- z^2$ е експонента на Леви-Хинчин на Брауново движение с дрифт $\phi_-(0) > 0$. Вече знаем от Секция 1.6.1.1, че $I_\psi \stackrel{d}{=} \frac{1}{d_- G\left(\frac{\phi_-(0)}{d_-},1\right)}$ и полагайки $\frac{\phi_-(0)}{d_-} = -\gamma$ можем да покажем от (2.1.1), че

$$\Psi(\gamma) = -\phi_+(-\gamma)\phi_-(\gamma) = -\phi_+(-\gamma)\left(\phi_-(0) - d_-\frac{\phi_-(0)}{d_-}\right) = 0.$$

Така (2.2.5) е доказано, докато (2.2.6),(2.2.7) следват съответно след елементарно интегриране и развитие в ред на Тейлър на e^{-x}.

Глава 3

Разширени факторизации на експоненциалните функционали на процеси на Леви

Тази глава от настоящия автореферат разисква основните достижения на Глава 3 от дисертацията, която се базира на статия [51]. Основната цел е да изложим най-важните резултати и очертаем тяхното доказателство. Преди да започнем ще отбележим една несъществена разлика в нотацията на Глава 2 в дисертацията и тази в автореферата. Тук използваме $I_\Psi = \int_0^\infty e^{-\xi_s} ds$, докато там се разглежда обекта $I_{\Psi_q} = \int_0^\infty e^{\xi_s} ds$. Двете случайни величини са еквивалентни със смяната $\xi_s \to -\xi_s$. И в автореферата, както и в Глави 4 и 5 от дисертацията, тъй като $q = -\Psi(0)$, използваме навсякъде Ψ вместо Ψ_q. Това е едно естествено развитие на нотацията между [51] и [54].

Резултатите от Глава 2 имат едно сериозно ограничение извън изискването за $\Pi_- \in \mathcal{P}$, валидни само за случаите на консервативен процес на Леви. Възможността да се разглеждат и убити процеси на Леви, виж Дефиниция 1.5.1(3), е съществено важна, тъй като законът на $\int_0^{e_q} e^{-\xi_s} ds$, e_q, $q > 0$ описва трансформацията на Лаплас на $\int_0^t e^{-\xi_s} ds$ по времето t. Предвид липсата на методология за директното изучаване на закона на $\int_0^t e^{-\xi_s} ds$, то разбирането на $\int_0^{e_q} e^{-\xi_s} ds$, e_q, $q > 0$ е важно. Това например се изисква в задачите за оценяване на Азиатските опции, виж (1.6.1.2.4). В литературата в този период случаят на убити процеси на Леви е разглеждан в по-малка общност от случая $\Psi(0) = 0$. Уравнението

$$\mathcal{M}_{I_\Psi}(z+1) = \frac{-z}{\Psi(-z)} \mathcal{M}_{I_\Psi}(z) \tag{3.0.1}$$

за случая $q > 0$ се появява в много рестриктивен вариант в [17, Твърдение 3.1]. Въпреки това се използва в литературата в по-голяма общност, виж [38]. В последствие верността му е анонсирана в [52] и твърдението е доказано в [4, 54].

Подходът на доказателство чрез стационарното разпределение на обобщения процес на Орнщайн-Уленбек, осъществен в [46] (виж също предходната глава на настоящия автореферат), не използва, а води до уравнение (3.0.1). Предвид факта, че когато процесът на Леви е убит, U^{ξ} не притежава стационарно разпределение, виж Секция 2.3.1, то в този случай този подход е неприложим. Затова подхождаме различно.

3.1 Основна идея и някои евристични коментари

В тази глава, използвайки и обобщавайки нововъведен клас от трансформации $\mathcal{T}_\beta : \overline{\mathcal{N}} \mapsto \overline{\mathcal{N}}$, виж [19], приближаваме клас от I_Ψ с $q = -\Psi(0) > 0$ с редица експоненциални функционали I_{Ψ^β} такива, че $\Psi^\beta(0) = 0$, т.е. прилежащият процес на Леви ξ^β е консервативен. Тъй като $\Psi^\beta = \mathcal{T}_\beta \Psi$ не е трудно да покажем валидността на първите две релации в

$$I_\Psi = \lim_{\beta\to 0} I_{\mathcal{T}_\beta \Psi} = \lim_{\beta\to 0} I_{\phi_+^\beta} \times I_{\psi^\beta} \stackrel{?}{=} I_{\phi_+} \times I_\psi. \tag{3.1.1}$$

Трудността е в показването на последното равенство. По принцип явна трансформация на Ψ да кажем $\mathbf{A}\Psi$ не води до явна трансформация на нейните Винер-Хопф фактори, т.е. до $\mathbf{A}\phi_\pm$, виж (2.1.1), което напомняме, че се дава с

$$\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z),\, z \in i\mathbb{R}. \tag{3.1.2}$$

Голямото предимство на ефекта на $\mathbf{T}_\beta$ трансформацията е, че нейният ефект върху Винер-Хопф факторите може да се даде в явен вид.

3.2 Основен резултат

Нека разгледаме целия клас

$$\mathcal{N} = \{\Psi \in \mathcal{N} :\, \phi_-(0) > 0\}\,, \tag{3.2.1}$$

виж (1.6.3), т.е. всички процеси на Леви такива, че $I_\Psi < \infty$ п.с.. В този случай от (1.5.2) имаме, че

$$\Psi(z) = cz + \frac{\sigma^2 z^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{zy} - 1 - zy\mathbb{I}_{\{y\le 1\}}\right) \Pi(dy) - q. \tag{3.2.2}$$

Да означим $\Pi_+(dy) = \Pi(dy)\mathbb{I}_{\{y>0\}}$ и с $\Pi_-(dy) = \Pi(-dy)\mathbb{I}_{\{y>0\}}$. Припомняме дефиницията

Definition 3.2.1. *Със символа $\mathcal{P}$ означаваме класа на всички неотрицателни мерки върху $\mathbb{R}^+$ които притежават ненамаляваща плътност, т.е. $\nu(dy) = v(y)dy$, $y > 0$ и $v : \mathbb{R}^+ \mapsto [0,\infty)$ е ненамаляваща.*

С тези означения можем да формулираме основния резултат от текущата Глава 3.

Theorem 3.2.1. *Нека $\Psi \in \mathcal{N}$ и нека $\Pi_- \in \mathcal{P}$. Тогава имаме факторизацията*

$$I_\Psi \stackrel{d}{=} I_{\phi_+} \times I_\psi, \tag{3.2.3}$$

където $I_{\phi_+} = \int_0^\infty e^{-H_s^+} ds$ където H^+ е субординатор с експонента на Лаплас ϕ_+ и $\psi \in \mathcal{N}$ има

$$\psi(z) = z\phi_-(z), \tag{3.2.4}$$

т.е. I_ψ е експоненциален функционал на процес на Леви ξ^-, който няма положителни скокове и

$$I_\psi = \int_0^\infty e^{-\xi_s^-} ds.$$

Remark 3.2.2. *Факторизацията* (2.2.3) *може да се добие и при наличието на друго условие за Ψ, т.е. условията $\mathbf{P}_\pm^\mathbf{q}$ в Глава 3 и в [51]. Тук няма да го разглеждаме, като по същество идеите са сходни.*

Remark 3.2.3. *Изискването за $\Psi \in \mathcal{N}$ и $\Pi_- \in \mathcal{P}$ е много слабо. То включва повечето разработки по темата.*

Преминаваме към някои незабавни следствия от Теорема 3.2.1, които демонстрират потенциала на (3.2.3). Фактът, че тук можем да работим и с убити експоненциални функционали на Леви, е много съществен. Първото следствие съответства на най-важното твърдение в [51, Следствие 1.5]. За целта припомняме, че процес на Леви X се нарича стабилен процес на Леви с индекс $\alpha \in (0, 2]$, ако за всяко $c > 0$ имаме равенството в слаб смисъл

$$\left(c^{\frac{1}{\alpha}} X_s\right)_{s\geq 0} \stackrel{w}{=} (X_{cs})_{s\geq 0}. \tag{3.2.5}$$

Нека означим $S_1 = \sup_{s\leq 1} X_s$ и $\rho = \mathbb{P}(X_1 > 0)$. Последното количество е известно като коефициент на позитивност на стабилния процес на Леви. Тогава имаме твърдението

Corollary 3.2.4. *Нека X е стабилен процес на Леви и S_1 е неговият максимум. Нека $T_1 = \{t > 0 : X_t \geq 1\}$. Тогава $T_1 \stackrel{d}{=} S_1^{-\alpha}$. Също така плътността на T_1 има ограничена и ненарастваща плътност върху $\mathbb{R}^+$ при условие, че $\alpha \in (0, 1)$ и $\rho \in \left(0, \frac{1}{\alpha} - 1\right]$. Последното е винаги в сила когато $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.*

Следващият резултат съдържа качествено нови резултати.

Corollary 3.2.5. *Имаме следните резултати:*

(a) Нека ξ е ненарастващ убит процес на Леви, т.е. $\xi = -\eta$, където η е субординатор и $\Pi_- \in \mathcal{P}$. Тогава плътността на I_Ψ, т.е. f_Ψ е напълно монотонна като функция(виж Дефиниция (1.5.3)*) и се разлага в следния безкраен ред*

$$f_\Psi(x) = q + q\sum_{n=1}^\infty \left(\prod_{j=1}^n \Psi(j)\right) \frac{x^n}{n!}, \tag{3.2.6}$$

където Ψ е експонентата на Леви-Хинчин на ξ, $q = -\Psi(0) > 0$, тъй като процесът е убит и сходимостта на безкрайния ред е в сила за $x < \lim_{y\to\infty} -\frac{y}{\Psi(y)} \in (0,\infty]$.

(б) *Нека ξ притежава само положителни скокове, т.е. $\Pi_-(dy)\mathbb{I}_{\{y>0\}} = 0dy \in \mathcal{P}$. Тогава* (2.2.6) *и* (2.2.7) *са в сила отново с $\gamma < 0 : \Psi(\gamma) = 0$.*

Remark 3.2.6. *Резултатът в точка* (а) *относно пълната монотонност на f_Ψ не е нов. Той едновременно бе добит без ограничението $\Pi_- \in \mathcal{P}$ от [47, Следствие 2.2], но съществуването и вида на безкрайния ред не са дискутирани. Фактът, че функция е напълно монотонна, не е еквивалентен на възможността да я развием в ред.*

Remark 3.2.7. *Резултатът от точка* (б) *е съществено подобрение на Следствие 2.2.4, тъй като премахва изискването за консервативност на процеса на Леви и така отива далеч отвъд основния резултат на [49]. Предвид [54, Следствие 2.12] или Следствие 5.2.12 в Глава 5 разлагане в ред не е възможно извън контекста на точка* (а) *и* (б). *В този смисъл* (б) *е оптимална.*

Други приложения и следствия от Теорема 3.2.1 могат да се намерят в Глава 3 или в [51], но за яснота няма да ги разискваме тук.

3.3 Някои идеи от доказателството на Теорема 3.2.1

Доказателството заема основна част от Глава 3 и съответно от [51]. Навсякъде по-долу допускаме, че $\Psi \in \mathcal{N}$ и $\Pi_- \in \mathcal{P}$. Припомняме (2.1.1)

$$\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z),\ z \in i\mathbb{R}, \tag{3.3.1}$$

където

$$\phi_\pm(z) = \phi_\pm(0) + d_\pm z + \int_0^\infty \left(1 - e^{-zy}\right)\mu_\pm(dy) \in \mathcal{B}. \tag{3.3.2}$$

Основната цел е да приближим I_Ψ с редица експоненциални функционали, базирани на консервативни процеси на Леви.

3.3.1 Трансформацията $\mathcal{T}_\beta$

Дефинираме формално трансформацията $\mathcal{T}_\beta, \beta > 0$ по следния начин

$$\mathcal{T}_\beta\Psi(z) = \frac{z}{z-\beta}\Psi(z-\beta). \tag{3.3.3}$$

Допускаме, докато не укажем изрично, че $\Psi \in \mathtt{A}_{(-\epsilon,0]}$ за някое $\epsilon > 0$. Тогава имаме следния резултат, който се явява и естествено обобщение на работата [19].

Proposition 3.3.1. *Нека съществува* $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ *такова, че* $e^{\beta y}\int_y^\infty \Pi_-(dy)dy = e^{\beta y}\int_{-\infty}^{-y}\Pi_-(dy)dy \in \mathcal{P}$ *и* $\Psi(-\beta) < 0$ *за всяко* $\beta \in (0, \epsilon_1)$, *тогава за всяко такова* β *е в сила* $\mathcal{T}_\beta\Psi \in \mathcal{N}$ *и* $\mathcal{T}_\beta\Psi \in \mathtt{A}_{(\beta-\epsilon_1,\beta)}$. *Нещо повече* $\mathcal{T}_\beta\Psi(0) = 0$ *и* $\mathcal{T}_\beta\Psi$ *е Леви-Хинчин експонентата на консервативен процес на Леви.*

Remark 3.3.2. *Трансформацията* $\mathcal{T}_\beta$ *е нова и макар че е елементарна, носи полезен формализъм, който много удачно може да се използува при конкретни сметки. Така например редица явно пресметнати "скалиращи функции"в [36] могат директно да се добият чрез трансформацията* $\mathcal{T}_\beta$ *на даден тип експоненти на Леви-Хинчин* Ψ.

Remark 3.3.3. *Изискването* $e^{\beta y}\int_y^\infty \Pi_-(dy)dy = e^{\beta y}\int_{-\infty}^{-y}\Pi_-(dy)dy \in \mathcal{P}$ *е съществено. Без това допускане функцията* $\mathcal{T}_\beta\Psi$ *може да не бъде експонента на Леви-Хинчин, т.е.* $\mathcal{T}_\beta\Psi \notin \mathcal{N}$.

Доказателството на факта, че $\mathcal{T}_\beta\Psi \in \mathcal{N}$ и $\mathcal{T}_\beta\Psi \in \mathtt{A}_{(\beta-\epsilon_1,\beta)}$ е алгебрично и не представлява по същество интерес за вероятностите. $\mathcal{T}_\beta\Psi(0) = 0$ е въпрос на тривиално заместване.

Разбирането как една трансформация на Ψ трансформира на свой ред Винер-Хопф факторите на Ψ, виж (3.3.1), често пъти е критерий за нейната полезност и универсалност. Следващият резултат показва как $\mathcal{T}_\beta$ трансформира факторите на Винер-Хопф в (3.3.1).

Proposition 3.3.4. *Нека съществува* $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ *такова, че* $e^{\beta y}\int_y^\infty \Pi_-(dy)dy = e^{\beta y}\int_{-\infty}^{-y}\Pi_-(dy)dy \in \mathcal{P}$ *и* $\Psi(-\beta) < 0$ *за всяко* $\beta \in (0, \epsilon_1)$. *Тогава за всяко такова* β *имаме декомпозицията на Винер-Хопф за* $\mathcal{T}_\beta\Psi$

$$\mathcal{T}_\beta\Psi(z) = -\frac{z}{z-\beta}\phi_+(\beta - z)\phi_-(z-\beta), \tag{3.3.4}$$

където с $\phi_+^\beta(-z) = \frac{z}{z-\beta}\phi_+(\beta - z)$ *и* $\phi_-^\beta(z) = \phi_-(z-\beta)$ *е в сила, че* $\phi_\pm^\beta \in \mathcal{B}$, *т.е.* $\phi_\pm^\beta$ *са експонентите на Лаплас на процесите на максимум и минимум на Леви процеса* ξ^β, *чиято експонента на Леви-Хинчин е* Ψ^β.

Равенство (3.3.4) следва моментално от дефиницията (3.3.3) и равенството (3.3.1). Понеже $\mathbb{E}\left[e^{-zH_1^+}\right] = e^{-\phi_+(z)}$, $z \in \mathbb{C}_{(0,\infty)}$, виж (1.5.6), то $-\phi_+(-z) = \psi^+(z)$, където ψ^+ е експонентата на Леви-Хинчин на H_1^+. Тогава са верни равенствата

$$-\frac{z}{z-\beta}\phi_+(\beta - z) = \frac{z}{z-\beta}\psi^+(z-\beta) \stackrel{(3.3.3)}{=} \mathcal{T}_\beta\psi^+(z) = -\phi_+^\beta(-z),$$

като последното е в сила, понеже $\psi_\beta^+(z) = \mathcal{T}_\beta\psi^+(z)$ е експонента на Леви-Хинчин на субординатор и тогава $\psi_\beta^+(z) = -\phi_+^\beta(-z)$, където ϕ_+^β е експонентата на Лаплас на същия субординатор. Така (3.3.4) може да се преформулира, като

$$\mathcal{T}_\beta\Psi(z) = -\frac{z}{z-\beta}\phi_+(\beta - z)\phi_-(z-\beta) = -\phi_+^\beta(-z)\phi_-^\beta(z),$$

което е Винер-Хопф факторизация на $\mathcal{T}_\beta\Psi$. От единствеността на факторизациите на Винер-Хопф, виж [61, Теорема 45.2 (i)] следва, че $-\phi_+^\beta(-z)\phi_-^\beta(z)$ е факторизацията на Винер-Хопф за $\mathcal{T}_\beta\Psi$. С това твърдението е доказано.

Оттук нататък допускаме, че условията на Твърдение 3.3.4 са в сила.

3.3.2 Сходимост от вида $\lim\limits_{\beta\to 0} I_{\mathcal{T}^\beta\Psi} \stackrel{d}{=} I_\Psi$

Понеже $\mathcal{T}_\beta\Psi \in \mathcal{N}$ ще покажем, че

$$I_{\mathcal{T}^\beta\Psi} \stackrel{d}{=} I_\Psi. \tag{3.3.5}$$

От Твърдение 3.3.1 е вярно, че за някое $\epsilon_1 > 0$ и всички $0 < \beta < \epsilon_1$, $\mathcal{T}_\beta\Psi \in \mathtt{A}_{(\beta-\epsilon_1,\beta)}$ и тогава следва, че

$$\mathcal{M}_{I_{\mathcal{T}_\beta\Psi}}(z+1) = -\frac{z}{\mathcal{T}_\beta\Psi(-z)}\mathcal{M}_{I_{\mathcal{T}_\beta\Psi}}(z),\ z \in \mathbb{C}_{(0,\beta)},$$

т.е. рекурентното уравнение (3.0.1) е в сила за $I_{\mathcal{T}_\beta\Psi}$. Изразявайки $\mathcal{T}_\beta\Psi(-z)$ от (3.3.3), получаваме

$$\mathcal{M}_{I_{\mathcal{T}_\beta\Psi}}(z+1) = -\frac{z+\beta}{\Psi(-z-\beta)}\mathcal{M}_{I_{\mathcal{T}_\beta\Psi}}(z),\ z \in \mathbb{C}_{(0,\beta)}.$$

Освен това, замествайки $z \mapsto z+\beta$ в (3.0.1), получаваме

$$\mathcal{M}_{I_\Psi}(z+\beta+1) = -\frac{z+\beta}{\Psi(-z-\beta)}\mathcal{M}_{I_\Psi}(z+\beta).$$

Тъй като поне за $z \in \mathbb{C}_{\left[0,\frac{\epsilon_1}{2}\right)}$ функциите $\mathcal{M}_{I_{\mathcal{T}_\beta\Psi}}(z), \mathcal{M}_{I_\Psi}(z+\beta)$ решават уравнение от вида $f(z+1) = -\frac{z+\beta}{\Psi(-z-\beta)}f(z)$, получаваме, че

$$C\mathcal{M}_{I_{\mathcal{T}_\beta\Psi}}(z+1) = C\mathbb{E}\left[I_{\mathcal{T}_\beta\Psi}^z\right] = \mathcal{M}_{I_\Psi}(z+\beta+1) = \mathbb{E}\left[I_\Psi^{z+\beta}\right].$$

Поставяйки $z = 0$, добиваме, че

$$C = \mathbb{E}\left[I_\Psi^\beta\right].$$

Тъй като

$$\mathcal{M}_{I_\Psi}(z+\beta) = \int_0^\infty x^{z-1}x^\beta f_\Psi(x)dx$$

е трансформацията на Мелин на мярката $x^\beta f_\Psi(x)dx$, докато

$$\mathcal{M}_{I_{\mathcal{T}_\beta\Psi}}(z) = \int_0^\infty x^{z-1} f_{I_{\mathcal{T}_\beta\Psi}}(x)dx$$

е транформацията на Мелин на $f_{I_{\mathcal{T}_\beta\Psi}}(x)dx$, от единствеността на трансформацията на Мелин получаваме, че

$$x^\beta f_\Psi(x) = \mathbb{E}\left[I_\Psi^\beta\right] f_{I_{\mathcal{T}_\beta\Psi}}(x).$$

Това моментално води до поточковата сходимост

$$\lim_{\beta\to 0} f_{I_{\mathcal{T}_\beta \Psi}}(x) = \lim_{\beta\to 0} \frac{x^\beta}{\mathbb{E}\left[I_\Psi^\beta\right]} f_\Psi(x) = f_\Psi(x).$$

Така плътностите на $I_{\mathcal{T}_\beta \Psi}$ се схождат поточково към плътността на I_Ψ, което доказва (3.3.5).

3.3.3 Доказателство на фактите $I_{\mathcal{T}^\beta \Psi} \stackrel{d}{=} I_{\phi_+^\beta} \times I_{\psi_-^\beta}$ и $I_\Psi \stackrel{d}{=} I_{\phi_+} \times I_\psi$

Въпреки, че имаме по-стрикното допускане, че $e^{\beta y}\int_y^\infty \Pi_-(dy)dy = e^{\beta y}\int_{-\infty}^{-y} \Pi_-(dy)dy \in \mathcal{P}$, то не е директно вярно, че ако Π^β е мярката на Леви на $\mathcal{T}^\beta\Psi$, то $\Pi_-^\beta \in \mathcal{P}$. Всъщност се оказва, че $\mathcal{T}^\beta\Psi$ удовлетворя условие $\mathbf{P}_\pm$ в Глава 2 на дисертацията или в статия [46]. Това показва, че $I_{\mathcal{T}^\beta \Psi} \stackrel{d}{=} I_{\phi_+^\beta} \times I_{\psi_-^\beta}$ и от предходната секция 3.3.2 следва, че

$$I_\Psi \stackrel{d}{=} \lim_{\beta\to 0} I_{\mathcal{T}^\beta \Psi} \stackrel{d}{=} \lim_{\beta\to 0} I_{\phi_+^\beta} \times I_{\psi_-^\beta}. \tag{3.3.6}$$

Понеже ψ_-^β е експонентата на консервативен процес на Леви ξ^β и $\psi_-^\beta(z) = z\phi_-(z-\beta)$, заключаваме, че

$$\lim_{\beta\to 0} \psi_-^\beta(z) = \lim_{\beta\to 0} z\phi_-(z-\beta) = z\phi_-(z) = \psi_-(z).$$

Аналогично на аргументите в секция 2.3.6, използвайки релация (2.3.9), можем да добием, че

$$\lim_{\beta\to 0} I_{\psi_-^\beta} = I_{\psi_-}. \tag{3.3.7}$$

Също така благодарение на изразите за моментите, виж (2.3.8), използваме представянето

$$\mathbb{E}\left[I_{\phi_+^\beta}^k\right] = \frac{k!}{\prod_{j=1}^k \phi_+^\beta(j)},\ k \in \mathbb{N}, \tag{3.3.8}$$

откъдето е ясно, че

$$\lim_{\beta\to 0} \mathbb{E}\left[I_{\phi_+^\beta}^k\right] = \lim_{\beta\to 0} \frac{k!}{\prod_{j=1}^k \phi_+^\beta(j)} = \lim_{\beta\to 0} \frac{k!}{\prod_{j=1}^k \phi_+(j)} = \mathbb{E}\left[I_{\phi_+}^k\right],\ k \in \mathbb{N}.$$

Понеже от [15] знаем, че I_{ϕ_+} е еднозначно определна от моментите си, можем да покажем, че

$$\lim_{\beta\to 0} I_{\phi_+^\beta} = I_{\phi_+}. \tag{3.3.9}$$

От (3.3.9) и (3.3.7) моментално следва, че (3.3.6) води до

$$I_\Psi = \lim_{\beta\to 0} I_{\mathcal{T}^\beta \Psi} = \lim_{\beta\to 0} I_{\phi_+^\beta} \times I_{\psi_-^\beta} = I_{\phi_+} \times I_\psi. \tag{3.3.10}$$

3.3.4 Кратък обзор на доказаното дотук

Условията, при които е вярна релация (3.3.10), са следните:

1. Съществува $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ такова, че $e^{\beta y}\int_y^\infty \Pi_-(dy)dy = e^{\beta y}\int_{-\infty}^{-y}\Pi_-(dy)dy \in \mathcal{P}$ и $\Psi(-\beta) < 0$ (Твърдение 3.3.4)

2. $\Psi \in \mathtt{A}_{(-\epsilon,0]}$

3.3.5 Премахване на условия (1) и (2)

Целта е да докажем (3.3.10), само когато $\Pi_- \in \mathcal{P}$ и естественото $\Psi \in \mathcal{N}$. За целта модифицираме $\Pi_-^\gamma(dy) = e^{-\gamma y}\Pi_-(dy)$, $y > 0$ и запазваме Π_+ и означаваме новата мярка на Леви с Π^γ. Така получаваме процес на Леви ξ^γ. Също така наблюдаваме, че

$$e^{\beta y}\int_y^\infty \Pi_-^\gamma(dv) = e^{\beta y}\int_y^\infty e^{-\gamma v}\pi_-(v)dv = e^{(\beta-\gamma)y}\int_0^\infty e^{-\gamma v}\pi_-(v+y)dv.$$

Понеже $y \mapsto \pi_-(v+y)$ е намаляваща от допускането $\Pi_- \in \mathcal{P}$ и $y \mapsto e^{(\beta-\gamma)y}$ е намаляваща за $\beta < \gamma$, заключаваме, че условие (1) е изпълнено при $\beta < \gamma$. Също така $\Psi \in \mathtt{A}_{(-\gamma,0]}$ следва от

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{ay}\Pi^\gamma(dy) = \int_{-\infty}^{-1} e^{ay}e^{-\gamma y}\Pi(dy) \le \int_{-\infty}^{-1}\Pi(dy) < \infty,$$

стига $a \in (-\gamma, 0)$, виж Твърдение 1.5.6(2). Така условие (2) е изпълнено и стигаме до извода, че ако Ψ^γ е експонентата на модифицирания процес на Леви ξ^γ, то (3.3.10) ни дава

$$I_{\Psi^\gamma} = I_{\phi_+^\gamma} \times I_{\psi^\gamma}. \tag{3.3.11}$$

Оттук точно както в секция (2.3.6) се показва, че

$$I_\Psi = \lim_{\gamma\to 0} I_{\Psi^\gamma} \stackrel{d}{=} \lim_{\gamma\to 0} I_{\phi_+^\gamma} \times I_{\psi^\gamma} \stackrel{d}{=} I_{\phi_+} \times I_\psi.$$

С това контурът на доказателството на Теорема 3.2.1 е завършен.

3.4 Някои идеи от доказателството на Следстие 3.2.4

Равенството $T_1 \stackrel{d}{=} S_1^{-\alpha}$ е елементано следствие от стабилността на процеса X. Наистина от

$$S_x = \sup_{s\le x} X_s = \sup_{s\le 1} X_{xs} \stackrel{d}{=} x^{\frac{1}{\alpha}} \sup_{s\le 1} X_s = x^{\frac{1}{\alpha}} S_1,\ \forall x > 0,$$

и равенството $\{S_x \le 1\} = \{T_1 > x\}$ получаваме $T_1 \stackrel{d}{=} S_1^{-\alpha}$. От красивата трансформация на Ламперти, която свързва себеподобието върху $\mathbb{R}^+$ и процесите на Леви, виж

[40, 12], и факта, че $1 - X_t$, $t < T_1 = \inf\{s > 0 : X_s > 1\}$ е стабилен (себеподобен) процес, получаваме, че

$$T_1 \stackrel{d}{=} \int_0^\infty e^{-\xi_s^X} ds, \tag{3.4.1}$$

убития процес на Леви ξ^X, известен в литературата като Ламперти-стабилен процес на Леви, виж [16]. Това свежда разбирането T_1 до разбиране на експоненциален функционал. От [51, Следствие 3.1.3(i)](Глава 3 Следствие 1.3(i)), е достатъчно да покажем, че Леви-Хинчин експонентата на ξ^X, да кажем Ψ^X, е такава че $\Psi^X \in \mathtt{A}_{[0,1]}$ и $\Psi^X(1) \leq 0$. От [38] можем да пресметнем, че

$$\Psi^X(z) = -\frac{\Gamma(\alpha z + \alpha)}{\Gamma(\alpha\rho + \alpha z)} \frac{\Gamma(1 - \alpha z)}{\Gamma(1 - \alpha z - \alpha\rho)}.$$

За $z \in \mathbb{C}_{[0,1]}$ само факторът $\Gamma(1 - \alpha z)$ има значение за аналитичността на Ψ^X върху $\mathbb{C}_{[0,1]}$. За $\alpha \in (0, 1)$ очевидно $\mathtt{Re}(1 - z\alpha) > 0$ и следователно $\Psi^X \in \mathtt{A}_{[0,1]}$. Също така

$$\Psi^X(1) = -\frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha\rho + \alpha)} \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha - \alpha\rho)} \leq 0 \iff \Gamma(1 - \alpha - \alpha\rho) > 0 \iff 1 - \alpha - \alpha\rho > 0$$

и така доказваме, че плътността на T_1 е ограничена и ненамаляваща.

Отбелязваме, че когато за някое $\Psi \in \mathcal{N}$ имаме $\Psi^X \in \mathtt{A}_{[0,1]}$ и $\Psi^X(1) \leq 0$, то [51, Следствие 3.1.3(i)](Глава 3 Следствие 1.3(i)) от настоящата дисертация дават

$$I_\Psi \stackrel{d}{=} U \times V,$$

където U е равномерно разпределена на $[0, 1]$. Оттук с помощта на Теоремата на Хинчин, виж [26], следват и свойствата за ограниченост и монотонност на плътността.

3.5 Някои идеи от доказателството на Следстие 3.2.5

Доказателството на точка (б) е идентично на доказателството на Следствие (2.2.4), виж (2.4). Разглеждаме само точка (а). Нека $\xi = -\eta$, където η е субординатор. Нека също $\Pi_- \in \mathcal{P}$. Тогава факторизацията на Винер-Хопф, виж (3.3.1), приема формата

$$\Psi(z) = -\phi_-(z),$$

тъй като $\phi_+ \equiv 1$, което от своя страна отговаря на експонентата на Леви-Хинчин на $\xi_s = 1$, $s \leq e_1$ и $\xi_s = \infty$, $s > e_1$. Следователно от Теорема 3.2.1(3.2.3) води до

$$I_\Psi = \int_0^{e_1} e^{-1} ds \times I_\psi = e_1 \times I_\psi,$$

където напомняме, че $\psi(z) = z\phi_-(z)$ е експонентата на Леви-Хинчин на Леви процес без положителни скокове. Тогава имаме за плътността на I_Ψ

$$f_\Psi(x) = \int_0^\infty f_{I_\psi}\left(\frac{x}{y}\right) e^{-y} \frac{dy}{y} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty f_{I_\psi}\left(\frac{x}{y}\right) y^{n-1} dy$$
$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n}{n!} \int_0^\infty f_{I_\psi}(y) \frac{dy}{y^{n+1}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n}{n!} \mathbb{E}\left[I_\psi^{-n-1}\right]$$

Тогава (3.2.6) следва от (2.3.9), която пресмята моментите на I_ψ, когато $\psi(z) = z\phi_-(z)$ е експонентата на Леви-Хинчин на Леви процес без положителни скокове, което е валидно в случая.

Глава 4

Функции на Бенщайн-Гама и експоненциални функционали на процеси на Леви

В тази глава от автореферата разглеждаме комбинирано Глави 4 и 5 от дисертационния труд. Глава 4, която изцяло се базира на [52], представлява доклад на част от резултатите в Глава 5, която е по същество разработката [54].

Резултатите в Глава 5 представляват най-обхватната до момента разработка в теорията на експоненциалните функционали на Леви. Това се дължи на факта, че решение на уравнение

$$\mathcal{M}_{I_\Psi}(z+1) = \frac{-z}{\Psi(-z)}\mathcal{M}_{I_\Psi}(z) \tag{4.0.1}$$

се намира в явен вид с помощта на нов клас специални функции, които наричаме "Бернщайн-Гама функции". Чрез обратната транформация на Мелин последните могат да се изучат в детайл и така да се извлече информация за I_Ψ.

Трябва да се отбележи, че методите предложени в Глава 5 не са само аналитични. Вероятностните аргументи ключово подпомагат и допълват аналитичния апарат и това ще бъде дискутирано в процеса на доказателствата. Този подход позволява често да се работи с целия клас експоненциални функционали и фактът, че той неизменно води или до изцяло нови резултати или до подобрения на предходни, показва, че на този етап това е най-точният апарат за изучаването на I_Ψ.

Поради обемът на [54] (Глава 5 от дисертационния труд) ще очертаем първо основните идеи и цели и впоследствие ще преминем към основните резултати и техните доказателства. Както в предходните глави, ще скицираме само основните моменти на извеждането на основните резултати.

4.1 Цели на [54] (Глава 5)

Припомняме, че класът $\overline{\mathcal{N}}$ е класът на всички отрицателно дефинитни функции или функции от вида

$$\Psi(z) = cz + \frac{\sigma^2 z^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{zy} - 1 - zy\mathbb{I}_{\{y\leq 1\}}\right) \Pi(dy) - q. \tag{4.1.1}$$

Също така имаме, че класът $\overline{\mathcal{N}}$ е в биекция с класа на всички процеси на Леви, виж Дефиниция 1.5.1 и Теорема 1.5.2, чрез изображението

$$\xi \mapsto \Psi(z) = \log \mathbb{E}\left[e^{z\xi_1}\right].$$

Последно припомняме, че

$$\overline{\mathcal{N}} \supseteq \mathcal{N} = \left\{\Psi \in \overline{\mathcal{N}} :\, \phi_-(0) > 0\right\} = \left\{\Psi \in \overline{\mathcal{N}} :\, I_\Psi = \int_0^\infty e^{-\xi_s} ds < \infty \text{ п.с.}\right\}.$$

Тогава основните цели на [54] (Глава 5) могат накратко да се скицират като:

1. За всяко $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}$ да се реши уравнението

$$\mathcal{M}_\Psi(z+1) = \frac{-z}{\Psi(-z)} \mathcal{M}_\Psi(z), \tag{4.1.2}$$

   поне за $z \in i\mathbb{R} \setminus (\mathcal{Z}_0 \cup \{0\})$.

2. Да се покаже, че за всяко $\Psi \in \mathcal{N}$ е вярно, че $\mathcal{M}_{I_\Psi}(z) = \phi_-(0)\mathcal{M}_\Psi(z)$.

3. Да се използва формата на $\mathcal{M}_{I_\Psi}(z)$, за да се докажат разнообразни резултати за разпределението на I_Ψ.

Основният инструмент в цялата разработка са функциите на Бернщайн-Гама. Ще започнем с тяхното изучаване.

4.2 Функции на Бернщайн-Гама

Вероятно най-известната специална функция е Ойлеровата Гама функция, означавана с $\Gamma(z)$. Измежду многото си интересни свойства тя се отличава с факта, че решава рекурентното уравнение

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ \Gamma(1) = 1 \tag{4.2.1}$$

за всяко $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^-$, където $\mathbb{N}^-$ е множеството от отрицателни цели числа. Уравнение (4.2.1) позволява да се представи Γ във вид на произведение на Вайерщрас

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{k}{k+z} e^{\frac{1}{k}z}, \tag{4.2.2}$$

където γ е константата на Ойлер-Масчерони, и също така води до извеждането на известната асимптотика на Стирлинг за Гама функцията

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} e^{z\log(z) - z - \frac{1}{2}\log(z)} \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right). \tag{4.2.3}$$

Гама фунцкията се появява често в изучаването на различни дифузии като Беселовия процес, виж [56], и е тясно свързана с напрекъснати Марковски себеподобни процеси. Класът от функции, които ще разгледаме, също възниква във връзка изучаването на себеподобни Марковски процеси със скокове. Те кодират важна информация за тези процеси, виж [55]. Преди да въведем въпросните функции припомняме, че функцията ϕ е функция на Бенщайн или $\phi \in \mathcal{B}$ тогава и само тогава, когато има вида

$$\phi(z) = \phi(0) + dz + \int_0^\infty \left(1 - e^{-zy}\right) \mu(dy) \in \mathtt{A}_{[0,\infty)}, \tag{4.2.4}$$

където $\phi_-(0) \geq 0, d \geq 0$ и μ е мярка, удовлетворяваща $\int_0^\infty \min\{1, y\} \mu(dy)$.

Definition 4.2.1. *Нека $\phi \in \mathcal{B}$. Тогава W_ϕ е функция на Бернщайн-Гама, ако*

$$W_\phi(z+1) = \phi(z) W_\phi(z),\ z \in \mathbb{C}_{(0,\infty)};\ W_\phi(1) = 1 \tag{4.2.5}$$

и съществува положителна случайна величина Y_ϕ такава, че $W_\phi(z+1) = \mathbb{E}\left[Y_\phi^z\right],\ z \in \mathbb{C}_{[0,\infty)}$.

Remark 4.2.1. *Функциите на Бенщайн-Гама не се появяват за първи път в [54]. В различен контекст или/и по различен повод се срещат в [2, 15, 30, 44, 55]. По наши сведения, обаче, освен в [55], те никъде не са разглеждани като холоморфни фукнции, което е от изключителна важност, защото, както ще стане ясно по-долу, свойствата на W_ϕ като аналитични функции носят съществената за I_Ψ информация.*

Понеже W_ϕ решава (4.2.5), нашата цел е да разберем W_ϕ чрез свойства и количества свързани с $\phi \in \mathcal{B}$. За тази цел въвеждаме количествата:

$$\mathfrak{u}_\phi = \sup\{u \leq 0 : \phi(u) = 0\} \in [-\infty, 0], \tag{4.2.6}$$

$$\mathfrak{a}_\phi = \inf\ \{u < 0 : \phi \in \mathtt{A}_{(u,\infty)}\} \in [-\infty, 0], \tag{4.2.7}$$

$$\overline{\mathfrak{a}}_\phi = \max\{\mathfrak{a}_\phi, \mathfrak{u}_\phi\} = \sup\{u \leq 0 :\ \phi(u) = -\infty \text{ or } \phi(u) = 0\} \in [-\infty, 0], \tag{4.2.8}$$

които са добре дефинирани благодарение на вида на ϕ, виж (4.2.4), и конвенцията $\sup\emptyset = -\infty$ and $\inf\emptyset = 0$. Отбелязваме, че $\mathfrak{a}_\phi$ е минималното неположително число, за което е в сила, че $\phi \in \mathtt{A}_{\left(\mathfrak{a}_\phi, \infty\right)}$.

Нека дефинираме количествата:

$$W_\phi(z) = \frac{e^{-\gamma_\phi z}}{\phi(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(k)}{\phi(k+z)} e^{\frac{\phi'(k)}{\phi(k)} z},\ z \in \mathbb{C}_{(0,\infty)}, \tag{4.2.9}$$

където

$$\gamma_\phi = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\phi'(k)}{\phi(k)} - \log\phi(n)\right) \in \left[-\ln\phi(1), \frac{\phi'(1)}{\phi(1)} - \ln\phi(1)\right].$$

И за двете количества W_ϕ, γ_ϕ се знае, че са добре дефинирани и γ_ϕ играе ролята на константата на Ойлер-Масчерони. За повече информация за Гама функцията, виж [41]. Отбелязваме, че, когато $z = n \in \mathbb{N}$, то $W_\phi(n+1) = \prod_{k=1}^{n}\phi(k)$.

Последно, поставяме $\mathtt{M}_{(a,b)}$, $-\infty \le a < b \le \infty$, да бъде множеството от мероморфни функции върху $\mathbb{C}_{(a,b)}$

Първият основен резултат съдържа най-важните твърдения на [54, Теорема 5.2](Теорема 5.3.1 на Глава 5).

Theorem 4.2.2. *За всяко $\phi \in \mathcal{B}$ е вярно, че W_ϕ дефинирано, чрез* (4.2.9) *е функция на Бернщайн-Гама. Следните две твърдения са в сила.*

1. $W_\phi \in \mathtt{M}_{\left(\mathfrak{a}_\phi,\infty\right)} \cap \mathtt{A}_{\left(\bar{\mathfrak{a}}_\phi,\infty\right)}$ *и W_ϕ няма нули в $\mathbb{C}_{\left(\mathfrak{a}_\phi,\infty\right)}$.*

2. *Нека $\mathfrak{a}_\phi < \mathfrak{u}_\phi \le 0$ и нека $N_{\mathfrak{a}_\phi} = \max\{n \in \mathbb{N} :\, \mathfrak{u}_\phi - n > \mathfrak{a}_\phi\} \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Тогава полюсите на W_ϕ върху $(\mathfrak{a}_\phi, 0]$ съвпадат с множеството $\{\mathfrak{u}_\phi - k\}_{0\le k\le N_{\mathfrak{a}_\phi}+1}$. Полюсите са прости и съответно имат резидууми $\left\{\mathfrak{R}_k = \frac{W_\phi(1+\mathfrak{u}_\phi)}{\phi'(\mathfrak{u}_\phi)\prod_{j=1}^{k}\phi(\mathfrak{u}_\phi - j)}\right\}_{0\le k\le N_{\mathfrak{a}_\phi}+1}$.*

Remark 4.2.3. *Твърденията [54, Теорема 5.2](Теорема 5.3.1 на Глава 5) съдържат доста допълнителна информация за аналитичните свойства на W_ϕ.*

Теорема 4.2.2 дава възможност да се изведе много прецизна асимптотика от тип Стирлинг за $|W_\phi|$. За целта използваме аргумента в комплексната равнина, т.е. $\arg : \mathbb{C} \mapsto (-\pi, \pi]$. Първо въвеждаме функцията, която контролира поведението на $|W_\phi(z)|$ върху комплексните прави от вида $\mathbb{C}_a = \{z \in \mathbb{C} :\, \mathtt{Re}(z) = a\}$

$$A_\phi(z) = \int_0^{|b|} \arg\phi(a+iu)\,du. \tag{4.2.10}$$

Следващите функции контролират поведението на $W_\phi(x)$ за $x \to \infty$

$$G_\phi(a) = \int_1^{1+a}\ln\phi(u)du,\; H_\phi(a) = \int_1^{1+a}\frac{u\phi'(u)}{\phi(u)}du \text{ и } H^*_\phi(a) = a\left(\frac{\phi(a+1)-\phi(a)}{\phi(a)}\right). \tag{4.2.11}$$

Последно въвеждаме функциите, които пресмятат грешката на апроксимацията на Стирлинг. За $z = a+ib \in \mathbb{C}_{(0,\infty)}$, поставяме $\mathrm{P}(u) = (u - \lfloor u\rfloor)(1-(u-\lfloor u\rfloor))$, където $\lfloor u\rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} :\, n \le u\}$, и дефинираме функциите

$$E_\phi(z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{P}(u)\left(\ln\frac{|\phi(u+z)|}{\phi(u+a)}\right)'' du, \tag{4.2.12}$$

$$R_\phi(a) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \mathrm{P}(u)\left(\ln\frac{|\phi(u+a)|}{\phi(u)}\right)'' du, \tag{4.2.13}$$

и

$$T_\phi = \frac{1}{2}\int_1^\infty \mathrm{P}(u)\left(\left(\frac{\phi'(u)}{\phi(u)}\right)^2 - \frac{\phi''(u)}{\phi(u)}\right) du. \tag{4.2.14}$$

Тогава е в сила следният основен резултат, който може да се счита за асимптотиката на Стирлинг за $|W_\phi|$.

Theorem 4.2.4. *Следните твърдения са в сила.*

1. *За всяко $a > 0$, е в сила, че*

$$\sup_{\phi\in\mathcal{B}}\sup_{z\in\mathbb{C}_{(a,\infty)}} |E_\phi(z)| < \infty \text{ и } \sup_{\phi\in\mathcal{B}}\sup_{c>a}|R_\phi(c)| < \infty. \tag{4.2.15}$$

Нещо повече, за всяко $\phi \in \mathcal{B}$ и всяко $z = a + ib \in \mathbb{C}_{(0,\infty)}$ е вярно, че

$$|W_\phi(z)| = \frac{\sqrt{\phi(1)}}{\sqrt{\phi(a)\phi(1+a)|\phi(z)|}} e^{G_\phi(a)-A_\phi(z)} e^{-E_\phi(z)-R_\phi(a)} \tag{4.2.16}$$

с

$$\Theta_\phi(a+ib) = \frac{1}{|b|}A_\phi(a+ib) = \frac{1}{|b|}\int_a^\infty \ln\left(\frac{|\phi(u+i|b|)|}{\phi(u)}\right) du \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \tag{4.2.17}$$

2. *За всяко фиксирано $b \in \mathbb{R}$ и голямо a е в сила асимптотичното равенство*

$$|W_\phi(a+i|b|)| = \frac{e^{-T_\phi}}{\sqrt{|\phi(z)|\,\phi(1)}} e^{a\ln\phi(a)-H_\phi(a)+H^*_\phi(a)-A_\phi(z)}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{a}\right)\right), \tag{4.2.18}$$

където $\lim\limits_{a\to\infty} A_\phi(a+ib) = 0$, $T_\phi = \lim_{a\to\infty}(E_\phi(a+ib) + R_\phi(a))$ е дефинирано в (4.2.14), и

$$0 \le \varliminf_{a\to\infty}\frac{H_\phi(a)}{a} \le \varlimsup_{a\to\infty}\frac{H_\phi(a)}{a} \le 1 \text{ and } 0 \le \varliminf_{a\to\infty} H^*_\phi(a) \le \varlimsup_{a\to\infty} H^*_\phi(a) \le 1. \tag{4.2.19}$$

3. *Ако*

$$\phi \in \mathcal{B}_P = \{\phi \in \mathcal{B} :\ d > 0\,(\text{ виж } (4.2.4))\},$$

то за всяко $a > 0$ фиксирано и $b \in \mathbb{R}$

$$A_\phi(a+i|b|) = \frac{\pi}{2}|b| - \left(a + \frac{\phi(0)}{d}\right)\ln|b| - H(|b|), \tag{4.2.20}$$

където $H(|b|) \overset{\infty}{=} \mathrm{o}(|b|)$ и

$$\varliminf_{b\to\infty}\frac{d\,H(b)}{\ln(b)\bar{\mu}\left(\frac{1}{b}\right)} \ge 1.$$

Remark 4.2.5. *Отбелязваме красивата връзка между геометрията на* $\phi\left(\mathbb{C}_{(0,\infty)}\right) \subset \mathbb{C}_{(0,\infty)}$ *и асимптотиката, кодирана в* $A_\phi(z) = \int_0^b \arg\phi(a+iu)\,du$. *Колкото повече* ϕ *свива* $\mathbb{C}_{(0,\infty)}$, *толкова по-малък е приносът на* A_ϕ *за асимптотиката. Всъщност* $\frac{1}{b}A_\phi(a+ib)$, *когато* $b \to \infty$, *измерва флуктуациите на средния ъгъл по контура* $\phi(\mathbb{C}_a)$, *които със сигурност са по-гладки от флуктуациите на* $\arg\phi(a+ib)$, *когато* $b \to \infty$.

Remark 4.2.6. *Като цяло статията на Уебстър [66] предлага добър способ за решаването на рекурентни уравнения от вида* $f(x+1) = g(x)f(x), x > 0$. *Тази разработка вдъхнови нашата работа по темата и съдържа асимптотичното поведение на* $W_\phi(x)$, *когато* $x \to \infty$. *Тук добиваме резултати и за асимптотиката на* $|W_\phi(x+ib)|$, *когато* $x \to \infty$ *и* b *е произволно.*

С помощта на така въведените функции преминаване към изпълнението на поставените цели. Започваме с (1), т.е. да решим

$$\mathcal{M}_\Psi(z+1) = \frac{-z}{\Psi(-z)}\mathcal{M}_\Psi(z), \tag{4.2.21}$$

поне за $z \in i\mathbb{R} \setminus (\mathcal{Z}_0 \cup \{0\})$.

4.3 Решение и анализ на решението на (4.2.21)

Припомняме, че $\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z)$, виж (3.3.1). Припомняме количествата:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u}_\phi &= \sup\{u \le 0 : \phi(u) = 0\} \in [-\infty, 0]\,,\\
\mathfrak{a}_\phi &= \inf\ \{u < 0 : \phi \in \mathtt{A}_{(u,\infty)}\} \in [-\infty, 0],\\
\overline{\mathfrak{a}}_\phi &= \max\{\mathfrak{a}_\phi, \mathfrak{u}_\phi\} = \sup\{u \le 0 :\ \phi(u) = -\infty \text{ or } \phi(u) = 0\} \in [-\infty, 0]\,,
\end{aligned}$$

като за $\phi_\pm$ ги съкращаваме съответно като $\mathfrak{u}_+, \mathfrak{u}_-, \mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_-, \overline{\mathfrak{a}}_+, \overline{\mathfrak{a}}_-$.

С тези означения е в сила следния фундаментален резултат, който подбира най-важните твърдения от [54, Теорема 2.1] (Глава 5 Теорема 5.2.1).

Theorem 4.3.1. *Нека* $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}$. *Тогава функцията* $\mathcal{M}_\Psi$, *дефинирана чрез*

$$\mathcal{M}_\Psi(z) = \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_+}(z)} W_{\phi_-}(1-z), \tag{4.3.1}$$

удовлетворява рекурентното уравнение (4.2.21) *поне върху* $i\mathbb{R}\setminus(\mathcal{Z}_0(\Psi) \cup \{0\})$, *където* $\mathcal{Z}_0(\Psi) = \{z \in i\mathbb{R} :\ \Psi(-z) \neq 0\}$. *Тогава е в сила, че*

$$\mathcal{M}_\Psi \in \mathtt{A}_{(\mathfrak{a}_+\mathbb{I}_{\{\overline{\mathfrak{a}}_+=0\}},\, 1-\overline{\mathfrak{a}}_-)}. \tag{4.3.2}$$

Ако $\mathfrak{a}_+\mathbb{I}_{\{\overline{\mathfrak{a}}_+=0\}} = 0$, *то* $\mathcal{M}_\Psi$ *има непрекъснато продължение върху* $i\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *ако* $\phi_+'(0^+) = \infty$ *или* $\overline{\mathfrak{a}}_+ < 0$. *Иначе* $\mathcal{M}_\Psi \in \mathtt{A}_{[0,1-\overline{\mathfrak{a}}_-)}$ *и за всяко* $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}$

$$\mathcal{M}_\Psi \in \mathtt{M}_{(\mathfrak{a}_+,\, 1-\mathfrak{a}_-)}. \tag{4.3.3}$$

Нека $\mathfrak{a}_+ \leq \overline{\mathfrak{a}}_+ < 0$. Ако $\mathfrak{u}_+ = -\infty$ или $-\mathfrak{u}_+ \notin \mathbb{N}$, то върху $\mathbb{C}_{(\mathfrak{a}_+, 1-\overline{\mathfrak{a}}_-)}$ $\mathcal{M}_\Psi$ има прости полюси в точките $-n$ такива, че $-n > \mathfrak{a}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Иначе, върху $\mathbb{C}_{(\mathfrak{a}_+, 1-\overline{\mathfrak{a}}_-)}$, $\mathcal{M}_\Psi$ има прости полюси в точките $-n$ такива че $n \in \mathbb{N} \setminus \{|\mathfrak{u}_+|, |\mathfrak{u}_+|+1, \ldots\}$. И в двата случая резидуумите имат стойности $\phi_+(0) \frac{\prod_{k=1}^{n} \Psi(k)}{n!}$ във всяка от тези точки $-n$ и където прилагаме конвенцията $\prod_{k=1}^{0} = 1$.

Remark 4.3.2. *Всъщност количествата $\mathfrak{u}_+, \mathfrak{u}_-, \mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_-, \overline{\mathfrak{a}}_+, \overline{\mathfrak{a}}_-$, благодарение на $\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z)$, могат да се определят от аналитичните свойства на Ψ. Така Ψ като налично количество определя в пълнота аналитичната структура и свойства на $\mathcal{M}_\Psi$.*

Remark 4.3.3. *Предвид развитата асимптотика за $|W_\phi|$ и следователно за функциите $\left|W_{\phi_+}\right|, \left|W_{\phi_-}\right|$, виж Теорема 4.2.4, можем веднага да пресмятаме и асимптотиката на $|\mathcal{M}_\Psi|$. Оказва се, че взаимовръзката между ϕ_+ и ϕ_-, индуцирана от $\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z)$, позволява по-силни заключения за асимптотиката на $|\mathcal{M}_\Psi|$ по протежението на комплексните прави $\mathbb{C}_a$, $a \in (0,1)$. Това се получава с помощта на вероятностните обекти, стоящи зад количествата $\Psi, \phi_\pm$, и техните вероятностни свойства.*

Следващият резултат, към който реферира и Забележка 4.3.3, е централен за цялата разработка и в някакъв смисъл е кулминацията на предходните усилия. Той изследва скоростта на намаляване на $|\mathcal{M}_\Psi|$ по протежението на правите $\mathbb{C}_a$. Преди да го формулираме въвеждаме класовете: за всяко $\beta \in [0,\infty]$ с $\mathtt{I}_\Psi = (0, 1-\overline{\mathfrak{a}}_-)$, дефинираме

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{N}}_\beta = & \left\{ \Psi \in \overline{\mathcal{N}} : \lim_{|b| \to \infty} |b|^{\beta - \varepsilon} \left| \mathcal{M}_\Psi\left(a+ib\right) \right| = 0, \ \forall a \in \mathtt{I}_\Psi, \forall \varepsilon \in (0,\beta) \right\} \\ & \bigcap \left\{ \Psi \in \overline{\mathcal{N}} : \lim_{|b| \to \infty} |b|^{\beta + \varepsilon} \left| \mathcal{M}_\Psi\left(a+ib\right) \right| = \infty, \ \forall a \in \mathtt{I}_\Psi, \forall \varepsilon \in (0,\beta) \right\}, \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

и където, ако $\beta = \infty$, определяме

$$\overline{\mathcal{N}}_\infty = \left\{ \Psi \in \overline{\mathcal{N}} : \lim_{|b| \to \infty} |b|^{\beta} \left| \mathcal{M}_\Psi\left(a+ib\right) \right| = 0, \ \forall a \in \mathtt{I}_\Psi, \forall \beta \geq 0 \right\}. \tag{4.3.5}$$

С тези означения е в сила теоремата, която изследва полиномната сходимост на $|\mathcal{M}_\Psi|$ по протежението на правите $\mathbb{C}_a$

Theorem 4.3.4. *Нека $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}$. Тогава $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}_{\mathtt{N}_\Psi}$, където*

$$\mathtt{N}_\Psi = \begin{cases} \frac{\upsilon_-\left(0^+\right)}{\phi_-(0) + \bar{\mu}_-(0)} + \frac{\phi_+(0) + \bar{\mu}_+(0)}{d_+} < \infty, & \text{ако } d_+ > 0, d_- = 0 \text{ и } \overline{\Pi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(dy) < \infty, \\ \infty & \text{иначе,} \end{cases} \tag{4.3.6}$$

и където сме използвали неявно, че, ако $d_+ > 0$ е в сила, то $\mu_-(dy) = \upsilon_-(y) dy \mathbb{I}_{\{y>0\}}$ с $\upsilon_- \in \mathrm{C}\left([0,\infty)\right)$, т.е. υ_- е непрекъсната и ограничена върху $[0,\infty)$.

Remark 4.3.5. *Всъщност може да се изследва и експоненциалната скорост на сходимост на $|\mathcal{M}_\Psi|$ по протежението на правите $\mathbb{C}_a$. Повече информация за този феномен може да се намери в [54, Теорема 2.5 (2)] (Глава 5 Теорема 5.2.5(2)). Както там, така и тук, целта е да се изследва целият клас експоненциални функционали и поради това изследването на експоненциалната сходимост е страничен резултат.*

Remark 4.3.6. *Скоростта на сходимост към нула на $|\mathcal{M}_\Psi|$ по протежението на $\mathbb{C}_a$ е много важно за използването на обратната трансформация на Мелин. Припомняме, че тя има вида*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z\in\mathbb{C}_a} x^{-z}\mathcal{M}_\Psi(z)dz = \frac{x^{-a}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x^{-ib}\mathcal{M}_\Psi(a+ib)db. \tag{4.3.7}$$

Тогава, ако $\lim_{b\to\infty}|b|^{n+1+\epsilon}|\mathcal{M}_\Psi(a+ib)| = 0$, за някое $\epsilon > 0$, то се знае, че

$$g^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z\in\mathbb{C}_a} x^{-z-n}\prod_{j=1}^{n}(-z-j)\mathcal{M}_\Psi(z)dz, \tag{4.3.8}$$

понеже $\left|\prod_{j=1}^n(-z-j)\mathcal{M}_\Psi(z)\right| \sim |z^n\mathcal{M}_\Psi(z)|$ е интегруема по $\mathbb{C}_a$. Това води и до

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^a g^{(n)}(x)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\prod_{j=1}^{n}(-a-ib-j)\mathcal{M}_\Psi(a+ib)\right|db < \infty. \tag{4.3.9}$$

4.4 Експоненциални функционали на процеси на Леви. Основни резултати

Припомняме, че за всяко $\Psi \in \mathcal{N}$ експоненциалният функционал на процес на Леви е дефиниран чрез $I_\Psi = \int_0^\infty e^{-\xi_s}ds$. Неговата кумулативна фунцкия на разпределение е означена с F_Ψ, неговата плъност с f_Ψ и неговата трансформация на Мелин с $\mathcal{M}_{I_\Psi}(z+1) = \mathbb{E}\left[I_\Psi^z\right]$. С тази нотация можем да формулираме първия резултат от тази секция, в който освен, че $\mathcal{M}_{I_\Psi}$ се изчислява явно с помощта на функциите на Бернщайн-Гама, се съдържат и някои резултати, които са непосредствено следствие от това представяне. За повече информация, виж [54, Теорема 2.7] (Глава 5 Теорема 5.2.7). Необходимо е да се отбележи, че универсални резултати за гладкостта на плътността на I_Ψ, т.е. f_Ψ, с изключение на факта, че тя съществува, не бяха известни до този момент в литературата. Също така пресмятането на $\mathcal{M}_{I_\Psi}$ за всеки I_Ψ е изцяло нов резултат.

Theorem 4.4.1. *Нека $\Psi \in \mathcal{N}$.*

1. *В сила е равенството*

$$\mathcal{M}_{I_\Psi}(z) = \phi_-(0)\mathcal{M}_\Psi(z) = \phi_-(0)\frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_+}(z)}W_{\phi_-}(1-z) \in \mathtt{A}_{\left(\mathfrak{a}_+\mathbb{I}_{\{\bar{\mathfrak{a}}_+=0\}},\,1-\bar{\mathfrak{a}}_-\right)} \cap \mathtt{M}_{(\mathfrak{a}_+,\,1-\mathfrak{a}_-)} \tag{4.4.1}$$

и $\mathcal{M}_{I_\Psi}$ удовлетворява рекурентното уравнение (4.2.21) *поне върху множеството $i\mathbb{R}\setminus(\mathcal{Z}_0(\Psi)\cup\{0\})$.*

2. *Ако* $\phi_- \equiv 1$, *то* $\operatorname{Supp} I_\Psi = \left[0, \frac{1}{d_+}\right]$, *освен ако* $\phi_+(z) = d_+ z$, $d_+ \in (0,\infty)$, *когато* $\operatorname{Supp} I_\Psi = \left\{\frac{1}{d_+}\right\}$. *Ако* $\phi_- \not\equiv 1$ *и* $\phi_+(z) = z$, *то* $\operatorname{Supp} I_\Psi = \left[\frac{1}{\phi_-(\infty)}, \infty\right]$, *където използуваме конвенцията* $\frac{1}{\infty} = 0$. *Във всички други случаи е в сила, че* $\operatorname{Supp} I_\Psi = [0,\infty]$.

3. $F_\Psi \in \mathrm{C}_0^{\lceil \mathtt{N}_\Psi \rceil - 1}(\mathbb{R}^+)$, *където* $\mathrm{C}_0^k(\mathbb{R}^+)$ *е множеството на всички к-пъти диференцируеми функции, удовлетворяващи* $\lim_{x\to\infty} f^{(l)}(x) = 0$, $0 \le l \le k$. *Ако* $\mathtt{N}_\Psi > 1$ *(съответно* $\mathtt{N}_\Psi > \frac{1}{2}$*), то за всяко* $n = 0, \ldots, \lceil \mathtt{N}_\Psi \rceil - 2$ *и* $a \in \left(\mathfrak{a}_+ \mathbb{I}_{\{\overline{\mathfrak{a}}_+ = 0\}}, 1 - \overline{\mathfrak{a}}_-\right)$ *е в сила представянето*

$$f_\Psi^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{\phi_-(0)}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-z-n} \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1-n)} \mathcal{M}_\Psi(z) dz, \tag{4.4.2}$$

където интегралът е абсолютно интегруем за всяко $x > 0$ *(съответно е дефиниран в* L^2*-смисъл, виж книгата на Титчмарш [63]).*

Remark 4.4.2. *Точка* (3) *потвърждава хипотезата, че* $f_\Psi \in \mathtt{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, *ако асоциирания към* Ψ *процес на Леви има безкрайна активност, т.е. когато или* $\sigma^2 > 0$ *и/или* $\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(dy) = \infty$ *в* (4.1.1). *Наистина от Теорема 4.3.4*(4.3.6) *и при двете условия е в сила, че* $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}_\infty \cap \mathcal{N} = \mathcal{N}_\infty$. *Най-изненадващият факт е, че* $\Psi \in \mathcal{N}_\infty$ *и следователно* $f_\Psi \in \mathtt{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, *дори когато асоциираният процес на Леви е сложен Поасонов процес или е сложен Поасонов процес с отрицателен дрифт. Когато* $\phi_+ \in \mathcal{B}_P$, *тогава само знаем, че* $\Psi \in \mathcal{N}_{\mathtt{N}_\Psi}$, $\mathtt{N}_\Psi < \infty$.

Remark 4.4.3. *Нека* $\phi_+(z) = z \in \mathcal{B}_P$ *и* $\phi_-(0) > 0$, *така че* $\Psi(z) = z\phi_-(z) \in \mathcal{N}$. *Тогава* $I_\Psi = \int_0^\infty e^{-\xi_t} dt$ *е себеразлгаща (self-decomposable) се случайна величина, виж [55, Глава 5] и [59] за дефиниция и информация за свойството себеразлагане. Скоростта на сходимост на трансформацията на Фурие на* I_Ψ *е изчислена като* λ *в нотацията на [60], т.е.*

$$\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta \left| \int_0^\infty e^{i\zeta x} f_\Psi(x) dx \right| = 0 \iff \beta < \lambda$$

и

$$\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta \left| \int_0^\infty e^{i\zeta x} f_\Psi(x) dx \right| = \infty \iff \beta > \lambda$$

Може да се провери, че $\lambda = \mathtt{N}_\Psi$. *Всъщност тази разработка, изчислявайки* $\mathtt{N}_\Psi$ *за всеки* I_Ψ, *обобщава значително работата на [60], тъй като експоненциалните функционали са по-сложни случайни величини от себеразлагащите се такива.*

Remark 4.4.4. *С помощта на Теорема 4.4.1 може да се докаже необходимо и достатъчно условие кога* f_Ψ *може да се разложи в безкраен ред на Тейлър. За повече информация, виж [54, Следствие 2.12] (Глава 5 Следствие 5.2.12).*

4.4.1 Голяма асимптотика на $\bar{F}_\Psi = 1 - F_\Psi$ и f_Ψ

В тази секция ще разгледаме резултати, свързани с поведението на $\bar{F}_\Psi(x), f_\Psi(x), f_\Psi^{(n)}(x)$, когато x клони към безкрайност. Това наричаме голяма асимптотика и отбелязваме, че добиването на голямата асимптотика на експоненциалните фунцкионали на процеси на Леви е било обект на много разработки. Както отбелязваме в увода, виж секция 1.6.1.1, резултатът на [57, Лема 4] показва, че $\overline{F}_\Psi(x) \overset{\infty}{\sim} Cx^\kappa$, $C > 0$, когато $\exists \kappa \in (-1, 0)$, така че $\Psi(-\kappa) = 0, |\Psi'(-\kappa)| < \infty$. Този резултат е доказан при същите условия без $\kappa \in (-1, 0)$ в [4, 44]. Също така резултати, свързани с голямата асимптотика на $\bar{F}_\Psi = 1 - F_\Psi$ и f_Ψ, са добити за някои класове процеси на Леви в [34, 38, 49]. Някои други частични резултати се намират в [4, 58].

В нашата разработка постигаме универсалност на резултатите относно голямата асимптотика и това се дължи изцяло на скоростта на сходимост на $|\mathcal{M}_{I_\Psi}|$, която се индуцира от Теорема 4.3.4 чрез релация (4.4.1). За целта е необходимо да въведем следната нотация. Припомняме, че

$$\mathfrak{u}_- = \sup\left\{u \leq 0 : \phi_-(u) = 0\right\} \in [-\infty, 0]\,, \tag{4.4.3}$$

$$\mathfrak{a}_- = \inf\ \left\{u < 0 : \phi_- \in \mathtt{A}_{(u,\infty)}\right\} \in [-\infty, 0], \tag{4.4.4}$$

$$\overline{\mathfrak{a}}_- = \max\left\{\mathfrak{a}_\phi, \mathfrak{u}_\phi\right\} = \sup\left\{u \leq 0 :\ \phi_-(u) = -\infty \text{ or } \phi_-(u) = 0\right\} \in [-\infty, 0]\,, \tag{4.4.5}$$

виж (4.2.6), (4.2.7) и (4.2.8). Ако $\mathfrak{u}_- \in (-\infty, 0)$, въвеждаме *слабо-решетъчния* клас както следва

$$\begin{aligned}\Psi \in \mathcal{N}_\mathcal{W} &\iff \mathfrak{u}_- \in (-\infty, 0) \text{ и } \exists\, k\ \in \mathbb{N} \text{ такова, че } \varliminf_{|b|\to\infty} |b|^k \left|\Psi\left(\mathfrak{u}_- + ib\right)\right| > 0 \\ &\iff \mathfrak{u}_- \in (-\infty, 0) \text{ и } \exists\, k\ \in \mathbb{N} \text{ такова, че } \varliminf_{|b|\to\infty} |b|^k \left|\phi_-\left(\mathfrak{u}_- + ib\right)\right| > 0.\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Отбелязваме, че *слабо-решетъчния* клас изглежда, че не е бил въвеждан в литературата до този момент.

Вече можем да формулираме резултата:

Theorem 4.4.5. *Нека $\Psi \in \mathcal{N}$.*

1. *Ако $|\overline{\mathfrak{a}}_-| < \infty$ (респективно $|\overline{\mathfrak{a}}_-| = \infty$, т.е. $-\Psi(-z) = \phi_+(z) \in \mathcal{B}$), то за всеки $\underline{d} < |\overline{\mathfrak{a}}_-| < \overline{d}$ (респективно $\underline{d} < \infty$), е в сила, че*

$$\varlimsup_{x\to\infty}\ x^{\underline{d}}\, \overline{F}_\Psi(x) = 0, \tag{4.4.7}$$

$$\varliminf_{x\to\infty}\ x^{\overline{d}}\, \overline{F}_\Psi(x)\ = \infty. \tag{4.4.8}$$

Затова във всеки случай

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log \overline{F}_\Psi(x)}{\log x} = \overline{\mathfrak{a}}_-. \tag{4.4.9}$$

2. *Ако в допълнение* $\Psi \in \mathcal{N}_{\mathcal{W}}$, $\bar{\mathfrak{a}}_- = \mathfrak{u}_- < 0$ *и* $\left|\Psi'\left(\mathfrak{u}_-^+\right)\right| < \infty$, *то*

$$\overline{F}_\Psi(x) \overset{\infty}{\sim} \frac{\phi_-(0)\Gamma\left(-\mathfrak{u}_-\right) W_{\phi_-}\left(1+\mathfrak{u}_-\right)}{\phi'_-\left(\mathfrak{u}_-^+\right) W_{\phi_+}\left(1-\mathfrak{u}_-\right)} x^{\mathfrak{u}_-}. \tag{4.4.10}$$

Нещо повече, ако $\Psi \in \mathcal{N}_\infty \cap \mathcal{N}_{\mathcal{W}}$ *(респективно* $\Psi \in \mathcal{N}_{\mathtt{N}_\Psi}$, $\mathtt{N}_\Psi < \infty$*), то за всяко* $n \in \mathbb{N}$ *(респективно* $n \leq \lceil \mathtt{N}_\Psi \rceil - 2$*)*

$$f_\Psi^{(n)}(x) \overset{\infty}{\sim} (-1)^n \frac{\phi_-(0)\Gamma\left(n+1-\mathfrak{u}_-\right) W_{\phi_-}\left(1+\mathfrak{u}_-\right)}{\phi'_-\left(\mathfrak{u}_-^+\right) W_{\phi_+}\left(1-\mathfrak{u}_-\right)} x^{-n-1+\mathfrak{u}_-}. \tag{4.4.11}$$

Remark 4.4.6. *Когато,* $\bar{\mathfrak{a}}_- = \mathfrak{u}_- < 0$ *и* $\left|\Psi'\left(\mathfrak{u}_-^+\right)\right| < \infty$, *казваме, че е валидно условието на Крамер за асоциирания към* Ψ *процес на Леви. Тогава е добре известно, че* $\lim_{x\to\infty} x^{-\mathfrak{u}_-}\overline{F}_\Psi(x) = C > 0$, *виж [57, Лема 4] и [44, Теорема 3.1], т.е.* (4.4.10) *е в сила. Тук ние изчисляваме* C.

Remark 4.4.7. *Резултатът в точка* (1) *е напълно общ. Той се дължи на скоростта на сходимост на* $|\mathcal{M}_{I_\Psi}|$ *по протежението на комплексни прави от вида* $\mathbb{C}_a$ *и монотонно приближение с процеси на Леви, които попадат в класа процеси, обхванати от точка* (2). *Релация* (4.4.9) *е усиление на [4, Lemma 2] в смисъл, че изчислява точно полиномната скорост на намаляване към нула на* $\overline{F}_\Psi(x)$, *когато* $x \to \infty$.

Remark 4.4.8. *Понеже супремумът на стабилен процес на Леви за времевия хоризонт* $[0,1]$, *виж Следствие* (3.2.4), *се изразява чрез експоненциален функционал, за който* (4.4.11) *е в сила, виж* (3.4.1), *то нашият резултат възстановява асимптотиката на плътността на този супремум и нейните производни, която е изведена в [21, 33]. Всъщност се вижда, че поведение от тип* (4.4.11) *е много универсално за експоненциалните функционали.*

4.4.2 Малка асимптотика на F_Ψ

Малката асимптотика или поведението на F_Ψ, когато x клони към нула, е по-добре разбрана от голямата асимптотика. Когато $\Psi(0) < 0$, е добре известно, че $\lim_{x\to 0}\frac{F_\Psi(x)}{x} = -\Psi(0)$ и е публикувано в [4, Теорема 7(i)], но доказтелството е базирано на нетривиалната теорема [47, Теорема 2.5]. Ние предоставяме резултат за общия случай.

Theorem 4.4.9. *Нека* $\Psi \in \mathcal{N}$. *Тогава*

$$\lim_{x\to 0}\frac{F_\Psi(x)}{x} = -\Psi(0) = f_\Psi(0^+). \tag{4.4.12}$$

4.4.3 Факторизации на закона на I_Ψ

Основните резултати на Глави 2,3 от настоящата дисертация, представени в глави 2,3 по-горе представляват по същество факторизацията

$$I_\Psi \overset{d}{=} I_{\phi_+} \times I_\psi, \tag{4.4.13}$$

виж Теорема 2.2.1 и Теорема 3.2.1. За тези резултати е наложено условието, че мярката на Леви на асоциирания към Ψ процес на Леви има свойството $\Pi_-(dy) = \Pi(-dy) = \pi_-(y)dy$, където π_- е ненарастваща. Тук доказваме факторизации за всяко I_Ψ.

Theorem 4.4.10. *Нека $\Psi \in \mathcal{N}$. Следните мултипликативни факторизации на Винер-Хопф за закона I_Ψ са в сила*

$$I_\Psi \stackrel{d}{=} I_{\phi_+} \times X_{\phi_-} \stackrel{d}{=} \bigotimes_{k=0}^{\infty} \left(C_k \mathfrak{B}_k X_\Psi \times \mathfrak{B}_{-k} Y_\Psi\right), \tag{4.4.14}$$

където $\times$ стои за произведение на независими случайни величини. Законите на положителните случайни величини X_Ψ, Y_Ψ са дадени чрез

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_\Psi \in dx\right) &= \frac{1}{\phi_+(1)}\left(\bar{\mu}_+(-\ln x)dx + \phi_+(0)dx + d_+\delta_1(dx)\right),\ x \in (0,1) \\ \mathbb{P}\left(Y_\Psi \in dx\right) &= \phi_-(0)\Upsilon_-(dx),\ x > 1, \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

където $\Upsilon_-(dv) = U_-\left(d\ln(v)\right), v > 1$, е образът на потенциалната мярка U_- чрез изображението $y \mapsto \ln y$,

$$C_0 = e^{\gamma_{\phi_+} + \gamma_{\phi_-} - \gamma + 1 - \frac{\phi'_+(1)}{\phi_+(1)}}, C_k = e^{\frac{1}{k+1} - \frac{\phi'_+(k+1)}{\phi_+(k+1)} - \frac{\phi'_-(k)}{\phi_-(k)}}, k = 1, 2, \dots,$$

където γ е константата на Ойлер-Масчерони, и за всяко $k, \mathfrak{B}_k X$ е случайната величина, дефинирана чрез равенството:

$$\mathbb{E}\left[f(\mathfrak{B}_k X)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[X^k f(X)\right]}{\mathbb{E}[X^k]}.$$

Remark 4.4.11. *Втората факторизация, съдържаща се в (4.4.14), е нова в такава общност. Когато $\Psi(z) = -\phi_+(-z) \in \mathcal{B}$, т.е. ξ е субординатор, тогава (4.4.14) представлява резултата [2, Теорема 3]. За класа на мероморфните процеси на Леви, законът на I_Ψ е факторизиран в безкрайно произведение на независими Бета разпределени случайни величини, виж [29].*

4.4.4 Асимптотично поведение на $I_\Psi(t) = \int_0^t e^{-\xi_s} ds$, когато $I_\Psi = \infty$ и t клони към безкрайност

Последно ще разгледаме и поведението на $I_\Psi(t) = \int_0^t e^{-\xi_s} ds$, когато $I_\Psi = \infty$ и t клони към безкрайност. Това отговаря на класа $\mathcal{N}_c = \overline{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{N} = \left\{\Psi \in \overline{\mathcal{N}} : I_\Psi = \infty\right\}$. Резултатите в тази насока са много малко и датират от последната година. Причината е, че разбирането на закона на $I_\Psi(t)$ е по-труден проблем от изучаването на I_Ψ, когато $I_\Psi < \infty$.

Поведението, от което ще се интересуваме, е свързано с асимптотиката на вероятностните мерки $\mathbb{P}\left(I_\Psi(t) \in dx\right)$, когато t се разхожда към безкрайност. В литературата са добити резултати за асимптотичното поведение на

$$\mathbb{E}\left[G\left(I_\Psi(t)\right)\right],$$

когато асоциирания с Ψ процес на Леви ξ притежава свойствата $\mathbb{E}[\xi_1] = 0$, $\mathbb{E}[\xi_1^2] < \infty, \Psi \in \mathtt{A}_{(a,b)}, -\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$ и G е стриктно намаляваща функция с редица ограничения, виж [42, 45]. Тези резултати са получени във връзка с въпроси, свързани с поведението на някои непрекъснати по времето процеси, развиващи се в случайни среди, например разклоняващи се процеси в случайни среди. Те са вдъхновени от аналогични резултати за дискретни по времето случайни процеси, виж например [1, 32]. Може би, защото и разчитат на дискретизация, твърденията в [42, 45] относно асимптотичното поведение на $\mathbb{E}[G(I_\Psi(t))]$ са и субоптимални.

Резултатът, който ние доказваме, разчита на факта, че ако $I_\Psi = \infty$ и $\Psi_r(z) = \Psi(z) - r$, $r > 0$, то

$$\mathbb{P}(I_{\Psi_r} \in dx) = f_{\Psi_r}(x)dx = \int_0^\infty e^{-rt}\mathbb{P}(I_\Psi(t) \in dx)\, dt \tag{4.4.16}$$

и $\Psi_r \in \mathcal{N}$. С други думи законът на I_{Ψ_r} е свързан с трансформацията на Лаплас на $I_\Psi(t)$ по времето t. Досега обаче добихме много информация за $\mathcal{M}_{I_{\Psi_r}}$. Последно нека означим факторизацията на Винер-Хопф на Ψ_r по следния начин

$$\Psi_r(z) = -\phi_+^r(-z)\phi_-^r(z) \tag{4.4.17}$$

и

$$\phi_-^r(0) = \kappa_-(r); \quad \phi_+^r(0) = \kappa_+(r); \tag{4.4.18}$$

и да припомним, че f е с регулярна вариация с индекс α в нулата, ако $f(ax)/f(x) \overset{0}{\sim} a^\alpha$ Формулираме теоремата:

Theorem 4.4.12. *Нека $\Psi \in \mathcal{N}^c$ и нейният прилежащ процес на Леви ξ удовлетворява $-\varliminf_{t\to\infty} \xi_t = \varlimsup_{t\to\infty} \xi_t = \infty$ п.с. или еквивалентно $\phi_+(0) = \phi_-(0) = 0$. Нека допуснем също, че $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\xi_t < 0) = \rho \in [0,1)$, т.е. известното условие на Спитзер е в сила. Тогава $\kappa_-(r) = \phi_-^r(0)$ е с регулярна вариация с индекс ρ в нулата и за всяко $a \in (0, 1-\mathfrak{a}_+)$ и всяко $f \in \mathtt{C}_b(\mathbb{R}^+)$*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[I_\Psi^{-a}(t) f(I_\Psi(t))\right]}{\kappa_-(\frac{1}{t})} = \int_0^\infty f(x)\vartheta_a(dx), \tag{4.4.19}$$

където ϑ_a е крайна положителна мярка на $(0,\infty)$.

Remark 4.4.13. *Отбелязваме, че (4.4.19) е слаба сходимост на мерките $x^{-a}\frac{\mathbb{P}(I_\Psi(t)\in dx)}{\kappa_-(\frac{1}{t})}$ и по тази причина, ако f е ограничена и непрекъсната, то с означението $f_a(x) = x^{-a}f(x)$ е в сила, че*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[f_a(I_\Psi(t))]}{\kappa_-(\frac{1}{t})} = \int_0^\infty f(x)\vartheta_a(dx)$$

и отбелязваме, че за f_a нямаме никакви ограничения освен $f_a(x) = x^{-a}f(x)$ и $f \in \mathtt{C}_b(\mathbb{R}^+)$.

4.5 Идеи за доказателствата на някои резултати от Секция 4.2

Ще пропуснем доказателството на Теорема 4.2.2. То може да се намери в [54] (Глава 5) и не в от вероятностен интерес за дисертационния труд.

Продължаваме с Теорема 4.2.4. П.Пати и кандидатът доказват в [55], че

$$\begin{aligned}|W_\phi(z)| &= W_\phi\left(a\right)\frac{\phi(a)}{|\phi(z)|}\sqrt{\left|\frac{\phi(z)}{\phi(a)}\right|}e^{-\int_0^\infty \ln\left|\frac{\phi(u+a+ib)}{\phi(a+bu)}\right|du}e^{-E_\phi(z)} \\ &= W_\phi\left(a\right)\sqrt{\left|\frac{\phi(a)}{\phi(z)}\right|}e^{-b\Theta_\phi(z)}e^{-E_\phi(z)},\end{aligned} \tag{4.5.1}$$

където напомняме, че

$$\Theta_\phi\left(a+ib\right) = \frac{1}{|b|}\int_a^\infty \ln\left(\frac{|\phi\left(u+i|b|\right)|}{\phi(u)}\right)du.$$

Ако разгледаме $b>0$ ($b<0$ следва веднага), то получаваме за $a>0$, че

$$\begin{aligned}b\Theta_\phi\left(a+ib\right) &= \int_a^\infty \ln\left(\frac{|\phi\left(y+ib\right)|}{\phi(y)}\right)dy = \lim_{u\to\infty}\int_a^u \ln\left(\frac{|\phi\left(y+ib\right)|}{\phi(y)}\right)dy \\ &= \lim_{u\to\infty}\mathtt{Re}\left(\int_a^u \log_0\frac{\phi\left(y+ib\right)}{\phi(y)}dy\right),\end{aligned}$$

където сме използвали, че комплексния логаритъм има формата $\log_0(z) = \ln|z| + i\arg z$. Използвайки теоремата на Коши за $\log_0\phi \in \mathtt{A}_{(0,\infty)}$ по контура с върхове $a+ib, u+ib, u$ и a, получаваме, че

$$\begin{aligned}b\Theta_\phi\left(a+ib\right) &\overset{\text{Коши}}{=} \lim_{u\to\infty}\mathtt{Re}\left(\int_{u\to u+ib}\log_0\phi(z)dz\right) - \mathtt{Re}\left(\int_{a\to a+ib}\log_0\phi(z)dz\right) \\ &= \int_0^b \arg\phi(a+iy)dy - \lim_{u\to\infty}\int_0^b \arg\phi(u+iy)dy \\ &= A_\phi\left(a+ib\right) - \lim_{u\to\infty}\int_0^b \arg\phi(u+iy)dy.\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Накрая от свойствата на функциите на Бенщайн се показва, че $\lim_{u\to\infty}\int_0^b \arg\phi(u+iy)dy = 0$ и така (4.2.17) е в сила. Заествайки в (4.5.1), стигаме до израза

$$|W_\phi(z)| = W_\phi\left(a\right)\sqrt{\left|\frac{\phi(a)}{\phi(z)}\right|}e^{-A_\phi(z)}e^{-E_\phi(z)}. \tag{4.5.3}$$

Релация (4.2.16) тогава е следствие от подробното изучаване на $W_\phi\left(a\right)$ в (4.5.3). Това се постига с помощта на [66] и е педантично направено в [54]. Релация (4.2.15) зависи

от стандартни неравенства, свързани с функциите на Бернщайн, докато (4.2.18) е по-подробно разглеждане на (4.2.16) в случая на фиксирано b, когато A_ϕ практически няма принос към асимптотиката и всичко зависи от функцията G.
Резултатите в (3) изискват сериозни усилия и въвеждането на понятия от теория на нормираните алгебри. Тук ще разгледаме смисъла на релация (4.2.20)

$$A_\phi\left(a+i|b|\right)=\frac{\pi}{2}|b|-\left(a+\frac{\phi(0)}{d}\right)\ln|b|-H(|b|). \tag{4.5.4}$$

Нека допуснем, че $d=1$. Тогава от (4.2.4) получаваме с $z=a+ib$

$$\begin{aligned}\phi(z)&=\phi(0)+z+\int_0^\infty\left(1-e^{-zy}\right)\mu(dy)\\&=\phi(0)+a+ib+(a+ib)\int_0^\infty e^{-iby}e^{-ay}\bar{\mu}(y)dy,\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

където $\bar{\mu}(y)=\int_y^\infty\mu(dy)$. Понеже $a>0$ е фискирано и $e^{-ay}\bar{\mu}(y)$ е интегруема върху $\mathbb{R}^+$, от знаменитата лема на Риман-Лебег, виж [63], е в сила, че

$$\left|\int_0^\infty e^{-iby}e^{-ay}\bar{\mu}(y)dy\right|\overset{\infty}{=}\mathrm{o}\left(1\right). \tag{4.5.6}$$

Така заключаваме в (4.5.5)

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\phi(a+ib)}{\mathtt{Im}\,\phi(a+ib)}=i \tag{4.5.7}$$

и съответно $\arg\phi(a+ib)\overset{\infty}{\sim}\frac{\pi}{2}b$. Тогава

$$A_\phi\left(a+ib\right)=\int_0^b\arg\phi(a+iu)du\overset{\infty}{\sim}\frac{\pi}{2}b.$$

Останалите членове в (4.5.4) отразяват грешката в последната асимптотична еквивалентност. За тях са необходими редица тежки сметки, които могат да се намерят в [54, Секция 3] (Глава 5 Секция 5.3.5)

4.6 Идеи за доказателствата на някои резултати от Секция 4.3

Започваме с доказателството на Теорема 4.3.1. Като използваме рекурентното уравнение (4.2.5) и (3.3.1), получаваме

$$\mathcal{M}_\Psi\left(z+1\right)=\frac{\Gamma\left(z+1\right)}{W_{\phi_+}\left(z+1\right)}W_{\phi_-}(-z)=\frac{z\Gamma\left(z\right)}{\phi_+(z)W_{\phi_+}\left(z\right)}\frac{W_{\phi_-}\left(1-z\right)}{\phi_-(-z)}=\frac{-z}{\Psi\left(-z\right)}\mathcal{M}_\Psi(z). \tag{4.6.1}$$

Така установяваме, че $\mathcal{M}_\Psi$ решава (4.2.21) поне за $i\mathbb{R}\setminus(\mathcal{Z}_0(\Psi)\cup\{0\})$, защото функциите $\Gamma(z), W_{\phi_+}(1-z)$ са добре дефинирани върху $i\mathbb{R}\setminus(\{0\})$, докато $\frac{-z}{\Psi(-z)}$ е добре дефинирана върху $i\mathbb{R}\setminus\mathcal{Z}_0(\Psi)$. Забелязваме, че $\mathcal{M}_\Psi\in\mathtt{A}_{(0,1-\overline{\mathfrak{a}}_-)}\cap\mathtt{M}_{(\mathfrak{a}_+,1-\mathfrak{a}_-)}$, което следва от факта, че $W_\phi\in\mathtt{A}_{\left(\overline{\mathfrak{a}}_\phi,\infty\right)}\cap\mathtt{M}_{\left(\mathfrak{a}_\phi,\infty\right)}$ и факта, че W_ϕ няма нули върху $\mathbb{C}_{\left(\mathfrak{a}_\phi,\infty\right)}$ за всяко $\phi\in\mathcal{B}$, виж Теорема 4.2.2(1), който води до

$$\frac{1}{W_{\phi_+}}\in\mathtt{A}_{(\mathfrak{a}_+,\infty)}\text{ and }W_{\phi_-}(1-\cdot)\in\mathtt{A}_{(-\infty,1-\overline{\mathfrak{a}}_-)}. \tag{4.6.2}$$

Това доказва (4.3.3) или $\mathcal{M}_\Psi\in\mathtt{M}_{(\mathfrak{a}_+,1-\mathfrak{a}_-)}$. Също така (4.6.2) води до $\mathcal{M}_\Psi\in\mathtt{A}_{(0,1-\overline{\mathfrak{a}}_-)}$ или (4.3.2), когато $\mathfrak{a}_+\mathbb{I}_{\{\mathfrak{u}_+=0\}}=0$. Когато $0=\overline{\mathfrak{a}}_+>\mathfrak{a}_+$, т.е. $\mathfrak{a}_+\mathbb{I}_{\{\mathfrak{u}_+=0\}}=\mathfrak{a}_+<0$, тогава задължително е в сила, че $\phi_+'(a^+)=d+\int_0^\infty ye^{ay}\mu_+(dy)\in(0,\infty)$ за всяко $a>\mathfrak{a}_+$, виж (4.2.4), и $\overline{\mathfrak{a}}_+=0$, виж (4.2.8), е единствената нула на ϕ_+ върху $(\mathfrak{a}_+,\infty)$. Следователно, Теорема 4.2.2(2) води до факта, че в точката $z=0$ функцията W_{ϕ_+} има прост полюс, който благодарение на (4.2.5) и $\phi_+<0$ върху $(\mathfrak{a}_+,0)$ се пренася като прост полюс за всяко $n\in\mathbb{N}$, такова че $-n>\mathfrak{a}_+$. Тези прости полюси обаче са прости нули за функцията $\frac{1}{W_{\phi_+}}\in\mathtt{A}_{(\mathfrak{a}_+,\infty)}$, които от своя страна нулират простите полюси на Γ в $n\in\mathbb{N}$, такова че $-n>\mathfrak{a}_+$. Така, $\mathcal{M}_\Psi\in\mathtt{A}_{(\mathfrak{a}_+,1-\overline{\mathfrak{a}}_-)}$ и (4.3.2) е доказано.

Останалите твърдения на Теорема 4.3.1 се доказват със сходни аргументи и могат да бъдат намерени в [54] (Глава 5).

4.6.1 Някои елементи от доказателството на Теорема 4.3.4

Доказателството на този резултат надхвърля по обем двадесет страници и затова отново ще представим само неговите контури. По време на доказателството използваме (4.3.1), т.е.

$$\mathcal{M}_\Psi(z)=\frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_+}(z)}W_{\phi_-}(1-z)\in\mathtt{A}_{(0,1-\overline{\mathfrak{a}}_-)}. \tag{4.6.3}$$

Ако за дадено $\beta>0$ и някое $a\in(0,1-\overline{\mathfrak{a}}_+)$ покажем, че

$$\lim_{|b|\to\infty}|b|^\beta\left|\mathcal{M}_\Psi(a+ib)\right|=0,$$

то благодарение на Теоремата за ивицата на Фрагмен-Линдельоф, виж [27], можем да покажем, че

$$\lim_{|b|\to\infty}|b|^\beta\left|\mathcal{M}_\Psi(a+ib)\right|=0,\ \forall a\in(0,1-\overline{\mathfrak{a}}_+).$$

Затова оттук нататък ще търсим едно a, за което последното е в сила.

4.6.1.1 Случаят $\mathtt{N}_\Psi=\infty$ или $\Psi\in\overline{\mathcal{N}}_\infty$

Знаем, че $W_{\phi_-}(z)$ е трансформация на Мелин на положителна случайна величина, виж Дефиниция 4.2.1. Също така $\frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_+}(z)}$ е трансформация на Мелин на положителна случайна величина, виж [15]. Напомняме очевидното неравенство $\left|\mathbb{E}\left[Y^{a+ib}\right]\right|\le\mathbb{E}\left[Y^a\right]$

за всяка трансформация на Мелин на случайна величина. Така получаваме неравенствата

$$|\mathcal{M}_\Psi(z)| \le \frac{\Gamma(a)}{W_{\phi_+}(a)} \; \left|W_{\phi_-}(1-z)\right| \tag{4.6.4}$$

$$|\mathcal{M}_\Psi(z)| \le \frac{|\Gamma(z)|}{\left|W_{\phi_+}(z)\right|} \left|W_{\phi_-}(1-a)\right| \tag{4.6.5}$$

за всяко $z \in \mathbb{C}_a$, $a \in (0, 1 - \overline{\mathfrak{a}}_-)$. Така от (4.6.3) виждаме, че за всяко $\beta > 0$ и всяко $a \in (0, 1 - \overline{\mathfrak{a}}_-)$ е в сила

$$\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta \left|\mathcal{M}_\Psi(a+ib)\right| = 0$$

или еквивалентно $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}_\infty$ и $\mathtt{N}_\Psi = \infty$, виж (4.3.5), тогава и само тогава, когато или

$$\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta \frac{|\Gamma(a+ib)|}{\left|W_{\phi_+}(a+ib)\right|} = 0 \;\forall a \in (0, 1-\overline{\mathfrak{a}}_-), \forall \beta > 0 \tag{4.6.6}$$

или/и

$$\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta \left|W_{\phi_-}(1-a-ib)\right| = 0 \;\forall a \in (0, 1-\overline{\mathfrak{a}}_-), \forall \beta > 0. \tag{4.6.7}$$

Първо изследваме (4.6.6). Припомняме, че

$$\phi \in \mathcal{B}_P = \{\phi \in \mathcal{B} : \; d > 0 \,(\text{ виж } (4.2.4))\}$$

и съответно $\phi \in \mathcal{B}_P^c \iff d = 0$. В сила е следното твърдение, което изучава (4.6.6):

Proposition 4.6.1. *Нека $\phi \in \mathcal{B}_P^c$. Тогава за всяко $u \ge 0$ и $a > 0$ фиксирано е в сила*

$$\lim_{|b|\to\infty} |b|^u \left|\frac{\Gamma(a+ib)}{W_\phi(a+ib)}\right| = 0. \tag{4.6.8}$$

Ако $\phi \in \mathcal{B}_P$, то (4.6.8) е валидно за всяко $u < \frac{1}{d}\left(\phi(0) + \bar{\mu}(0)\right) \in (0, \infty]$, където $\bar{\mu}(0) = \int_0^\infty \mu(dy)$. Всъщност, ако $\bar{\mu}(0) < \infty$, границата в (4.6.8) е безкрайност за всяко $u > \frac{1}{d}\left(\phi(0) + \bar{\mu}(0)\right)$. Независимо от стойността на $\bar{\mu}(0)$ за всяко $a > 0$ такова, че $d^{-1}\int_0^\infty e^{-ay}\bar{\mu}(y)\,dy < 1$, имаме релацията

$$\lim_{b\to\infty} e^{\frac{\bar{\mu}\left(\frac{1}{b}\right)+\phi(0)}{d}\ln b} \left|\frac{\Gamma(a+ib)}{W_\phi(a+ib)}\right| < \infty. \tag{4.6.9}$$

Remark 4.6.2. *Отбелязваме, че асимптотиката на $\left|\frac{\Gamma(a+ib)}{W_\phi(a+ib)}\right|$ се изучава напълно за целия клас на Бернщайн функции. Както ще се види по-късно за точното разбиране на асимптотиката на $\left|W_{\phi_-}(1-a-ib)\right|$, е необходима взаимовръзката между ϕ_-, ϕ_+, индуцирана от $\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z)$, която има конкретна вероятностна интерпретация.*

От доказателството на Твърдение 4.6.1 ще дискутираме само случая $\phi \in \mathcal{B}_P^c$. Доказателствата на останалите твърдения изискват някои знания от теория на нормираните алгерби и могат да се намерят в доказателството на [54, Твърдение 4.2] (Глава 5 Твърдение 5.4.2). Нека $\phi \in \mathcal{B}$. Фиксираме $a > 0$ и без ограничение на общността нека допуснем, че $b > 0$. Като приложим (4.2.3) към $|\Gamma(a+ib)|$ и (4.2.16) към $|W_\phi(a+ib)|$, получаваме, когато $b \to \infty$, че

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Gamma(a+ib)}{W_\phi(a+ib)}\right| &= |\Gamma(a+ib)| \frac{\sqrt{\phi(a)\phi(1+a)|\phi(a+ib)|}}{\sqrt{\phi(1)}} e^{-G_\phi(a)+A_\phi(a+ib)} e^{E_\phi(a+ib)+R_\phi(a)} \\ &\asymp b^{a-\frac{1}{2}} \sqrt{|\phi(a+ib)|} e^{A_\phi(a+ib)-\frac{\pi}{2}b},\end{aligned} \tag{4.6.10}$$

където под $f \asymp g$ разбираме $0 < \varliminf_{x\to\infty} f(x)/g(x) \leq \varlimsup_{x\to\infty} f(x)/g(x) < \infty$. Отбелязваме, че членът $e^{E_\phi(a+ib)+R_\phi(a)}$ не допринася за асимптотиката в (4.6.10) благодарение на (4.2.15), докато когато a е фиксирано, то $G(a)$ е число. Следователно остава да се оцени $A_\phi(a+ib)$, когато $d = 0$. От (4.2.4) получаваме, че

$$\begin{aligned}\phi(a+ib) &= \phi(0) + \int_0^\infty \left(1 - e^{-ay}\cos(by)\right)\mu(dy) + i\int_0^\infty \sin(by)e^{-ay}\mu(dy) \\ &= \mathtt{Re}\left(\phi(a+ib)\right) + i\mathtt{Im}\left(\phi(a+ib)\right).\end{aligned}$$

Очевидно $\mathtt{Re}\left(\phi(a+ib)\right) \geq \phi(a) > 0$. Също така

$$\lim_{b\to\infty} \frac{|\mathtt{Im}\left(\phi(a+ib)\right)|}{b} = 0, \tag{4.6.11}$$

понеже са в сила (4.5.6) и алтернативното представяне за ϕ

$$\phi(a+ib) = \phi(0) + (a+ib)\int_0^\infty e^{-(a+ib)y}\bar{\mu}(y)dy. \tag{4.6.12}$$

Тези факти ни позволяват да заключим, че за всяко $M > 0$ и всяко $u > u(M) > 0$,

$$\begin{aligned}|\arg\left(\phi(a+iu)\right)| &= \left|\arctan\left(\frac{\mathtt{Im}\left(\phi(a+iu)\right)}{\mathtt{Re}\left(\phi(a+iu)\right)}\right)\right| \\ &\leq \arctan\left(\frac{|\mathtt{Im}\left(\phi(a+iu)\right)|}{\phi(a)}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\phi(a)u}{u\,|\mathtt{Im}\left(\phi(a+iu)\right)|}\right) \\ &\leq \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{M\phi(a)}{u}\right),\end{aligned}$$

където последното неравенство следва благодарение на (4.6.11). Следователно от дефиницията на A_ϕ, виж (4.2.10), получаваме, че за всяко $b > u(M)$,

$$|A_\phi(a+ib)| \leq \int_0^b |\arg\phi(a+iu)|\,du \leq \frac{\pi}{2}b - \int_{u(M)}^b \arctan\left(\frac{M\phi(a)}{u}\right)du.$$

Понеже $\arctan x \overset{0}{\sim} x$, виждаме, че $\exists\, u'$ достатъчно голямо, така че за всяко $b > u'$

$$|A_\phi\,(a+ib)| \le \frac{\pi}{2}b - \frac{M\phi(a)}{2}\left(\ln b - \ln u'\right).$$

Поставяйки тази последна релация в (4.6.10) и използвайки факта, че за фиксирано $a > 0$, $|\phi\,(a+ib)| \overset{\infty}{=} \mathrm{o}\left(|a+ib|\right)$, виж (4.6.12) и (4.5.6), лесно получаваме, че като $b \to \infty$,

$$\left|\frac{\Gamma\,(a+ib)}{W_\phi\,(a+ib)}\right| \lesssim b^a e^{-\frac{M\phi(a)}{2}\ln b} = b^{a-\frac{M\phi(a)}{2}},$$

където $f \lesssim g$ означава $\overline{\lim_{x\to\infty}}\, f(x)/g(x) < \infty$. Понеже M е произволно, добиваме (4.6.8) когато $\phi \in \mathcal{B}_P^c$.

Твърдение 4.6.1 показва, че (4.6.6) е в сила когато $\bar{\mu}_+(0) = \int_0^\infty \mu_+(dy) = \infty$ или процесът на минимум на процеса на Леви асоцииран към Ψ има безкрайна активност (безкраен брой скокове за краен интервал от време). Процесът на минимум припомняме, че е дефиниран в Секция 1.5.3(1.5.6). Също така отбелязваме, че Твърдение 4.6.1 изчислява и точната скорост на сходимост, когато $\bar{\mu}_+(0) = \int_0^\infty \mu_+(dy) < \infty$, с което получаваме импликациите

$$\begin{aligned}
&\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta \frac{|\Gamma(a+ib)|}{\left|W_{\phi_+}(a+ib)\right|} = 0\ \ \forall a \in (0, 1-\bar{\mathfrak{a}}_-) \iff \beta \in \left(0, \frac{1}{d_+}\left(\phi_+(0) + \bar{\mu}_+(0)\right)\right)\\
&\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta \frac{|\Gamma(a+ib)|}{\left|W_{\phi_+}(a+ib)\right|} = \infty\ \forall a \in (0, 1-\bar{\mathfrak{a}}_-) \iff \beta \in \left(\frac{1}{d_+}\left(\phi_+(0) + \bar{\mu}_+(0)\right), \infty\right).
\end{aligned} \tag{4.6.13}$$

Продължаваме с изучаването на (4.6.7). За тази цел въвеждаме така наречената потенциална мярка на субординатор. Припомняме, че с всяко $\phi \in \mathcal{B}$ имаме асоцииран субординатор ξ. Тогава потенциалната мярка на ξ и следователно на ϕ се дефинира с помощта на

$$U(dy) = \int_0^\infty e^{-\phi(0)t}\mathbb{P}\left(\xi_t \in dy\right) dt,\ y > 0, \tag{4.6.14}$$

и от [8, Глава 3] или от [22] се знае, че трансформацията на Лаплас на мярката $U(dy)$ се задава с релацията

$$\int_0^\infty e^{-zy} U(dy) = \frac{1}{\phi(z)},\ \ z \in \mathbb{C}_{(0,\infty)}. \tag{4.6.15}$$

Функцията на възстановяване или потенциалната функция $U(y) = \int_0^y U(dx)$, $y > 0$, се знае, че е субадитивна на $(0,\infty)$. Понеже $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}$ води до $\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z)$, виж (3.3.1), имаме две потенциални мерки $U_\pm$, асоциирани съответно с $\phi_\pm$. Ако в допълнение $\phi \in \mathcal{B}_P$, то е добре известно от [8, Chapter III], че плътността $u(y) = \frac{U(dy)}{dy}\mathbb{I}_{\{y>0\}}$ съществува. Също така u е непрекъсната, строго положителна и ограничена на $[0,\infty)$, т.е. $||u||_\infty < \infty$. Нещо повече, [22, Proposition 1] доказва в този случай, че

$$u(y) = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{d^{j+1}}\left(\mathbf{1} * (\phi(0) + \bar{\mu})^{*j}\right)(y) = \frac{1}{d} + \tilde{u}(y),\ y \ge 0, \tag{4.6.16}$$

където $\mathbf{1}(y) = \mathbb{I}_{\{y>0\}}$ е функцията на Хевисайд и $f * g(x) = \int_0^x f(x-v)g(v)dv$ представлява конволюцията на две функции. Припомняме (4.6.7)

$$\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta \left|W_{\phi_-}(1-a-ib)\right| = 0,\ \forall a \in (0, 1-\bar{\mathfrak{a}}_-), \forall \beta > 0. \tag{4.6.17}$$

Тогава имаме резулатата, който разглежда само случая, когато $\bar{\mu}_+(0) < \infty$ и $\phi_+ \in \mathcal{B}_P$:

Proposition 4.6.3. *Нека $\phi_+ \in \mathcal{B}_P$ и $\bar{\mu}_+(0) < \infty$. Тогава имаме следните случаи:*

1. *ако $\phi_- \in \mathcal{B}_P$, то (4.6.17) е в сила;*
2. *ако $\phi_- \in \mathcal{B}_P^c$, то (4.6.17) е в сила тогава и само тогава, когато $\overline{\overline{\Pi}}_-(0) = \int_0^\infty \Pi_-(dy) = \infty$;*
3. *ако $\phi_- \in \mathcal{B}_P^c$ и $\overline{\overline{\Pi}}_-(0) < \infty$, то за всяко $u < \frac{\int_0^\infty u_+(y)\Pi_-(dy)}{\phi_-(0)+\bar{\mu}_-(0)}$ и всяко $a > 0$ е в сила, че $\lim_{|b|\to\infty} |b|^u \left|W_{\phi_-}(a+ib)\right| = 0$, където u_+ е плътността на U_+. Ако обаче $u > \frac{\int_0^\infty u_+(y)\Pi_-(dy)}{\phi_-(0)+\bar{\mu}_-(0)}$, то за всяко $a > 0$ имаме следната граница $\lim_{|b|\to\infty} |b|^u \left|W_{\phi_-}(a+ib)\right| = \infty$.*

Remark 4.6.4. *Доказтелството на точка 2 протича по доста тънка нишка. Найобщо вместо с оригиналната функция на Бернщайн ϕ_- благодарение на (4.6.16) можем да сведем изследването до нова фунцкия на Бернщайн ϕ_-^c, чиято мярка на Леви има ненарастваща плътност. От своя страна в този случай, благодарение на свойството на себеразлагане , се знае, че*

$$\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta \left|W_{\phi_-^c}(1-a-ib)\right| = 0\ \forall a \in (0, 1-\bar{\mathfrak{a}}_-), \forall \beta > 0,$$

и остава това свойство да се прехвърли върху W_{ϕ_-}.

Доказателството на Твърдение 4.6.3 е на няколко сравнително трудни стъпки. Тук само ще ги очертаем. Използваме (4.2.16), което за фиксирано $a > \mathfrak{u}_-$ и $z \in \mathbb{C}_a$, благодарение на (4.2.15), приема вида

$$\left|W_{\phi_-}(z)\right| \asymp \frac{1}{\sqrt{|\phi_-(z)|}} e^{-A_{\phi_-}(z)}. \tag{4.6.18}$$

Ако $\phi_- \in \mathcal{B}_P$, то от Теорема 4.2.4(3)(4.2.20) получаваме, че $A_{\phi_-}(a+ib) \stackrel{\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}|b|$, с което точка 1 следва с помощта на (4.6.18), при което дори имаме експоненциална сходимост.

Точка 2 се разбива на два сценария. Първият $\phi_- \in \mathcal{B}_P^c$, $\overline{\overline{\Pi}}_-(0) = \infty$ и в сила, че $\int_0^1 \int_y^\infty \Pi_-(dv)dy < \infty$ се изследва с помощта на връзката

$$|b|\Theta_{\phi_-}(a+ib) \;=\; A_{\phi_-}(a+ib) = \int_a^\infty \ln\left(\frac{|\phi_-(u+i|b|)|}{\phi_-(u)}\right)du, \tag{4.6.19}$$

виж Теорема 4.2.4(1)(4.2.17). В този случай $\lim_{u\to\infty} \phi_-(u) = \phi_-(\infty)$ и след известно количество аналитични сметки може да се докаже, че

$$\lim_{b\to\infty} \frac{A_{\phi_-}(a+ib)}{\ln(b)} = \infty,$$

което разбира се води благодарение на (4.6.18) до валидността на (4.6.17). Детайли от доказателството могат да се намерят в извеждането на [54, Твърдение 4.3] (Глава 5 Твърдение 5.4.3).

Вторият сценарий е $\phi_- \in \mathcal{B}_P^c$, $\overline{\Pi}_-(0) = \infty$ и $\int_0^1 \int_y^\infty \Pi_-(dv)dy = \infty$. За доказателството му са необходими редица сметки и стъпки, чиито идеи ще очертаем. Първо, благодарение на формулата

$$\mu_-(dy) = \upsilon_-(y)\,dy = \int_0^\infty u_+(v)\Pi_-(y+dv)dy, \tag{4.6.20}$$

която представлява добре известното "обратно приятелско уравнение на Вигон виж [20, 65] и (4.6.16) получаваме, че

$$\upsilon_-(y) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{d_+} + \tilde{u}(y)\right) \Pi_-(y+dv)dy.$$

Тогава за всяко $c > 0$

$$\begin{aligned}
\upsilon_-(y) &= \frac{1}{d_+}\int_0^c \Pi_-(y+dv)\mathbb{I}_{\{y\le c\}} + v_1(y)\\
&= \frac{1}{d_+}\left(\overline{\Pi}_-(y) - \overline{\Pi}_-(c)\right)\mathbb{I}_{\{y\le c\}} + v_2(y)\\
&= \frac{1}{d_+}\overline{\Pi}_-^c(y) + v_2(y),
\end{aligned}$$

където v_1, v_2 са някаква функции и $\overline{\Pi}_-^c(y)$ е ненамаляваща на $\mathbb{R}^+$. Второ, може да се покаже, че $\overline{\Pi}_-^c(y)$ е мярка на Леви на субординатор с експонента на Лаплас ϕ_-^c. Трето, с подходящ избор на $c > 0$ може да се покаже в [54, Лема 4.8](Глава 5 Лема 5.4.8), че

$$\arg\phi_-(a+ib) = \arg\phi_-^c(a+ib) + h(b). \tag{4.6.21}$$

Четвърто, в самото доказателство на [54, Твърдение 4.3](Глава 5 Твърдение 5.4.3) се доказва, че

$$\sup_{b>0}\left|\int_0^b h(u)du\right| < \infty. \tag{4.6.22}$$

Пето, от дефиницията на A_{ϕ_-}, виж (4.2.10), (4.6.22) и (4.6.21), получаваме, че

$$A_\phi(a+ib) = \int_0^{|b|} \arg\phi(a+iu)\,du = \int_0^{|b|} \arg\phi_-^c(a+iu)du + \int_0^{|b|} h(u)du \asymp A_{\phi_-^c}(a+ib).$$

Последно от [55, Теорема 5.1 (5.3)] знаем, че за всяко $\beta > 0$

$$0 = \lim_{b\to\infty} b^{\beta}\left|W_{\phi_-^c}(a+ib)\right| = \lim_{b\to\infty} b^{\beta}\frac{1}{\sqrt{|\phi_-^c(a+ib)|}}e^{-A_{\phi_-^c}(a+ib)}.$$

Така добиваме, че

$$\lim_{b\to\infty}\frac{A_{\phi_-}(a+ib)}{\ln(b)} = \lim_{b\to\infty}\frac{A_{\phi_-^c}(a+ib)}{\ln(b)} = \infty.$$

Така от (4.6.18) стигаме до извода, че (4.6.17) е в сила или

$$\lim_{|b|\to\infty}|b|^{\beta}\left|W_{\phi_-}(1-a-ib)\right| = 0,\ \forall a \in (0, 1-\bar{\mathfrak{a}}_-),\ \forall\beta > 0. \tag{4.6.23}$$

С това точка 2 е изведена. Точка 3 изисква технически сметки, свързани с използване на нормирани алгебри и анализ, и по тази причина не е от съществен вероятностен интерес. Отбелязваме, че ключовата вероятностна стъпка за точка 2 се състои във факта, че границата $0 = \lim_{b\to\infty} b^{\beta}\left|W_{\phi_-^c}(a+ib)\right|$ е в сила благодарение на вероятностното свойство себеразлагане , което изисква мярката на Леви на ϕ_-^c да има ненарастваща плътност. Затова и въведохме $\overline{\Pi}_-^c(y)$ като плътност на мярката на Леви на ϕ_-^c. Това от своя страна не би било възможно, ако нямахме разлагането (4.6.16) за потенциалната плътност u_+, което от своя страна е възможно благодарение на $\phi_+ \in \mathcal{B}_P$.

Така Твърдения 4.6.1 и 4.6.3 чрез неравенства (4.6.4) и (4.6.5) дават, че $\mathtt{N}_\Psi = \infty$ или еквивалентно за всяко $\beta > 0$ и всяко $a \in (0, 1-\bar{\mathfrak{a}}_-)$

$$\lim_{|b|\to\infty}|b|^{\beta}\left|\mathcal{M}_\Psi(a+ib)\right| \overset{(4.6.3)}{=} \lim_{|b|\to\infty}|b|^{\beta}\left|\frac{\Gamma(a+ib)}{W_{\phi_+}(a+ib)}W_{\phi_-}(1-a-ib)\right| = 0$$

тогава и само тогава, когато $\phi_+ \in \mathcal{B}_P^c$ или $\phi_+ \in \mathcal{B}_P$ и $\bar{\mu}_+(0) = \infty$ или $\phi_+ \in \mathcal{B}_P$ и $\overline{\Pi}_-(0) = \infty$. Тези условия могат да се синтезират още до

$$\mathtt{N}_\Psi = \infty \iff \phi_+ \in \mathcal{B}_P^c \text{ или } \phi_+ \in \mathcal{B}_P \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty}\Pi(dy) = \infty. \tag{4.6.24}$$

4.6.1.2 Случаят $\mathtt{N}_\Psi \in (0,\infty)$ или $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}_\infty$

Благодарение на (4.6.24) трябва само да разглеждаме случая $\phi_+ \in \mathcal{B}_P$ и $\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(dy) < \infty$. Това съответства на процес на Леви, който е сложен Поасонов процес с положителен линеен дрифт. В този случай отново е в сила, че

$$\lim_{|b|\to\infty}|b|^{\beta}\left|\mathcal{M}_\Psi(a+ib)\right| \overset{(4.6.3)}{=} \lim_{|b|\to\infty}|b|^{\beta}\left|\frac{\Gamma(a+ib)}{W_{\phi_+}(a+ib)}W_{\phi_-}(1-a-ib)\right| = 0. \tag{4.6.25}$$

От Твърдение 4.6.1(4.6.8)

$$\lim_{|b|\to\infty}|b|^{\beta}\left|\frac{\Gamma(a+ib)}{W_{\phi_+}(a+ib)}\right| = 0,\ \forall a \in (0, 1-\bar{\mathfrak{a}}_-) \impliedby \beta < \frac{1}{d_+}\left(\phi_+(0) + \bar{\mu}_+(0)\right) \tag{4.6.26}$$

и от Твърдение 4.6.1

$$\lim_{|b|\to\infty}|b|^{\beta}\left|\frac{\Gamma(a+ib)}{W_{\phi_+}(a+ib)}\right|=\infty,\ \forall a\in(0,1-\bar{\mathfrak{a}}_-)\iff\beta>\frac{1}{d_+}\left(\phi_+(0)+\bar{\mu}_+(0)\right). \quad (4.6.27)$$

Също така, когато $\phi_+\in\mathcal{B}_P$ и $\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(dy)<\infty$, то от Твърдение 4.6.3(3)

$$\lim_{|b|\to\infty}|b|^{\beta}\left|W_{\phi_-}(1-a-ib)\right|=0,\ \forall a\in(0,1-\bar{\mathfrak{a}}_-)\iff\beta<\frac{\int_0^{\infty}u_+(y)\Pi_-(dy)}{\phi_-(0)+\bar{\mu}_-(0)} \quad (4.6.28)$$

и

$$\lim_{|b|\to\infty}|b|^{\beta}\left|W_{\phi_-}(1-a-ib)\right|=\infty,\ \forall a\in(0,1-\bar{\mathfrak{a}}_-)\iff\beta>\frac{\int_0^{\infty}u_+(y)\Pi_-(dy)}{\phi_-(0)+\bar{\mu}_-(0)}. \quad (4.6.29)$$

Комбинирайки (4.6.26),(4.6.27),(4.6.28) и (4.6.29) в (4.6.25), лесно получаваме, че

$$\lim_{|b|\to\infty}|b|^{\beta}\left|\mathcal{M}_{\Psi}(a+ib)\right|=0,\forall a\in(0,1-\bar{\mathfrak{a}}_-)\iff\beta<\frac{\int_0^{\infty}u_+(y)\Pi_-(dy)}{\phi_-(0)+\bar{\mu}_-(0)}+\frac{1}{d_+}\left(\phi_+(0)+\bar{\mu}_+(0)\right) \quad (4.6.30)$$

и

$$\lim_{|b|\to\infty}|b|^{\beta}\left|\mathcal{M}_{\Psi}(a+ib)\right|=\infty,\forall a\in(0,1-\bar{\mathfrak{a}}_-)\iff\beta>\frac{\int_0^{\infty}u_+(y)\Pi_-(dy)}{\phi_-(0)+\bar{\mu}_-(0)}+\frac{1}{d_+}\left(\phi_+(0)+\bar{\mu}_+(0)\right). \quad (4.6.31)$$

Тогава (4.6.30) и (4.6.31) доказват Теорема 4.3.4 когато $\mathtt{N}_{\Psi}\in(0,\infty)$ и така завършваме нейното цялостно доказателство.

4.6.2 Някои елементи от доказателството на Теорема 4.4.1

Ще разискваме само точка 1. Останалите твърдения могат да се намерят в доказателството на [54, Теорема 2.1] (Глава 5 Теорема 5.2.1). Напомняме, че $\Psi\in\overline{\mathcal{N}}$ и $\mathcal{M}_{\Psi}$ удовлетворява (4.1.2), т.е.

$$\mathcal{M}_{\Psi}(z+1)=\frac{-z}{\Psi(-z)}\mathcal{M}_{\Psi}(z) \quad (4.6.32)$$

поне за $z\in\mathbb{C}_{(0,-\bar{\mathfrak{a}}_-)}$, виж Теорема 4.3.1, и припомняме, че количеството $\bar{\mathfrak{a}}_-$ е дефинирано в (4.2.8). Следователно, за всяко $\Psi\in\mathcal{N}\subset\overline{\mathcal{N}}$ такова, че $\bar{\mathfrak{a}}_-<0$ от [4, 44], $\mathcal{M}_{I_{\Psi}}$ решава (4.6.32) поне за $z\in\mathbb{C}_{(0,-\bar{\mathfrak{a}}_-)}$. Тъй като по дефиниция $\Psi\in\mathcal{N}\iff\phi_-(0)>0$, виж (3.2.1), ще покажем, че $\mathcal{M}_{I_{\Psi}}(z)=\phi_-(0)\mathcal{M}_{\Psi}(z)$ или че релациите, съдържащи се в (4.4.1), са валидни. Благодарение на [55, Proposition 6.8] е в сила, че

$$\mathbb{E}\left[I_{\phi_+}^{z-1}\right]=\frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_+}(z)},\ z\in\mathbb{C}_{(0,\infty)}.$$

Нещо повече, моментално извеждаме, че $\phi_-(0)W_{\phi_-}(1-z)$, $z \in \mathbb{C}_{(-\infty,1-\overline{\mathfrak{a}}_-)}$, е трансформацията на Мелин на случайната величина X_{ϕ_-}, дефинирана чрез равенството

$$\mathbb{E}\left[g\left(X_{\phi_-}\right)\right] = \phi_-(0)\mathbb{E}\left[\frac{1}{Y_{\phi_-}}g\left(\frac{1}{Y_{\phi_-}}\right)\right], \tag{4.6.33}$$

където от Дефиниция 4.2.1, Y_{ϕ_-} е случайната величина, асоциирана с функцията на Бернщайн-Гама W_{ϕ_-} и $g \in \mathtt{C}_b(\mathbb{R}^+)$. Следователно

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\circ}_{I_\Psi}(z) &= \mathbb{E}\left[I^{z-1}_{\phi_+}\right]\mathbb{E}\left[X^{z-1}_{\phi_-}\right] = \phi_-(0)\mathcal{M}_\Psi(z)\\ &= \phi_-(0)W_{\phi_-}(1-z)\frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_+}(z)}, \quad z \in \mathbb{C}_{(0,1-\overline{\mathfrak{a}}_-)},\end{aligned} \tag{4.6.34}$$

е трансформацията на Мелин на $I_{\phi_+} \times X_{\phi_-}$ и $\mathcal{M}^{\circ}_{I_\Psi}$ решава уравнение (4.6.32) с условието $\mathcal{M}^{\circ}_{I_\Psi}(1) = 1$ върху $\mathbb{C}_{(0,-\overline{\mathfrak{a}}_-)}$. Затова и двете функции $\mathcal{M}^{\circ}_{I_\Psi}, \mathcal{M}_{I_\Psi}$ решават уравнение (4.6.32) върху ивицата $\mathbb{C}_{(0,-\overline{\mathfrak{a}}_-)}$, с условието $\mathcal{M}^{\circ}_{I_\Psi}(1) = \mathcal{M}_{I_\Psi}(1) = 1$, и те са холоморфни върху $\mathbb{C}_{(0,1-\overline{\mathfrak{a}}_-)}$. Функцията $\mathcal{M}^{\circ}_{I_\Psi}$ няма нули върху $(0, 1-\overline{\mathfrak{a}}_-)$, тъй като нейните фактори Γ и W_{ϕ_-} нямат нули в този регион благодарение на Теорема 4.2.2. Така заключаваме, че $f(z)\mathcal{M}^{\circ}_{I_\Psi}(z) = \mathcal{M}_{I_\Psi}(z)$ с f някоя периодична холоморфна функция с период 1, т.е. $f(z+1) = f(z)$, $z \in \mathbb{C}_{(0,1]}$, и $f(1) = 1$. Нека $z = a+ib \in \mathbb{C}_{(0,1-\overline{\mathfrak{a}}_-)}$, a е фиксирано и $|b| \to \infty$. Тогава получаваме, че

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left|\frac{\mathcal{M}_{I_\Psi}(z)}{\mathcal{M}^{\circ}_{I_\Psi}(z)}\right| \leq \frac{\mathbb{E}\left[I^{a-1}_\Psi\right]}{\left|\mathcal{M}^{\circ}_{I_\Psi}(z)\right|}\\ &= \frac{\mathbb{E}\left[I^{a-1}_\Psi\right]}{\phi_-(0)}\frac{\left|W_{\phi_+}(z)\right|}{\left|\Gamma(z)W_{\phi_-}(1-z)\right|} = \mathrm{O}(1)\frac{1}{\left|\Gamma(z)W_{\phi_-}(1-z)\right|},\end{aligned}$$

понеже тривиално $|\mathcal{M}_{I_\Psi}(a+ib)| = \left|\mathbb{E}\left[I^{a-1+ib}_\Psi\right]\right| \leq \mathbb{E}\left[I^{a-1}_\Psi\right]$ и от (4.6.5) следва, че $\left|W_{\phi_+}(a+ib)\right| \leq W_{\phi_+}(a)$. Благодарение на асимптотиката на Стирлинг за Γ, W_{ϕ_-}, виж (4.2.16) и най-вече на (4.2.17), $A_\phi(a+ib) \in \left(0, \frac{\pi}{2}b\right)$, заключаваме, че

$$|f(a+ib)| = \mathrm{o}\left(e^{2\pi|b|}\right).$$

От добре известния критерий за максималния възможен растеж на периодични цели функции, виж [43, p.96, (36)], заключаваме, че $f(z) = f(1) = 1$, понеже такава функция расте най-малко със скорост $e^{2\pi|b|}$ по протежение на $\mathbb{C}_a$. Така потвърждаваме, че $\mathcal{M}_{I_\Psi}(z) = \mathcal{M}^{\circ}_{I_\Psi}(z) = \phi_-(0)\mathcal{M}_\Psi(z)$ или съответно, че (4.4.1) е в сила, когато $\overline{\mathfrak{a}}_- < 0$.

Общият случай се доказва с приближение, т.е. мярката Π_- се трансформира в $\Pi^\eta_-(dy) = e^{-\eta y}\Pi_-(dy)$ и Π_+ се запазва. Новият процес на Леви има експонента на Леви-Хинчин Ψ^η, която попада в предходния случай и така

$$I_{\Psi_\eta} \stackrel{d}{=} X_{\phi^\eta_-} \times I_{\phi^\eta_+}.$$

След граничен преход $\eta \to 0$ се валидира (4.4.1).

4.6.3 Кратки бележки по доказателството на Теорема 4.4.5

Доказтелството на Теорема 4.4.5(2) става на следните стъпки:

1. Първо се показва, че ако $\Psi \in \mathcal{N}_{\mathtt{N}_\Psi}$ и $\Psi \in \mathcal{N}_{\mathcal{W}}$, т.е. (4.3.4) е в сила с $\beta = \mathtt{N}_\Psi \in (0, \infty]$, то
$$\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta \left|\mathcal{M}_\Psi \left(1 - \mathfrak{u}_- + ib\right)\right| = 0 \iff \beta < \mathtt{N}_\Psi$$
и
$$\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta \left|\mathcal{M}_\Psi \left(1 - \mathfrak{u}_- + ib\right)\right| = \infty \iff \beta > \mathtt{N}_\Psi.$$
Така скоростта на намаляване към нулата се запазва върху $1 - \mathfrak{u}_-$ за слабо-решетъчния клас.

2. За $a \in (0, 1 - \mathfrak{u}_-)$ използваме формулата за обръщане
$$f_\Psi^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{\phi_-(0)}{2\pi i} \int_{z\in\mathbb{C}_a} x^{-z-n} \frac{\Gamma\left(z+1\right)}{\Gamma\left(z+1-n\right)} \mathcal{M}_\Psi(z) dz, \tag{4.6.35}$$
когато $n \leq \lceil \mathtt{N}_\Psi \rceil - 2$.

3. Благодарение на точка 1 по-горе можем да преместим интегрирането с помощта на Теоремата на Коши върху контура $\mathbb{C}_a$
$$\left\{z = 1 - \mathfrak{u}_- + ib : \ b > c\right\} \cup \left\{z = 1 - \mathfrak{u}_- + ce^{i\theta} : \ \mathtt{Re}(1 - \mathfrak{u}_- + ce^{i\theta}) \leq 0\right\},$$
където втората част е полуокръжност.

4. Показва се с помощта на лемата на Риман-Лебег, че за всяко $c > 0$
$$\lim_{x\to\infty} x^a \left| \int_{z=1-\mathfrak{u}_-+ib:\, b>c} x^{-z-n} \frac{\Gamma\left(z+1\right)}{\Gamma\left(z+1-n\right)} \mathcal{M}_\Psi(z) dz \right| = 0.$$

5. Накрая използвайки полюсът на $\mathcal{M}_\Psi(z)$ в точката $1 - \mathfrak{u}_-$ можем да покажем, че
$$\lim_{c\to 0} \lim_{x\to\infty} x^a \left| \int_{z=1-\mathfrak{u}_-+ce^{i\theta}:\, \mathtt{Re}(1-\mathfrak{u}_-+ce^{i\theta})\leq 0} x^{-z-n} \frac{\Gamma\left(z+1\right)}{\Gamma\left(z+1-n\right)} \mathcal{M}_\Psi(z) dz \right| = C$$
и да пресметнем C.

За точка (1) са необходими няколко стъпки, но тук само открояваме, че ключовата стъпка е, че ако Ψ не попада в обхвата Теорема 4.4.5(2), то можем вероятностно да приближим отдолу $I_\Psi \geq I_{\Psi^\eta}$ така че Ψ^η попадат в класа на Теорема 4.4.5(2). Тогава, понеже
$$\mathbb{P}\left(I_\Psi \geq x\right) = \overline{F}_\Psi(x) \geq \mathbb{P}\left(I_{\Psi^\eta} \geq x\right) \overset{\infty}{\approx} C x^{\mathfrak{u}_-^\eta}$$
и $\lim_{\eta\to 0} \mathfrak{u}_-^\eta = \mathfrak{u}_-$, можем да покажем (4.4.8) за всяко $\overline{d} > -\mathfrak{u}_-$.

Няма да скицираме доказателствата в секции 4.4.2, 4.4.3 и 4.4.4, тъй като не представляват особен интерес от вероятностна гледна точка, изискват тежък аналитичен апарат и могат да се намерят в [54] (Глава 5).

Глава 5

Научни приноси на дисертационния труд

5.1 Обзор на основните приноси на дисертационния труд

Експоненциалният функционал на процеси на Леви е случайна величина, която играе важна роля в редица теоретични и приложни изследвания. Често пъти разбирането на нейните свойства носи допълнителна информация за изучавания обект. Поради тази причина експоненциалният функционал е бил изследван в редица разработки. Въпреки това, резултатите за тази случайна величина като цяло бяха твърде фрагментирани.

Най-общо, основният принос на дисертационния труд се състои в разработването на единна методология, която позволява глобалното изучаване на експоненциалните функционали на процеси на Леви. В Глава 5 от дисертацията е пресметната, с помощта на нов клас от специални функции, наречени функции на Бернщайн-Гама, трансформацията на Мелин на всеки експоненциален функционал. Така подробното изучаване на функциите на Бернщайн-Гама, направено в Глава 5, позволи на свой ред детайлното разбиране на трансформацията на Мелин на експоненциалния функционал. Тази информация, с помощта на аналитични и вероятностни средства, даде възможност обратната трансформация на Мелин, която реално пресмята закона на експоненциалния функционал, да бъде детайлно изучена. Така се добиват редица вероятностни свойства за разпределението на експоненциалния функционал на процеси на Леви като асимптотика, гладкост, факторизации, развиване в ред, пресмятане на моментите и прочее. Трябва да се отбележи, че за много от изучените свойства няма никакви допускания за прилежащия процес на Леви, докато за останалите има само необходими такива. Например асимптотичното поведение на логаритъма на опашката на експоненциалния функционал е разбрано в пълна общност, докато, с необходимото допускане асоциирания процес на Леви да не принадлежи на *слабо-решетъчния* клас, е изучено асимптотичното поведение на плъността и нейните производни. Последният резултат е достатъчно общ, за да обхване поне две статии, свързани с подобна асимптотика, публикувани в последните пет години. Трябва също така да се отбележи, че дисертационният труд има и принос към теорията на специалните функции чрез разработването на асимптотиката на Стирлинг за функциите на Бернщайн-Гама. Това, макар и не трудно, е полезно, тъй като позволява асимптотичните свойства на някои известни специални функции да се изведат без допълнителен труд или разглеждане на частен случай.

Основният научен принос на Глави 2 и 3 е факторизацията на експоненциалния функционал на процеси на Леви, която е добита с някои допускания. Във връзка с приносите на Глава 5, които включват и най-общи факторизации на експоненциалния функционал на процеси на Леви, достиженията на Глави 2 и 3 могат да се разглеждат като подмножество на резултатите на Глава 5. Въпреки това, тези разработки бяха ключови за разбирането на проблема и най-вече за предугаждането на връзката между трансформацията на Мелин на експоненциалния функционал и функциите на Бернщайн-Гама. Затова те играят и ключова роля в развитието и реализацията на този дисертационен труд.

5.2 Някои основни означения и количества

В тази глава ще разгледаме основните научни приноси на дисертационния труд. Целта е да се представят ключовите резултати и техната роля за развитието на теорията на експоненциалните функционали на процеси на Леви. Първо ще припомним някои основни понятия и означения.

Означаваме с ξ реален процес на Леви, който е еднозначно определен от своята експонента на Леви-Хинчин чрез връзката

$$\Psi(z) = \log \mathbb{E}\left[e^{z\xi_1}\right] = cz + \frac{\sigma^2}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{zr} - 1 - zr\mathbb{I}_{\{|r|\leq 1\}}\right)\Pi(dr) - q,\ z \in i\mathbb{R}. \quad (5.2.1)$$

Припомняме, че $q \geq 0$ е скоростта на убиване на процеса на Леви ξ, т.е. $\xi_s = \infty, s \geq \mathbf{e}_q$ и $\mathbf{e}_q \sim Exp(q)$ е независима от ξ. Когато $q = 0$, тогава $\mathbf{e}_0 = \infty$ почти сигурно и процесът е консервативен.

Припомняме, че $\phi \in \mathcal{B}$ е функция на Бернщайн тогава и само тогава когато

$$\phi(z) = \log \mathbb{E}\left[e^{-z\xi_1}\right] = \phi(0) + dz + \int_0^{\infty}\left(1 - e^{-zy}\right)\mu(dy),\ \mathtt{Re}(z) \geq 0$$

и ξ е ненамаляващ процес на Леви или субординатор. Тогава бележитата факторизация на Винер-Хопф е в сила за всяко Ψ и има вида

$$\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z),\ z \in i\mathbb{R}, \quad (5.2.2)$$

където $\phi_\pm \in \mathcal{B}$ са свързани с процесите на минимум и максимум на процеса на Леви ξ, т.е. $H^\pm$, виж Секция 1.5.3.

Използваме нотацията

$$I_\Psi = \int_0^\infty e^{-\xi_s} ds,$$

за да означим експоненциалния функционал на процес на Леви ξ с експонента на Леви-Хинчин Ψ, и приемаме неявно, че когато разглеждаме I_Ψ, работим с такива Ψ, че $I_\Psi < \infty$ почти сигурно.

5.3 Приноси към Глави 2 и 3 от дисертационния труд

Основният принос на тези две глави е резултатът, че, когато мярката на Леви Π в (5.2.1) е такава, че $\Pi_-(dr) = \Pi(-dr)\mathbb{I}_{\{r>0\}} = \pi_-(r)dr\mathbb{I}_{\{r>0\}}$ и π_- е ненарастваща върху $(0, \infty)$, то

$$I_\Psi \stackrel{d}{=} I_{\phi_+} \times I_\psi, \tag{5.3.1}$$

където I_{ϕ_+}, I_ψ са независими и

$$I_{\phi_+} = \int_0^\infty e^{-H_s^+} ds, \;\; I_\psi = \int_0^\infty e^{-\eta_s} ds,$$

където H_s^+ е процесът на максимум на ξ и

$$\psi(s) = s\phi_-(s)$$

е експонента на Леви-Хинчин на процес на Леви η, който не притежава скокове нагоре. Случайните величини I_{ϕ_+}, I_ψ, бидейки свързани с по-прости процеси на Леви, са по-лесни за разбиране. Това позволява за лесното извеждане на редица свойства на закона на I_Ψ. Може би най-забележителният принос се състои в това, че работата [49] публикувана в Annals of Probability следва незабавно от Следствие 2.2.4 и се обобщава значително от Следствие 3.2.4(б). също така с помощта на (5.3.1) могат да се добият и нови свойства на плътността на максимум на стабилен процес на Леви с индекс $\alpha \in (0, 1]$, виж Следствие 3.2.4(а).

От теоретична гледна точка релация (5.3.1) показва, че факторизацията на Винер-Хопф на Ψ в (5.2.2) се пренася до факторизация на Винер-Хопф на I_Ψ или (5.3.1). Това стимулира и изледванията, които доведоха до резултатите в Глава 4.

5.4 Приноси към Глави 3 и 4 от дисертационния труд

Ще разгледаме само най-важните приноси.

5.4.1 Приноси към функциите на Бернщайн-Гама от Глава 5, Секция 5.3.1 от дисертационния труд

Първият основен принос е в добиването на следните резултати:

(1) за всяко $\phi \in \mathcal{B}$, функцията

$$W_\phi(z) = \frac{e^{-\gamma_\phi z}}{\phi(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(k)}{\phi(k+z)} e^{\frac{\phi'(k)}{\phi(k)} z} \tag{5.4.1}$$

е функция на Бернщайн-Гама и като такава решава рекурентното уравнение

$$W_\phi(z+1) = \phi(z) W_\phi(z), \; \mathtt{Re}(z) > 0; \quad W_\phi(1) = 1; \tag{5.4.2}$$

(2) W_ϕ е трансформация на Мелин на положителна случайна величина;

(3) извеждането на свойствата на W_ϕ разглеждана като мероморфна функция.

Тези резултати са част от Теорема 4.2.2 и допълват някои резултати от литературата, които разглеждат W_ϕ само като функция върху $(0, \infty)$, виж [2, 30, 44, 66]

Вторият основен принос е добиването на асимптотиката на Стирлинг за количеството $|W_\phi(z)|$, $z \in \mathtt{Re}(z) > 0$. С $z = a + ib$ от Теорема 4.2.4(4.2.16) имаме, че

$$|W_\phi(z)| = \frac{\sqrt{\phi(1)}}{\sqrt{\phi(a)\phi(1+a)|\phi(z)|}} e^{G_\phi(a) - A_\phi(z)} e^{-E_\phi(z) - R_\phi(a)}, \tag{5.4.3}$$

с допълнителната информация, че:

(1) функцията

$$A_\phi(z) = A_\phi(a+ib) = \int_0^{|b|} \arg \phi(a+iu)\, du$$

свързва геометрията на множеството $\phi\left(\mathbb{C}_{(0,\infty)}\right)$ със скоростта на намаляване на $|W_\phi(z)|$ когато $|\mathtt{Im}(z)| = |b|$ клони към безкрайност;

(2) функцията

$$G_\phi(a) = \int_1^{1+a} \ln \phi(u) du$$

изчислява асимптотиката на $|W_\phi(z)|$ когато $\mathtt{Re}(z) = a$ клони към безкрайност;

(3) изразът $e^{-E_\phi(z) - R_\phi(a)}$ е равномерно ограничен за целия клас от функции на Бернщайн и изчислява грешката на приближение.

Релацията (5.4.3) е универсална за всички $\phi \in \mathcal{B}$ и като такава обхваща функции като Гама функцията и Гама функцията на Барнс (двойната Гама функция), виж [6, 7]. Така, основни количества, свързани с асимптотиката на такива функции, могат да се добият директно от (5.4.3) без да се разглежда случай по случай.

5.4.2 Приноси към трансформацията на Мелин на експоненциалния функционал на процеси на Леви

Припомняме, че трансформацията на Мелин на I_Ψ се дефинира формално чрез равенството $\mathcal{M}_{I_\Psi}(z+1) = \mathbb{E}\left[I_\Psi^z\right]$. Също така означаваме с $\overline{\mathcal{N}}$ класа на всички негативно дефинитни функции Ψ или еквивалентно на всички експоненти на Леви-Хинчин на процеси на Леви. Припомняме, че $\mathcal{N} \subsetneq \overline{\mathcal{N}}$ е множеството от всички Ψ такива, че $I_\Psi < \infty$ почти сигурно.

Първият принос е решаването за всяко $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}$ на уравнението

$$\mathcal{M}_\Psi(z+1) = \frac{-z}{\Psi(-z)}\mathcal{M}_\Psi(z), \tag{5.4.4}$$

което е дефинирано поне върху $i\mathbb{R} \setminus (\mathcal{Z}_0(\Psi) \cup \{0\})$ и където сме поставили $\mathcal{Z}_0(\Psi) = \{z \in i\mathbb{R} : \Psi(-z) = 0\}$. Теорема 4.3.1 показва, че

$$\mathcal{M}_\Psi(z) = \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_+}(z)} W_{\phi_-}(1-z),\ z \in \mathbb{C}_{(0,1)}, \tag{5.4.5}$$

където $\phi_\pm \in \mathcal{B}$ са факторите на Винер-Хопф на Ψ, виж (5.2.2). Нещо повече, в Теорема 4.3.1 основните свойства на $\mathcal{M}_\Psi$ като мероморфна функция са също изведени.

Вторият основен принос е изчисляването на скоростта на полиномно намаляване към нула на количеството $|\mathcal{M}_\Psi(a+ib)|$ за фиксирано a и $|b| \to \infty$. По-точно, Теорема 4.3.4 дава, че

$$\begin{aligned} &\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta \left|\mathcal{M}_\Psi(a+ib)\right| = 0 \quad \text{ако } \beta < \mathtt{N}_\Psi \\ &\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta \left|\mathcal{M}_\Psi(a+ib)\right| = \infty \text{ ако } \beta > \mathtt{N}_\Psi, \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

където

$$\mathtt{N}_\Psi = \begin{cases} \frac{\upsilon_-(0^+)}{\phi_-(0)+\bar{\mu}_-0} + \frac{\phi_-(0)+\bar{\mu}_+0}{d_+} < \infty & \text{ако } d_+ > 0, d_- = 0 \text{ и } \overline{\overline{\Pi}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(dy) < \infty, \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases} \tag{5.4.7}$$

Отбелязваме, че $\mathtt{N}_\Psi \neq \infty$ тогава и само тогава когато асоциираният процес на Леви е всъщност сложен Поасонов процес с положителен дрифт.

Третият основен принос е в добиването, че за всяко $\Psi \in \mathcal{N}$ е в сила, че

$$\mathbb{E}\left[I_\Psi^{z-1}\right] = \mathcal{M}_{I_\Psi}(z) = \phi_-(0)\mathcal{M}_\Psi(z),\ z \in \mathbb{C}_{(0,1)},$$

виж Теорема 4.4.1. Това практически извежда в явен вид формата на трансформацията на Мелин на всеки експоненциален функционал. Преди тази разработка $\mathcal{M}_{I_\Psi}$ бе изчислена само в някои частни случаи, виж [29, 34, 38]. В тези статии скоростта на сходимост към нулата на количеството $|\mathcal{M}_{I_\Psi}(a+ib)|$ е също установена благодарение на специалната структура на $\mathcal{M}_{I_\Psi}$. Не са ни известни резултати в такава общност като тези, съдържащи се в (5.4.6).

5.4.3 Приноси към свойствата на I_Ψ

Ще разгледаме само най-значимите приноси към разбирането на свойствата на случайната величина I_Ψ.

5.4.3.1 Голяма асимптотика

Нека $\overline{F}_\Psi(x) = \mathbb{P}\left(I_\Psi > x\right),\ x > 0$, и $f_\Psi(x) = \mathbb{P}\left(I_\Psi \in dx\right)/dx$. Тогава с минималното ограничение Ψ да не принадлежи към *слабо-решетъчния* клас, получаваме, че за всяко $n \leq \lceil \mathtt{N}_\Psi \rceil - 2$, виж (5.4.7) и Теорема (4.4.5),

$$f_\Psi^{(n)}(x) \stackrel{\infty}{\approx} (-1)^n \frac{\phi_-(0)\Gamma\left(n+1-\mathfrak{u}_-\right) W_{\phi_-}\left(1+\mathfrak{u}_-\right)}{\phi'_-\left(\mathfrak{u}_-{}^+\right) W_{\phi_+}\left(1-\mathfrak{u}_-\right)} x^{-n-1+\mathfrak{u}_-}. \tag{5.4.8}$$

Релацията (5.4.8) възстановява моментално основните приноси на статиите [21, 33], публикувани в Annals of Probability, и добива асимптотичните свойства на f_Ψ и нейните производни, които се намират в [28, 34, 38, 49]. Асимптотиката (5.4.8) всъщност е доста по-обща, тъй като (5.4.8) е следствие от глобалната аналитична структура на Ψ и не предполага налагането на специфични свойства на Ψ. Тя също потвърждава хипотезата, че случайните величини I_Ψ са много по-регулярни от прилежащите им процеси на Леви.

Друг принос на Теорема 4.4.5 е следната логаритмична асимптотика

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log \overline{F}_\Psi(x)}{\log x} = \mathfrak{a}_- \in [-\infty, 0)\,. \tag{5.4.9}$$

Този резултат е напълно общ и подобрява значително [4, Лема 2], която само дава условия, при които границата (5.4.9) не е $-\infty$.

5.4.3.2 Гладкост на f_Ψ

Плътността f_Ψ се знае, че съществува от статията [11]. Също така работите [17, 47] разискват някои свойства на f_Ψ, свързани с нейната гладкост. За специални случаи може да се докаже, че f_Ψ безкрайно диференцируема, виж [28, 34, 38, 49].

Използвайки скоростта на полиномна сходимост към нулата, изчислена в (5.4.7), Теорема 4.4.1(3) установява, че f_Ψ е поне $\lceil \mathtt{N}_\Psi \rceil - 2$ пъти непрекъснато диференцируема. Понеже почти винаги $\mathtt{N}_\Psi = \infty$, заключаваме, че тогава f_Ψ е безкрайно диференцируема. Пресмятането на броя на производни, които f_Ψ притежава, е сходно с работата на Сато и Ямазато върху себеподбните разпределения, виж [60]. Според нас, обаче, контекстът в този дисертационен труд е по-общ и по-труден.

5.4.3.3 Факторизации на I_Ψ

Теорема 4.4.10 установява, че в абсолютна общност,

$$I_\Psi \ \stackrel{d}{=}\ I_{\phi_+} \times X_{\phi_-} \stackrel{d}{=} \bigotimes_{k=0}^{\infty} \left(C_k \mathfrak{B}_k X_\Psi \times \mathfrak{B}_{-k} Y_\Psi\right), \tag{5.4.10}$$

където $\times$ означава произведение на независими случайни величини. Вероятностните мерки на X_Ψ, Y_Ψ се задават чрез

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_\Psi \in dx\right) &= \frac{1}{\phi_+(1)}\left(\bar{\mu}_+(-\ln x)dx + \phi_+(0)dx + d_+\delta_1(dx)\right),\; x \in (0,1)\\ \mathbb{P}\left(Y_\Psi \in dx\right) &= \phi_-(0)\Upsilon_-(dx),\; x > 1,\end{aligned} \tag{5.4.11}$$

където $\Upsilon_-(dv) = U_-\left(d\ln(v)\right),\, v > 1$, е образът на потенциалната мярка U_- чрез изображението $y \mapsto \ln y$,

$$C_0 = e^{\gamma_{\phi_+}+\gamma_{\phi_-}-\gamma+1-\frac{\phi_+'(1)}{\phi_+(1)}}, C_k = e^{\frac{1}{k+1}-\frac{\phi_+'(k+1)}{\phi_+(k+1)}-\frac{\phi_-'(k)}{\phi_-(k)}}, k = 1, 2, \ldots,$$

където за всяко цяло $k, \mathfrak{B}_k X$ е случайната величина дефинирана чрез равенството

$$\mathbb{E}\left[f(\mathfrak{B}_k X)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[X^k f(X)\right]}{\mathbb{E}[X^k]}.$$

Факторизацията (5.4.10) е напълно обща и като такава отговаря изцяло на въпроса с намирането на разлагане на I_Ψ. Всъщност, факторизацията в безкрайно произведение, е била известна в литературата само когато Ψ е експонента на Леви-Хинчин на субординатор, виж [2].

5.4.3.4 Асимптотично поведение на $I_\Psi(t) = \int_0^t e^{-\xi_s}ds$ при условие, че $I_\Psi = \infty$

Ако $I_\Psi = \infty$ почти сигурно, т.е. $\Psi \in \overline{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{N}$, тогава може да се изучават свойствата на $I_\Psi(t) = \int_0^t e^{-\xi_s}ds$, когато t клони към безкрайност. Основният принос се съдържа в Теорема 4.4.12. Там се изучават вероятносните мерки $\mathbb{P}\left(I_\Psi(t) \in dx\right)$ при наличност на условието на Спитцер за асоциирания процес на Леви. Основният резултат гласи, че

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[I_\Psi^{-a}(t) f\left(I_\Psi(t)\right)\right]}{\kappa_-(\frac{1}{t})} = \int_0^\infty f(x)\vartheta_a(dx), \tag{5.4.12}$$

за всяко $a \in (0, 1-\mathfrak{a}_+)$ и всяка непрекъсната и ограничена функция f. Отбелязваме, че ϑ_a е крайна положителна мярка на $(0,\infty)$ и $\kappa_-(r) = \phi_-^r(0)$, където $\Psi^r(z) = \Psi(z)-r = -\phi_+^r(-z)\phi_-^r(z)$.

Резултатът (5.4.12) е сходен с някои резултати, свързани със случайното блуждаене. Ако $I_S(n) = \sum_{j=0}^n e^{-S_j}$ и $S = (S_j)_{j\geq 0}$ е рекурентно случайно блуждаене, във връзка с разклоняващи се процеси в случайна среда, релация (5.4.12) е добита за $I_S(n)$, при n клонящо към безкрайност, виж [1, 32]. Използвайки дискретизация на процеса на Леви, авторите на [42, 45] добиват границата (5.4.12). Обаче те разискват случая когато $\mathbb{E}\left[\xi_1^2\right] < \infty$, ξ притежава експоненциални моменти и работят с много по-ограничен клас от функции f. Тук ние нямаме такива ограничения, което се дължи на различната методология.

5.4.4 Други приноси

Резултатите представени в дисертационния труд имат и други приложения. В някои настоящи разработки тези приноси играят основна роля в развиването на спектралната теория на някои не-самоспрегнати Марковски процеси. Заинтересованият читател може да прегледа [55].

Библиография

[1] V. I. Afanasyev, J. Geiger, G. Kersting, and V. A. Vatutin. Criticality for branching processes in random environment. *Ann. Probab.*, 33(2):645–673, 2005.

[2] L. Alili, W. Jedidi, and V. Rivero. On exponential functionals, harmonic potential measures and undershoots of subordinators. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 11(1):711–735, 2014.

[3] D. Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus*, volume 116 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2009.

[4] J. Arista and V. Rivero. Implicit renewal theory for exponential functionals of Lévy processes. *http://arxiv.org/abs/1510.01809*, 2015.

[5] E. W. Barnes. The Genesis of the Double Gamma Functions. *Proc. London Math. Soc.*, S1-31(1):358.

[6] E. W. Barnes. The Genesis of the Double Gamma Functions. *Proc. London Math. Soc.*, S1-31(1):358.

[7] E.W. Barnes. The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series. *Proc. London Math. Soc.*, 5(2):59–116, 1907.

[8] J. Bertoin. *Lévy Processes.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[9] J. Bertoin, J. Curien, and I. Kortchemski. Random planar maps & growth-fragmentations. *http://arxiv.org/pdf/1507.02265.pdf*, 2015.

[10] J. Bertoin and I. Kortchemski. Self-similar scaling limits of Markov chains on the positive integers. *http://arxiv.org/pdf/1412.1068.pdf*, 2016.

[11] J. Bertoin, A. Lindner, and R. Maller. On continuity properties of the law of integrals of Lévy processes. In *Séminaire de probabilités XLI*, volume 1934 of *Lecture Notes in Math.*, pages 137–159. Springer, Berlin, 2008.

[12] J. Bertoin and M. Savov. Some applications of duality for Lévy processes in a half-line. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(1):97–110, 2011.

[13] J. Bertoin and M. Yor. The entrance laws of self-similar Markov processes and exponential functionals of Lévy processes. *Potential Anal.*, 17(4):389–400, 2002.

[14] J. Bertoin and M. Yor. On the entire moments of self-similar Markov processes and exponential functionals of Lévy processes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 11(1):19–32, 2002.

[15] J. Bertoin and M. Yor. Exponential functionals of Lévy processes. *Probab. Surv.*, 2:191–212, 2005.

[16] M.E. Caballero and L. Chaumont. Conditioned stable Lévy processes and the Lamperti representation. *J. Appl. Probab.*, 43(4):967–983, 2006.

[17] Ph. Carmona, F. Petit, and M. Yor. On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. *In M. Yor (ed.) Exponential functionals and principal values related to Brownian motion. Biblioteca de la Rev. Mat. Iberoamericana*, pages 73–121, 1997.

[18] Ph. Carmona, F. Petit, and M. Yor. On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. *In M. Yor (ed.) Exponential functionals and principal values related to Brownian motion. Biblioteca de la Rev. Mat. Iberoamericana*, pages 73–121, 1997.

[19] M. Chazal, A. Kyprianou, and P. Patie. A transformation for Lévy processes with one-sided jumps with applications. *Adv. Appl. Prob., to appear*, 2015.

[20] R. Doney. *Fluctuation Theory for Lévy Processes.* Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXV-2005. Springer, 2007. first edition.

[21] R. A. Doney and M. S. Savov. The asymptotic behavior of densities related to the supremum of a stable process. *Ann. Probab.*, 38(1):316–326, 2010.

[22] L. Döring and M. Savov. (Non)differentiability and asymptotics for potential densities of subordinators. *Electron. J. Probab.*, 16:No. 17, 470–503, 2011.

[23] D. Dufresne. The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding. *Scand. Actuar. J.*, (1-2):39–79, 1990.

[24] E. B. Dynkin. *Markov processes. Vols. I, II*, volume 122 of *Translated with the authorization and assistance of the author by J. Fabius, V. Greenberg, A. Maitra, G. Majone. Die Grundlehren der Mathematischen Wi ssenschaften, Bände 121*. Academic Press Inc., Publishers, New York, 1965.

[25] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz. *Markov processes.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.

[26] W.E. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, volume 2. Wiley, New York, 2^{nd} edition, 1971.

[27] P. Garret. Phragmén-Lindelöf theorems. page http://www.math.umn.edu/?garrett/.

[28] D. Hackmann and A. Kuznetsov. A note on the series representation for the density of the supremum of a stable process. *Electron. Commun. Probab.*, 18:no. 42, 5, 2013.

[29] D. Hackmann and A. Kuznetsov. Asian options and meromorphic Lévy processes. *Finance Stoch.*, 18(4):825–844, 2014.

[30] F. Hirsch and M. Yor. On the Mellin transforms of the perpetuity and the remainder variables associated to a subordinator. *Bernoulli*, 19(4):1350–1377, 2013.

[31] N. Jacob and R. Schilling. An analytic proof of the Lévy–Khinchin formula on $\mathbb{R}^n$. *Publ. Math. Debrecen*, 53(1-2):69–89, 1998.

[32] M. V. Kozlov. The asymptotic behavior of the probability of non-extinction of critical branching processes in a random environment. *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, 21(4):813–825, 1976.

[33] A. Kuznetsov. On extrema of stable processes. *Ann. Probab.*, 39(3):1027–1060, 2011.

[34] A. Kuznetsov. On the distribution of exponential functionals for Lévy processes with jumps of rational transform. *Stochastic Process. Appl.*, 122(2):654–663, 2012.

[35] A. Kuznetsov. On the density of the supremum of a stable process. *Stochastic Process. Appl.*, 123(3):986–1003, 2013.

[36] A. Kuznetsov, A. E. Kyprianou, and V. Rivero. The theory of scale functions for spectrally negative Lévy processes. In *Lévy matters II*, volume 2061 of *Lecture Notes in Math.*, pages 97–186. Springer, Heidelberg, 2012.

[37] A. Kuznetsov and J. C. Pardo. Fluctuations of stable processes and exponential functionals of hypergeometric Lévy processes. *Acta Appl. Math.*, 123:113–139, 2013.

[38] A. Kuznetsov and J.C. Pardo. Fluctuations of stable processes and exponential functionals of hypergeometric Lévy processes. *Acta Aplicandae Mathematicae, to appear*, 2012.

[39] A. Kuznetsov, J.C. Pardo, and M. Savov. Distributional properties of exponential functionals of Lévy processes. *Electron. J. Probab.*, 17(8):1–35, 2012.

[40] J. Lamperti. Semi-stable Markov processes. I. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, 22:205–225, 1972.

[41] N. N. Lebedev. *Special functions and their applications*. Dover Publications Inc., New York, 1972. Revised edition, translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, Unabridged and corrected republication.

[42] Z. Li and W. Xu. Asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. *http://arxiv.org/abs/1601.02363*, 2016.

[43] A. I. Markushevich. *Entire functions.* Translated from the Russian by Scripta Technica, Inc. Translation editor: Leon Ehrenpreis. American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1966.

[44] K. Maulik and B. Zwart. Tail asymptotics for exponential functionals of Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.*, 116:156–177, 2006.

[45] S. Palau, J.C. Pardo, and C. Smadi. Asymptotic behaviour of exponential functionals of Lévy processes with applications to random processes in random environments. *http://arxiv.org/abs/1601.03463.*

[46] J. C. Pardo, P. Patie, and M. Savov. A Wiener-Hopf type factorization for the exponential functional of Lévy processes. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 86(3):930–956, 2012.

[47] J. C. Pardo, V. Rivero, and K. van Schaik. On the density of exponential functionals of Lévy processes. *Bernoulli*, 19(5A):1938–1964, 2013.

[48] P. Patie. Exponential functional of a new family of Lévy processes and self-similar continuous state branching processes with immigration. *Bull. Sci. Math.*, 133(4):355–382, 2009.

[49] P. Patie. Law of the absorption time of some positive self-similar Markov processes. *Ann. Probab.*, 40(2):765–787, 2012.

[50] P. Patie. Asian options under one-sided Lévy models. *J. Appl. Probab.*, 50(2):359–373, 2013.

[51] P. Patie and M. Savov. Extended factorizations of exponential functionals of Lévy processes. *Electron. J. Probab.*, 17:no. 38, 22, 2012.

[52] P. Patie and M. Savov. Exponential functional of Lévy processes: generalized Weierstrass products and Wiener-Hopf factorization. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 351(9-10):393–396, 2013.

[53] P. Patie and M. Savov. Cauchy Problem of the non-self-adjoint Gauss-Laguerre semigroups and uniform bounds of generalized Laguerre polynomials. *J. Spectr. Theory, to appear*, page 33p., 2015.

[54] P. Patie and M. Savov. Bernstein-gamma functions and the exponential functional of Lévy processes. *Working paper*, 2016.

[55] P. Patie and M. Savov. Spectral expansion of non-self-adjoint generalized Laguerre semigroups. *Submitted*, page 162p. (current version), 2016.

[56] J. Pitman and M. Yor. Bessel processes and infinitely divisible laws. In *Stochastic integrals (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1980)*, volume 851 of *Lecture Notes in Math.*, pages 285–370. Springer, Berlin, 1981.

[57] V. Rivero. Recurrent extensions of self-similar Markov processes and Cramér's condition. *Bernoulli*, 11(3):471–509, 2005.

[58] V. Rivero. Tail asymptotics for exponential functionals of Lévy processes: the convolution equivalent case. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 48(4):1081–1102, 2012.

[59] K. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[60] K. Sato and M. Yamazato. On distribution functions of class L. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 43:273–308, 1978.

[61] Ken-iti Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1990 Japanese original, Revised by the author.

[62] René L. Schilling, Renming Song, and Zoran Vondraček. *Bernstein functions*, volume 37 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2010. Theory and applications.

[63] E. C. Titchmarsh. *The theory of functions*. Oxford University Press, Oxford, 1958. Reprint of the second (1939) edition.

[64] K. Urbanik. Infinite divisibility of some functionals on stochastic processes. *Probab. Math. Statist.*, 15:493–513, 1995.

[65] Vincent Vigon. Simplifiez vos Lévy en titillant la factorisation de Wiener-Hopf. *Thèse de doctorat de l'INSA de Rouen*, 2002.

[66] R. Webster. Log-convex solutions to the functional equation $f(x+1) = f(x)g(x)$: G-type functions. *Journal of Mathematical Analisys and Applications*, 209:605–623, 1997.