Научни приноси на статиите свързани с дисертационния труд

Младен С. Савов

Глава 1

Научни приноси на дисертационния труд

1.1 Обзор на основните приноси на дисертационния труд

Експоненциалният функционал на процеси на Леви е случайна величина, която играе важна роля в редица теоретични и приложни изследвания. Често пъти разбирането на нейните свойства носи допълнителна информация за изучавания обект. Поради тази причина експоненциалният функционал е бил изследван в редица разработки. Въпреки това, резултатите за тази случайна величина като цяло бяха твърде фрагментирани.

Най-общо, основният принос на дисертационния труд се състои в разработването на единна методология, която позволява глобалното изучаване на експоненциалните функционали на процеси на Леви. В Глава 5 от дисертацията е пресметната, с помощта на нов клас от специални функции, наречени функции на Бернщайн-Гама, трансформацията на Мелин на всеки експоненциален функционал. Така подробното изучаване на функциите на Бернщайн-Гама, направено в Глава 5, позволи на свой ред детайлното разбиране на трансформацията на Мелин на експоненциалния функционал. Тази информация, с помощта на аналитични и вероятностни средства, даде възможност обратната трансформация на Мелин, която реално пресмята закона на експоненциалния функционал, да бъде детайлно изучена. Така се добиват редица вероятностни свойства за разпределението на експоненциалния функционал на процеси на Леви като асимптотика, гладкост, факторизации, развиване в ред, пресмятане на моментите и прочее. Трябва да се отбележи, че за много от изучените свойства няма никакви допускания за прилежащия процес на Леви, докато за останалите има само необходими такива. Например асимптотичното поведение на логаритъма на опашката на експоненциалния функционал е разбрано в пълна общност, докато, с необходимото допускане асоциирания процес на Леви да не принадлежи на *слабо-решетъчния* клас, е изучено асимптотичното поведение на плъността и нейните производни. Последният резултат е достатъчно общ, за да обхване поне две статии, свързани с подобна асимптотика, публикувани в последните пет години. Трябва също така да се отбележи, че дисертационният труд има и принос към теорията на специалните функции чрез разработването на асимптотиката на Стирлинг за функциите на Бернщайн-Гама. Това, макар и не трудно, е полезно, тъй като позволява асимптотичните свойства на някои известни специални функции да се изведат без допълнителен труд или разглеждане на частен случай.

Основният научен принос на Глави 2 и 3 е факторизацията на експоненциалния функционал на процеси на Леви, която е добита с някои допускания. Във връзка с приносите на Глава 5, които включват и най-общи факторизации на експоненциалния функционал на процеси на Леви, достиженията на Глави 2 и 3 могат да се разглеждат като подмножество на резултатите на Глава 5. Въпреки това, тези разработки бяха ключови за разбирането на проблема и най-вече за предугаждането на връзката между трансформацията на Мелин на експоненциалния функционал и функциите на Бернщайн-Гама. Затова те играят и ключова роля в развитието и реализацията на този дисертационен труд.

1.2 Някои основни означения и количества

В тази глава ще разгледаме основните научни приноси на дисертационния труд. Целта е да се представят ключовите резултати и техната роля за развитието на теорията на експоненциалните функционали на процеси на Леви. Първо ще припомним някои основни понятия и означения.

Означаваме с ξ реален процес на Леви, който е еднозначно определен от своята експонента на Леви-Хинчин чрез връзката

$$\Psi(z) = \log \mathbb{E}\left[e^{z\xi_1}\right] = cz + \frac{\sigma^2}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{zr} - 1 - zr\mathbb{I}_{\{|r|\leq 1\}}\right) \Pi(dr) - q,\ z \in i\mathbb{R}. \quad (1.2.1)$$

Припомняме, че $q \geq 0$ е скоростта на убиване на процеса на Леви ξ, т.е. $\xi_s = \infty, s \geq \mathbf{e}_q$ и $\mathbf{e}_q \sim Exp(q)$ е независима от ξ. Когато $q = 0$, тогава $\mathbf{e}_0 = \infty$ почти сигурно и процесът е консервативен.

Припомняме, че $\phi \in \mathcal{B}$ е функция на Бернщайн тогава и само тогава когато

$$\phi(z) = \log \mathbb{E}\left[e^{-z\xi_1}\right] = \phi(0) + dz + \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-zy}\right) \mu(dy),\ \mathtt{Re}(z) \geq 0$$

и ξ е ненамаляващ процес на Леви или субординатор. Тогава бележитата факторизация на Винер-Хопф е в сила за всяко Ψ и има вида

$$\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z),\ z \in i\mathbb{R}, \quad (1.2.2)$$

където $\phi_\pm \in \mathcal{B}$ са свързани с процесите на минимум и максимум на процеса на Леви ξ, т.е. $H^\pm$, виж Секция 1.5.3 на автореферата.

Използваме нотацията

$$I_\Psi = \int_0^\infty e^{-\xi_s} ds,$$

за да означим експоненциалния функционал на процес на Леви ξ с експонента на Леви-Хинчин Ψ, и приемаме неявно, че когато разглеждаме I_Ψ, работим с такива Ψ, че $I_\Psi < \infty$ почти сигурно.

1.3 Приноси към Глави 2 и 3 от дисертационния труд

Основният принос на тези две глави е резултатът, че, когато мярката на Леви Π в (1.2.1) е такава, че $\Pi_-(dr) = \Pi(-dr)\mathbb{I}_{\{r>0\}} = \pi_-(r)dr\mathbb{I}_{\{r>0\}}$ и π_- е ненарастваща върху $(0,\infty)$, то

$$I_\Psi \stackrel{d}{=} I_{\phi_+} \times I_\psi, \tag{1.3.1}$$

където I_{ϕ_+}, I_ψ са независими и

$$I_{\phi_+} = \int_0^\infty e^{-H_s^+} ds,\ I_\psi = \int_0^\infty e^{-\eta_s} ds,$$

където H_s^+ е процесът на максимум на ξ и

$$\psi(s) = s\phi_-(s)$$

е експонента на Леви-Хинчин на процес на Леви η, който не притежава скокове нагоре. Случайните величини I_{ϕ_+}, I_ψ, бидейки свързани с по-прости процеси на Леви, са по-лесни за разбиране. Това позволява за лесното извеждане на редица свойства на закона на I_Ψ. Може би най-забележителният принос се състои в това, че работата [24] публикувана в Annals of Probability следва незабавно от Следствие 2.2.4 от автореферата и се обобщава значително неговото Следствие 3.2.4.(б). също така с помощта на (1.3.1) могат да се добият и нови свойства на плътността на максимум на стабилен процес на Леви с индекс $\alpha \in (0,1]$, виж Следствие 3.2.4(а) от автореферата.

От теоретична гледна точка релация (1.3.1) показва, че факторизацията на Винер-Хопф на Ψ в (1.2.2) се пренася до факторизация на Винер-Хопф на I_Ψ или (1.3.1). Това стимулира и изледванията, които доведоха до резултатите в Глава 4.

1.4 Приноси към Глави 3 и 4 от дисертационния труд

Ще разгледаме само най-важните приноси.

1.4.1 Приноси към функциите на Бернщайн-Гама от Глава 5, Секция 5.3.1 от дисертационния труд

Първият основен принос е в добиването на следните резултати:

(1) за всяко $\phi \in \mathcal{B}$, функцията

$$W_\phi(z) = \frac{e^{-\gamma_\phi z}}{\phi(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(k)}{\phi(k+z)} e^{\frac{\phi'(k)}{\phi(k)} z} \tag{1.4.1}$$

е функция на Бернщайн-Гама и като такава решава рекурентното уравнение

$$W_\phi(z+1) = \phi(z) W_\phi(z), \ \mathtt{Re}(z) > 0; \quad W_\phi(1) = 1; \tag{1.4.2}$$

(2) W_ϕ е трансформация на Мелин на положителна случайна величина;

(3) извеждането на свойствата на W_ϕ разглеждана като мероморфна функция.

Тези резултати са част от Теорема 4.2.2 от автореферата и допълват някои резултати от литературата, които разглеждат W_ϕ само като функция върху $(0,\infty)$, виж [2, 14, 21, 28]

Вторият основен принос е добиването на асимптотиката на Стирлинг за количеството $|W_\phi(z)|$, $z \in \mathtt{Re}(z) > 0$. С $z = a + ib$ от Теорема 4.2.4(4.2.16) от автореферата имаме, че

$$|W_\phi(z)| = \frac{\sqrt{\phi(1)}}{\sqrt{\phi(a)\phi(1+a)|\phi(z)|}} e^{G_\phi(a) - A_\phi(z)} e^{-E_\phi(z) - R_\phi(a)}, \tag{1.4.3}$$

с допълнителната информация, че:

(1) функцията

$$A_\phi(z) = A_\phi(a+ib) = \int_0^{|b|} \arg \phi(a+iu)\, du$$

свързва геометрията на множеството $\phi\left(\mathbb{C}_{(0,\infty)}\right)$ със скоростта на намаляване на $|W_\phi(z)|$ когато $|\mathtt{Im}(z)| = |b|$ клони към безкрайност;

(2) функцията

$$G_\phi(a) = \int_1^{1+a} \ln \phi(u) du$$

изчислява асимптотиката на $|W_\phi(z)|$ когато $\mathtt{Re}(z) = a$ клони към безкрайност;

(3) изразът $e^{-E_\phi(z) - R_\phi(a)}$ е равномерно ограничен за целия клас от функции на Бернщайн и изчислява грешката на приближение.

Релацията (1.4.3) е универсална за всички $\phi \in \mathcal{B}$ и като такава обхваща функции като Гама функцията и Гама функцията на Барнс (двойната Гама функция), виж [4, 5]. Така, основни количества, свързани с асимптотиката на такива функции, могат да се добият директно от (1.4.3) без да се разглежда случай по случай.

1.4.2 Приноси към трансформацията на Мелин на експоненциалния функционал на процеси на Леви

Припомняме, че трансформацията на Мелин на I_Ψ се дефинира формално чрез равенството $\mathcal{M}_{I_\Psi}(z+1) = \mathbb{E}\left[I_\Psi^z\right]$. Също така означаваме с $\overline{\mathcal{N}}$ класа на всички негативно дефинитни функции Ψ или еквивалентно на всички експоненти на Леви-Хинчин на процеси на Леви. Припомняме, че $\mathcal{N} \subsetneq \overline{\mathcal{N}}$ е множеството от всички Ψ такива, че $I_\Psi < \infty$ почти сигурно.

Първият принос е решаването за всяко $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}$ на уравнението

$$\mathcal{M}_\Psi(z+1) = \frac{-z}{\Psi(-z)}\mathcal{M}_\Psi(z), \tag{1.4.4}$$

което е дефинирано поне върху $i\mathbb{R} \setminus (\mathcal{Z}_0(\Psi) \cup \{0\})$ и където сме поставили $\mathcal{Z}_0(\Psi) = \{z \in i\mathbb{R} : \Psi(-z) = 0\}$. Теорема 4.3.1 от автореферата показва, че

$$\mathcal{M}_\Psi(z) = \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_+}(z)} W_{\phi_-}(1-z), \; z \in \mathbb{C}_{(0,1)}, \tag{1.4.5}$$

където $\phi_\pm \in \mathcal{B}$ са факторите на Винер-Хопф на Ψ, виж (1.2.2). Нещо повече, в Теорема 4.3.1 от автореферата основните свойства на $\mathcal{M}_\Psi$ като мероморфна функция са също изведени.

Вторият основен принос е изчисляването на скоростта на полиномно намаляване към нула на количеството $|\mathcal{M}_\Psi(a+ib)|$ за фиксирано a и $|b| \to \infty$. По-точно, Теорема 4.3.4 от автореферата дава, че

$$\begin{aligned}
&\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta |\mathcal{M}_\Psi(a+ib)| = 0 \quad \text{ако } \beta < \mathtt{N}_\Psi \\
&\lim_{|b|\to\infty} |b|^\beta |\mathcal{M}_\Psi(a+ib)| = \infty \text{ ако } \beta > \mathtt{N}_\Psi,
\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

където

$$\mathtt{N}_\Psi = \begin{cases} \frac{v_-(0^+)}{\phi_-(0)+\bar{\mu}_-0} + \frac{\phi_-(0)+\bar{\mu}_+0}{d_+} < \infty & \text{ако } d_+ > 0, d_- = 0 \text{ и } \overline{\overline{\Pi}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(dy) < \infty, \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1.4.7}$$

Отбелязваме, че $\mathtt{N}_\Psi \neq \infty$ тогава и само тогава когато асоциираният процес на Леви е всъщност сложен Поасонов процес с положителен дрифт.

Третият основен принос е в добиването, че за всяко $\Psi \in \mathcal{N}$ е в сила, че

$$\mathbb{E}\left[I_\Psi^{z-1}\right] = \mathcal{M}_{I_\Psi}(z) = \phi_-(0)\mathcal{M}_\Psi(z), \; z \in \mathbb{C}_{(0,1)},$$

виж Теорема 4.4.1 от автореферата. Това практически извежда в явен вид формата на трансформацията на Мелин на всеки експоненциален функционал. Преди тази разработка $\mathcal{M}_{I_\Psi}$ бе изчислена само в някои частни случаи, виж [13, 17, 18]. В тези статии скоростта на сходимост към нулата на количеството $|\mathcal{M}_{I_\Psi}(a+ib)|$ е също установена благодарение на специалната структура на $\mathcal{M}_{I_\Psi}$. Не са ни известни резултати в такава общност като тези, съдържащи се в (1.4.6).

1.4.3 Приноси към свойствата на I_Ψ

Ще разгледаме само най-значимите приноси към разбирането на свойствата на случайната величина I_Ψ.

1.4.3.1 Голяма асимптотика

Нека $\overline{F}_\Psi(x) = \mathbb{P}(I_\Psi > x)$, $x > 0$, и $f_\Psi(x) = \mathbb{P}(I_\Psi \in dx)/dx$. Тогава с минималното ограничение Ψ да не принадлежи към *слабо-решетъчния* клас, получаваме, че за всяко $n \leq \lceil \mathtt{N}_\Psi \rceil - 2$, виж (1.4.7) и Теорема 4.4.5 от автореферата,

$$f_\Psi^{(n)}(x) \stackrel{\infty}{\sim} (-1)^n \frac{\phi_-(0)\Gamma(n+1-\mathfrak{u}_-)\,W_{\phi_-}(1+\mathfrak{u}_-)}{\phi'_-(\mathfrak{u}_-{}^+)\,W_{\phi_+}(1-\mathfrak{u}_-)} x^{-n-1+\mathfrak{u}_-}. \tag{1.4.8}$$

Релацията (1.4.8) възстановява моментално основните приноси на статиите [11, 16], публикувани в Annals of Probability, и добива асимптотичните свойства на f_Ψ и нейните производни, които се намират в [12, 17, 18, 24]. Асимптотиката (1.4.8) всъщност е доста по-обща, тъй като (1.4.8) е следствие от глобалната аналитична структура на Ψ и не предполага налагането на специфични свойства на Ψ. Тя също потвърждава хипотезата, че случайните величини I_Ψ са много по-регулярни от прилежащите им процеси на Леви.

Друг принос на Теорема 4.4.5 от автореферата е следната логаритмична асимптотика

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log \overline{F}_\Psi(x)}{\log x} = \mathfrak{a}_- \in [-\infty, 0). \tag{1.4.9}$$

Този резултат е напълно общ и подобрява значително [3, Лема 2], която само дава условия, при които границата (1.4.9) не е $-\infty$.

1.4.3.2 Гладкост на f_Ψ

Плътността f_Ψ се знае, че съществува от статията [6]. Също така работите [8, 23] разискват някои свойства на f_Ψ, свързани с нейната гладкост. За специални случаи може да се докаже, че f_Ψ безкрайно диференцируема, виж [12, 17, 18, 24].

Използвайки скоростта на полиномна сходимост към нулата, изчислена в (1.4.7), Теорема 4.4.1(3) от автореферата установява, че f_Ψ е поне $\lceil \mathtt{N}_\Psi \rceil - 2$ пъти непрекъснато диференцируема. Понеже почти винаги $\mathtt{N}_\Psi = \infty$, заключаваме, че тогава f_Ψ е безкрайно диференцируема. Пресмятането на броя на производни, които f_Ψ притежава, е сходно с работата на Сато и Ямазато върху себеподбните разпределения, виж [27]. Според нас, обаче, контекстът в този дисертационен труд е по-общ и по-труден.

1.4.3.3 Факторизации на I_Ψ

Теорема 4.4.10 установява, че в абсолютна общност,

$$I_\Psi \stackrel{d}{=} I_{\phi_+} \times X_{\phi_-} \stackrel{d}{=} \bigotimes_{k=0}^{\infty} \left(C_k \mathfrak{B}_k X_\Psi \times \mathfrak{B}_{-k} Y_\Psi\right), \tag{1.4.10}$$

където $\times$ означава произведение на независими случайни величини. Вероятностните мерки на X_Ψ, Y_Ψ се задават чрез

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_\Psi \in dx\right) &= \frac{1}{\phi_+(1)}\left(\bar{\mu}_+(-\ln x)dx + \phi_+(0)dx + d_+\delta_1(dx)\right),\ x \in (0,1)\\ \mathbb{P}\left(Y_\Psi \in dx\right) &= \phi_-(0)\Upsilon_-(dx),\ x > 1,\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

където $\Upsilon_-(dv) = U_-\left(d\ln(v)\right),\ v > 1$, е образът на потенциалната мярка U_- чрез изображението $y \mapsto \ln y$,

$$C_0 = e^{\gamma_{\phi_+}+\gamma_{\phi_-}-\gamma+1-\frac{\phi'_+(1)}{\phi_+(1)}}, C_k = e^{\frac{1}{k+1}-\frac{\phi'_+(k+1)}{\phi_+(k+1)}-\frac{\phi'_-(k)}{\phi_-(k)}}, k = 1, 2, \dots,$$

където за всяко цяло $k, \mathfrak{B}_k X$ е случайната величина дефинирана чрез равенството

$$\mathbb{E}\left[f(\mathfrak{B}_k X)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[X^k f(X)\right]}{\mathbb{E}[X^k]}.$$

Факторизацията (1.4.10) е напълно обща и като такава отговаря изцяло на въпроса с намирането на разлагане на I_Ψ. Всъщност, факторизацията в безкрайно произведение, е била известна в литературата само когато Ψ е експонента на Леви-Хинчин на субординатор, виж [2].

1.4.3.4 Асимптотично поведение на $I_\Psi(t) = \int_0^t e^{-\xi_s}ds$ при условие, че $I_\Psi = \infty$

Ако $I_\Psi = \infty$ почти сигурно, т.е. $\Psi \in \overline{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{N}$, тогава може да се изучават свойствата на $I_\Psi(t) = \int_0^t e^{-\xi_s}ds$, когато t клони към безкрайност. Основният принос се съдържа в Теорема 4.4.12 от автореферата. Там се изучават вероятносните мерки $\mathbb{P}\left(I_\Psi(t) \in dx\right)$ при наличност на условието на Спитцер за асоциирания процес на Леви. Основният резултат гласи, че

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[I_\Psi^{-a}(t) f\left(I_\Psi(t)\right)\right]}{\kappa_-\left(\frac{1}{t}\right)} = \int_0^\infty f(x)\vartheta_a(dx), \tag{1.4.12}$$

за всяко $a \in (0, 1-\mathfrak{a}_+)$ и всяка непрекъсната и ограничена функция f. Отбелязваме, че ϑ_a е крайна положителна мярка на $(0,\infty)$ и $\kappa_-(r) = \phi^r_-(0)$, където $\Psi^r(z) = \Psi(z) - r = -\phi^r_+(-z)\phi^r_-(z)$.

Резултатът (1.4.12) е сходен с някои резултати, свързани със случайното блуждаене. Ако $I_S(n) = \sum_{j=0}^n e^{-S_j}$ и $S = \left(S_j\right)_{j\geq 0}$ е рекурентно случайно блуждаене, във връзка с разклоняващи се процеси в случайна среда, релация (1.4.12) е добита за $I_S(n)$, при n клонящо към безкрайност, виж [1, 15]. Използвайки дискретизация на процеса на Леви, авторите на [20, 22] добиват границата (1.4.12). Обаче те разискват случая когато $\mathbb{E}\left[\xi_1^2\right] < \infty$, ξ притежава експоненциални моменти и работят с много по-ограничен клас от функции f. Тук ние нямаме такива ограничения, което се дължи на различната методология.

1.4.4 Други приноси

Резултатите представени в дисертационния труд имат и други приложения. В някои настоящи разработки тези приноси играят основна роля в развиването на спектралната теория на някои не-самоспрегнати Марковски процеси. Заинтересованият читател може да прегледа [26].

Глава 2

Научни приноси на статии приложени към дисертационния труд

1. Savov, M. (2009) "*Small time two-sided LIL behavior for Levy processes at zero*", *Probab. Theory and Related Fields* **144, No.1-2, 79–98, IF: 1.39**

За даден процес на Леви X с основни параметри (σ^2, γ, Π) $\big(\sigma^2$ - Браунов коефициент, γ - дрифт и Π - $sigma-$крайната мярка, описваща скоковете на процеса$\big)$ и функция $b : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ с някои естествени, но слаби ограничения, основният резултат на статията е семейство от интегрални критерии $I(a) := I(a; b, \sigma, \gamma, \Pi),\ > 0$, за които е вярно, че

$$\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} = \inf\{c : I(c) < \infty\} \in [0, \infty] \iff \int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt < \infty$$

$$\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} = \infty \text{ , ако } \int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt = \infty.$$

Този резултат има две основни предимства: той е общ и се прилага към огромен клас от функции b и $I(a)$ зависи само от (σ^2, γ, Π). Така фундаменталният вероятностен проблем за изчислението на $\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} \in [0, \infty]$ се свежда до аналитичната задача да се пресметне $I(a)$ и $\int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt$. Така за дадена детерминистична функция b можем да установим директно как X расте спрямо b.

Нещо повече, използвайки

$$\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} = \inf\{a : I(a) < \infty\} \in [0, \infty] \iff \int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt < \infty$$

ние можем да конструираме функцията $b^*(t)$ така че $\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} = 1$. Това става чрез избор на $b(t)$, така че $\inf\{a : I(a) < \infty\} = 1$. За съжаление това не е валидно за всеки процес X тъй като понякога $\int_0^1 \overline{\Pi}(b^*(t))dt = \infty$. Намирането в явен вид на ръста b^*, така че $\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b^*(t)} = 1$, е все още отворен проблем, макар че съществуват НДУ за неговото съществуване.

2. Savov, M. (2010) "*Small time one-sided LIL behaviour for Lévy processes at zero*", *J. of Theoret. Probab.* **23, No.1, 209–236, IF: 0.60**

Естественото продължение на проблемите в предходната статия е да се изследва количеството

$$L(b) := \limsup_{t \to 0} \frac{X_t}{b(t)} \in [0, \infty]$$

или *едностранния закон за повторния логаритъм* за процеси на Леви X. В тази статия ние постигаме следните резултати, всичките от които са нови, тъй като се отнасят за поведението, когато $t \to 0$:

I Дефинираме конкретна функция b_0 с помощта на на мярката на Леви Π и доказваме, че

$$\limsup_{t \to 0} \frac{X_t}{b_0(t)} \in [1, 1.8] \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^1 \Pi\left(\{b_0(t), \infty\}\right) dt < \infty.$$

II Тъй като b_0 не винаги е правилната функция, която да описва ръста на X, виж I, то ние разработваме интегрален критерии, който за произволна функция $b(t)$ (с някои дребни стандартни ограничения), ни показва дали $L(b) = 0$, $L(b) \in (0, \infty)$ или $L(b) = \infty$.

Основните трудности при тези задачи е да се изработи техника, специфична за процесите на Леви, тъй като поведението когато $t \to 0$ няма аналог при случайното блуждаене. Последното дава добри индикации и методи за свойствата на процесите на Леви когато $t \to \infty$ чрез различни влагания. Пример количеството $(X_n)_{n \geq 1} = (X_1 + (X_2 - X_1) + \cdots + (X_n - X_{n-1}))_{n \geq 1}$ дефинира случайно блуждаене.

По принцип *едностранния закон за повторния логаритъм* е по-сложен от задачата разгледана в статия 2 и това се отразява в самите резултати. Те са по-неточни и не позволяват точнито изчисление на $L(b)$.

2. Doney, R. and Savov, M. (2010) "*The asymptotic behavior of densities related to the supremum of a stable process*", *Ann. of Probab.* **38, No.1, 316–326,IF: 1.47**

Нека X е устойчив процес на Леви с индекс $\alpha \in (0, 2)$ и $S_1 = \sup_{s \leq 1} X_s$. Ако $f(x) = \mathbb{P}(S_1 \in dx)/dx, x > 0$, то основен и труден въпрос е да се определи асимптотичното поведение на $f(x), x \to 0$, $x \to \infty$. Знае се поведението на $\mathbb{P}(S_1 > x) \sim A\alpha^{-1}x^{-\alpha}, x \to \infty$ и $\mathbb{P}(S_1 \leq x) \sim Bx^{\alpha\rho}$, където $\rho = \mathbb{P}(X_1 > 0)$ е коефициента на позитивност. Тези резултати са класически приложения на Тауберовите теореми. Производната $f(x)$ е много по-трудна за изучаване. Използвайки теория на екскурзиите (excursion theory) на процеса извън минимума и максимума, ние добихме уравнения, представящи $f(x)$ чрез основни количеưства от теория на екскурзиите и оттам асимтотиката.

Тази работа за момента 2008-2010 беше в основата на поредица от изследвания на максимума на общия процес на Леви и по-задълбочени разработки върху S_1 за устойчиви процеси на Леви. Броят на цитатите е атестат за това.

Трябва да се отбележи, че използвайки дълбок комплексен анализ [16] успява да добие асимптотично развитие в ред на $f(x)$ и дори за клас от параметри α - да добие развитие в ред на $f(x)$. Тези резултати са естествения завършек на поредица от изследвания. Нашият вероятностен метод по същността си няма силата на комплексния анализ в случая, но е доста по-общ. Това се вижда от разработките на [9] и [10], които обобщават и използват нашата методология и където комплексният анализ е безсилен, предвид неявната форма на много количества от теория на процесите на Леви.

3. Doering, L. and Savov, M. (2010) "*Application of renewal theorems to exponential moments of local times*", *Electron. Comm. in Probab.* **38, No.15, 263–269, IF: 0.56**

Тази кратка статия използва стандартни резултати, за да подобри асимптотични резултати за трансформацията на Лаплас на времето на престой в дадена точка на даден Марковски процес. Ако L_t^i е акумулираното посещение на състояние i, започвайки от i, то ние разглеждаме $\mathbb{E}\left[e^{\gamma L_t^i}\right]$ за $\gamma \geq 0$ и показваме, че в зависимост от γ асимптотиката на $\mathbb{E}\left[e^{\gamma L_t^i}\right]$ при $t \to \infty$ може да се пресметне с помощта на вероятностите на предход $p_s(i,i)$.

Резултатите илюстрират силата на теория на възстановяването за доказването на нови или подобряването известни резултати. Основната цел на публикацията е популяризирането на теория на възстановяването за опростяване на доказателствата на редица проблеми, които иначе използват спектрална теория.

5. Chan, T., Kyprianou A. and Savov, M. (2011) "*Smoothness of scale functions for spectrally negative Lévy processes*", *Probab. Theory and Related Fields* **150, 691–708, IF: 1.53**

Научни приноси: Нека както е обикновено X е процес на Леви. Нека допуснем, че X има само отрицателни скокове. Тогава казваме, че процесът е спектрално-отрицателен процес на Леви. Тъй като този процес има скокове само когато се движи надолу, то доста количества имат полуявен вид. В основата на много сметки стои така наречената *скалираща функция* (scale function). Вероятностно ролята на тази функция най-добре се вижда в съотношението

$$\mathbb{P}_x\left(\tau_{(a,\infty)} < \tau_{(-\infty,0)}\right) = \frac{W(x)}{W(a)},$$

където $\tau_B = \inf\{t > 0 : X_t \in B\}$ и $a \geq x \geq 0$. Тоест функцията описва вероятността на процеса X, стартиран от позиция x, да премине a преди да премине под 0.

Функцията W присъства в много други количества и съотношения. Нейните свойства са от интерес не само за теорията, но и за приложенията, особено за теория на застраховането, където случайните процеси на приходи и разходи естествено се моделират със спектрално-отрицателни процеси на Леви.

За да се използва в редица изследвания е необходимо да се знае гладкостта на функцията $W : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$. В този труд ние изледваме гладкостта на функцията в зависимост от трите основни характеристики на процеса на Леви - (σ^2, γ, Π). Почти изчерпателно показваме, че

$$W \in C^{n+3}([0, \infty)) \iff \Pi(\{-\infty, -x)\} \in C^n([0, \infty)), \text{ ако } \sigma^2 > 0,$$

включително и, че винаги $W \in C^2([0, \infty))$, когато $\sigma^2 > 0$. Също така разсикваме и случая когато $\Pi(\{-\infty, 0\}) < \infty$ и показваме, че при някои допълнителни условия

$$W \in C^{n+1}([0, \infty)) \iff \Pi(\{-\infty, -x\}) \in C^n([0, \infty)) \text{ ако } \sigma^2 = 0,\ \Pi(\{-\infty, 0\}) < \infty.$$

Методът ни се базира на факта, че W удовлетворява уравнение на Волтера от втори вид базирано на мярката на Леви П. Макар и добре изучени, защото решенията на тези уравнения се развиват в ред на фон Нойман, когато $\Pi(\{-\infty, 0\}) = \infty$, изледването на този ред е технически нелека задача. Използвайки различни основни техники от анализа, ние получаваме горните резултати.

Когато $\sigma^2 = 0, \Pi(\{-\infty, 0\}) = \infty$, уравненията на Волтера са от първи вид и изледването им е доста по-трудно. За този случай нямаме добити резултати и съществуват няколко хипотези за зависимостта на гладкостта на W от гладкостта на П.

6. Savov, M. (2014) "*On the range of subordinators*", *Electron. Commun. Probab.***19, 1–10, IF: 0.49**

Нека X е ненамаляващ процес на Леви. Нека с $A = \{X_s, s \in [0, 1]\}$ означим образът на интервала $[0, 1]$ чрез изображението $s : [0, 1] \mapsto X_s$. Нека за всяко $\delta > 0$ да означим с $N(1, \delta)$ минималният брой интервали с дължина не по-голяма от δ необходими за покриването на множеството A. Тогава ако означим с

$$U(x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_s \leq x)\, ds,$$

потенциалната функция на X, основният резултат на тази кратка бележка е

$$\lim_{\delta \to 0} U(\delta) N(1, \delta) \stackrel{\text{п.с.}}{=} 1.$$

Този резултат е много по-точен от предходните резултати, които даваха само частична информация за растежа на $\ln N(1, \delta)$, виж [7, Глава 5].

7. Kuznetsov A., Pardo J.C. and Savov, M. (2012) "*Distributional properties of exponential functionals of Lévy processes*", *Electron. J. of Probab.***17, No.8 1–35, IF: 0.785;**

При зададени два независими процеса на Леви с крайни първи моменти, да кажем ξ, η, се разглежда количеството

$$I(\xi,\eta) = \int_0^\infty e^{\xi_{s-}} d\eta_s.$$

За крайността на $I(\xi,\eta)$ допълнително се допуска, че $\mathbb{E}[\xi_1] < 0$.

Първият принос е добиването на диференциално-интегрално уравнение, чието решение се дава от плътността на мярката $\mathbb{P}(I(\xi,\eta) \in dx)\,\mathbb{I}_{\{x>0\}}$, виж [19, Теорема 1]. Това уравнение е използвано за добиването на някои свойства на плътността на $I(\xi,\eta)$.

Вторият принос засяга частния случай, когато $\eta_s = \mu s + \sigma B_s$, т.е. η е Брауново движение с дрифт. Тогава ако $\mathcal{M}_{\mu,\sigma}(z+1) = \mathbb{E}\left[I^z(\xi,\eta)\mathbb{I}_{\{I(\xi,\eta)>0\}}\right]$ е изведено следното рекурентно уравнение

$$\frac{\psi(s)}{s}\mathcal{M}_{\mu,\sigma}(z+1) + \mu\mathcal{M}_{\mu,\sigma}(z) + \frac{\sigma^2}{2}(z-1)\mathcal{M}_{\mu,\sigma}(z-1) = 0,$$

което е валидно поне за всички z такива, че $\mathtt{Re}(z) > 0$ и $\psi(\mathtt{Re}(z)) < 0$, където ψ е експонентата на Леви-Хинчин на ξ, виж [19, Теорема 2]. Това уравнение е използвано за добиването на редица свойства на плътността на $\mathbb{P}(I(\xi,\eta) \in dx)\,\mathbb{I}_{\{x>0\}}$.

8. Patie, P. and Savov, M. (2016+) "*Cauchy problem of the non-self-adjoint Gauss-Laguerre semigroups and uniform bounds of generalized Laguerre polynomials*", *Journal of Spectral Theory* **19, accepted, IF: 1.21**

Нека $\alpha \in (0,1)$ и $\beta \in \left[\frac{1}{\alpha}-1,\infty\right)$. Диференциално интегралният оператор

$$\mathbf{L}_{\alpha,\beta}\, f(x) = \left(\frac{\Gamma(\alpha\beta+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha\beta+1)} - x\right) f'(x) + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} x \int_0^1 f''(xy) g_{\alpha,\beta}(y) dy,$$

където

$$g_{\alpha,\beta}(y) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta+\frac{1}{\alpha}+1} y^{\beta+\frac{1}{\alpha}+1}\, {}_2F_1(\alpha(\beta+1)+1, \alpha+1; \alpha(\beta+1)+2; y^{\frac{1}{\alpha}})$$

и ${}_2F_1$ е Гаусовата хипер-геометрична функция, е всъщност инфинитезимален оператор на Марковска полугрупа върху подходяща L^2 пространство, виж [25, Теорема 1]. Ако означим тази полугрупа с $(P_t)_{t\geq 0}$, то основният резултат е спектралното разлгане на тази полугрупа, виж [25, Теорема 1.4]. Това е основна стъпка в изучаването на положителните само-подобни Марковски процеси разглеждани в следващата статия по-долу.

9. Patie, P. and Savov, M. (2016+) "*Spectral expansion of non-self-adjoint generalized Laguerre semigroups*"

В този труд се дефинират обобщените полугрупи на Лагер. Знае се, че класическата полугрупа на Лагер е само-спрегната и като такава притежава спектрално разлгане. Ако означим последната с $Q = (Q_t)_{t\geq 0}$ и обобщените полугрупи с $P = (P_t)_{t\geq 0}$, то първият основен резултат е, че за всяко P съществува преплитане

$$\Lambda Q_t = P_t \Lambda,$$

валидно за всяко $t \geq 0$. Това позволява да добием в много ситуации спектралните разлагания на полугрупата P чрез спектралното разлагане на полугрупата Q, виж [26, Теорема 1.11]. Основната трудност идва от факта, че операторът Λ не е едно-към-едно, или еквивалентно не е ограничен отдолу. В крайна сметка тази трудност е преодоляна, но затова се изисква над 150 страници труд.

Библиография

[1] V. I. Afanasyev, J. Geiger, G. Kersting, and V. A. Vatutin. Criticality for branching processes in random environment. *Ann. Probab.*, 33(2):645–673, 2005.

[2] L. Alili, W. Jedidi, and V. Rivero. On exponential functionals, harmonic potential measures and undershoots of subordinators. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 11(1):711–735, 2014.

[3] J. Arista and V. Rivero. Implicit renewal theory for exponential functionals of Lévy processes. *http://arxiv.org/abs/1510.01809*, 2015.

[4] E. W. Barnes. The Genesis of the Double Gamma Functions. *Proc. London Math. Soc.*, S1-31(1):358.

[5] E.W. Barnes. The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series. *Proc. London Math. Soc.*, 5(2):59–116, 1907.

[6] J. Bertoin, A. Lindner, and R. Maller. On continuity properties of the law of integrals of Lévy processes. In *Séminaire de probabilités XLI*, volume 1934 of *Lecture Notes in Math.*, pages 137–159. Springer, Berlin, 2008.

[7] Jean Bertoin. Subordinators: examples and applications. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1997)*, volume 1717 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–91. Springer, Berlin, 1999.

[8] Ph. Carmona, F. Petit, and M. Yor. On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. *In M. Yor (ed.) Exponential functionals and principal values related to Brownian motion. Biblioteca de la Rev. Mat. Iberoamericana*, pages 73–121, 1997.

[9] L. Chaumont. On the law of the supremum of Lévy processes. *Ann. Probab.*, 41(3A):1191–1217, 2013.

[10] Loïc Chaumont and Jacek Małecki. On the asymptotic behavior of the density of the supremum of Lévy processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 52(3):1178–1195, 2016.

[11] R. A. Doney and M. S. Savov. The asymptotic behavior of densities related to the supremum of a stable process. *Ann. Probab.*, 38(1):316–326, 2010.

[12] D. Hackmann and A. Kuznetsov. A note on the series representation for the density of the supremum of a stable process. *Electron. Commun. Probab.*, 18:no. 42, 5, 2013.

[13] D. Hackmann and A. Kuznetsov. Asian options and meromorphic Lévy processes. *Finance Stoch.*, 18(4):825–844, 2014.

[14] F. Hirsch and M. Yor. On the Mellin transforms of the perpetuity and the remainder variables associated to a subordinator. *Bernoulli*, 19(4):1350–1377, 2013.

[15] M. V. Kozlov. The asymptotic behavior of the probability of non-extinction of critical branching processes in a random environment. *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, 21(4):813–825, 1976.

[16] A. Kuznetsov. On extrema of stable processes. *Ann. Probab.*, 39(3):1027–1060, 2011.

[17] A. Kuznetsov. On the distribution of exponential functionals for Lévy processes with jumps of rational transform. *Stochastic Process. Appl.*, 122(2):654–663, 2012.

[18] A. Kuznetsov and J.C. Pardo. Fluctuations of stable processes and exponential functionals of hypergeometric Lévy processes. *Acta Aplicandae Mathematicae, to appear*, 2012.

[19] A. Kuznetsov, J.C. Pardo, and M. Savov. Distributional properties of exponential functionals of Lévy processes. *Electron. J. Probab.*, 17(8):1–35, 2012.

[20] Z. Li and W. Xu. Asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. *http://arxiv.org/abs/1601.02363*, 2016.

[21] K. Maulik and B. Zwart. Tail asymptotics for exponential functionals of Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.*, 116:156–177, 2006.

[22] S. Palau, J.C. Pardo, and C. Smadi. Asymptotic behaviour of exponential functionals of Lévy processes with applications to random processes in random environments. *http://arxiv.org/abs/1601.03463.*

[23] J. C. Pardo, V. Rivero, and K. van Schaik. On the density of exponential functionals of Lévy processes. *Bernoulli*, 19(5A):1938–1964, 2013.

[24] P. Patie. Law of the absorption time of some positive self-similar Markov processes. *Ann. Probab.*, 40(2):765–787, 2012.

[25] P. Patie and M. Savov. Cauchy Problem of the non-self-adjoint Gauss-Laguerre semigroups and uniform bounds of generalized Laguerre polynomials. *J. Spectr. Theory, to appear*, page 33p., 2015.

[26] P. Patie and M. Savov. Spectral expansion of non-self-adjoint generalized Laguerre semigroups. *Submitted*, page 162p. (current version), 2016.

[27] K. Sato and M. Yamazato. On distribution functions of class L. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 43:273–308, 1978.

[28] R. Webster. Log-convex solutions to the functional equation $f(x+1) = f(x)g(x)$: G-type functions. *Journal of Mathematical Analisys and Applications*, 209:605–623, 1997.