

СЕРВИС НАЦИОНАЛЬНИЙ СЛУЖБ  
ПО УЧЕБНО-НАУЧНОЙ РАБОТЕ  
И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ

848

ДИСЕРТАЦИЯ

1998

СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ  
по ИНФОРМАТИКА и ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА при ВАК

---

Росица Спасова Кузманова–Маринова

**Диференчни схеми  
на векторно разцепване на оператора  
за уравненията на Навие–Стокс**

**ДИСЕРТАЦИЯ**

за присъждане на образователната и научна степен  
„ДОКТОР“

*Научен консултант:*

проф. д.н. ХРИСТО ИВАНОВ ХРИСТОВ

Варна, 1998 г.

# Съдържание

Предговор	1
<b>1 Въведение</b>	<b>4</b>
1.1 Уравнения на Навие–Стокс . . . . .	4
1.2 За съществуването и единствеността на решения на уравненията на Навие–Стокс . . . . .	6
1.3 Проблеми при численото решаване на стационарните уравнения на Навие–Стокс при големи числа на Рейнолдс . . . . .	8
1.3.1 Проблеми, свързани с неустойчивостта на задачата . . . . .	8
1.3.2 Проблеми, свързани с граничните условия . . . . .	9
1.3.3 Проблеми, свързани с геометрията на областта . . . . .	11
1.3.4 Анализ на някои от методите за решаване . . . . .	12
1.4 Метод на вариационното влагане . . . . .	15
<b>2 Метод на векторно разцепване за решаване на уравненията на Навие–Стокс</b>	<b>16</b>
2.1 Формулировка на задачата . . . . .	16
2.1.1 Уравнение за налягането . . . . .	18
2.1.2 Векторна форма . . . . .	19
2.2 Схема на векторно разцепване на оператора . . . . .	20
2.2.1 Модификации на схемата на разцепване — полуунейвна и неунейвна схема . . . . .	20
2.2.2 Апроксимация на схемата на разцепване на цяла стъпка по фиктивното време . . . . .	21
2.2.3 Положителна определеност на оператора $L_1 L_2$ . . . . .	22
2.2.4 Обобщение на схемата за тримерния случай . . . . .	25
2.3 Приложение към задачата за течение в каверна . . . . .	27
2.3.1 Течение в каверна с подвижна горна граница . . . . .	27
2.3.2 Кратък обзор на методите за решаване на задачата . . . . .	28
2.3.3 Диференчна мрежа . . . . .	30
2.3.4 Апроксимация на диференциалните оператори . . . . .	32
2.3.5 Апроксимация на граничните условия . . . . .	33
2.4 Полуунейвна схема на разцепване . . . . .	34
2.4.1 Консервативност . . . . .	34
2.4.2 Алгоритъм за решаване на диференчната задача . . . . .	35

2.4.3	Числени експерименти за проверка на алгоритъма . . . . .	39
2.5	Сравнение на векторната схема на разцепване и схемата на разцепване за бихармоничното уравнение . . . . .	41
2.5.1	Пресмятане на функцията на вихъра и функцията на тока . . . . .	41
2.5.2	Схема на разцепване за бихармоничното уравнение за функцията на тока . . . . .	42
2.5.3	Резултати от числените пресмятания . . . . .	45
2.6	Неявна схема на разцепване . . . . .	46
2.6.1	Проверка за сходимост на алгоритъма . . . . .	47
2.6.2	Сравнение на неявната и полуявната схеми . . . . .	48
2.6.3	Зависимост на скоростта на сходимост на неявната схема от числото на Рейнолдс $Re$ и стъпката по фиктивното време $\tau$ . . . . .	50
2.6.4	Числено изследване на задачата за течение в каверна при големи числа на Рейнолдс . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Метод на вариационното влагане за решаване на уравненията на Навие-Стокс</b> . . . . .	<b>62</b>
3.1	Задачата за обтичане на цилиндър при големи числа на Рейнолдс . . . . .	62
3.1.1	Формулировка на задачата . . . . .	62
3.1.2	Числено решаване на задачата за обтичане при големи числа на Рейнолдс . . . . .	64
3.2	Приложение на метода на вариационното влагане . . . . .	66
3.2.1	Вложена система от три уравнения . . . . .	69
3.2.2	Вложена система от пет уравнения . . . . .	70
3.3	Решаване на вложената система от три уравнения . . . . .	71
3.3.1	Схема на разцепване . . . . .	71
3.3.2	Избор на мрежа и диференчни апроксимации . . . . .	74
3.3.3	Алгоритъм за решаване на диференчната задача . . . . .	77
3.3.4	Пресмятане на функцията на вихъра и функцията на тока . . . . .	78
3.3.5	Описание на резултатите от числените пресмятания . . . . .	79
3.4	Решаване на вложената система от пет уравнения . . . . .	83
3.4.1	Векторна форма на вложената система от пет уравнения . . . . .	83
3.4.2	Схема на векторно разцепване на оператора за вложената система . . . . .	84
3.4.3	Диференчна мрежа . . . . .	85
3.4.4	Апроксимация на операторите в уравненията . . . . .	86
3.4.5	Апроксимация на граничните условия . . . . .	87
3.4.6	Алгоритъм за решаване на диференчната задача . . . . .	88
3.5	Числени резултати . . . . .	89
3.5.1	Тестове за проверка на алгоритъма . . . . .	89
3.5.2	Пресмятания върху неравномерна мрежа при различни числа на Рейнолдс . . . . .	96
	<b>Заклучение</b> . . . . .	<b>102</b>

---

Приложение А	104
Приложение Б	105
Библиография	108
Апробация на дисертацията	118

## Списък на фигурите

2.1	Областта $\mathcal{D}$ . . . . .	28
2.2	Диференчна мрежа. . . . .	30
2.3	Шаблон. . . . .	31
2.4	Отношенията на численото към аналитичното решение за функциите $u(0.5, y)$ и $v(x, 0.5)$ за различни стойности на $\tau$ ( $\tau = 0.4$ и $\tau = 0.00625$ ), $h = 1/32$ . . . . .	39
2.5	Профили на скоростта през геометричния център на каверната, пресметнати с различни стъпки $h$ , полупеявна схема, $Re = 100$ . . . . .	40
2.6	Диференчната мрежа за решаване на задачата за бихармоничното уравнение. . . . .	44
2.7	Профили на скоростта през геометричния център на каверната, $Re = 1000$ . Сравнения със схемата на разцепване за бихармоничното уравнение. . . . .	46
2.8	Профили на скоростта през геометричния център на каверната, пресметнати с различни стъпки $h$ , неявна схема, $Re = 1000$ . . . . .	47
2.9	Скорост на сходимост на трите функции в зависимост от итерациите за $Re = 1000$ , $h = 1/64$ , $\tau = 0.02$ : а) консервативна схема на разцепване; б) неконсервативна схема на разцепване. . . . .	49
2.10	Скорост на сходимост за различни $Re$ (отляво надясно $Re = 100, 400, 800, 1000, 2000, 3200, 5000, 7500, 10000, 11000$ ), $h = 1/64$ , $\tau = 0.1$ . . . . .	51
2.11	Скорост на сходимост за различни $\tau$ (отляво надясно $\tau = 0.0875, 0.075, 0.05, 0.02$ ), $h = 1/64$ , $Re = 11000$ . . . . .	51
2.12	Скорост на сходимост за различни $Re$ (отляво надясно $Re = 12000, 15000$ при $\tau = 0.05$ и $Re = 20000$ при $\tau = 0.02$ ), $h = 1/64$ . . . . .	52
2.13	Положението на центровете на вихрите в зависимост от $Re$ . . . . .	55
2.14	Вторичен вихър в горния ляв ъгъл. . . . .	55
2.15	Токови линии. Стойностите на константите са: $-0.115, -0.11, -0.10, -0.09, -0.07, -0.05, -0.03, -0.01, -1.0 \times 10^{-4}, -1.0 \times 10^{-5}, -1.0 \times 10^{-7}, 0, 1.0 \times 10^{-7}, 1.0 \times 10^{-5}, 5.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-4}, 2.5 \times 10^{-4}, 5.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-3}, 1.5 \times 10^{-3}, 3.0 \times 10^{-3}$ . . . . .	58
2.16	По редове: токови линии; вихри в горния ляв ъгъл; вихри в долния ляв ъгъл; вихри в долния десен ъгъл, съответно със стъпки $1/256, 1/512$ и с екстраполация на Ричардсън, $Re = 10000$ . . . . .	59
2.17	Изолинии на функцията на вихъра. Стойностите на константите са: $0.0, \pm 0.5, \pm 1.0, \pm 2.0, \pm 3.0, 4.0, 5.0$ . . . . .	60

2.18	Изолинии на налягането. Стойности на константите: $\pm 0.050, \pm 0.045, \pm 0.040, \pm 0.035, \pm 0.030, \pm 0.025, \pm 0.020, \pm 0.015, \pm 0.010, \pm 0.005, 0., 0.055, 0.060, 0.065, 0.070, 0.075, 0.080, 0.085, 0.090, 0.095, 0.100.$ . . .	61
3.1	Областта, в която решаваме задачата. . . . .	63
3.2	Клетка от мрежата. . . . .	79
3.3	Токови линии с различни числа на Рейнолдс. . . . .	81
3.4	Изолинии на вихъра за $Re = 100.$ . . . . .	81
3.5	Разпределение на налягането и вихъра върху повърхността на цилиндъра: а) разпределение на налягането; б) разпределение на вихъра. . . . .	82
3.6	Разпределение на възлите от неравномерната мрежа в равнината $Oxy.$ . . . . .	85
3.7	Диференчна мрежа: във възлите „•“ се пресмятат стойностите на функциите $u_\varphi$ и $\Phi,$ в „★“ — налягането $p$ (разместена в направление $\varphi$ и неразместена в направление $r$ ) и в „○“ — $u_r$ и $\Omega$ (разместена в двете направления). . . . .	86
3.8	Възел от неравномерната мрежа . . . . .	87
3.9	Компонентата на скоростта $u_\varphi$ при $\varphi = \pi/2,$ пресметната с различни равномерни мрежи ( $51 \times 26, 101 \times 51$ и $201 \times 101$ ) при $Re = 4, r_\infty = 16.$ . . . . .	91
3.10	Компонентата на скоростта $u_r$ при $\hat{r} = 1.16,$ пресметната с различни равномерни мрежи ( $51 \times 26, 101 \times 51$ и $201 \times 101$ ) при $Re = 4, r_\infty = 16.$ . . . . .	92
3.11	Токови линии $\psi = \text{const}$ за $Re = 20$ с различна актуална безкрайност: $r_\infty = 4.5; 8; 15; 22.$ Стойностите на константите (отгоре надолу) са: $\psi = 0.4; 0.3; 0.2; 0.1; 0.05; 0.$ . . . . .	94
3.12	Изолинии на вихъра $\omega = \text{const}$ за $Re = 20$ с различна актуална безкрайност: $r_\infty = 4.5; 8; 15; 22.$ Стойностите на константите са: $\omega = -0.1; -0.2; -0.4; -0.6; -1; -2.$ . . . . .	95
3.13	Токови линии за различни числа на Рейнолдс. Стойностите на константите отгоре надолу са: $0.4; 0.3; 0.2; 0.1; 0.05; 0; -0.05; -0.1.$ . . . . .	97
3.14	Изолинии на вихъра за различни числа на Рейнолдс. Стойностите на константите са: $0.1; 0; -0.2; -0.4; -0.6; -1; -3; \dots$ . . . . .	98
3.15	Края на следата $L$ в зависимост от числото на Рейнолдс. . . . .	100
3.16	(а) Налягането върху цилиндъра; (б) Вихъра върху цилиндъра. . . . .	100
3.17	Ъгъла на откъсване $\varphi_{\text{sep}}$ в зависимост от $Re.$ . . . . .	100

## Списък на таблиците

2.1	Брой на итерациите в зависимост от $\tau$ , $\varepsilon = 10^{-5}$ . . . . .	45
2.2	Брой на итерациите за $Re = 1000$ , $\varepsilon = 10^{-5}$ . . . . .	50
2.3	Резултати за компонентата $u$ по вертикалната линия през геометричния център на каверната. . . . .	53
2.4	Резултати за компонентата $v$ по хоризонталната линия през геометричния център на каверната. . . . .	54
2.5	Екстремални стойности на функцията на тока. . . . .	56
3.1	Някои пресмятания на задачата за обтичане на цилиндър. . . . .	64
3.2	Резултати за $C_p$ , $C_f$ , $C_D$ и $p(1, \pi) - p(1, 0)$ , получени върху равномерна мрежа с различни стъпки $h_\varphi$ и $h_r$ и фиксирани $Re = 4$ , $r_\infty = 16$ . . .	91
3.3	Резултати с различни $r_\infty$ , получени върху равномерна мрежа за: ъгъла на откъсване $\varphi_{sep}$ ; дължината на следата $L$ ; ширината на следата $W$ ; коефициента на налягане $C_p$ ; коефициента на триене $C_f$ ; разликата $p(1, \pi) - p(1, 0)$ и екстремалната стойност на вихъра върху цилиндъра $ \omega(1, \varphi_j) $ при фиксирани $Re = 20$ , $h_r = 0.07$ и $h_\varphi = \pi/100$ . .	93
3.4	Резултати върху неравномерна мрежа с различни $N_\varphi$ , $Re = 100$ , $N_r = 126$ и $r_\infty \approx 53$ . . . . .	96
3.5	Резултати върху неравномерна мрежа с различни $N_r$ , $Re = 100$ , $N_\varphi = 126$ и $r_\infty \approx 53$ . . . . .	97
3.6	Стойности на коефициента на съпротивление $C_D$ , края на следата $L$ и $p(1, \pi) - p(1, 0)$ . . . . .	99



# Предговор

Математическото моделиране често е най-добрият начин за анализ на много важни широкомащабни модели на задачи от естествените науки и дава възможност за по-общо и гъвкаво приложение в сравнение с някои традиционни методи като например лабораторни експерименти и теоретични анализи. Уравненията на Навие-Стокс и уравнението на непрекъснатостта са математически модел на движението на вискозни флуиди. Изследването на поведението на решенията на системата Навие-Стокс за широк интервал от изменение на числото на Рейнолдс ( $Re$ ), реципрочната стойност на което участва като коефициент пред старшите производни в уравненията, е изключително интересно както от теоретична, така и от приложна гледна точка. Известно е, че нестационарните уравнения на Навие-Стокс са неустойчиви за големи числа на Рейнолдс, но стационарните решения продължават да съществуват. Задачата за идентификация на стационарни решения при големи числа на Рейнолдс е некоректна задача според дефиницията на Адамар и нейното решаване изисква разработката на специални алгоритми. Фундаментален въпрос е как изглеждат стационарните решения на системата Навие-Стокс, когато  $Re \rightarrow \infty$ . На този етап отговор на този въпрос за реалните течения, представляващи интерес за приложенията, не може да бъде даден аналитично или чрез лабораторни експерименти — поведението на решенията може да бъде изследвано само посредством числено решаване на некоректната задача.

Допълнителните трудности при численото решаване на уравненията на Навие-Стокс се дължат на следните основни причини:

- нелинейността на задачата поради присъствието на конвективните членове;
- липсата на явно зададени гранични условия за налягането във формулировка скорост и налягане (респективно за вихъра във формулировка  $(\omega, \psi)$  в двумерния случай) върху твърдата граница, поради което налягането се определя с точност до адитивна константа.
- решаването на системата уравнения изисква много компютърно време и памет, което налага конструирането на икономични диференчни схеми.

*Основната цел на дисертацията е разработването на диференчни схеми и алгоритми за идентификация на стационарни решения на уравненията на Навие-Стокс при големи числа на Рейнолдс. Разработените методи са илюстрирани като са решени две фундаментални задачи от хидродинамиката, които представляват и самостоятелен интерес — задачата за течение в каверна с подвижна горна*

граница като пример за вътрешно течение и задачата за течение около кръгов цилиндър, която е модел за течение в безкрайна област около лошообтекаемо тяло.

Настоящата дисертация се състои от предговор, три глави, заключение, две приложения и цитирана литература. Текстът е написан на 119 страници, от които 35 фигури и 11 таблици. Всяка глава се разделя на параграфи, а при необходимост в последните се отделят подточки. Номерацията на формулите се състои от две числа — първото показва номера на главата, а второто номера на формулата. Същото се отнася и до таблиците и графиките. Списъкът на цитираната литература съдържа 156 заглавия, като цитирането е правено чрез номерата на източниците, подредени по азбучен ред. Докладите и публикациите на автора във връзка с дисертацията са изведени в отделен списък в края на дисертацията.

Първата глава на дисертацията има уводен характер. В нея са разгледани проблемите, свързани с численото решаване на системата Навие-Стокс при големи  $Re$ . Направен е анализ на известните методи за числено решаване в най-често използваните формулировки. Както беше казано по-горе, идентификацията на неустойчивите стационарни решения на уравненията на Навие-Стокс е некоректна задача. Представен е един метод за решаване на обратни и некоректни задачи — Методът на Вариационното Влагане (МВВ).

В Глава 2 е предложен и развит нов метод за решаване на стационарните уравнения на Навие-Стокс. В него уравнението на непрекъснатостта е заменено с уравнение за налягането. Това позволява да се въведе фиктивно време и изходната система от елиптични уравнения да се сведе до система от параболични уравнения за компонентите на скоростта и налягането. Новополучената система е различна от нестационарната система Навие-Стокс, но стационарните решения на двете системи съвпадат. Скоростта и налягането от уравненията се определят едновременно, като по този начин се решава проблемът с граничните условия. Разработена е специална векторна версия на схема на разцепване. Методът е приложен към задачата за течение в правоъгълна област (каверна) с подвижна горна граница.

В Глава 3 е приложен МВВ за решаване на задачата за течение около кръгов цилиндър за уравненията на Навие-Стокс в полярни координати. Прилагането на МВВ води до системи от по-висок ред в сравнение с изходните системи. Поради това още по-наложително е използването на схеми на разцепване на оператора. Разгледани са два подхода за представяне на вложената система и са разработени съответните схеми и алгоритми за решаване. Използвана е специална неравномерна мрежа за пресмятанията с числата на Рейнолдс, за които равномерната мрежа е неподходяща за решаване на задачата. Преобразуванията, свързани с извеждането на уравненията на влагането, за прегледност на текста в дисертационния труд са представени в приложения.

В заключението са представени основните изводи и приноси на дисертационния труд. След заключението е приложен списък на цитираната литература. В края на дисертацията е даден списък на изнесените доклади (апробации) на научни семинари, конференции и др. Даден е и списъкът на публикациите на автора, върху който се базира дисертационният труд — пет заглавия на вече публикувани или под печат работи.

Граничните задачи, които се разглеждат в дисертационния труд, са елиптич-

ни и имат силно нелинеен характер. При голяма разрешаваща способност на диференчните мрежи решаването на съответните алгебрични системи (получени след дискретизирането по метода на крайните разлики) с прски елиминационни методи се превръща в сериозен проблем. За да бъде намалено изискването към бързодействието на компютъра, са използвани икономични методи от типа на координатното разцепване. Последните са добре разработени в литературата за елиптични оператори от втори ред, но за матрични оператори и оператори от по-висок ред те се развиват усилено през последните години.

Предложените в дисертацията матрични итерационни методи за едновременното определяне на търсените функции преодоляват проблемите, свързани с граничните условия за налягането (или вихъра). С помощта на развитата векторна версия на метода на покоординатно разцепване, при която многомерната задача се свежда до последователност от едномерни задачи, значително се намалява и необходимият изчислителен ресурс. *Основният принос на работата е създаването на устойчиви диференчни схеми на векторно разцепване, които решават уравненията на Навие-Стокс при големи числа на Рейнолдс без използването на изглаждащи техники.* Използвана е формулировка скорост и налягане, която позволява естествено обобщаване на разработените алгоритми за тримерни течения.

В дисертационната работа са получени решения на задачата за каверната за стойности на числа на Рейнолдс, по-големи от представените в цитираната литература въобще, а на тази за течение около цилиндър — в променливи  $(u, v, p)$ . Трябва да се подчертае, че и двете задачи, представени в дисертацията, са решени в променливи скорост и налягане —  $(u, v, p)$ -формулировка, докато повечето автори (и практически всички, получили адекватни резултати за големи числа на Рейнолдс) работят в  $(\psi, \omega)$ -формулировка. Въпреки, че полученото стационарно решение с  $Re = 200$  за течение около цилиндър е чувствително по-малко от представените резултати в работите на Форнберг, който използва променливи  $(\psi, \omega)$ , това число на Рейнолдс е най-голямото достигнато в  $(u, v, p)$ -формулировка (в цитираната литература), при това без да се използват т. нар. „изглаждащи техники“.

Значението на основните резултати на дисертацията се определя от техния насочено-фундаментален и приложен характер. Предложените методи могат да намерят широко приложение за идентификация на различни течения с практическо значение при големи стойности на числото на Рейнолдс.

### Благодарности

Най-напред желая да благодаря на проф. Христо Христов, който ме въведе в областта на числените методи на хидродинамиката. Благодарна съм на всички колеги от катедра „Математика“ при Технически Университет – Варна, които проявяваха разбиране и ми оказваха съдействие в работата. Изказвам благодарност на ст.п.с. Димитър Трухчев и на членовете на секция „Физика на морето“, Институт по Океанология, за предоставената ми възможност да използвам компютър в тяхната лаборатория за решаването на задачата за течение около цилиндър, а също и за полезните дискусии по време на работата. Признателна съм и на ръководството на Факултета по Мениджмънт и Икономика на Свободен Университет, Варна, за помощта, която ми беше оказана.

*Р. Маринова*

# Глава 1

## Въведение

### 1.1 Уравнения на Навие–Стокс

През 1755 г. Ойлер извежда уравненията за движението на идеален флуид. Въпреки че Нютон през 1687 г., а по-късно и Даниел и Йохан Бернули през 1738 г. също обсъждат законите за движение на флуидите, счита се, че Ойлер е поставил началото на хидродинамиката. Въвеждането на абстракцията идеален флуид разкрива големи възможности за привличането на математически апарат при решаването на хидродинамични задачи. Много усилия са положени за изучаване на така наречените потенциални течения на идеална несвиваема течност. Благодарение на това бурно се развива теоретичната хидродинамика. Но, макар в много частни случаи уравненията на Ойлер да са интегрирани, теоретичните резултати рязко се различават от данните от практиката. Подобен пример е известният парадокс на Ойлер–Даламбер. Даламбер изказал мисълта, а по-късно това било доказано от Ойлер строго, че сумарните сили на натиск, с които флуидът действа в отделните точки от повърхнината на обтичаното от него тяло, трябва взаимно да се уравновесят.

Независимо един от друг, Навие през 1822 г. и Стокс през 1845 г. добавят вискозни членове в уравненията за движение на флуиди. Математическият модел на вискозна течност, основан на уравненията на Навие–Стокс, трябвало да отговори на всички патрупани несъответствия в теорията на идеалните флуиди (подемна сила, турбулентност и др.). Теорията за течение на несвиваеми вискозни флуиди представлява най-интересната за математическо изследване част от хидродинамиката. Много от задачите на динамиката на вискозни флуиди, например задачата за обтичане на тела (дори и с прости форми), и досега не са решени изцяло. Аналитични решения, които имат физически смисъл, са намерени в малко случаи.

Фундаменталните уравнения на Навие–Стокс представляват интерес както за теорията, така и за приложенията. От теоретична гледна точка те могат да се използват за създаването и развитието на ефикасни алгоритми за преодоляване на нелинейността, оценка на грешката при дискретизиране на производните, конструиране на бързи алгоритми за решаване на системи алгебрични уравнения, моделиране на гранични условия и др. В приложен аспект интерес представлява създаването на ефикасни методи за решаване на тези уравнения. Преобладаващата

част от практически важните течения стават такива при големи размери и високи скорости или при малък вискозитет, т.е. геофизични течения, течения около проводници и плавателни съдове и т.н. Икономически по-изгодно е да се извършват компютърни симулации на сложни течения в сравнение със скъпо струващите лабораторни експерименти.

*Уравненията на Навие–Стокс* (за количеството движение) и уравнението на непрекъснатост, описващи двумерното течение на несвиваем вискозен флуид при отсъствие на външни сили (вж. [39, 19] и др.), в декартови координати, след обезразмеряване, имат вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \Delta u, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \Delta v, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.3)$$

където  $u = u(x, y)$  е компонентата на скоростта по оста  $Ox$ ,  $v = v(x, y)$  — по  $Oy$ ;  $p = p(x, y)$  — налягането;  $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  е оператора на Лаплас.

*Числото на Рейнолдс*  $Re = LU/\nu$ , където  $L$  е характерна дължина,  $U$  — характерна скорост на течението,  $\nu$  — коефициент на вискозност, е безразмерен параметър. Известно е, че за съответния набор от гранични условия, числото на Рейнолдс характеризира течението.

Уравненията (1.1)–(1.3) са основани на следните общоприети физични модели: уравненията (1.1) и (1.2) са проекциите на векторното уравнение за количеството на движение, а третото изразява закона за съхранение на масата. Записани са в Ойлерова координатна система, относно която се движи флуидът.

От уравненията (1.1)–(1.3) може да се изведе уравнение за налягането по следния начин: към уравнението (1.1), диференцирано по  $x$ , се прибавя уравнението (1.2), диференцирано по  $y$ . Поради това, че уравнението на непрекъснатостта трябва да бъде удовлетворено навсякъде в областта, след като отчетем, че

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \equiv 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right) \equiv \frac{1}{Re} \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \equiv 0,$$

получаваме следното елиптично уравнение за налягането, наричано *уравнение на Поасон за налягането*

$$\Delta p + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (1.4)$$

Системата уравнения (1.1), (1.2) и (1.4) е еквивалентна на изходната система (1.1), (1.2) и (1.3).

За двумерни течения често се въвежда *функцията на тока*  $\psi$ , която удовлетворява съотношенията

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v. \quad (1.5)$$

С нея е свързана функцията на вихъра  $\omega$ , която има вида

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.6)$$

Уравнението за преноса на вихъра се получава като от уравненията (1.1) и (1.2) се изключи налягането: диференцира се първото по  $y$  и от него се изважда второто, диференцирано по  $x$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \omega, \quad (1.7)$$

а уравнение (1.6) води до

$$\Delta \psi + \omega = 0. \quad (1.8)$$

По този начин задачата за определяне на променливите  $u$ ,  $v$  и  $p$  от уравненията (1.1)–(1.3) се заменя със задачата (1.7), (1.8) за определяне на  $\omega$  и  $\psi$ . Налягането може да се определи след това от (1.4).

Двумерните стационарни уравнения на Навие–Стокс (1.7) и (1.8), след изключване на вихъра, се свеждат до нелинейното бихармонично уравнение

$$\frac{1}{Re} \Delta \Delta \psi - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) = 0. \quad (1.9)$$

Съществуват и други форми на уравненията на Навие–Стокс, еквивалентни на (1.1)–(1.3), които по-рядко се използват (за повече подробности вж. [87]).

## 1.2 За съществуването и единствеността на решения на уравненията на Навие–Стокс

Системата уравнения на Навие–Стокс има частни решения (за някои от тях вж. в [82]). Не на всяко частно решение обаче съответства реално течение. Интерес представляват онези решения, които съответстват на определено течение, т.е. решенията, удовлетворяващи дадени гранични и начални условия. Ако се решава нестационарната задача в областта  $\mathcal{D}$ , трябва да се зададе начално условие, т.е. скоростта  $(u, v) = (u_0, v_0)$  за  $(x, y) \in \mathcal{D}$  в началния момент от време  $t = 0$ . Ако областта  $\mathcal{D}$  е ограничена и решението удовлетворява граничните условия

$$(u, v) \Big|_{\partial \mathcal{D}} = (u_b, v_b) \quad (1.10)$$

върху границата  $\partial \mathcal{D}$  на областта при  $t > 0$ , задачата обикновено се нарича *вътрешна* (вж. [8]). В механиката на флуидите един от основните проблеми е свързан с обтичането на тела от безкраен поток — такава задача се нарича *външна*. Областта  $\mathcal{D}$  в този случай е външната спрямо повърхността на обтичаното тяло област, която съдържа безкрайно отдалечената точка. Обикновено се търси решение на

системата уравнения на Навие–Стокс, съответстващо на течението, което с отдалечаване от тялото преминава в поток с постоянна скорост  $U_\infty$ . Ако тялото е в покой, граничните условия върху повърхността на тялото обикновено са условията за ползване и непротичане  $(u, v) = (0, 0)$ . Условието за преход в равномерен поток в този случай има асимптотичен характер и, при условие че течението има постоянна скорост  $U_\infty$ , успоредна на оста  $Ox$ , има вида

$$(u, v) \rightarrow (U_\infty, 0) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.11)$$

Въпросите, свързани със съществуване и единственост на решение на уравненията, описващи течението на несвиваем вискозен флуид, са изключително важни. И досега не са изяснени напълно два принципни въпроса [16]:

- Имат ли уравненията на хидродинамиката при наложени гранични и начални условия единствено решение?
- Доколко адекватно решенията на тези уравнения описват реалните течения?

Когато един математически модел не описва напълно физическата ситуация, за която е предназначен, се появяват т. нар. парадокси. Съществуват несъответствия между решенията на уравненията на Навие–Стокс и реалните физически процеси. Известни са редица парадокси като например течението на Поазбой — течение на несвиваем флуид в безкрайно дълга тръба. За всяко число на Рейнолдс съществува решение на уравненията на Навие–Стокс и в същото време съответстващите им течения се наблюдават за число на Рейнолдс, което не надвишава някаква критична стойност. За по-големи числа на Рейнолдс теченията стават турбулентни. Друг парадокс се наблюдава при течението на Тейлър–Кует — стационарно течение между концентрични въртящи се цилиндри. За всяко число на Рейнолдс съществуват симетрични решения, но те се наблюдават само при малки числа на Рейнолдс, а при големи се сменят пак с ламинарни, но несиметрични течения. Тези течения противоречат на хипотезата, че симетричните причини породжат симетрични следствия. В рамките на математическия модел на несвиваема течност обяснение на тези парадокси е нелинейността на уравненията на Навие–Стокс. Известно е, че нестационарните задачи за уравненията на Навие–Стокс нямат устойчиво решение за всяко  $t \geq 0$ . Дори и да съществува решението при всяко  $t \geq 0$ , то може да не клони към решението на стационарната задача при стабилизиране на външните влияния и граничните условия.

За стационарните гранични задачи за уравненията на Навие–Стокс има доказани теореми за съществуване в двумерния и тримерния случай [16, 35, 39]. Основните резултати, свързани със стационарните уравнения на Навие–Стокс, принадлежат на Хопф, Ладъженская, Лионс, Темам и др. Нестрого казано, предполага се, че за всяко число на Рейнолдс има едно „хубаво“ решение [16], съответстващо на ламинарното течение. Доказано е, че решението на граничната задача е единствено и устойчиво, при условие че числото на Рейнолдс е достатъчно малко и областта ограничена. Има много примери за това, че в противен случай може да се очаква неединственост на решенията (вж. [35]).

Теоремите в [16] са доказани като е разширено понятието решение на задачата — въведено е понятието обобщено решение. Разглежда се хилбертовото пространство  $W_2^2(\mathcal{D})$  като подпространство от функциите с интегрируем квадрат, които имат всевъзможни обобщени производни от първи и втори ред, също от  $L_2(\mathcal{D})$ . Скаларно произведение се дефинира

$$(u, v)_{W_2^2} = \int_{\mathcal{D}} \left( uv + \sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} \right) dx,$$

а нормата е съответно  $\|u\|_{W_2^2} = \sqrt{(u, u)_{W_2^2}}$ . По този начин сходимостта в  $W_2^2$  е еквивалентна с едновременната сходимост на функциите и производните им от първи и втори ред в  $L_2$ . При недостатъчна гладкост на данните в задачата класическо решение може да не съществува, а обобщено решение да съществува. Разширението на понятието решение е обаче такова, че остава в сила теоремата за единственост на класическото решение.

За нестационарните (начално-гранични) задачи е доказано, че съществува единствено решение само в някои частни случаи — за двумерни и ососиметрични течения. В общия тримерен случай съществуване и единственост са доказани за начално-гранични задачи за малки интервали  $[0, T]$  на изменение на времето  $t$ .

По-лесни за изследване са линеаризираните уравнения на Навие–Стокс — така наречените уравнения на Стокс, в които липсват конвективните членове. За тях граничните и начално-граничните имат единствено решение, тъй като свойствата на оператора, който съответства на стационарната задача, са близки до свойствата на оператора на Лаплас, а на нестационарната задача — до оператора на уравнението на топлопроводността.

Все още има много нерешени проблеми, свързани с модела на вискозен несвиваем флуид. Остава открит въпросът дали решението на начално-граничната задача за уравненията на Навие–Стокс клони към решението на съответната начално-гранична задача за идеална течност при  $Re \rightarrow \infty$ .

## 1.3 Проблеми при численото решаване на стационарните уравнения на Навие–Стокс при големи числа на Рейнолдс

### 1.3.1 Проблеми, свързани с неустойчивостта на задачата

Коефициентът пред старшите производни (дифузионните членове) в уравненията на Навие–Стокс е реципрочен на числото на Рейнолдс. Поради това с нарастването на числото на Рейнолдс намалява влиянието на дифузионните членове и се засилва влиянието на конвективните (нелинейните) членове.

Както вече беше казано, известно е, че стационарните решения на уравненията на Навие–Стокс са устойчиви само до някакви стойности на числото на Рейнолдс, като конкретната критична стойност зависи от геометрията на областта и



други параметри на течението. Съществува някаква гранична стойност на числото на Рейнолдс, след която стационарните решения стават неустойчиви. Наблюдава се загуба на устойчивост в изходното ламинарно течение и появата на смущения, които нарастват. А при по-нататъшно увеличаване на числото на Рейнолдс течението добива напълно безпорядъчен характер и става турбулентно. Критичното число на Рейнолдс за различните течения е различно — зависи от геометрията на областта, естеството на флуида и др. При течение в квадратна каверна загубата на устойчивост се появява след  $Re_{\text{крит.}} \approx 3200$ , в тръба  $Re_{\text{крит.}} \approx 2200$ , за течение около сфера —  $Re_{\text{крит.}} \approx 130 \div 210$ , а за течение около кръгов цилиндър за  $Re_{\text{крит.}} \approx 30 \div 40$  — вж. [82, 84]. Формите на прехода също са различни за различните течения — „твърда“ бифуркация с избухване към хаотичен режим при течението на Поазьой, докато при течението на Гейлър–Кует има линейна бифуркация с множество от вторични стационарни режими. При течение около цилиндър неустойчивостта се изразява като следата започва да осцилира около линията на симетрия и накрая се разпада на множество от вихри по течението (Карманова вихрова улица).

Основният проблем навсякъде е един и същ — за достатъчно големи числа на Рейнолдс стационарното ламинарно решение престава да бъде атрактор и затова не може да се получи числено като решение на начална задача. С други думи, задачата за намиране на стационарни решения е типичен пример на задача, некоректна в смисъл на Адамар.

Фундаментален въпрос е как изглеждат стационарните решения на системата уравнения на Навие–Стокс, разглеждана като динамична система, когато коефициентът  $1/Re$  клони към нула. За разлика от динамичните системи с малка размерност, да се отговори аналитично на този въпрос за системата Навие–Стокс е възможно само в съвсем малък брой случаи. Един от редките примери за съществуване на аналитично решение за всяко  $Re \rightarrow \infty$  е течението на Поазьой. Освен в този случай, на този етап отговор на въпроса как изглеждат стационарните решения на уравненията на Навие–Стокс при  $Re \rightarrow \infty$ , представляващи интерес за приложенията, може да бъде даден само с помощта на числените методи — посредством числено решаване на некоректната задача. От друга страна, познанията за модела на стационарното течение за големи числа на Рейнолдс е изключително важно за осигуряването на информация за граничните свойства на системата Навие–Стокс. Интерес представляват разпределението на функциите на вихъра и налягането, коефициента на съпротивление, а при задачите в неограничени области също така и асимптотиката на следата (областта на завихряне), мястото на точката на откъсване, и т.н. Тези въпроси очакват своя отговор и са свързани с изясняване на поведението на теченията при големи числа на Рейнолдс.

### 1.3.2 Проблеми, свързани с граничните условия

Сходимостта на диференчната схема, независимо от задачата, зависи не само от начините на апроксимиране на уравненията, които решаваме, а и от начините на апроксимиране на граничните условия. Въпросът за граничните условия и тяхната апроксимация е съществен. Адекватността на апроксимацията на всяко гранично

условие може да зависи от числото на Рейнолдс, диференчната схема във вътрешните точки, апроксимацията на останалите гранични условия и др. Поради това е трудно аналитичното им изследване. Начинът на дискретизиране на граничните условия оказва съществено влияние не само на устойчивостта, но и на точността на решението на системата от диференчни уравнения.

Условията за полепване и непротичане на твърдата стена при решаване на задачата в променливи скорост и налягане имат прост вид, което дава голямо предимство на тази задача при използване на неявни схеми. При решаване на задачата за определяне на  $u$ ,  $v$  и  $p$  Харлоу и Уелч в [91] използват разместена мрежа за  $u$  по направление на  $x$ , а за  $v$  — по  $y$ . Така граничните условия може да се апроксимират с втори ред на точност по пространствените променливи. Почти всички автори, които решават задачата във физически променливи, използват такава мрежа (напр. вж. [106, 146, 153]).

Както вече беше отбелязано, основен проблем на формулировката, в която участва уравнението на Поасон за налягането, е задаването на граничното условие за налягането. Обикновено при двумерни задачи като гранично условие за налягането се поставя

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial s}, \quad (1.12)$$

където  $\mathbf{n}$  и  $s$  са нормалата и допирателната към повърхността. Върху липните на симетрия за налягането се поставя условието  $\partial p / \partial \mathbf{n} = 0$ . Граничните условия за налягането са от тип на фон Нойман и налагат специални изисквания при решаване на задачата — вж. [27].

На твърдата стена при решаване на задачата в променливи  $(\omega, \psi)$  за функцията на тока има две гранични условия, а за функцията на вихъра липсва гранично условие. Това може да причини трудности, ако двете уравнения за  $\omega$  и  $\psi$  се решават отделно. Използването на класическото условие на Том за вихъра води до ограничения на максималната стъпка по времето [134, 152]. Този проблем се избягва, ако уравненията се решават заедно [73, 75, 93] или, ако се решава бихармоничното уравнение от четвърти ред (1.9) (вж. [61, 62, 72]). Граничните условия за вътрешни течения за функцията на тока  $\psi$  са следните

$$\psi = G(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = F(x, y) \quad \text{при } (x, y) \in \partial \mathcal{D}, \quad (1.13)$$

където  $\mathbf{n}$  е външната нормала към границата  $\partial \mathcal{D}$  на областта  $\mathcal{D}$ , а  $G$  и  $F$  дадени функции, които са определени от стойностите на компонентите на скоростта върху границата. За стационарни задачи границата е токова линия и без ограничение на общността може да се положи  $G \equiv 0$ . Ако задачата притежава линии на симетрия, то върху тях могат да се наложат условията  $\omega = 0$ ,  $\psi = 0$ .

При решаване на задачи в безкрайни граници, граничното условие (1.11) за преход в равномерен поток има асимптотичен характер и при числени пресмятания възникват проблеми с неговата апроксимация. Тъй като пресмятанията се извършват в крайни области, то това гранично условие не може да се постави естествено. Въпросите, свързани с граничните условия в безкрайност, са спорни. Проблемите

са причинени от неограничеността на потока и бавното затихване (както  $1/r$ ) на течението в безкрайност. Това дава възможност за появата на грешки, свързани с избора на така наречената „актуална безкрайност“. Под „актуална безкрайност“ разбираме условно въведената граница, отсичаща крайна област за числените пресмятания. Изборът на актуалната безкрайност е важен, тъй като с нарастване на числото на Рейнолдс се налага нейното увеличаване, защото областта на завихряне (следата) зад тялото нараства — става по-широка и по-дълга. Често се налага да се правят разумни компромиси между липсата на достатъчно изчислителни ресурси и необходимостта от увеличаване на актуалната безкрайност.

### 1.3.3 Проблеми, свързани с геометрията на областта

Поради различната геометрия на областта при различните задачи в много случаи се налага използването на подходящи мрежи или координатни системи, различни от декартовата.

Методите с адаптивни мрежи са ефективен начин за решаване на задачи, които се нуждаят от прецизиране само в малки локализирани части от областта. Възлите от мрежата се разпределят така, че грешката от дискретизиране на уравненията да бъде малка навсякъде. В тези части от областта, където промените са малки, възлите са малко. Но при решаване на хидродинамични задачи при големи числа на Рейнолдс има тесни части от областта, в които измененията на скоростта са съществени и там се изисква много фина мрежа. Адаптивните техники може да се класифицират в две категории (според [146]): „глобални“ и „локални“. При глобалните общият брой на възлите обикновено е фиксиран, а при локалните техники броят на възлите се променя (добавят се и/или се премахват възли), докато решението се получи с определена точност. От най-успешните адаптивни техники са така наречените многомрежови методи, които използват редица от мрежи за ускоряване на сходимостта. При този подход се започва от някаква мрежа и след това се преминава през по-груби мрежи за получаване на решението с определена точност. Корегира се решението върху най-гъстата мрежа, като се използва пресметнатото с другите мрежи. Приноси в прилагането на многомрежови техники към уравненията на Навие-Стокс имат Гиа и съавтори [84], Ванка [153], Томпсън и Ферзигер [146], Турек [148] и др. Недостатък на тези методи е използването на изглаждащи оператори.

При численото решаване на задачата за обтичане на тела от безкраен поток трябва да се има предвид, че тънките гранични слоеве близо до твърдите стени изискват силно съгъстяване на мрежата. Откъсването на потока от стените и образуването на области на завихряне в течението също се нуждаят от специално внимание. Нито с декартови, нито с полярни координатни системи, може да се опише топологията на течението, когато настъпи откъсване. С нарастването на числото на Рейнолдс трудностите се увеличават. Следата престава да се развива, когато краят ѝ попадне там, където мрежата е рядка. Този ефект може да се наблюдава при задачата за обтичане на цилиндър, ако се използва равномерна полярна мрежа. В близост до тялото, където стават големи промени в скоростта и налягането, също е необходимо мрежата да е гъста. Освен подходящи мрежи, много автори

използват и конформни преобразувания — вж. [68, 71, 94, 144]. При решаване на задачата за течение около цилиндър Форнберг в [73] използва трансформацията  $\xi + i\eta = \frac{1}{\pi} \ln(x + iy)$ , а в [74] —  $\xi + i\eta = \sqrt{(x + iy) + 1} / \sqrt{(x + iy)}$ . Конформните преобразувания създават допълнителни проблеми при използване на асимптотичните гранични условия в безкрайност, особено във формулировката  $(\omega, \psi)$  — вж. [73].

Както вече беше казано, в зависимост от това дали течението е вътрешно или външно има някои специфични проблеми при численото решаване. Като типичен пример за вътрешно течение в Глава 2 на настоящата дисертация е разгледана задачата за *течение в правоъгълна каверна с една подвижна граница*. В Глава 3 е разгледано течение в безкрайна област около лошообтекаемо тяло, по-точно задачата за *обтичане на цилиндър*, която е един добър модел за течения около много тела от практическа важност. При решаване на задачата за течение около цилиндър е въведена подходяща неравномерна мрежа, която се съгъстява около и зад цилиндъра.

### 1.3.4 Анализ на някои от методите за решаване

Обикновено за намиране на стационарни решения се използва метода на установяването — очаква се, че ако граничните условия не зависят от времето, то решението на нестационарната задача ще се „установи“ към решението на стационарната след достатъчно дълъг интервал от време. Поради това всички методи за решаване на нестационарни задачи могат да бъдат разглеждани и като методи за получаване на стационарни решения.

Темам в [35] прави анализ на методите за дискретизация на еволюционните уравнения на Навие–Стокс. Разгледани са дискретизация с крайни разлики и дискретизация с крайни елементи по пространствените променливи, а по времето четири двуслойни схеми — неявна схема; схема на Кранк–Николсън; неявна схема за линейните членове и явна за нелинейните; явна схема. Темам обсъжда числената устойчивост на четирите схеми. Изучаването на нелинейната неустойчивост е нелека задача и налага използването на нетрадиционни методи. Темам изследва устойчивостта (получава априорни оценки за приближените решения) на нелинейните уравнения с помощта на енергетичен метод. В [35] той дава само достатъчни условия за устойчивост, но доказва сходимост на разглежданите схеми.

Основната трудност при численото решаване на задачата във формулировката скорост и налягане е свързана с удовлетворяването на уравнението на непрекъснатостта и се дължи на специалната роля на налягането в системата. Търсените функции (налягането и компонентите на скоростта) са свързани помежду си посредством уравнението на непрекъснатостта, което затруднява решаването на системата. Решението за налягането е с точност до адитивна константа и тази неединственост също създава трудности. Поради липсата на явно участие на времето в уравнението на непрекъснатостта, уравненията (на Навие–Стокс и на непрекъснатостта) не могат да бъдат директно интегрирани по времето, което налага търсене на специални подходи при решаване на нестационарната задача. Друг проблем е, че решението на диференчната задача за определяне на стойностите на търсените функции се получава от нелинейна система и решаването ѝ

изисква много компютърно време и памет. Палага се да се конструират икономични диференчни схеми. В двумерния случай налягането може да се елиминира чрез въвеждане на функцията на тока  $\psi$  и функцията на вихъра  $\omega$ . В тримерния случай обаче този подход е неефективен. Една числена процедура, използваща променливи скорост и налягане, може да се прилага както за двумерни, така и за тримерни задачи.

Харлоу и Уелч в [91] използват физическите променливи (скоростта и налягането), за да решат нестационарната задача. Те определят налягането от уравнението на Поасон (1.4). Определянето на гранично условие за налягането е от първостепенна трудност е при използване на тази формулировка. Като гранично условие за налягането в [91] използват уравненията за  $u$  и  $v$ , записани върху границата. Това е гранично условие от тип на фон Нойман и осигурява удовлетворяването на уравнението на непрекъснатост. При апроксимиране на производните в близост до границата се налага въвеждане на възли вън от областта. Харлоу и Уелч [91] използват разместена мрежа за решаване на задачата. Алгоритъмът, който следват, е: на всеки слой по времето се предполага, че компонентите на скоростта са известни, пресмята се налягането чрез итерационна процедура и после се изчисляват новите  $u$  и  $v$  с явна схема. Не е икономично тази процедура да се използва за получаване на стационарно решение, тъй като е твърде неефикасно да се решава уравнението за налягането на всяка итерация.

Чорин [51] предлага по-икономичен метод за решаване на двумерните и тримерните уравнения за движение на несвиваем вискозен флуид, който не използва уравнението за налягането. За преодоляване на трудностите, свързани с уравнението на непрекъснатостта, в системата се въвежда изкуствена свиваемост (аналог на релаксационен параметър) по такъв начин, че крайният резултат да не зависи от нея.

При метода на дробните стъпки във варианта, предложен от Чорин [52], а по-късно развит и от Ким и Моин в [106], на полустъпката се определят компонентите на скоростта при изключен градиент на налягането, а на втора трите променливи се коригират, докато се удовлетвори уравнението на непрекъснатост. Методът на променливите направления е бил предложен още в средата на 60-те години от Дъглас, Писман и Рекфорд (вж. [121]). Многомерната задача се свежда до последователност от едномерни задачи, които лесно се решават числено. Така значително се намалява и необходимата за изчисленията оперативна памет. Днес са известни много модификации на този метод и схеми на неговата реализация. Те са основани на апроксимация на еволюционните уравнения като се разлагат операторите в уравненията. Най-общо тези са наречени методи на разцепване и са развити в работите на Темам, Яненко, Марчук (вж. [35, 41, 22]) и др.

Ако се използва формулировката  $(\omega, \psi)$ , то трябва да се решат само две уравнения от втори ред. Броят на граничните условия съответства на реда на системата (за функцията на тока разполагаме с две гранични условия във всяка точка от границата). Известни трудности се появяват при поставянето на гранични условия за вихъра (явно условие за вихъра няма). Възможни са различни подходи — да се реши уравнението за вихъра, и след това за функция на тока. Това създава проблеми при използване на неявни схеми за уравнението за вихъра. Би могло

уравненията да се решават заедно, както това е направил Фориберг, например, в [73]. Той решава системата с помощта на метод на Нютон. За гранични условия използва двете за функция на тока. Методите за решаване на системата  $(\omega, \psi)$  и определянето на граничните условия трябва да са съобразени с факта, че уравненията в тази система са неразделими, така както и уравненията в системата  $(u, v, p)$  са неразделими.

Матричните итерационни методи за едновременното определяне на търсените функции са лишени от недостатъците, свързани с граничните условия за налягането и вихъра. В дисертационната работа са използвани матрични методи за решаване на системите от елиптични уравнения, получени като вместо уравнението на непрекъснатостта се вземе уравнение за налягането (във формулировката скорост и налягане) или след приложението на метода на вариационното влагане. Въведени са производни по фиктивно време на търсените функции и системата е сведена до система от параболични уравнения. Получената параболична система се решава по метода на установяването. Доказано е, че формулировката, в която участва уравнение за налягането, е еквивалентна на изходната, ако уравнението на непрекъснатост е удовлетворено върху границата на областта. Това естествено налага използването на граничното условие

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{\partial D} = 0, \quad (1.14)$$

което разрешава проблема с липсващото гранично условие.

Задачата за бихармоничното уравнение от четвърти ред (1.9) за  $\psi$  има необходимия брой гранични условия, но се появяват проблеми с численото решаване на уравнението от висок ред. Производните от четвърти ред водят до лошо обусловени матрици след дискретизиране.

Поради причини, които са свързани с неустойчивостта на уравненията на Навие-Стокс, итерационната сходимост при числено решаване е бавна. Възниква въпросът за цената на пресмятанията за получаване на решението, който включва и цената на една итерация. Решаването на алгебричните системи, които се получават след дискретизиране на решаваните в дисертационната работа задачи с преки елиминационни методи, е сериозен проблем. Поради това са използвани икономичните схеми на разцепване на оператора. За разширяване на диапазона на устойчивостта на последните е добре да се използва напълно неявна схема. За уравненията на Навие-Стокс е проблем да се създаде такава схема, поради неявния характер на граничните условия за налягането/вихъра. Методите на векторно разцепване на оператора, предложени и развити в дисертацията, дават възможност за конструиране на устойчиви диференчни схеми. Така се преодолява зависимостта на големината на стъпката по фиктивното време от големината на стъпките по пространствените променливи.

## 1.4 Метод на вариационното влагане

Методът на *вариационното влагане* е предложен от Христов в [53, 54, 38] за решаване на някои класове некоректни задачи. Може да се каже, че идеята на метода на вариационното влагане е обобщение на идеята на метода на най-малките квадрати — определянето на решението на уравнението  $A(x) = f$  (ако съществува) е еквивалентно с намирането на минимума на функционала

$$\mathcal{F}(x) = \rho(A(x) - f, A(x) - f),$$

където  $\rho$  е разстоянието в съответното хилбертово пространство. При метода на вариационното влагане изходната задача, която е лошо поставена или некоректна, се замества със задача за минимизиране на функционал, решението на която съвпада с решението на изходната задача (ако такова съществува). Квадратичният функционал е интеграл от сумата от квадратите на невязките (резидуалите) на изходните уравнения. Необходимите условия за минимизация на функционал (наричан по-нататък вложен функционал) са уравненията на Ойлер-Лагранж и представляват една очевидно по-сложна система, измежду чиито решения са решенията на изходната некоректна задача. Предимството обаче е това, че вложената система е по-податлива и нейните решения са по-устойчиви при итерационни методи за решаване. Така решенията на изходната система са вложени в решенията на друга система чрез вариационен принцип, наречен Метод на Вариационното Влагане (МВВ).

Идеята за „влагане“ на некоректни задачи в коректни такива, но от по-висок ред е предложена от Тихонов (вж. [15, 36, 37]), но не е използван вариационен метод за извеждане на задачата за влагането, а просто са добавяни в уравненията производни от по-висок ред, умножени с малък параметър. Такъв подход среща трудности при постигане на равномерната сходимост по малкия параметър и налага тежки изисквания към мрежата за числено интегриране. В метода, предложен от Христов, няма нито един изкуствен параметър, т.е. влагането е точно, а не приближено, както е в идеята на Тихонов (в който малкият параметър трябва да се устреми към нула).

## Глава 2

# Метод на векторно разцепване за решаване на уравненията на Навие-Стокс

### 2.1 Формулировка на задачата

Разглеждаме стационарната задача за течение на несвиваем вискозен флуид в област  $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^2$  с граница  $\Gamma = \partial\mathcal{D}$ . В уравненията на Навие-Стокс (1.1) и (1.2) изчезва производната по времето и се променя типът на системата (1.1)–(1.3) — тя става елиптична.

Формата, в която са записани конвективните членове в уравненията (1.1) и (1.2) съответно

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{и} \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.1)$$

е така наречената недивергентна форма. Като се отчете уравнението на непрекъснатостта (1.3), конвективните членове може да се представят в дивергентна форма

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y}, \quad (2.2)$$

която е еквивалентна на (2.1). Дивергентната форма има предимства пред недивергентната при конструиране на диференчни схеми (повече информация по този въпрос може да намери например в [27, 39, 22]).

Като отчетем, че уравнението на непрекъснатостта е удовлетворено в областта  $\mathcal{D}$ , представяме конвективните членове в следната антисиметрична форма<sup>1</sup> (вж. [22, 65])

$$Cu = \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} - \frac{u}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad Cv = \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{v}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (2.3)$$

<sup>1</sup>Един оператор  $A$  се нарича антисиметричен ([65]), когато  $(A\varphi, \varphi) = 0$  за всеки елемент  $\varphi$  от разглежданото пространство.



където са въведени означенията  $Cu$  и  $Cv$  за конвективните членове в уравненията на Навие-Стокс. Тази форма на конвективните членове позволява да се конструира консервативна и устойчива диференчна схема с апроксимация от втори ред на точност по пространствените променливи. След въвеждане на означенията

$$C_x u = \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{u}{2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad C_y u = \frac{\partial uv}{\partial y} - \frac{u}{2} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.4)$$

$$C_x v = \frac{\partial uv}{\partial x} - \frac{v}{2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad C_y v = \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{v}{2} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.5)$$

конвективните членове се записват във вида

$$Cu = C_x u + C_y u, \quad Cv = C_x v + C_y v. \quad (2.6)$$

За конструирането на неявна диференчна схема на разцепване, която има втори ред на точност на апроксимация по пространствените променливи, използваме антисиметричната форма на конвективните членове (2.4)–(2.6).

При въведените означения уравненията на Навие-Стокс имат вида

$$\frac{1}{Re} \Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} - Cu = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{Re} \Delta v - \frac{\partial p}{\partial y} - Cv = 0. \quad (2.8)$$

Заедно с уравнението на непрекъснатостта

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

тези уравнения образуват система за определяне на скоростта и налягането.

Към системата (2.7)–(2.9) добавяме и гранични условия. Както вече беше казано в Глава 1, ако областта е ограничена, решението удовлетворява следните гранични условия

$$u(x, y) = u_b(x, y), \quad v(x, y) = v_b(x, y) \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2.10)$$

където  $u_b$  и  $v_b$  са известни функции върху границата на областта. Често за гранични условия върху твърдата граница се използват условията за полепване и непротичане.

От уравнението на непрекъснатостта (2.9) при вътрешни течения, т.е., когато  $\mathcal{D}$  е ограничена област, и от формулата на Грийн, следва, че

$$\iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} -v_b dx + u_b dy. \quad (2.11)$$

Това означава, че върху границата на областта за вътрешни течения е необходимо да е изпълнено условието

$$\oint_{\Gamma} -v_b dx + u_b dy = 0. \quad (2.12)$$

За съществуването на решение на граничната задача, границата  $\Gamma$  и функциите  $u_b$  и  $v_b$  следва да удовлетворяват определени изисквания (вж. [16] за повече подробности). Ако те са удовлетворени, в [16] е доказано, че за всяко число на Рейнолдс съществува решение на формулираната задача, съответстващо на ламинарното течение. Единствеността е доказана само за числа на Рейнолдс, не надвишаващи някаква критична стойност. Тъй като функцията  $p$  допуска решения с точност до адитивна константа, под еднозначна разрешимост на задачата разбираме твърдението, че налягането  $p$  се определя с точност до произволна константа.

### 2.1.1 Уравнение за налягането

В Глава 1 беше изведено уравнението за налягането (1.4). При означенията, възприети по-горе, то може да се запише във вида

$$\Delta p + \frac{\partial C u}{\partial x} + \frac{\partial C v}{\partial y} = 0. \quad (2.13)$$

След като се умножи уравнението (2.13) с  $1/Re$  и от полученото уравнение се извади уравнението на непрекъснатостта, се получава следното уравнение

$$\frac{1}{Re} \Delta p - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial C u}{\partial x} + \frac{\partial C v}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Симетричната форма на системата  $(u, v, p)$  с уравнението (2.14) за налягането позволява еднообразно разцепване, което е от съществено значение за свойствата на схемата на разцепване.

*Системата, образувана от уравненията (2.7), (2.8) и (2.14), е еквивалентна на изходната система (2.7)–(2.9), ако за гранично условие се използва уравнението на непрекъснатостта върху границата на областта.*

Твърдението, че уравнението за налягането (2.14) следва от трите уравнения на изходната система, е очевидно. За да докажем обратното твърдение, че от уравнението (2.14) и двете уравнения за количеството движение следва уравнението на непрекъснатостта, при условие че то е удовлетворено върху границата, диференцираме уравнението (2.7) по  $x$  и уравнението (2.8) по  $y$ , събираме ги и изключваме налягането от полученото уравнение като отчетем (2.14), т.е.

$$\Delta p + \frac{\partial C u}{\partial x} + \frac{\partial C v}{\partial y} = Re \cdot X, \text{ където } X = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.15)$$

Получава се уравнението на Хелмхолц

$$\Delta X - (Re)^2 \cdot X = 0. \quad (2.16)$$

Ако върху границата  $\Gamma$  е изпълнено условието  $X = 0$ , то решението на това уравнение е  $X = 0$  — вж. [12]. Оттук следва, че наистина уравнението на непрекъснатостта е удовлетворено навсякъде в областта, в която решаваме задачата.

Уравнението (2.14) и уравненията на Навие–Стокс (2.7), (2.8) представляват система от три уравнения за определяне на трите неизвестни функции  $u$ ,  $v$  и  $p$ . Паложените гранични условия във формулировката на задачата са недостатъчни. Често за гранично условие за налягането се използват самите уравнения на Навие–Стокс (2.7) и (2.8) върху границата. Особеният характер на налягането (липсата на гранични условия, неединственост и др.) изисква обаче специална грижа за устойчивостта на алгоритмите, тъй като явното третиране на граничните условия води до съществени ограничения на големината на стъпката по времето. Поради това към граничните условия добавяме уравнението на непрекъснатостта (2.9), което трябва да бъде удовлетворено върху границата. Така се получава задача с точен брой гранични условия за системата (2.7), (2.8) и (2.14) за определяне на функциите  $u$ ,  $v$  и  $p$ . Вече споменахме, че при замяната на уравнението на непрекъснатостта с уравнението на Поасон за налягането, задачата може да се сведе до система от три параболични уравнения за  $u$ ,  $v$  и  $p$ , като се въведе производна по фиктивно време в трите уравнения. При тези гранични условия, ако се решава отделно уравнението за налягането, се получава преопределена задача за компонентите на скоростта и неопределена за налягането. Затова не може да се отдели уравнението за налягането от уравненията на Навие–Стокс. В настоящата дисертация е предложена векторна версия на схемата на разцепване на оператора, която запазва връзката между търсените функции на всяка дробна стъпка по фиктивното време и позволява да се удовлетворят граничните условия без итерации.

### 2.1.2 Векторна форма

Въвеждаме означенията:

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad F\vec{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Fp \end{pmatrix}, \quad Fp = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial C u}{\partial x} + \frac{\partial C v}{\partial y} \right),$$

$$L_{xx} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_{yy} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_y = \frac{\partial}{\partial y},$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} L_{xx} & 0 & -L_x \\ 0 & L_{xx} & 0 \\ -L_x & 0 & L_{xx} \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} L_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy} & -L_y \\ 0 & -L_y & L_{yy} \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -C_x & 0 & 0 \\ 0 & -C_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -C_y & 0 & 0 \\ 0 & -C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При въведените означения уравненията за  $u$ ,  $v$  и  $p$  се записват в следната компактна векторна форма:

$$(L_1 + L_2)\vec{\theta} + (C_1 + C_2)\vec{\theta} + F\vec{\theta} = 0. \quad (2.17)$$

За решаването на елиптическата система (2.17) може да се използва методът на установяването (стабилизацията) — въвежда се фиктивно време  $t_1$  и решението на стационарната задача се получава като решение на нестационарна задача за достатъчно голяма стойност на времето  $t_1$ . Параболната система, която се получава след въвеждане на производна по фиктивното време в (2.17), има вида

$$\frac{\partial \vec{\theta}}{\partial t_1} = (L_1 + L_2)\vec{\theta} + (C_1 + C_2)\vec{\theta} + F\vec{\theta}. \quad (2.18)$$

Важно е да се отбележи, че системата (2.18) е различна от нестационарната система уравнения на Навие–Стокс. В системата, до която се свеждат нестационарните уравнения на Навие–Стокс липсва производна по времето в уравнението за налягането, докато в системата (2.18) има производни в трите уравнения.

## 2.2 Схема на векторно разцепване на оператора

Системата (2.18) е нелинейна. За решаването ѝ използваме итерационна процедура, основана на метод на разцепване, поради неговата икономичност. Прилагаме метода на дробните стъпки, а именно т. нар. *втора схема на Дъглас и Рекфорд* [121] (наричана също *схема на стабилизиращата поправка* — вж. [41]). За операторното уравнение

$$\frac{\partial \vec{\theta}}{\partial t} = (N_1 + N_2)\vec{\theta} + G\vec{\theta} \quad (2.19)$$

схемата на стабилизиращата поправка има вида

$$\frac{\vec{\theta}^{n+1/2} - \vec{\theta}^n}{\tau} = N_1\vec{\theta}^{n+1/2} + N_2\vec{\theta}^n + G\vec{\theta}^n, \quad (2.20)$$

$$\frac{\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^{n+1/2}}{\tau} = N_2\vec{\theta}^{n+1} - N_2\vec{\theta}^n, \quad (2.21)$$

където  $\tau$  е стъпката по фиктивното време,  $N_1 + N_2$  е „неикономичен“ оператор,  $N_1$  и  $N_2$  са „икономични“ оператори. Чрез схемата на разцепване двумерната задача се свежда до решаване на две едномерни задачи за уравненията (2.20), (2.21) със съответните гранични условия по всяко направление. Така за решаване на задачата се правят две „икономични“ стъпки — вж. [33]. Предложената схема на разцепване има апроксимация  $O(\tau)$  по времето, но това не е от принципно значение, когато се постигне установяване. Обаче схемата на стабилизиращата поправка има предимство при некомутиращи оператори — вж. [41].

### 2.2.1 Модификации на схемата на разцепване — полуявна и неявна схема

В дисертацията са разгледани следните две модификации на схемата на разцепване:

- Полуявна схема —  $N_1 = L_1$ ,  $N_2 = L_2$ ,  $G = C_1 + C_2 + F$ ;
- Неявна схема —  $N_1 = L_1 + C_1$ ,  $N_2 = L_2 + C_2$ ,  $G = F$ .

С други думи, схемата на разцепване за еволюционното векторното уравнение (2.18), която е явна относно нелинейните членове и неявна относно линейните членове, по-нататък ще наричаме *полуявна схема* на разцепване. *Неявна* ще наричаме тази схема, в която и нелинейните членове участват на новия слой по фиктивното време.

За полуявната схема двете полустъпки имат вида

$$\frac{\vec{\theta}^{n+1/2} - \vec{\theta}^n}{\tau} = L_1 \vec{\theta}^{n+1/2} + L_2 \vec{\theta}^n + (C_1 + C_2) \vec{\theta}^n + F \vec{\theta}^n, \quad (2.22)$$

$$\frac{\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^{n+1/2}}{\tau} = L_2 \vec{\theta}^{n+1} - L_2 \vec{\theta}^n. \quad (2.23)$$

След преобразувания, за последователното определяне на  $\vec{\theta}^{n+1/2}$  и  $\vec{\theta}^{n+1}$  на първа и втора полустъпка се получават уравненията

$$(I - \tau L_1) \vec{\theta}^{n+1/2} = (I + \tau L_2) \vec{\theta}^n + \tau(C_1 + C_2) \vec{\theta}^n + \tau F \vec{\theta}^n, \quad (2.24)$$

$$(I - \tau L_2) \vec{\theta}^{n+1} = \vec{\theta}^{n+1/2} - \tau L_2 \vec{\theta}^n, \quad (2.25)$$

където  $I = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$ ,  $E$  е единичния оператор.

Аналогично за неявната схема на всяка от полустъпките се решават следните уравнения

$$[I - \tau(L_1 + C_1)] \vec{\theta}^{n+1/2} = [I + \tau(L_2 + C_2)] \vec{\theta}^n + \tau F \vec{\theta}^n, \quad (2.26)$$

$$[I - \tau(L_2 + C_2)] \vec{\theta}^{n+1} = \vec{\theta}^{n+1/2} - \tau(L_2 + C_2) \vec{\theta}^n. \quad (2.27)$$

### 2.2.2 Апроксимация на схемата на разцепване на цяла стъпка по фиктивното време

Не всички схеми на разцепване притежават така наречената „пълна апроксимация“, т.е., когато решението се стабилизира ( $\vec{\theta}^{n+1} \approx \vec{\theta}^n$ ) апроксимацията на стационарното уравнение не зависи от стъпката по фиктивното време  $\tau$ . Пълната апроксимация е от съществено значение за намиране на стационарното решение.

*Схемата на разцепване (2.20), (2.21) има пълна апроксимация на цяла стъпка по фиктивното време.*

За да докажем това, изключваме вектора на полустъпката  $\vec{\theta}^{n+1/2}$ . Преобразуваме (2.20) и (2.21) по следния начин

$$(I - \tau N_1) \vec{\theta}^{n+1/2} = (I + \tau N_2) \vec{\theta}^n + \tau G \vec{\theta}^n, \quad (2.28)$$

$$(I - \tau N_2) \vec{\theta}^{n+1} = \vec{\theta}^{n+1/2} - \tau N_2 \vec{\theta}^n. \quad (2.29)$$

Умножаваме отляво уравнението (2.29) с оператора  $(I - \tau N_1)$  и го прибавяме към (2.28). Получаваме

$$(I - \tau N_1)(I - \tau N_2)\vec{\theta}^{n+1} = (I + \tau N_2)\vec{\theta}^n + \tau G\vec{\theta}^n - \tau(I - \tau N_1)N_2\vec{\theta}^n, \quad (2.30)$$

откъдето следва

$$[I - \tau(N_1 + N_2) + \tau^2 N_1 N_2]\vec{\theta}^{n+1} = (I + \tau^2 N_1 N_2)\vec{\theta}^n + \tau G\vec{\theta}^n \quad (2.31)$$

или

$$(I + \tau^2 N_1 N_2)(\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^n) = \tau(N_1 + N_2)\vec{\theta}^{n+1} + \tau G\vec{\theta}^n. \quad (2.32)$$

Разделяме двете страни на  $\tau$  и получаваме следната схема

$$B \frac{\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^n}{\tau} = (N_1 + N_2)\vec{\theta}^{n+1} + G\vec{\theta}^n, \quad (2.33)$$

където  $B = I + \tau^2 N_1 N_2$ .

Схемата (2.33) апроксимира неявната относно оператора  $N_1 + N_2$  схема

$$\frac{\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^n}{\tau} = (N_1 + N_2)\vec{\theta}^{n+1} + G\vec{\theta}^n, \quad (2.34)$$

за уравнението (2.19) с  $O(\tau^2)$ . На цяла стъпка по времето схемите (2.33) и (2.34) се различават по това, че (2.33) е умножена с оператора  $B$ . Но след установяване ( $\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^n \approx 0$ ) двете схеми водят до едно и също стационарно решение. Следователно, схемата на разцепване (2.20), (2.21) притежава пълна апроксимация по фиктивното време. Уравненията (2.33) и (2.34) „преминават“ в уравнението

$$(N_1 + N_2)\vec{\theta} + G\vec{\theta} = 0 \quad (2.35)$$

независимо от големината на стъпката  $\tau$ , когато се постигне „установяване“ по фиктивното време. Нещо повече, което ще докажем по-долу — операторът  $B$  подобрява устойчивостта на схемата (2.33).

### 2.2.3 Положителна определеност на оператора $L_1 L_2$

Ще докажем положителната определеност на оператора  $L_1 L_2$ , от която следва, че операторът  $B = I + \tau^2 L_1 L_2$  не влошава свойствата на схемата по отношение на устойчивостта. За целта въвеждаме Хилбертово пространство  $\mathcal{H}$ , което се състои от вектор-функциите

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1(x, y) \\ \alpha_2(x, y) \\ \alpha_3(x, y) \end{pmatrix},$$

където функциите  $\alpha_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , са от пространството  $L^2(\mathcal{D})$  от функциите с интегрируем квадрат в областта  $\mathcal{D}$ . Нека освен това вектор-функциите имат компоненти, чиито втори частни производни съществуват, принадлежат на  $H(\mathcal{D})$  и удовлетворяват условието

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} = 0. \quad (2.36)$$

Нека означим с  $H^0(\mathcal{D})$  подпространството на функциите от  $H(\mathcal{D})$ , удовлетворяващи нулеви гранични условия, т.е., за които

$$\vec{\alpha} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Скаларното произведение в хилбертовото пространство  $H(\mathcal{D})$  дефинираме както

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \sum_{i=1}^3 \iint_{\mathcal{D}} \alpha_i \beta_i \, dx \, dy \quad \text{за} \quad \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in H(\mathcal{D}). \quad (2.37)$$

Ще докажем, че операторът  $L_1 L_2 = \begin{pmatrix} L_{xx} L_{yy} & L_x L_y & -L_x L_{yy} \\ 0 & L_{xx} L_{yy} & -L_{xx} L_y \\ -L_x L_{yy} & -L_{xx} L_y & L_{xx} L_{yy} \end{pmatrix}$ , действащ върху пространството  $H(\mathcal{D})$ , е положително определен в  $H^0(\mathcal{D})$ .

Да напомним, че един оператор  $A$  се нарича положително определен (вж. например [33]), ако съществува такава константа  $M > 0$ , че за всеки вектор  $\vec{\alpha}$  от дефиниционната му област е изпълнено  $(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) \geq M(\vec{\alpha}, \vec{\alpha})$ .

Ще докажем, че за оператора  $L_1 L_2$  е изпълнено неравенството

$$(L_1 L_2 \vec{\theta}, \vec{\theta}) \geq \frac{m}{Re^2} (\vec{\theta}, \vec{\theta}) \quad (2.38)$$

в  $H^0(\mathcal{D})$ , където  $m$  е положителна константа, зависеща само от областта  $\mathcal{D}$ . От неравенството (2.38) следва очевидно положителната определеност на  $L_1 L_2$  в  $H^0(\mathcal{D})$ .

Доказателството на (2.38) следва от формулата на Грийн, която при въвежданите означения има вида

$$\iint_{\mathcal{D}} (L_x Q - L_y P) \, dx \, dy = \oint_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy, \quad (2.39)$$

където  $P$  и  $Q$  са произволни достатъчно гладки функции. След като се преобразуват интегралите

$$\begin{aligned} (L_1 L_2 \vec{\theta}, \vec{\theta}) &= \iint_{\mathcal{D}} (L_{xx} L_{yy} u + L_x L_y v - L_x L_{yy} p) \, u \, dx \, dy \\ &\quad + \iint_{\mathcal{D}} (L_{xx} L_{yy} v - L_{xx} L_y p) \, v \, dx \, dy \\ &\quad + \iint_{\mathcal{D}} (-L_x L_{yy} u - L_{xx} L_y v + L_{xx} L_{yy} p) \, p \, dx \, dy \end{aligned}$$

се получава

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} u \cdot L_{xx} L_{yy} u \, dx \, dy &= \frac{1}{Re^2} \iint_{\mathcal{D}} (L_x L_y u)^2 \, dx \, dy \\ &\quad + \frac{1}{Re} \oint_{\Gamma} \frac{1}{Re} L_x u \cdot L_x L_y u \, dx + u \cdot L_x L_{yy} u \, dy, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} v \cdot L_{xx} L_{yy} v \, dx \, dy &= \frac{1}{Re^2} \iint_{\mathcal{D}} (L_x L_y v)^2 \, dx \, dy \\ &\quad - \frac{1}{Re} \oint_{\Gamma} v \cdot L_{xx} L_y v \, dx + \frac{1}{Re} L_y v \cdot L_x L_y v \, dy, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} p \cdot L_{xx} L_{yy} p \, dx \, dy &= \frac{1}{Re^2} \iint_{\mathcal{D}} (L_x L_y p)^2 \, dx \, dy \\ &\quad + \frac{1}{Re} \oint_{\Gamma} \frac{1}{Re} L_x p \cdot L_x L_y p \, dx + p \cdot L_x L_{yy} p \, dy. \end{aligned} \quad (2.42)$$

При направените предположения криволинейните интеграли върху границата  $\Gamma$  в (2.40), (2.41) и (2.42) са равни на нула.

Като се отчете, че функциите  $u$  и  $v$  удовлетворяват условието  $L_x u = -L_y v$ , което следва от уравнението на непрекъснатостта (2.9), получаваме

$$\iint_{\mathcal{D}} u \cdot L_x L_y v \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}} (L_y v)^2 \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} u L_y v \, dy = \iint_{\mathcal{D}} (L_y v)^2 \, dx \, dy. \quad (2.43)$$

Аналогично се преобразуват останалите интеграли

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathcal{D}} (u \cdot L_x L_{yy} p + p \cdot L_x L_{yy} u) \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{D}} (v \cdot L_{xx} L_y p + p \cdot L_{xx} L_y v) \, dx \, dy \\ &= - \oint_{\Gamma} v \cdot L_{xx} p \, dx - u \cdot L_{yy} p \, dy + \frac{1}{Re} \oint_{\Gamma} L_x u \cdot L_y p \, dx - L_x p \cdot L_y v \, dy \\ &\quad - \frac{1}{Re} \oint_{\Gamma} p \cdot L_x L_y u \, dx - p \cdot L_x L_y v \, dy = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Оттук следва, че

$$\begin{aligned} (L_1 L_2 \vec{\theta}, \vec{\theta}) &= \frac{1}{Re^2} \iint_{\mathcal{D}} [(L_x L_y u)^2 + (L_x L_y v)^2 + (L_x L_y p)^2] \, dx \, dy \\ &\quad + \iint_{\mathcal{D}} (L_y v)^2 \, dx \, dy \geq \frac{m}{Re^2} \iint_{\mathcal{D}} (u^2 + v^2 + p^2) \, dx \, dy = \frac{m}{Re^2} (\vec{\theta}, \vec{\theta}), \end{aligned} \quad (2.45)$$



Константата  $m > 0$  зависи само от областта  $\mathcal{D}$ .

Следователно операторът  $L_1 L_2$  е положително определен в  $H^0(\mathcal{D})$ . От проведените по-горе разсъждения е ясно, че положителната определеност на  $L_1 L_2$  се дължи на добавката в уравнението на Поасон за налягането. Операторът  $B$  също е положително определен и нормата му е по-голяма от единица, когато  $\tau \neq 0$ . Поради тази причина операторът  $B$ , който участва в лявата страна на „икономичната“ схема, и по който схемата на разцепване се различава от полунежвната схема, не влошава свойствата на нежвната схема по отношение на устойчивостта.

### 2.2.4 Обобщение на схемата за тримерния случай

Едно предимство на предложената схема на разцепване на оператора във формулировка за решаване на задачата в променливи скорост и налягане пред останалите формулировки е, че лесно се обобщава за тримерния случай. Системата уравнения за определяне на компонентите  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  и  $w(x, y, z)$  на тримерната скорост и налягането  $p(x, y, z)$  имат вида

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} - Cu = 0, \quad (2.46)$$

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} - Cv = 0, \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} - Cw = 0, \quad (2.48)$$

а уравнението на непрекъснатостта се записва като

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.49)$$

където, аналогично на (2.3), с  $C$  е означен операторът

$$Cf = \frac{\partial u f}{\partial x} + \frac{\partial v f}{\partial y} + \frac{\partial w f}{\partial z} - \frac{f}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Нека  $\vec{\theta}$  е четиримерен вектор, на който първите три координати са компонентите на скоростта  $u$ ,  $v$  и  $w$ , а четвъртата компонента е налягането  $p$ . Аналогично на двумерния случай  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  са операторите

$$L_1 = \begin{pmatrix} L_{xx} & 0 & 0 & -L_x \\ 0 & L_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} & 0 \\ -L_x & 0 & 0 & L_{xx} \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} L_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy} & 0 & -L_y \\ 0 & 0 & L_{yy} & 0 \\ 0 & -L_y & 0 & L_{yy} \end{pmatrix},$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} L_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{zz} & -L_z \\ 0 & 0 & -L_z & L_{zz} \end{pmatrix}, \quad F\vec{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Fp \end{pmatrix},$$

където са използвани означенията

$$Fp = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial Cu}{\partial x} + \frac{\partial Cv}{\partial y} + \frac{\partial Cw}{\partial z} \right),$$

$$L_{xx} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_{yy} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{zz} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad L_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

С  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  са означени операторите от нелинейните членове в уравненията, аналогични на въведените в двумерния случай

$$C_1 = \begin{pmatrix} -C_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -C_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

където

$$C_x f = \frac{\partial u f}{\partial x} - \frac{f \partial u}{2 \partial x}, \quad C_y f = \frac{\partial v f}{\partial y} - \frac{f \partial v}{2 \partial y}, \quad C_z f = \frac{\partial w f}{\partial z} - \frac{f \partial w}{2 \partial z}.$$

Тогава уравненията за скоростта и налягането, след въвеждане на фиктивно време  $t_1$  със стъпка  $\tau$ , във векторна форма имат вида

$$\frac{\partial \vec{\theta}}{\partial t_1} = (L_1 + L_2 + L_3) \vec{\theta} + (C_1 + C_2 + C_3) \vec{\theta} + F \vec{\theta}.$$

Полунеявната схема за това уравнение е

$$\frac{\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^n}{\tau} = (L_1 + L_2 + L_3) \vec{\theta}^{n+1} + (C_1 + C_2 + C_3) \vec{\theta}^n + F \vec{\theta}^n. \quad (2.50)$$

Трите стъпки от схемата на разцепване на оператора  $L_1 + L_2 + L_3$  имат вида

$$\frac{\vec{\theta}^{n+\frac{1}{3}} - \vec{\theta}^n}{\tau} = L_1 \vec{\theta}^{n+\frac{1}{3}} + (L_2 + L_3) \vec{\theta}^n + (C_1 + C_2 + C_3) \vec{\theta}^n + F \vec{\theta}^n, \quad (2.51)$$

$$\frac{\vec{\theta}^{n+\frac{2}{3}} - \vec{\theta}^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} = L_2 \vec{\theta}^{n+\frac{2}{3}} - L_2 \vec{\theta}^n, \quad (2.52)$$

$$\frac{\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} = L_3 \vec{\theta}^{n+1} - L_3 \vec{\theta}^n. \quad (2.53)$$

От последните три уравнения, като изключим  $\vec{\theta}^{n+\frac{1}{3}}$  и  $\vec{\theta}^{n+\frac{2}{3}}$ , получаваме следната апроксимация на уравнението (2.50)

$$\begin{aligned} [I + \tau^2(L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3) - \tau^3L_1L_2L_3] \frac{\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^n}{\tau} \\ = (L_1 + L_2 + L_3)\vec{\theta}^{n+1} + (C_1 + C_2 + C_3)\vec{\theta}^n + F\vec{\theta}^n. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Следователно схемата на разцепване (2.51)–(2.53) притежава пълна апроксимация на цяла стъпка по фиктивното време и „преминава“ в схемата (2.50), когато  $\tau \rightarrow 0$ . При това операторът  $L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3$  е положително определен, а операторът  $L_1L_2L_3$  — отрицателно определен. Доказателството е аналогично на доказателството на положителната определеност на оператора  $L_1L_2$  в схемата на разцепване в двумерния случай и следва от формулата на Гаус-Остроградски и уравнението на непрекъснатостта.

В тримерния случай също може да бъде конструирана неявна схема на разцепване, аналогична на тази в двумерния. В този случай конвективните членове участват на новия слой по фиктивното време.

## 2.3 Приложение към задачата за течение в каверна

Обикновено повите схеми и алгоритми се изпробват върху добре изучени и „сигурни“ тестови задачи. За уравненията на Навие-Стокс такава задача е течението в правоъгълна каверна, капакът на която се движи хоризонтално. Тя е типична за вътрешни течения и е разгледана от много автори. Предимството на примера с каверната е, че геометрията на областта е възможно най-проста. Има особености в точките, в които капакът се допира до вертикалните стени — там има прекъсване на граничното условие за компонентата на скоростта  $u(x, y)$ , но тези трудности са преодолими.

### 2.3.1 Течение в каверна с подвижна горна граница

Разглеждаме случая, когато областта  $\mathcal{D}$  е единичния квадрат (вж. Фигура 2.1)

$$\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

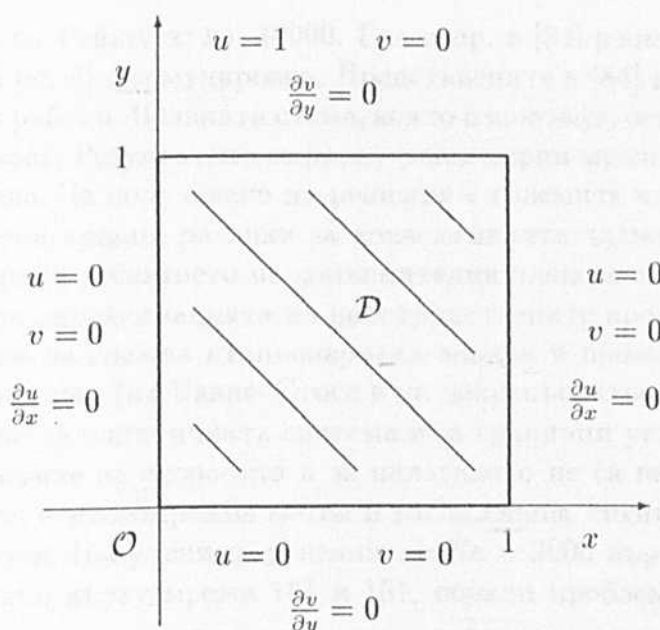
Нека горната граница на областта се движи надясно с постоянна скорост  $(u, v) = (1, 0)$ . Тогава граничните условия за полепване и непротичане върху границата на областта имат вида

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad (2.55)$$

$$u(x, 1) = 1, \quad v(x, 1) = 0, \quad (2.56)$$

$$u(0, y) = 0, \quad v(0, y) = 0, \quad (2.57)$$

$$u(1, y) = 0, \quad v(1, y) = 0. \quad (2.58)$$

Фигура 2.1: Областта  $\mathcal{D}$ .

Във всяка точка от границата има по едно гранично условие за всяка от функциите  $u$  и  $v$ . В горните два ъгъла граничното условие за  $u$  не е непрекъснато.

Поради причини, които вече изяснихме, за затваряне на системата като гранично условие е използвано и уравнението на непрекъснатостта (2.9), именно

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (2.59)$$

Върху различните страни на квадрата от условията (2.55)–(2.59) следва

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,y)} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x,0)} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x,1)} = 0. \quad (2.60)$$

На Фигура 2.1 е представена областта  $\mathcal{D}$  като на всяка от страните на квадрата са написани съответните гранични условия.

### 2.3.2 Кратък обзор на методите за решаване на задачата

Както вече казахме, задачата за течение в каверна е решавана от много автори. В литературата са публикувани не малко резултати за средно големи числа на Рейнолдс (вж. [61, 65, 86, 88, 106, 153, 146]). Има също така и резултати за големи  $Re$  (например [111, 132, 133]), но адекватността на много от тези резултати не може да се приеме безрезервно поради размерите на използваната мрежа за решаване и трудностите със сходимостта.

Като най-правдоподобни на този етап се считат резултатите, получени от Турек [148], Гиа и др. [84]. В [148] методът на крайните елементи е приложен върху адаптивна мрежа. Решена е нестационарната задача и са получени стационарни

решения за числа на Рейнолдс до 10000. Гиа и др. в [84] решават задачата за течение в каверна в  $(\omega, \psi)$  формулировка. Представените в [84] резултати са база за сравнение в много работи. Неявната схема, която използват, осигурява много добра скорост на сходимост. Резултатите са върху равномерни мрежи, като най-гъстата е с  $257 \times 257$  възела. За получаване на решения с големите числа на Рейнолдс са използвани насочени крайни разлики за конвективните членове, които имат изглаждащ ефект поради добавянето на допълнителни членове за достигане на втори ред на точност при апроксимацията по пространствените променливи.

В [153] Ванка разглежда стационарната задача в променливи  $(u, v, p)$  като решава трите уравнения (на Навие–Стокс и на непрекъснатостта) заедно. По този начин, за решаване на елиптичната система има гранични условия от тип на Дирихле за компонентите на скоростта и за налягането не са необходими гранични условия. Използван е мрежов метод и изглаждаща техника, основана на метода на Гаус–Зайдел. Получени са решения до  $Re = 2000$  върху мрежа  $321 \times 321$ , а за  $Re = 5000$  само върху мрежа  $161 \times 161$ , поради проблеми със скоростта на сходимост.

Близо до разглеждания тук нов метод на разцепване е работата на Ким и Мин [106], както и [65]. В двете работи е решена нестационарната задача в  $(u, v, p)$  променливи. В [65] използват схеми на разцепване на оператора за решаване на уравненията на Навие–Стокс В [106] е приложен методът на дробните стъпки, комбиниран с факторизационна техника. Схемата на разцепване, която използват, е явна за конвективните членове и неявна за вискозните членове. Налягането е изключено посредством функцията  $\phi$  като  $p = \phi + (\Delta t/2)\nabla^2\phi$ . Тази функция се определя на втора полустъпка с точност до адитивна константа от уравнение на Поасон. При решаването му е използвана факторизационна схема. Специално внимание е отделено на граничното условие на полустъпката. Представени са резултати до  $Re = 5000$ , като най-гъстата мрежа е  $97 \times 97$ . В [65] използват подобна схема на разцепване за решаване на уравненията на Навие–Стокс като на първа полустъпка се определя скоростта, а на втора налягането. Алгоритъмът е реализиран върху неразместена мрежа и са представени резултати за задачата за течение в каверна с числа на Рейнолдс до  $Re = 3200$ .

Стационарната задача е решена и в [146] в  $(u, v, p)$  променливи. Перот в [123] обсъжда метода на дробните стъпки и обръща внимание на проблемите, свързани с налягането при този метод. В [89] е приложен методът на крайните елементи към задачата за течение в каверна. Получени са резултати за числа на Рейнолдс до 5000.

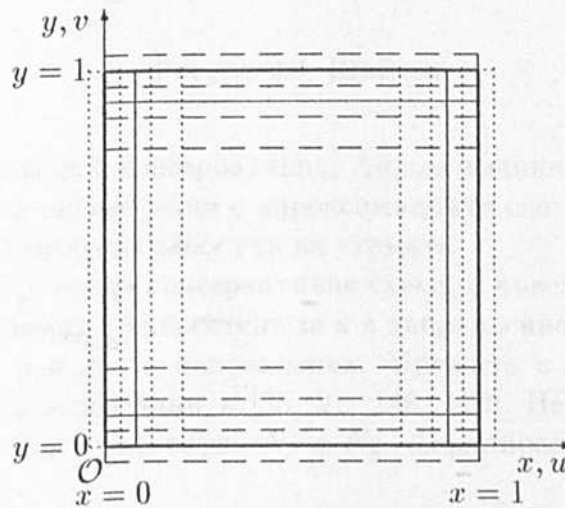
Методи с по-голяма точност на апроксимация във формулировка  $(\omega, \psi)$  са илюстрирани с примера за течение в каверна в [90] и [110, 111]. Поради голямата неустойчивост на тези методи, приемливи резултати са получени в [90] само за  $Re < 1000$ , въпреки че е пресмятано и с  $Re = 2000$ , докато в [110] неустойчивост се появява още при  $Re = 300$ . По-късно в [111] получават сходимост и за по-големи стойности на числото на Рейнолдс ( $Re = 10000$ ) като използват методи с по-голяма точност на апроксимация.

В [132] е решено нелинейното бихармонично уравнение (1.9) за определяне на функцията на тока  $\psi$  като не се използва покоординатно разцепване. Решават се

диференчните уравнения по метод на Гаус, но времето за пресмятане на решението върху мрежа  $180 \times 180$  е прекалено голямо. Разработен е алгоритъм, който е комбинация между метода на Нютон и метода на хордите, и са получени резултати за числа на Рейнолдс до 10000 върху различни мрежи, като най-добрата е с  $180 \times 180$  възела. Представените резултати за големи числа на Рейнолдс (като например 10000), се различават от сега приетите стойности за решение на задачата. В [61] също е решено бихармоничното уравнение (1.9). Там се използва метод на покоординатно разцепване на оператора  $\Delta\Delta\psi$  и равномерна разместена мрежа по двете направления —  $x$  и  $y$ . Най-голямото число на Рейнолдс, за което са представени стационарни решения, е  $Re = 5000$ , като пресмятания са извършени до 40000. В областта на големите числа на Рейнолдс, като  $10000 < Re < 40000$ , се наблюдава бифуркация на решението.

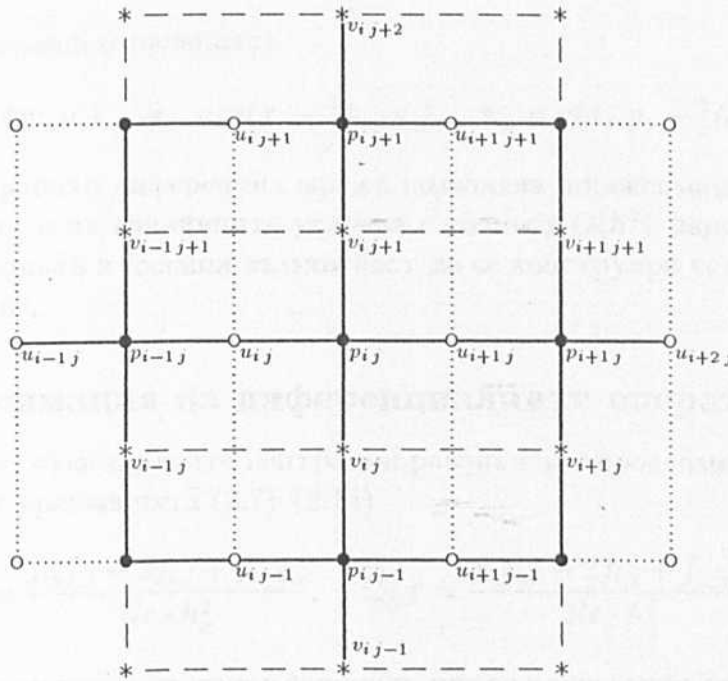
Шен (вж. [133]) решава нестационарната задача върху мрежа  $65 \times 65$  и също наблюдава периодични по времето пулсации на течението, които водят до Хопф-бифуркация, и започват когато  $Re \in (10000, 10500]$ . При  $Re = 15500$  численото решение губи периодичността си. Според Шен е почти сигурно, че при по-големи числа на Рейнолдс течението преминава в турбулентен режим.

### 2.3.3 Диференчна мрежа



Фигура 2.2: Диференчна мрежа.

Целта, която си поставяме, е да конструираме диференчна схема и алгоритъм за решаване на задачата при големи числа на Рейнолдс, която да има втори ред на апроксимация по пространствените променливи. Както е известно, не е достатъчно да се осигури висок ред на апроксимация на диференциалните оператори в уравненията и на граничните условия — често схеми с по-нисък ред на апроксимация дават по-добри резултати. Диференчните апроксимации на операторите в уравненията трябва да бъдат такива, че да гарантират удовлетворяването на определени интегрални закони за съхранение, които са в сила за изходните диференциални



Фигура 2.3: Шаблон.

уравнения, т.е. схемата да е консервативна. Апроксимациите на граничните условия е необходимо да са съгласувани с апроксимациите операторите в уравненията така, че да запазват консервативността на схемата.

За да бъде конструирана консервативна схема, е въведена равномерна мрежа в двете направления, която е разместена за  $u$  в направление  $x$  и за  $v$  в направление  $y$  и неразместена за  $p$  в двете направления. Мрежата е дадена на Фигура 2.2. Аналогични мрежи са използвани в [85, 91, 146, 153]. Нека броят на възлите в двете направления  $x$  и  $y$  е съответно  $N_x$  и  $N_y$ . Дефинираме стъпките по следния начин

$$h_x = \frac{1}{N_x - 1}, \quad h_y = \frac{1}{N_y - 1}.$$

На Фигура 2.3 е представен шаблонът, върху който е извършено дискретизирането на операторите в уравненията. Във възлите, означени с „●“, се пресмята налягането. Координатите на тези възли са

$$(x_i, y_j) = [(i - 1)h_x, (j - 1)h_y] \quad \text{за } i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y.$$

Функцията  $u$  се пресмята във възлите „○“ с координати

$$(x_i - \frac{1}{2}h_x, y_j) \quad \text{за } i = 1, \dots, N_x + 1, \quad j = 1, \dots, N_y.$$

Функцията  $v$  се търси във възлите от мрежата „\*“, т.е.

$$(x_i, y_j - \frac{1}{2}h_y) \quad \text{за} \quad i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y + 1.$$

За удобство са въведени означенията

$$p_{ij} = p(x_i, y_j), \quad u_{ij} = u(x_i - \frac{1}{2}h_x, y_j), \quad v_{ij} = v(x_i, y_j - \frac{1}{2}h_y).$$

Така дефинираната диференчна мрежа позволява апроксимации на операторите в уравненията и на граничните условия с точност  $O(h^2)$ , запазващи консервативността на схемата и даващи възможност да се конструира устойчива неявна схема на разцепване.

### 2.3.4 Апроксимация на диференциалните оператори

Използвани са стандартните централни разлики за апроксимиране на операторите  $L_{xx}$  и  $L_{yy}$  в уравненията (2.7)–(2.14)

$$L_{xx}^h f = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{Re \cdot h_x^2}, \quad L_{yy}^h f = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{Re \cdot h_y^2}, \quad (2.61)$$

където с  $f$  е означена някоя от трите функции, чиито производни се апроксимират —  $u$ ,  $v$  или  $p$ . Операторите  $L_x$  и  $L_y$  се апроксимират с  $O(h^2)$  във вътрешните възли на областта  $\mathcal{D}$ , а именно:

$$L_x^h p = \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{h_x}, \quad L_y^h p = \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{h_y}, \quad (2.62)$$

$$L_x^h u = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x}, \quad L_y^h v = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_y}. \quad (2.63)$$

Производните в оператора

$$Fp = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial C u}{\partial x} + \frac{\partial C v}{\partial y} \right) = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 uv}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} \right) \quad (2.64)$$

са апроксимирани както следва

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2} \right|_{(x_i, y_j)} &\approx \frac{1}{h_x^2} \left[ \left( \frac{u_{i+2,j} + u_{i+1,j}}{2} \right)^2 - 2 \left( \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2} \right)^2 + \left( \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} \right)^2 \right], \\ \left. \frac{\partial^2 (uv)}{\partial x \partial y} \right|_{(x_i, y_j)} &\approx \frac{1}{h_x h_y} \left[ \frac{(u_{i,j} + u_{i,j-1})(v_{i-1,j} + v_{i,j})}{4} - \frac{(u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1})(v_{i,j} + v_{i+1,j})}{4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j})(v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1})}{4} - \frac{(u_{i,j+1} + u_{i,j})(v_{i-1,j+1} + v_{i,j+1})}{4} \right], \\ \left. \frac{\partial^2 (v^2)}{\partial y^2} \right|_{(x_i, y_j)} &\approx \frac{1}{h_y^2} \left[ \left( \frac{v_{i,j+2} + v_{i,j+1}}{2} \right)^2 - 2 \left( \frac{v_{i,j+1} + v_{i,j}}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_{i,j} + v_{i,j-1}}{2} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$



Отделено е специално внимание на диференчната апроксимация на нелинейните членове, тъй като с увеличаване на числото на Рейнолдс се засилва тяхното влияние. Конвективните членове в уравненията за компонентите на скоростта са апроксимирани с консервативни диференчни апроксимации с централни разлики с втори ред на точност относно стъпките по пространствените променливи

$$\begin{aligned}
 C_x^h u &= \frac{(u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n)u_{i+1,j} - (u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n)u_{i-1,j}}{4h_x}, \\
 C_y^h u &= \frac{(v_{i,j+1}^n + v_{i-1,j+1}^n)u_{i,j+1} - (v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n)u_{i,j-1}}{4h_y}, \\
 C_x^h v &= \frac{(u_{i+1,j}^n + u_{i+1,j-1}^n)v_{i+1,j} - (u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n)v_{i-1,j}}{4h_x}, \\
 C_y^h v &= \frac{(v_{i,j+1}^n + v_{i,j}^n)v_{i,j+1} - (v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n)v_{i,j-1}}{4h_y},
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

които запазват антисиметричната структура на съответните диференциални оператори.

### 2.3.5 Апроксимация на граничните условия

Разместеността на въведената мрежа позволява използването на централни разлики с втори ред на точност на апроксимация на граничните условия.

Граничните условия за функцията  $u$  са апроксимирани както следва:

$$\begin{aligned}
 x = 0 : \quad u_{1,j} + u_{2,j} &= 0, & y = 0 : \quad u_{i,1} &= 0, \\
 x = 1 : \quad u_{N_x,j} + u_{N_x+1,j} &= 0, & y = 1 : \quad u_{i,N_y} &= 1,
 \end{aligned}$$

за  $i = 1, \dots, N_x + 1, \quad j = 1, \dots, N_y$ .

За функцията  $v$  граничните условия имат вида:

$$\begin{aligned}
 x = 0 : \quad v_{1,j} &= 0, & y = 0 : \quad v_{i,1} + v_{i,2} &= 0, \\
 x = 1 : \quad v_{N_x,j} &= 0, & y = 1 : \quad v_{i,N_y} + v_{i,N_y+1} &= 0,
 \end{aligned}$$

за  $i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y + 1$ .

И накрая, граничните условия, които са получени от уравнението на непрекъснатостта, са апроксимирани по следния начин

$$\begin{aligned}
 x = 0 : \quad u_{2,j} - u_{1,j} &= 0, & y = 0 : \quad v_{i,2} - v_{i,1} &= 0, \\
 x = 1 : \quad u_{N_x+1,j} - u_{N_x,j} &= 0, & y = 1 : \quad v_{i,N_y+1} - v_{i,N_y} &= 0,
 \end{aligned}$$

за  $i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y$ .

Стойностите на функцията  $u$  в горните два ъгъла на областта са както следва

$$u_{1,N_y} = u_{2,N_y} = u_{N_x,N_y} = u_{N_x+1,N_y} = 1.$$

## 2.4 Полуявна схема на разцепване

Полуявната схема на разцепване е неявна относно линейните и явна относно конвективните членове. Вече доказахме, че тя притежава пълна апроксимация на цяла стъпка по фиктивното време и, че не влошава свойствата на съответната полуявна схема (без разцепване) по отношение на устойчивостта.

### 2.4.1 Консервативност

Диференчните апроксимации на вторите производни (2.61) с централни разлики при  $Re > 0$ , тези на първите производни (2.62), (2.63) и апроксимацията на оператора  $Fr$ , не нарушават консервативността на схемата на разцепване.

Ще покажем, че за диференциалния оператор  $C$  са в сила равенствата<sup>2</sup>

$$(Cu, u) = 0 \quad \text{и} \quad (Cv, v) = 0, \quad (2.66)$$

при условие че уравнението на непрекъснатостта е удовлетворено в областта  $\mathcal{D}$ , откъдето следва и условието (2.12). Същото е изпълнено и за операторите  $C_x$  и  $C_y$ , т.е.

$$(C_x u, u) = 0, \quad (C_y u, u) = 0, \quad (C_x v, v) = 0, \quad (C_y v, v) = 0, \quad (2.67)$$

ако върху границата са удовлетворени условията (2.55)–(2.58).

За доказателство на горните твърдения нека предположим, че всички функции са диференцируеми толкова пъти, колкото го изисква коректността на разсъжденията.

С помощта на формулата на Грийн и след очевидни преобразувания се получава

$$\begin{aligned} (Cu, u) &= \iint_{\mathcal{D}} \left[ \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} - \frac{u}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \cdot u \, dx \, dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \left( u \frac{\partial u^2}{\partial x} + u \frac{\partial uv}{\partial y} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \, dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{3u^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + uv \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left( 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial u^3}{\partial x} + \frac{\partial u^2 v}{\partial y} \right) dx \, dy = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -u^2 v \, dx + u^3 \, dy. \end{aligned}$$

<sup>2</sup> $(\cdot, \cdot)$  е скаларното произведение в пространството  $L^2$  от функциите с интегрируем квадрат.

Аналогично за оператора  $(Cv, v)$  е изпълнено

$$(Cv, v) = \iint_{\mathcal{D}} \left[ \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{v}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \cdot v \, dx \, dy = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -v^3 \, dx + uv^2 \, dy.$$

От това, че функциите  $u$  и  $v$  удовлетворяват условието (2.12)) върху границата на областта  $\Gamma$  следва, че за оператора  $C$  са в сила равенствата  $(Cu, u) = 0$  и  $(Cv, v) = 0$  в пространството  $L^2(\mathcal{D})$ . Следователно  $C$  допуска конструирането на устойчиви диференчни схеми. Лесно се вижда, че са изпълнени също и (2.67), ако са удовлетворени граничните условия (2.55)-(2.58).

За операторите  $C_1$  и  $C_2$ , действащи в пространството  $H(\mathcal{D})$ , имаме, че

$$(C_1 \vec{\theta}, \vec{\theta}) = 0, \quad (C_2 \vec{\theta}, \vec{\theta}) = 0, \quad (2.68)$$

откъдето следва

$$[(C_1 + C_2) \vec{\theta}, \vec{\theta}] = 0, \quad (2.69)$$

ако върху границата  $\Gamma$  на областта  $\mathcal{D}$  са изпълнени условията (2.55)-(2.58). Доказателството на равенствата (2.68) следва веднага от определеността на скаларното произведение в пространството  $H(\mathcal{D})$  и твърденията (2.67), т.е.

$$(C_1 \vec{\theta}, \vec{\theta}) = - \iint_{\mathcal{D}} (u \cdot C_x u + v \cdot C_x v) \, dx \, dy = 0,$$

$$(C_2 \vec{\theta}, \vec{\theta}) = - \iint_{\mathcal{D}} (u \cdot C_y u + v \cdot C_y v) \, dx \, dy = 0.$$

Апроксимациите (2.65) на конвективните членове запазват антисиметричната структура на съответните диференциални оператори, т.е. изпълнени са условията (като се отчетат и съответните граничните условия)

$$(C_x^h u, u) = 0, \quad (C_y^h u, u) = 0, \quad (C_x^h v, v) = 0, \quad (C_y^h v, v) = 0, \quad (2.70)$$

където диференчният аналог на скаларното произведение в  $L^2(\mathcal{D})$  е

$$(\alpha, \beta) = \sum_i \sum_j \alpha_{i,j} \beta_{i,j} h_x h_y.$$

От проведените разсъждения следва, че предложената в настоящата дисертация схема на векторно разцепване на оператора е консервативна и има втори ред на точност на апроксимация по пространствените променливи.

## 2.4.2 Алгоритъм за решаване на диференчната задача

След разцепването и дискретизирането на диференциалните оператори, се получават две системи, всяка от които има приблизително  $3N_x N_y$  на брой линейни уравнения за определяне на стойностите на търсените функции  $u_{i,j}$ ,  $v_{i,j}$  и  $p_{i,j}$  —



областта са

$$\mathcal{R}[u_{ij}] = u_{i,j}^n + \tau L_{yy}^h u^n - \tau C^h u^n, \quad (2.71)$$

$$\mathcal{R}[p_{ij}] = p_{i,j}^n + \tau L_{yy}^h p^n - \tau L_y^h v^n + \tau F^h p^n, \quad (2.72)$$

$$\mathcal{R}[v_{ij}] = v_{i,j}^n + \tau L_{yy}^h v^n - \tau L_y^h p^n - \tau C^h v^n. \quad (2.73)$$

Съответно  $\mathcal{R}[u_{1j}]$ ,  $\mathcal{R}[u_{N_x+1j}]$ ,  $\mathcal{R}[v_{1j}]$  и  $\mathcal{R}[v_{N_xj}]$  са десните страни в апроксимациите на граничните условия на функциите  $u$  и  $v$  при  $y = 0$  и  $y = 1$ . Векторите с неизвестните и десните страни нека са

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ p_{1,j} \\ u_{2,j} \\ p_{2,j} \\ \dots \\ u_{i,j} \\ p_{i,j} \\ \dots \\ u_{N_x,j} \\ p_{N_x,j} \\ u_{N_x+1,j} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_{1,j} \\ v_{2,j} \\ \dots \\ v_{i,j} \\ \dots \\ v_{N_x-1,j} \\ v_{N_x,j} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{\text{up}} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}[u_{1j}] \\ 0 \\ \mathcal{R}[u_{2j}] \\ \mathcal{R}[p_{2j}] \\ \dots \\ \mathcal{R}[u_{ij}] \\ \mathcal{R}[p_{ij}] \\ \dots \\ \mathcal{R}[u_{N_xj}] \\ 0 \\ \mathcal{R}[u_{N_x+1j}] \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{\text{v}} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}[v_{1j}] \\ \mathcal{R}[v_{2j}] \\ \dots \\ \mathcal{R}[v_{ij}] \\ \dots \\ \mathcal{R}[v_{N_x-1j}] \\ \mathcal{R}[v_{N_xj}] \end{pmatrix}.$$

При така въведените означения системите на първа полустъпка имат вида

$$\mathcal{A}_{\text{up}} \cdot \mathbf{w}^{n+1/2} = \mathcal{R}_{\text{up}} \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_{\text{v}} \cdot \mathbf{v}^{n+1/2} = \mathcal{R}_{\text{v}}. \quad (2.74)$$

За втора полустъпка използваме означенията

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ \dots \\ u_{i,j} \\ \dots \\ u_{i,N_y-1} \\ u_{i,N_y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} v_{i,1} \\ p_{i,1} \\ v_{i,2} \\ p_{i,2} \\ \dots \\ v_{i,j} \\ p_{i,j} \\ \dots \\ v_{i,N_y} \\ p_{i,N_y} \\ v_{i,N_y+1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_{\text{u}} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}[u_{i1}] \\ \mathcal{S}[u_{i2}] \\ \dots \\ \mathcal{S}[u_{ij}] \\ \dots \\ \mathcal{S}[u_{iN_y-1}] \\ \mathcal{S}[u_{iN_y}] \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_{\text{vp}} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}[v_{i1}] \\ 0 \\ \mathcal{S}[v_{i2}] \\ \mathcal{S}[p_{i2}] \\ \dots \\ \mathcal{S}[v_{ij}] \\ \mathcal{S}[p_{ij}] \\ \dots \\ \mathcal{S}[v_{iN_y}] \\ 0 \\ \mathcal{S}[v_{iN_y+1}] \end{pmatrix}.$$

Десните страни на системите, които се решават на втора полустъпка, във вътрешните възли на областта са

$$\mathcal{S}[u_{ij}] = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tau L_{yy}^h u^n, \quad (2.75)$$

$$\mathcal{S}[v_{ij}] = v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tau(L_{yy}^h v^n - L_y^h p^n), \quad (2.76)$$

$$\mathcal{S}[p_{ij}] = p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tau(L_{yy}^h p^n - L_y^h v^n). \quad (2.77)$$

Аналогично на първата полустъпка, с  $\mathcal{S}[u_{i1}]$ ,  $\mathcal{S}[u_{iN_y+1}]$ ,  $\mathcal{S}[v_{i1}]$  и  $\mathcal{S}[v_{iN_y}]$  са означени десните страни в апроксимациите на граничните условия на функциите  $u$  и  $v$  при  $x = 0$  и  $x = 1$ .

След въведените означения на втора полустъпка двете линейни алгебрични системи за определяне на  $u_{i,j}^{n+1}$ ,  $v_{i,j}^{n+1}$  и  $p_{i,j}^{n+1}$ , имат вида

$$\mathcal{B}_u \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \mathcal{S}_u \quad \text{и} \quad \mathcal{B}_{vp} \cdot \mathbf{z}^{n+1} = \mathcal{S}_{vp}, \quad (2.78)$$

като тук  $\mathcal{B}_u$  е матрицата на тридиагоналната система, а  $\mathcal{B}_{vp}$  е матрицата на петдиагоналната система.

Многодиагоналните системи от линейни уравнения са решени по специален метод [58], който е обобщение на така наречения алгоритъм на Томас в литературата на английски език или „прогонка“ в руската литература.

Алгоритъмът за решаване на диференчната задача е следния:

1. Задават се стойности на параметрите на задачата  $Re$ ,  $\tau$ ,  $\varepsilon$ ,  $N_x$ ,  $N_y$  и начални приближения за търсените функции  $u_{i,j}^n = v_{i,j}^n = p_{i,j}^n = 0$  за  $n = 0$ ;
2. От (2.74) се пресмятат стойностите  $u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$  на първа полустъпка като се използват  $u_{i,j}^n$ ,  $v_{i,j}^n$ ,  $p_{i,j}^n$ ;
3. От (2.78) се пресмятат стойностите  $u_{i,j}^{n+1}$ ,  $v_{i,j}^{n+1}$ ,  $p_{i,j}^{n+1}$  на втора полустъпка като се използват  $u_{i,j}^n$ ,  $v_{i,j}^n$ ,  $p_{i,j}^n$  и  $u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ .

Центрира се налягането, така че средната му стойност да бъде нула

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^{n+1} - p_m, \quad \text{където} \quad p_m = \left( \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} p_{i,j}^{n+1} \right) / (N_x N_y);$$

4. Проверява се дали е изпълнено условието за край на пресмятанията

$$R^u(n) \leq \varepsilon, \quad R^v(n) \leq \varepsilon, \quad R^p(n) \leq \varepsilon, \quad (2.79)$$

където

$$R^f(n) = \frac{1}{\tau} \frac{\max_{i,j} |f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n|}{\max_{i,j} |f_{i,j}^{n+1}|}. \quad (2.80)$$

Ако условието за край (2.79) не е удовлетворено за някоя от търсените функции ( $u$ ,  $v$  или  $p$ ), алгоритъмът се връща на точка 2.

Ако условието (2.79) е удовлетворено и за трите функции, пресмятанията се прекратяват и за приближение на решението се вземат стойностите от последната итерация.

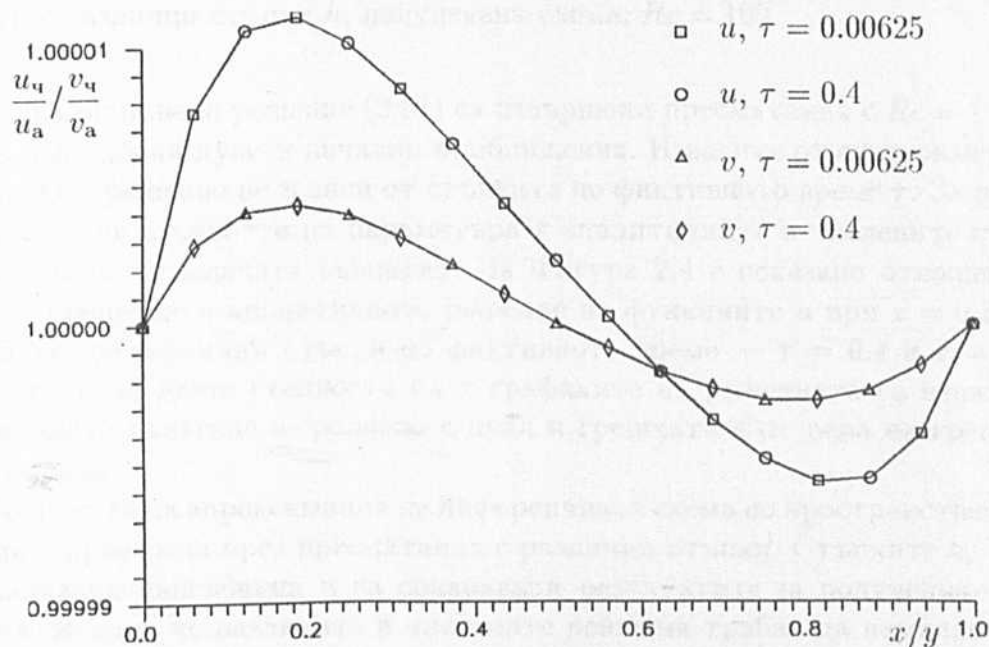
### 2.4.3 Числени експерименти за проверка на алгоритъма

Компютърните пресмятания са извършени с персонален компютър от типа IBM – PC (Pentium/120 MHz, 16 MB RAM). За проверка на коректността на схемата и числената реализация на алгоритъма за решаване, използваме аналитичните решения

$$u = \frac{1}{Re} - e^{x+y}, \quad v = \frac{1}{Re} + e^{x+y}, \quad p = \text{const}; \quad (2.81)$$

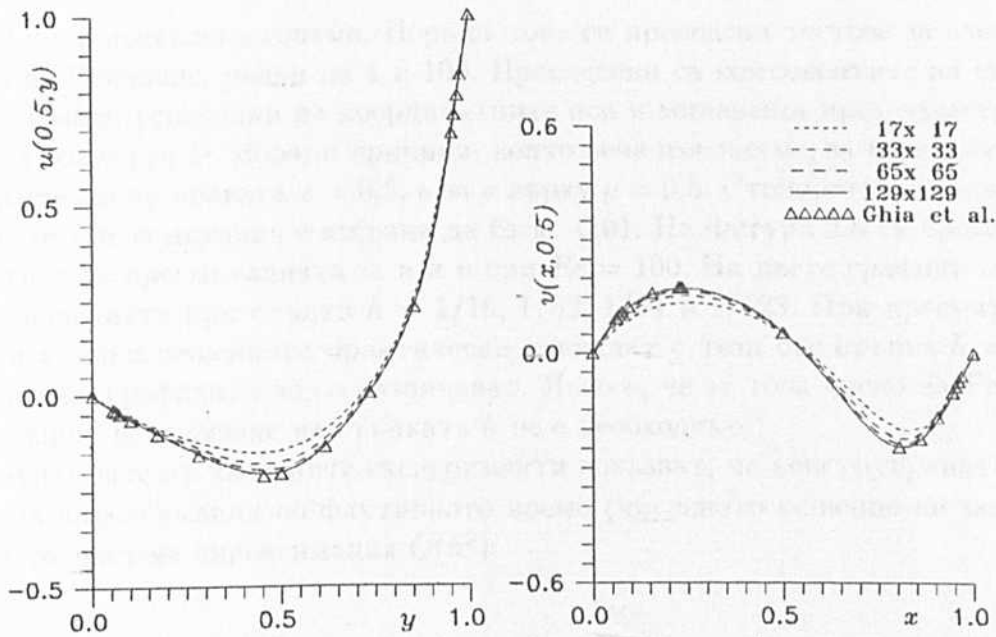
$$u = e^y \cos x, \quad v = e^y \sin x, \quad p = -\frac{1}{2}e^{2y}. \quad (2.82)$$

Решението (2.81) е дадено в [82], а (2.82) е указано от Чавдар Маринов в частно съобщение. Предимството на решението (2.81) е, че зависи от числото на Рейнолдс, а пък на другото решение (2.82), че градиентът на налягането не е равен на пула. Особено внимание е отделено на тестовете, свързани с апроксимацията на граничното условие (2.60) (на страница 28) в точките (0, 1) и (1, 1), в които  $u(x, y)$  не е непрекъсната, когато се решава задачата за течение в каверна.



Фигура 2.4: Отношенията на численото към аналитичното решение за функциите  $u(0.5, y)$  и  $v(x, 0.5)$  за различни стойности на  $\tau$  ( $\tau = 0.4$  и  $\tau = 0.00625$ ),  $h = 1/32$ .

Пай-напред беше установен фактът, че численото решение апроксимира аналитичните решения с точност от реда на апроксимация —  $O(h_x^2 + h_y^2)$ . Направени са тестове с различни гранични условия — когато и трите гранични условия са от тип на Дирихле и когато двете са от тип на Дирихле, а третото от тип на Нойман, т.е. граничното условие (2.60). Установи се, че граничното условие от тип на Нойман не забавя сходимостта на диференчната схема. При всички тези пресмятания стойността на параметъра  $\varepsilon$  е избрана да бъде  $\varepsilon = 10^{-8}$ .



Фигура 2.5: Профили на скоростта през геометричния център на каверната, пресметнати с различни стъпки  $h$ , полуявна схема,  $Re = 100$ .

С аналитичното решение (2.81) са извършени пресмятания с  $Re = 1$  и  $Re = 4$  като са използвани нулеви начални приближения. Изводите от експериментите са, че численото решение не зависи от стъпката по фиктивното време  $\tau$ . За пресмятания с различни стойности на параметъра  $\tau$  аналитичните и числените стойности на решенията на задачата съвпадат. На Фигура 2.4 е показано отношението на численото решение и аналитичното решение на функциите  $u$  при  $x = 0.5$  и  $v$  при  $y = 0.5$  за две различни стъпки по фиктивното време —  $\tau = 0.4$  и  $\tau = 0.00625$ . Вижда се, че за двете стойности на  $\tau$  графиките на решенията са неразличими. Центрираното налягане е сравнено с нула и грешката е от реда на грешката от апроксимация.

Точността на апроксимация на диференчната схема по пространствените променливи е проверена чрез пресмятания с различни стъпки. Стъпките  $h_x = h_y = h$  са намалявани наполовина и са сравнявани резултатите за получените числени решения. Ясно е, че разликите в числените решения трябва да намаляват. Пещо повече — ако схемата има апроксимация  $O(h^2)$ , разликите между стойностите от пресмятанията със стъпки  $h$  и  $h/2$  трябва да бъдат поне около три-четири пъти по-малки от тези при пресмятанията със стъпки  $2h$  и  $h$ . Едновременното намаляване на стъпките по двете направления при задачата за каверната с подвижна горна граница се налага, поради това че функцията  $u$  има по-съществени промени по вертикално направление,  $v$  — по хоризонтално. Въпреки че са правени тестове и с намаляване само на една от стъпките, почти всички резултати, които са представени тук, са върху квадратни мрежи.

Ясно е, че с увеличаване на числото на Рейнолдс полето на течението се променя. Ако една стъпка  $h$  е достатъчно малка за решаване на задачата при едно число на Рейнолдс, то за по-големи числа на Рейнолдс същата стъпка може да



се окаже, че е прекалено голяма. Поради това са проведени тестове за сходимост за числа на Рейнолдс, равни на 1 и 100. Проследени са компонентите на скоростта върху прави, успоредни на координатните оси и минаващи през геометричния център на областта  $\mathcal{D}$ . Поради причини, които вече изяснихме, за  $u$  са проследени стойностите върху правата  $x = 0.5$ , а за  $v$  върху  $y = 0.5$ . Стойността на параметъра  $\tau$  при тези пресмятания е избрана да бъде 0.01. На Фигура 2.5 са представени резултатите от пресмятанията за  $u$  и  $v$  при  $Re = 100$ . На двете графики са представени решенията при стъпки  $h = 1/16, 1/32, 1/64$  и  $1/128$ . При пресмятания с по-малки стъпки решенията практически съвпадат с тези със стъпка  $h = 1/128$  и визуално на графиката не се различават. Ясно е, че за това число на Рейнолдс по-нататъшно намаляване на стъпката  $h$  не е необходимо.

Резултатите от числените експерименти показват, че конструираната схема има пълна апроксимация по фиктивното време (численото решение не зависи от  $\tau$ ) и има точност на апроксимация  $O(h^2)$ .

## 2.5 Сравнение на векторната схема на разцепване и схемата на разцепване за бихармоничното уравнение

За потвърждение и анализ на резултатите за течение в квадратна каверна, получени с описания метод на разцепване, използваме сравнение с резултатите, получени по метода на разцепване за решаване на бихармоничното уравнение (1.9) в [61]. За тези сравнения, а също така и заради сравнения с данни от литературата и онагледяване на резултатите, след като са известни скоростта и налягането, е необходимо да бъдат пресметнати функцията на вихъра и функцията на тока.

### 2.5.1 Пресмятане на функцията на вихъра и функцията на тока

След като са определени компонентите на скоростта, функцията на вихъра може да се определи от

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.83)$$

Апроксимациите на стойностите на функцията на вихъра във възлите  $(x_i, y_j)$ , когато  $i = 2, \dots, N_x - 1$  и  $j = 2, \dots, N_y - 1$ , се определят след като се пресметнат диференчните апроксимации на производните (с централни разлики), участващи в израза за вихъра, а именно

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(x_i, y_j)} &\approx \frac{v_{i+1, j+1} + v_{i+1, j} - v_{i-1, j} - v_{i-1, j+1}}{4h_x}, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_i, y_j)} &\approx \frac{u_{i+1, j+1} + u_{i, j+1} - u_{i+1, j-1} - u_{i, j-1}}{4h_y}. \end{aligned}$$

За апроксимиране на вихъра върху границата на областта са използвани леви и десни крайни разлики с точност  $O(h^2)$ . Или

$$\omega_{1,j} = \frac{1}{2h_x} \left[ -3 \frac{v_{1,j} + v_{1,j+1}}{2} + 4 \frac{v_{2,j} + v_{2,j+1}}{2} - \frac{v_{3,j} + v_{3,j+1}}{2} \right],$$

$$\omega_{N_x,j} = \frac{1}{2h_x} \left[ 3 \frac{v_{N_x,j} + v_{N_x,j+1}}{2} - 4 \frac{v_{N_x-1,j} + v_{N_x-1,j+1}}{2} + \frac{v_{N_x-2,j} + v_{N_x-2,j+1}}{2} \right]$$

за  $j = 2, \dots, N_y - 1$ .

Стойностите  $\omega_{i,1}$  и  $\omega_{i,N_y}$  за  $i = 2, \dots, N_x - 1$  се изчисляват аналогично.

Има различни начини за пресмятане на функцията на тока  $\psi$ , ако са известни компонентите на скоростта или вихъра. Ние намираме  $\psi_{i,j}$  като решаваме задачата на Дирихле за уравнението на Поасон в областта  $\mathcal{D}$  от Фигура 2.1

$$\Delta\psi + \omega = 0, \quad \psi(x, 0) = \psi(x, 1) = \psi(0, y) = \psi(1, y) = 0. \quad (2.84)$$

За числено решаване използваме мрежата с възли  $[(i-1)h_x, (j-1)h_y]$ , където  $i = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, N_y$ . Отново е използван методът на установяването за определяне на стойностите  $\psi_{i,j}$ . Въвежда се фиктивно време  $t_1$  и от схемата на стабилизиращата поправка се получава

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \psi_{i,j}^n}{\tau} = \mathcal{L}_{xx}\psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{L}_{yy}\psi_{i,j}^n + \omega_{i,j}^n, \quad (2.85)$$

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \mathcal{L}_{yy}\psi_{i,j}^{n+1} - \mathcal{L}_{yy}\psi_{i,j}^n, \quad (2.86)$$

където са използвани означенията

$$\mathcal{L}_{xx}\psi_{i,j} = \frac{1}{h_x^2}(\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}), \quad (2.87)$$

$$\mathcal{L}_{yy}\psi_{i,j} = \frac{1}{h_y^2}(\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}). \quad (2.88)$$

Граничните условия са апроксимирани

$$\psi_{i,1} = \psi_{i,N_x} = \psi_{1,j} = \psi_{N_y,j} = 0 \quad \text{за} \quad i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y.$$

Уравнението от задача (2.84) е линейно и поради това неявната схема на разцепване (2.85), (2.86) е абсолютно устойчива.

## 2.5.2 Схема на разцепване за бихармоничното уравнение за функцията на тока

За получаване на данни за сравнение на получените резултати задачата за течение в каверна е решена като уравненията на Навие-Стокс са заменени с нелинейното бихармонично уравнение за функцията на тока (1.9). Използван е алгоритъмът, предложен в [61]. В Глава 1 беше казано, че нелинейното бихармонично

уравнение за функция на тока има вида

$$\Delta\Delta\psi - \operatorname{Re} \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.89)$$

където

$$\Delta\Delta\psi = \frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}.$$

Граничните условия за полепване и непротичане (2.55)–(2.58) водят до

$$\psi(0, y) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \psi(1, y) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}(1, y) = 0, \quad (2.90)$$

$$\psi(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \psi(x, 1) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 1) = 1. \quad (2.91)$$

Подходът в [61] е следния — въвежда се фиктивно време  $t$  и се решава начално-граничната задача за определяне на функцията на тока

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \operatorname{Re} \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} \right) - \Delta\Delta\psi. \quad (2.92)$$

Схемата на стабилизиращата поправка за разцепване на оператора от четвърти ред води до

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \psi_{i,j}^n}{\tau} = -\Lambda_{11}\psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Lambda_{22}\psi_{i,j}^n - \Lambda_{12}\psi_{i,j}^n + F_{i,j}^n, \quad (2.93)$$

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = -(\Lambda_{22}\psi_{i,j}^{n+1} - \Lambda_{22}\psi_{i,j}^n). \quad (2.94)$$

Използвани са означенията

$$\Lambda_{11}\psi_{i,j} = \frac{1}{h_x^4}(\psi_{i-2,j} - 4\psi_{i-1,j} + 6\psi_{i,j} - 4\psi_{i+1,j} + \psi_{i+2,j}),$$

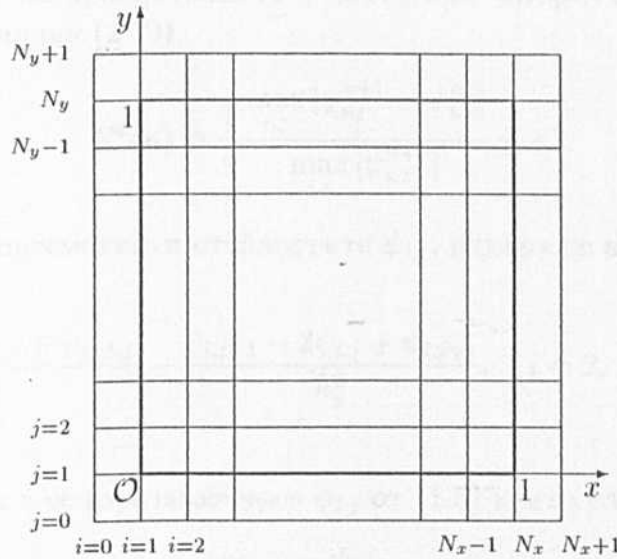
$$\Lambda_{22}\psi_{i,j} = \frac{1}{h_y^4}(\psi_{i,j-2} - 4\psi_{i,j-1} + 6\psi_{i,j} - 4\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j+2}),$$

$$\Lambda_{12}\psi_{i,j} = \frac{2}{h_x^2 h_y^2} [(\psi_{i-1,j+1} - 2\psi_{i,j+1} + \psi_{i+1,j+1}) - 2(\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}) + (\psi_{i-1,j-1} - 2\psi_{i,j-1} + \psi_{i+1,j-1})],$$

$$F_{i,j} = \frac{\operatorname{Re}}{4h_x h_y} [(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}) - (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1})],$$

където

$$\zeta_{i,j} = \frac{1}{h_x^2}(\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}) + \frac{1}{h_y^2}(\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}).$$



Фигура 2.6: Диференчната мрежа за решаване на задачата за бихармоничното уравнение.

Тази схема е от полуявевен тип — на стария слой по времето остават не само нелинейните членове, а и смесената четвърта производна  $\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2}$ .

Мрежата, която използваме, е равномерна със стъпки  $h_x$  и  $h_y$  по двете направления (вж. Фигура 2.6). Възлите на мрежата имат координати

$$x_i = (i - 1)h_x, \quad i = 0, 1, \dots, N_x + 1, \quad y_j = (j - 1)h_y, \quad j = 0, 1, \dots, N_y + 1.$$

Линиите извън областта  $\mathcal{D}$  позволяват граничните условия (2.90)–(2.91) да се апроксимират с централни разлики с точност  $O(h_x^2 + h_y^2)$

$$\psi_{1,j} = 0, \quad \psi_{2,j} - \psi_{0,j} = 0, \quad \psi_{N_x,j} = 0, \quad \psi_{N_x+1,j} - \psi_{N_x-1,j} = 0, \quad (2.95)$$

$$\psi_{i,1} = 0, \quad \psi_{i,2} - \psi_{i,0} = 0, \quad \psi_{i,N_y} = 0, \quad \psi_{i,2} - \psi_{i,0} = 2h_y. \quad (2.96)$$

Стойностите  $\psi_{i,j}$  се определят след решаването на две петдиагонални системи:

- на първа полустъпка

$$(E + \tau \Lambda_{11}) \psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \psi_{i,j}^n + \tau (-\Lambda_{22} \psi_{i,j}^n - \Lambda_{12} \psi_{i,j}^n + F_{i,j}^n)$$

с гранични условия (2.95);

- на втора полустъпка

$$(E + \tau \Lambda_{22}) \psi_{i,j}^{n+1} = \psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \tau \Lambda_{22} \psi_{i,j}^n$$

с гранични условия (2.96).

Критерият за край на пресмятанята е както при алгоритъма за определяне на физическите променливи (2.79)

$$R^\psi(n) = \frac{1}{\tau} \frac{\max_{i,j} |\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n|}{\max_{i,j} |\psi_{i,j}^{n+1}|} \leq \varepsilon.$$

След като са пресметнати стойностите  $\psi_{i,j}$ , вихъра се апроксимира от (2.83) по следния начин

$$\omega_{i,j} = -\frac{\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}}{h_x^2} - \frac{\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}}{h_y^2}, \quad i = 2, \dots, N_x, \quad j = 2, \dots, N_y.$$

Стойностите на  $u$  и  $v$  се изразяват чрез  $\psi_{i,j}$  от (1.5) както следва

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2h_y}, \quad v_{i,j} = -\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h_x}, \quad i = 2, \dots, N_x, \quad j = 2, \dots, N_y.$$

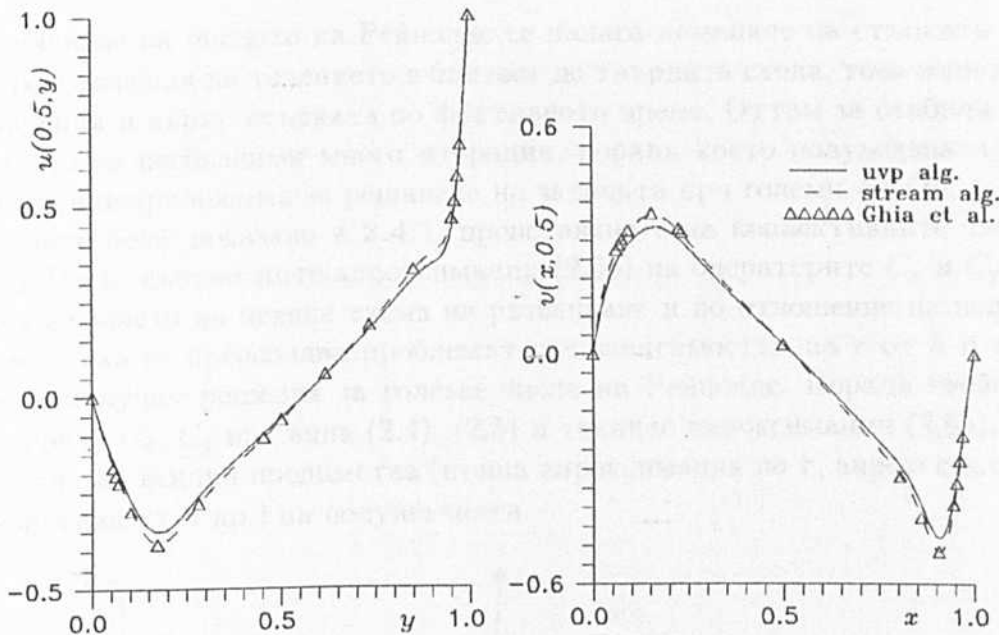
### 2.5.3 Резултати от числените пресмятания

При схемата на разцепване за бихармоничното уравнение численото решение не зависи от стъпката по фиктивното време (има пълна апроксимация) — вж. [61]. Параметърът  $\tau$  и в този случай оказва влияние само на необходимия брой итерации за удовлетворяване на зададената точност. На Таблица 2.1 е показана зависимостта на броя на итерациите от  $\tau$  при решаване на двете задачи за  $Re = 100$ ,  $h = 1/32$  и  $h = 1/64$  и  $Re = 1000$ ,  $h = 1/32$ . Използвани са означенията: „ $\psi$ “ — схема на разцепване за бихармоничното уравнение; „ $uvp$ “ — векторна схема на разцепване; „ $\nearrow$ “ — разходимост на процеса.

Таблица 2.1: Брой на итерациите в зависимост от  $\tau$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

$Re$	$1/h$	Sch.	$\tau$							
			0.005	0.01	0.02	0.05	0.10	0.20	0.40	0.80
100	32	$\psi$	38030	86885	54162	42219	30331	21304	14811	10015
		$uvp$	7212	3314	1391	408	216	192	332	557
	64	$\psi$	132686	98411	73081	47479	32332	21662	14884	9724
		$uvp$	7126	3272	1412	413	215	341	560	885
1000	32	$\psi$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	71750	63435	27244	19187
		$uvp$		11056	5600	2259	1179	710	1011	1779

Вижда се, че за тези числа на Рейнолдс ( $Re = 100$  и  $Re = 1000$ ) минималният брой итерации при схемата за  $(u, v, p)$  се достига за стойности на параметъра  $0.05 \leq \tau \leq 0.2$ , докато при схемата за  $\psi$  броят на итерациите намалява с растенето на  $\tau$ . Компютърното време за извършване на една итерация на алгоритъма за решаване на задачата в  $(u, v, p)$  променливи е приблизително 2.5 пъти по-голямо от



Фигура 2.7: Профили на скоростта през геометричния център на каверпата,  $Re = 1000$ . Сравнения със схемата на разцепване за бихармоничното уравнение.

това за извършване на една итерация за решаване на бихармоничното уравнение. Въпреки това, за всички проведени пресмятания с различни  $\tau$  численото решение се получава за по-малко време с  $(u, v, p)$ -алгоритъма. Експериментите показват, че  $R^\psi(n)$  намалява по-бавно с растенето на  $n$  в сравнение с  $R^u(n)$ ,  $R^v(n)$  и  $R^p(n)$ . Като се има предвид и това, че е желателно в критерия за край да е изпълнено  $\varepsilon < 10^{-5}$ , то са необходими голям брой итерации за получаване на решението с необходимата точност, когато се решава бихармоничното уравнение. С увеличаване на числото на Рейнолдс броят на итерациите нараства.

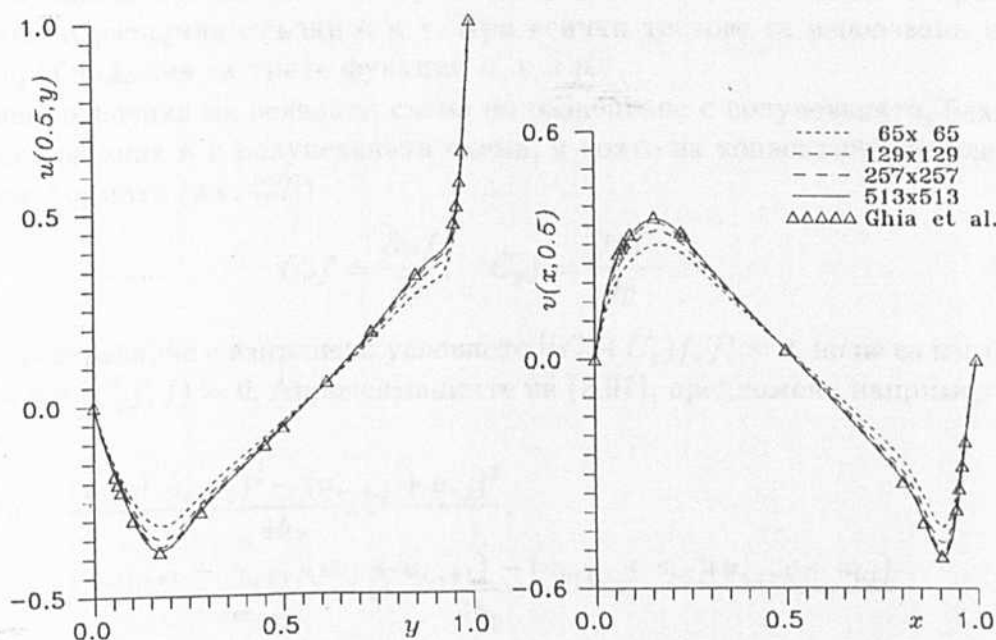
Проведени са експерименти за сравнение на стойностите на компонентите на скоростта, получени с двата алгоритъма. Резултатите за компонентите на скоростта върху прави, успоредни на координатните оси и минаващи през геометричния център на областта  $\mathcal{D}$  от пресмятанията със стъпка  $h = 1/128$  са представени на Фигура 2.7. Стойностите, пресметнати с бихармоничната задача са много близки до тези, представени в [84], където се решава задачата за определяне на променливите  $\psi$  и  $\omega$  върху мрежа със същата стъпка  $h = 1/128$ . Представените резултати, получени с алгоритъма за определяне на скоростта и налягането, се различават около 2.5% от тях.

## 2.6 Неявна схема на разцепване

Схемите от полуявен тип за уравненията на Навие-Стокс имат условна устойчивост — вж. [27, 35]. Това означава, че съществува ограничение на максималната стъпка по времето  $\tau_{\max}$ . Тя зависи от големината на стъпката по пространствената променлива  $h$  и от числото на Рейнолдс  $Re$ , т.е.  $\tau_{\max} = \tau(h, Re)$ . Тъй като

с увеличаване на числото на Рейнолдс се налага намаляне на стъпката  $h$  поради силните изменения на течението в близост до твърдата стена, това води до големи ограничения и върху стъпката по фиктивното време. Оттам за стабилизиране на решението са необходими много итерации, поради което полу неявната схема на практика е неприложима за решаване на задачата при големи  $Re$  ( $Re \geq 5000$ ).

Както беше показано в 2.4.1, представянето на конвективните членове във вида (2.3) със съответните апроксимации (2.65) на операторите  $C_x$  и  $C_y$  позволява построяването на неявна схема на разцепване и по отношение на нелинейните членове. Така се преодолява проблемът със зависимостта на  $\tau$  от  $h$  и е възможно да се получат решения за големи числа на Рейнолдс. Поради свойствата на операторите  $C_x, C_y$  във вида (2.4), (2.5) и техните апроксимации (2.65), неявната схема запазва всички предимства (пълна апроксимация по  $\tau$ , апроксимация  $O(h^2)$ , консервативност и др.) на полу неявната.



Фигура 2.8: Профили на скоростта през геометричния център на каверната, пресметнати с различни стъпки  $h$ , неявна схема,  $Re = 1000$ .

Диференчната мрежа за решаване, апроксимациите на операторите и апроксимациите граничните условия, а също и алгоритъма за решаване на дискретизираните уравнения, са както при полу неявната схема.

### 2.6.1 Проверка за сходимост на алгоритъма

За проверка на сходимостта на схемата са получени решения върху различни мрежи и с различни стъпки по времето  $\tau$ . Резултатите потвърждават пълната апроксимация на схемата (независимостта на решението от  $\tau$ ) и сходимост на численото решение  $O(h^2)$ . Отново за сравнение са използвани компонентите на скоростта като основни характеристики на задачата в  $(u, v, p)$  променливи. На

Фигура 2.8 са представени профилите на  $u$  и на  $v$  съответно върху вертикалната и хоризонталната права през геометричния център, пресметнати с различни стъпки  $h$  при  $Re = 1000$ . Получените резултати са сравнени с тези от [84]. Налице е пълно количествено съгласие на числените резултати със стъпки  $h = 1/512$  (и дори  $1/256$ ) и получените стойности в [84].

### 2.6.2 Сравнение на неявната и полуявната схеми

Проведени са тестове за сравнение на двете схеми на разцепване. Двете схеми се отличават единствено по това, че в неявната схема и нелинейните членове участват на новия слой по времето, докато в полуявната са взети от стария слой. Наблюдаван е броят на итерациите за получаване на решението с точност  $\varepsilon = 10^{-5}$  и поведението на функциите  $R^u(n)$ ,  $R^v(n)$  и  $R^p(n)$  (вж. (2.79) на страница 38) в зависимост от  $n$  — номер на итерацията. Пресмятания са проведени с  $Re = 1000$  и различни стъпки  $h$  и  $\tau$ . При всички тестове са използвани нулеви начални приближения за трите функции  $u$ ,  $v$  и  $p$ .

Освен сравнения на неявната схема на разцепване с полуявната, бяха проведени пресмятания и с полуявната схема, в която за конвективните членове е използвана формата (вж. [27])

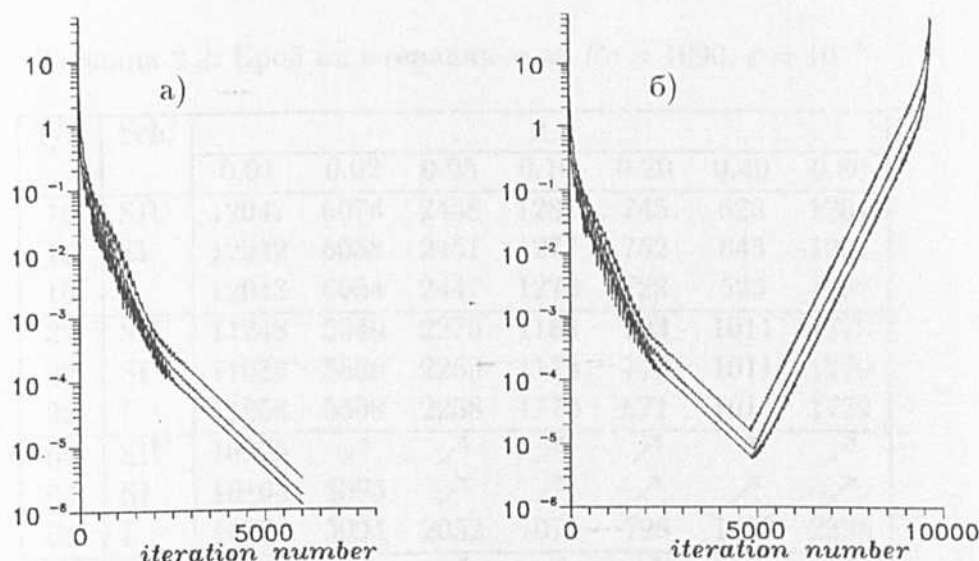
$$C_x f = \frac{\partial u f}{\partial x}, \quad C_y f = \frac{\partial v f}{\partial y}. \quad (2.97)$$

Лесно се проверява, че е изпълнено условието  $[(C_x + C_y)f, f] = 0$ , но не са изпълнени  $(C_x f, f) = 0$  и  $(C_y f, f) = 0$ . Апроксимациите на (2.97), предложени например в [27], са съответно

$$\begin{aligned} C_x^h u &= \frac{(u_{i,j} + u_{i+1,j})^2 - (u_{i-1,j} + u_{i,j})^2}{4h_x}, \\ C_y^h u &= \frac{(v_{i-1,j+1} + v_{i,j+1})(u_{i,j} + u_{i,j+1}) - (v_{i-1,j} + v_{i,j})(u_{i,j-1} + u_{i,j})}{4h_y}, \\ C_x^h v &= \frac{(u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j})(v_{i,j} + v_{i+1,j}) - (u_{i,j-1} + u_{i,j})(v_{i-1,j} + v_{i,j})}{4h_x}, \\ C_y^h v &= \frac{(v_{i,j} + v_{i,j+1})^2 - (v_{i,j-1} + v_{i,j})^2}{4h_y}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Резултатите за броя на итерациите за получаване на решението с посочената точност са обобщени в Таблица 2.2. Използвани са означенията: „SIU“ — полуявна неконсервативна схема на разцепване; „SI“ — полуявна консервативна схема на разцепване; „I“ — неявна схема; „ $\lambda$ “ — разходимост на процеса, „-“ — пресмятания не са проведени. Стъпката  $\tau$  при различните тестове се изменя в интервала  $[0.01, 0.8]$ . Вижда се, че броят на итерациите за достигане на точността  $\varepsilon = 10^{-5}$  се увеличава, когато намаляват стойностите на стъпката по времето в посочения интервал. Същото се наблюдава и при по-големи стъпки, като например  $\tau = 0.8$ . Вече беше показано, но и тези пресмятания потвърждават, че стъпката  $\tau$  има значение за устойчивостта и скоростта на сходимост на схемата, но не и за точността на полученото решение.





Фигура 2.9: Скорост на сходимост на трите функции в зависимост от итерациите за  $Re = 1000$ ,  $h = 1/64$ ,  $\tau = 0.02$ : а) консервативна схема на разцепване; б) неконсервативна схема на разцепване.

С полу неявните схеми не може да се получи решението за всяко  $\tau$  от интервала  $[0.01, 0.8]$  при малки стъпки  $h$ , по-конкретно при  $h \leq 1/64$ , ако  $Re = 1000$ . В този случай се налагат значителни ограничения на големината на  $\tau$ , което води до увеличаването на броя на итерациите. Затова, ако се използва полу неявна схема, възникват проблеми с големината на стъпката  $h$  още при  $Re = 1000$ , тъй като времето за получаване на решението нараства много. Естествено при увеличаването на числото на Рейнолдс този проблем се засилва. Това е причината, поради която се използват неявни схеми при големи числа на Рейнолдс, чиято устойчивост не зависи от  $h$  — вж. [84, 129]. За предложената неявна схема на разцепване от Таблица 2.2 се вижда, че при съгъстяване на мрежата за по-малките стойности на  $\tau$  от представените броят на итерациите намалява. Докато за по-големите стъпки по времето този брой се увеличава.

За поведението на функциите  $R^u(n)$ ,  $R^v(n)$  и  $R^p(n)$  при трите схеми може да се каже, че са неразличими в рамките на грешката от апроксимация, когато полу неявните схеми са сходящи, а графиките им напълно съвпадат. От Таблица 2.2 се вижда, че дори броят на итерациите при пресмятанятия с трите схеми, при условие че процесът е сходящ, е приблизително един и същ за някои от пресмятанятия, а за останалите разликите не са големи.

За число на Рейнолдс  $Re = 1000$  при пресмятането с неконсервативната схема на разцепване върху мрежа със стъпка  $h = 1/64$  и  $\tau = 0.02$  се появява неустойчивост и след това разходимост, за разлика от консервативната схема на разцепване. Изменението на  $R^u(n)$ ,  $R^v(n)$  и  $R^p(n)$  в зависимост от  $n$  (номер на итерацията) е представено на Фигура 2.9. Графиката от Фигура 2.9а) представя това изменение за схемата на разцепване с (2.65), а на Фигура 2.9б) — с (2.98). Това, че се появява неустойчивост след като критерият за край  $\varepsilon = 10^{-5}$  почти е удовлетворен, показва, че условието за край на итерациите е необходимо да бъде внимателно избрано.

Таблица 2.2: Брой на итерациите за  $Re = 1000$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ 

1/h	Sch.	$\tau$						
		0.01	0.02	0.05	0.10	0.20	0.40	0.80
16	SIU	12047	6074	2458	1281	745	628	1201
16	SI	12042	6058	2451	1277	752	645	1201
16	I	12043	6054	2447	1270	723	525	1202
32	SIU	11248	5640	2276	1188	703	1011	1778
32	SI	11056	5600	2259	1179	710	1011	1779
32	I	11058	5598	2258	1170	671	1011	1779
64	SIU	10295	↗	↗	↗	↗	↗	↗
64	SI	10103	5095	↗	↗	↗	↗	↗
64	I	10104	5094	2052	1071	796	1413	2398
128	SI	10001	↗	↗	↗	↗	↗	↗
128	I	9601	4804	1940	1027	1065	1830	2943
256	SI	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗
256	I	-	-	-	1019	1370	-	-

Експериментите показват, че с консервативната схема е достатъчно критерият за край да бъде  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Направени бяха множество пресмятания и с  $\varepsilon < 10^{-6}$ , но подобна неустойчивост не беше наблюдавана.

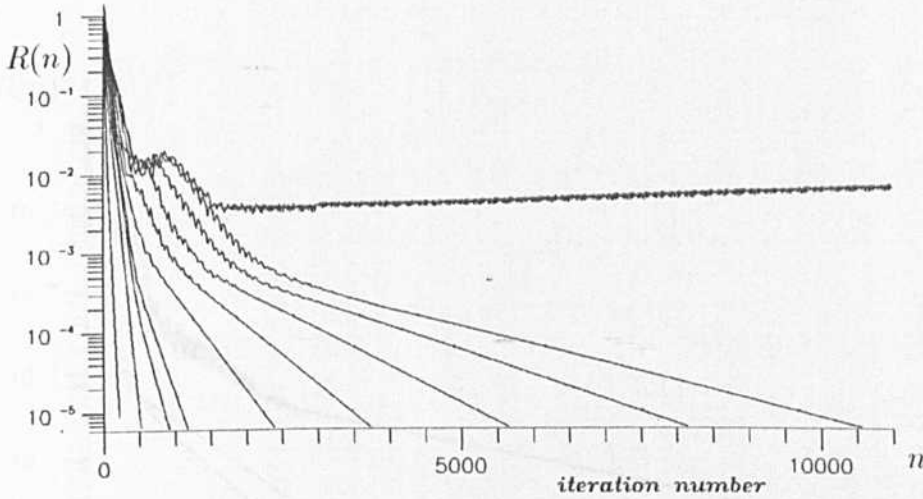
Най-важните изводи са, че:

- полу неявната схема е условно устойчива, като максималната стъпка по фиктивното време  $\tau_{\max}$ , за която схемата е сходяща, зависи от  $h$  и  $Re$ ;
- неявната схема е устойчива независимо от  $h$ , като най-малък брой итерации е необходим, когато  $\tau \in [0.05, 0.2]$  за числата на Рейнолдс, с които са извършени пресмятанията;
- разликите в скоростите на сходимост на двете схеми (когато полу неявната схема е сходяща) са незначителни.

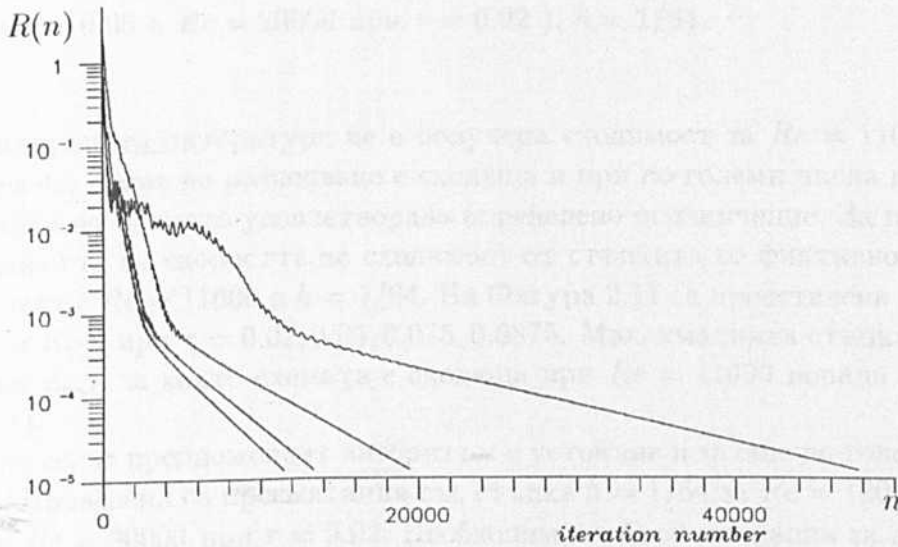
### 2.6.3 Зависимост на скоростта на сходимост на неявната схема от числото на Рейнолдс $Re$ и стъпката по фиктивното време $\tau$

За изследване на свойствата на неявната схема на разцепване са проведени тестове с различни числа на Рейнолдс. Тъй като поведението на трите функции  $R^u$ ,  $R^v$  и  $R^p$  не се различава съществено (вж. Фигура 2.9), можем да проследим само изменението на функцията

$$R(n) = \{[R^u(n)]^2 + [R^v(n)]^2 + [R^p(n)]^2\}^{1/2}$$



Фигура 2.10: Скорост на сходимост за различни  $Re$  (отляво надясно  $Re = 100, 400, 800, 1000, 2000, 3200, 5000, 7500, 10000, 11000$ ),  $h = 1/64$ ,  $\tau = 0.1$ .

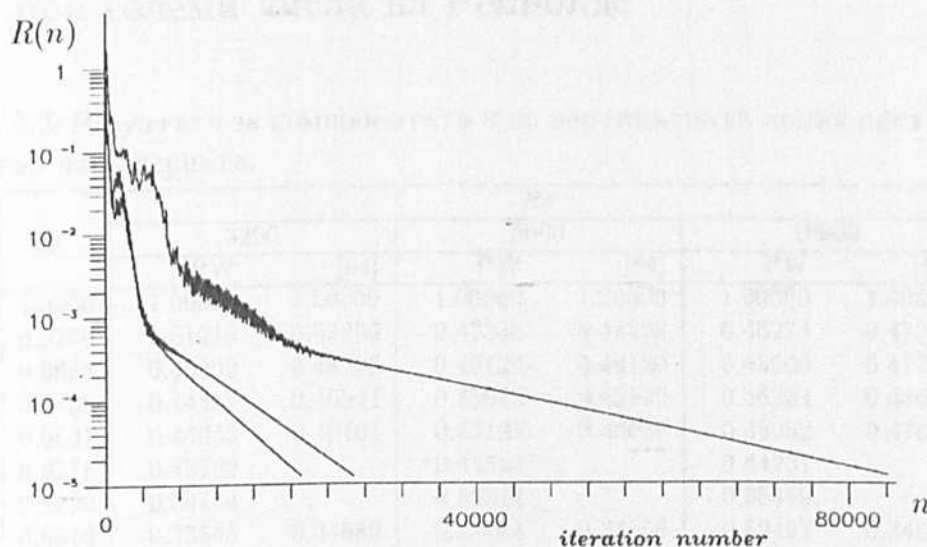


Фигура 2.11: Скорост на сходимост за различни  $\tau$  (отляво надясно  $\tau = 0.0875, 0.075, 0.05, 0.02$ ),  $h = 1/64$ ,  $Re = 11000$ .

в зависимост от  $n$ .

С неявната схема на разцепване за проследяване на скоростта на сходимост в зависимост от числото на Рейнолдс  $Re$  са извършени пресмятания при фиксирани  $\tau = 0.1$  и  $h = 1/64$  за  $Re = 100, 400, 800, 1000, 2000, 3200, 5000, 7500, 10000, 11000$ . Получените резултати за  $R(n)$  в зависимост от  $n$  са представени на Фигура 2.10. Вижда се, че броят на итерациите расте с увеличаване на  $Re$ . За  $Re \geq 3200$  се наблюдават осцилации в нормата  $R(n)$  в началото на пресмятанията, чийто амплитуди нарастват с нарастването на числото на Рейнолдс. До  $Re = 10000$ , въпреки осцилациите при по-големите числа на Рейнолдс, диференчната схема е сходяща. При  $Re = 11000$  и  $\tau = 0.1$ , обаче, не беше наблюдавана сходимост и след сто хиляди

итерации.



Фигура 2.12: Скорост на сходимост за различни  $Re$  (отляво надясно  $Re = 12000$ ,  $15000$  при  $\tau = 0.05$  и  $Re = 20000$  при  $\tau = 0.02$ ),  $h = 1/64$ .

В цитираната литература не е получена сходимост за  $Re = 11000$ . Предложената неявна схема на разцепване е сходяща и при по-големи числа на Рейнолдс, ако стъпката по времето удовлетворява определено ограничение. За проследяване на зависимостта на скоростта на сходимост от стъпката по фиктивното време  $\tau$  е проведен тест с  $Re = 11000$  и  $h = 1/64$ . На Фигура 2.11 са представени резултатите от теста за  $R(n)$  при  $\tau = 0.02, 0.05, 0.075, 0.0875$ . Максималната стъпка по фиктивното време  $\tau_{\max}$ , за която схемата е сходяща при  $Re = 11000$  попада в интервала  $(0.0875, 0.1)$ .

Оказа се, че предложеният алгоритъм е устойчив и за още по-големи числа на Рейнолдс. Проведени са пресмятания със стъпка  $h = 1/64$  за  $Re = 12000, 15000$  при  $\tau = 0.05$  и  $Re = 20000$  при  $\tau = 0.02$ . Необходимият брой итерации за достигане на сходимост не е малък (почти 95 хиляди итерации бяха необходими за получаване на решението при  $Re = 20000$ ), но схемата е устойчива и при тези числа на Рейнолдс. Графиките на функциите  $R(n)$  са представени на Фигура 2.12.

Консервативният характер на схемата се вижда ясно на трите фигури (Фигури 2.10, 2.11, 2.12). След стабилизиране на итерационния процес осцилациите изчезват и нормата започва да намалява монотонно, което потвърждава консервативността на схемата.

Проведените експерименти показват, че предложената неявна диференчна схема е устойчива и с нея може да бъде получено решението при големи числа на Рейнолдс върху мрежи с необходимата разрешаваща способност. Единствено поради липса на изчислителни ресурси не са проведени пресмятания с по-гъсти мрежи и с числа на Рейнолдс по-големи от  $Re = 20000$  (за тези пресмятания е използван персонален компютър от тип Pentium/120Mhz, 16 MB RAM).

### 2.6.4 Числено изследване на задачата за течение в каверна при големи числа на Рейнолдс

Таблица 2.3: Резултати за компонентата  $u$  по вертикалната линия през геометричния център на каверната.

$y$	$Re$					
	3200		5000		10000	
	PW	[84]	PW	[84]	PW	[84]
1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.9766	0.51215	0.53236	0.47335	0.48223	0.45274	0.47221
0.9688	0.46202	0.48296	0.45126	0.46120	0.45906	0.47782
0.9609	0.44457	0.46547	0.45013	0.45992	0.46234	0.48070
0.9531	0.44043	0.46101	0.45133	0.46036	0.45952	0.47804
0.9375	0.43702		0.44513		0.44231	
0.8750	0.36784		0.36314		0.35459	
0.8516	0.33545	0.34682	0.33184	0.33556	0.32497	0.34635
0.8125	0.28506		0.28331		0.27844	
0.7500	0.21202		0.21201		0.20994	
0.7344	0.19479	0.19791	0.19518	0.20087	0.19373	0.20673
0.6875	0.14509		0.14660		0.14683	
0.6250	0.08250		0.08533		0.08747	
0.6172	0.07491	0.07156	0.07789	0.08183	0.08025	0.08344
0.5625	0.02284		0.02684		0.03063	
0.5000	-0.03499	-0.04272	-0.02990	-0.03039	-0.02461	-0.03111
0.4531	-0.07767	-0.08664	-0.07179	-0.07404	-0.06540	-0.07540
0.4375	-0.09182		-0.08568		-0.07892	
0.3750	-0.14999		-0.14104		-0.13275	
0.3125	-0.20464		-0.19634		-0.18639	
0.2813	-0.23296	-0.24427	-0.22404	-0.22855	-0.21317	-0.23186
0.2500	-0.26131		-0.25180		-0.23995	
0.1875	-0.31725		-0.30753		-0.29354	
0.1719	-0.33210	-0.34323	-0.32123	-0.33050	-0.30699	-0.32709
0.1250	-0.39020		-0.36553		-0.34728	
0.1016	-0.41540	-0.41933	-0.39779	-0.40435	-0.36716	-0.38000
0.0703	-0.38852	-0.37827	-0.42223	-0.43643	-0.40843	-0.41657
0.0625	-0.36629	-0.35344	-0.41215	-0.42901	-0.42039	-0.42537
0.0547	-0.33863	-0.32407	-0.39239	-0.41165	-0.42648	-0.42735
0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

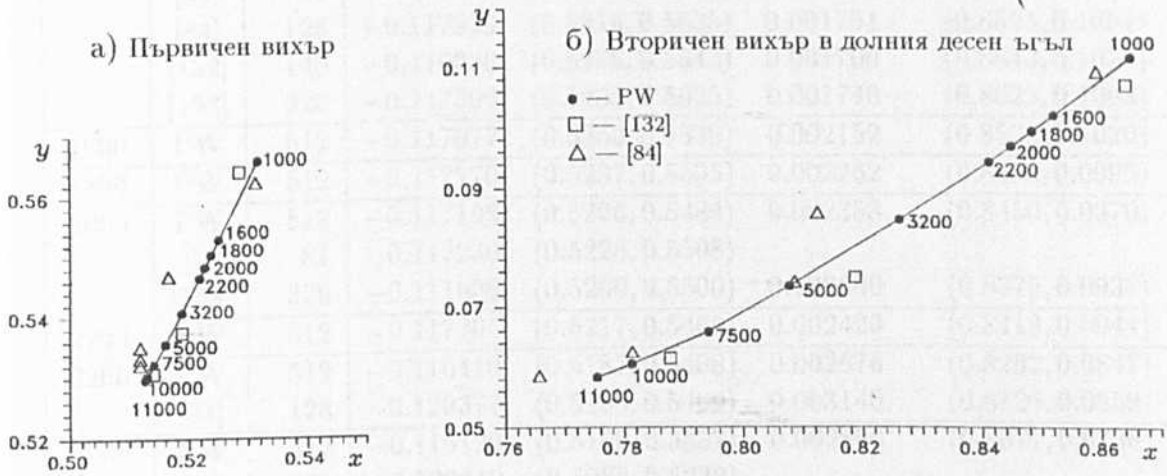
Предложените диференчна схема и алгоритъм позволяват да бъдат направени пресмятания с големи числа на Рейнолдс върху достатъчно гъста мрежа. Разумният компромис между възможностите на техниката, с която разполагахме при решаването на задачата, и изискванията на течението наложи най-малката стъпка да бъде  $h = 1/512$ . Тестовите показаха, че тази стъпка може да се приеме за достатъчно малка за решаване на задачата при  $1000 \leq Re \leq 11000$ . В този интервал са извършени пресмятания с много числа на Рейнолдс. Тук са представени получените решения с:  $Re = 1000; 1600; 1800; 2000; 2200; 3200; 5000; 7500; 10000$  и  $11000$ . Измежду тези стойности на числото на Рейнолдс са и някои от представените в [61], [84], [132] и [153], които са използвани за сравнение. Проследени са

Таблица 2.4: Резултати за компонентата  $v$  по хоризонталната линия през геометричния център на каверната.

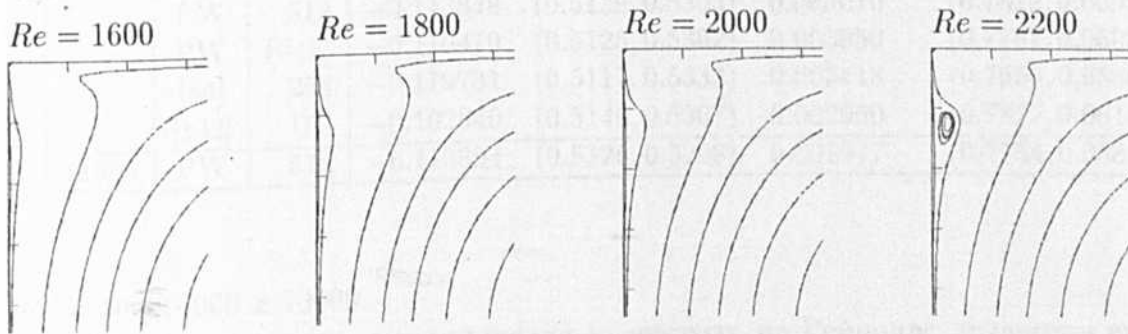
$x$	$Re$					
	3200		5000		10000	
	PW	[84]	PW	[84]	PW	[84]
1.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.9688	-0.41891	-0.39017	-0.49252	-0.49774	-0.54228	-0.54302
0.9609	-0.49614	-0.47425	-0.54204	-0.55069	-0.51832	-0.52987
0.9531	-0.53712	-0.52357	-0.54337	-0.55408	-0.47690	-0.49099
0.9453	-0.54494	-0.54053	-0.51719	-0.52876	-0.44662	-0.45863
0.9375	-0.52959		-0.48364		-0.43002	
0.9063	-0.42708	-0.44307	-0.40835	-0.41442	-0.39764	-0.41496
0.8750	-0.37992		-0.37505		-0.36193	
0.8594	-0.36308	-0.37401	-0.35728	-0.36214	-0.34422	-0.36737
0.8125	-0.30990		-0.30314		-0.29288	
0.8047	-0.30085	-0.31184	-0.29435	-0.30018	-0.28454	-0.30719
0.7500	-0.23924		-0.23476		-0.22773	
0.6875	-0.17250		-0.16993		-0.16571	
0.6250	-0.10855		-0.10775		-0.10607	
0.5625	-0.04648		-0.04738		-0.04803	
0.5000	0.01452	0.00999	0.01199	0.00945	0.00909	0.00831
0.4375	0.07522		0.07105		0.06592	
0.3750	0.13624		0.13040		0.12297	
0.3125	0.19815		0.19054		0.18061	
0.2500	0.26129		0.25190		0.23923	
0.2344	0.27726	0.28188	0.26749	0.27280	0.25408	0.27224
0.2266	0.28529	0.29030	0.27533	0.28066	0.26155	0.28003
0.1875	0.32663		0.31484		0.29932	
0.1563	0.36304	0.37119	0.34742	0.35368	0.33022	0.35070
0.1250	0.39886		0.38382		0.36174	
0.0938	0.41245	0.42768	0.41788	0.42951	0.39678	0.41487
0.0781	0.40100	0.41906	0.42185	0.43648	0.41655	0.43124
0.0703	0.38970	0.40917	0.41720	0.43329	0.42469	0.43733
0.0625	0.37478	0.39560	0.40716	0.42447	0.42899	0.43983
0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

следните характеристики: профилите на компонентите на скоростта през геометричния център на каверната; изолиниите на функциите на налягането, вихъра и тока; максималната и минималната стойност на функцията на тока; положението на центровете на първичния вихър на течението и на най-големия вторичен вихър (в десния долен ъгъл на каверната). При числените изследвания на задачата за течение в каверна точността на пресмятанията е избрана да бъде  $\epsilon = 10^{-6}$ . Проведени са експерименти и с много други стойности на  $\epsilon$ , по-малки от  $10^{-6}$ , но това не води до съществени изменения в решението. Стъпката по фиктивното време  $\tau$  за  $Re = 1000, 2000, 3200$  и  $5000$  е избрана  $\tau = 0.1$ , за  $Re = 7500$  и  $10000$  е  $\tau = 0.05$  и накрая за  $Re = 11000$ ,  $\tau = 0.02$ . Естествено неудовлетвореността на дискретизираните уравнения за скоростта и налягането (т.нар. „невязка“ на руски или „residual“ на английски) е от реда на избраната точност  $\epsilon$ , тъй като критерият за край на пресмятанията (2.79) е минимизирането на невязките.

В Таблица 2.3 и Таблица 2.4 са представени получените резултати за компонентите на скоростта върху прави през геометричния център на каверната за  $Re = 3200, 5000$  и  $10000$ , сравнени с резултатите от [84]. Съкращението PW означава „настоящата работа“ и е използвано и по-нататък в таблиците и графиките. Вижда се, че има пълно съгласие в резултатите, получени в двете работи.



Фигура 2.13: Положението на центровете на вихрите в зависимост от  $Re$ .



Фигура 2.14: Вторичен вихър в горния ляв ъгъл.

Резултатите за токовите линии и изолините на вихъра за различни  $Re$  от 1000 до 11000 са представени на Фигура 2.15 и Фигура 2.17. Те образуват един първичен вихър, на който координатите на центъра са представени на Фигура 2.13а) за различни числа на Рейнолдс. На същата графика са представени и резултатите от [84] и [132]. Според пресмятанията в настоящата работа центърът на първичния вихър се движи монотонно към геометричния център на каверната, когато числото на Рейнолдс расте в интервала  $[1000, 11000]$ . При това движението е почти по права линия. Мрежата, която е използвана в известната работа на Гиа и съавтори [84] за  $Re = 1000$  и  $3200$  е  $129 \times 129$ , а за по-големите  $Re = 5000, 7500$  и  $10000$  е  $257 \times 257$ . Гъстотата на тези мрежи е недостатъчна. Затова движението е немонотонно и има такава голяма разлика в положението на центъра на първичния вихър при  $Re = 3200$ . Пресмятанията на Шрайбер и Келер са за числа на Рейнолдс —

Таблица 2.5: Екстремални стойности на функцията на тока.

$Re$	Ref.	$1/h$	Primary vortex		Right bottom secondary vortex	
			$\psi_{\min}$	$(x_{\min}, y_{\min})$	$\psi_{\max}$	$(x_{\max}, y_{\max})$
1000	PW	512	-0.116269	(0.5316, 0.5660)	0.001640	(0.8651, 0.1118)
	[61]	81	-0.118710	(0.5346, 0.5645)		
	[84]	128	-0.117929	(0.5313, 0.5625)	0.001751	(0.8594, 0.1094)
	[132]	140	-0.116030	(0.5286, 0.5643)	0.001700	(0.8643, 0.1071)
	[153]	320	-0.117300	(0.5438, 0.5625)	0.001740	(0.8625, 0.1063)
1600	PW	512	-0.117077	(0.5250, 0.5530)	0.002152	(0.8522, 0.1020)
1800	PW	512	-0.117170	(0.5237, 0.5505)	0.002262	(0.8486, 0.0995)
2000	PW	512	-0.117198	(0.5226, 0.5484)	0.002353	(0.8450, 0.0970)
	[61]	81	-0.112230	(0.5228, 0.5508)		
	[153]	320	-0.111600	(0.5250, 0.5500)	0.002600	(0.8375, 0.0938)
2200	PW	512	-0.117205	(0.5217, 0.5466)	0.002429	(0.8413, 0.0944)
3200	PW	512	-0.116410	(0.5187, 0.5408)	0.002676	(0.8262, 0.0847)
	[84]	128	-0.120377	(0.5165, 0.5469)	0.003140	(0.8125, 0.0859)
5000	PW	512	-0.116120	(0.5160, 0.5357)	0.002890	(0.8077, 0.0736)
	[61]	81	-0.126610	(0.5062, 0.5232)		
	[84]	256	-0.118966	(0.5117, 0.5352)	0.003084	(0.8086, 0.0742)
7500	PW	512	-0.114892	(0.5141, 0.5322)	0.003028	(0.7941, 0.06588)
	[84]	256	-0.119976	(0.5117, 0.5322)	0.003285	(0.7813, 0.0625)
10000	PW	256	-0.105982	(0.5142, 0.5305)	0.002917	(0.7885, 0.0611)
	PW	512	-0.113848	(0.5129, 0.5303)	0.003010	(0.7812, 0.0605)
	PW	Rich.	-0.116470	(0.5125, 0.5302)	0.003050	(0.7787, 0.0602)
	[84]	256	-0.119731	(0.5117, 0.5333)	0.003418	(0.7656, 0.0586)
	[132]	180	-0.102840	(0.5140, 0.5307)	0.002960	(0.7877, 0.0614)
11000	PW	512	-0.113394	(0.5126, 0.5298)	0.002977	(0.7754, 0.0583)

$Re = 1000, 4000$  и  $10000$ .

Както е известно, с увеличаване на числото на Рейнолдс, вторични вихри се появяват в ъглите на областта. Първо се появява вторичен вихър в десния долен ъгъл. Неговото положение като функция на числото на Рейнолдс е представено на Фигура 2.13б). На същата графика са представени данни от литературата. Нашите пресмятания показват, че центърът на вторичния вихър в долния десен ъгъл също се движи монотонно към центъра с нарастването на числото на Рейнолдс. Според нас, основните причини за отклоненията на данните, получени в [84, 132], са посочените по-горе.

За стойности на  $Re < 1000$  се появява вторичен вихър в долния ляв ъгъл на каверната (вж. [84]). Трети вторичен вихър се появява в горния ляв ъгъл. Той има по-сложна форма, поради неговата близост с тази част от границата, в която граничното условие за функцията  $u$  не е непрекъснато. За да се изследва механизмът на появата на това откъсване са проведени пресмятания (вж. Фигура 2.14) за различни числа на Рейнолдс. Резултатите показват, че вихър се появява при  $Re < 2000$ . За илюстрация на Фигура 2.14 са представени резултатите от четири



пресмятания —  $Re = 1600, 1800, 2000, 2200$ .

Третични вихри се появяват в долния десен ъгъл на каверната при  $Re \approx 5000$  и в долния ляв ъгъл при  $Re \approx 7500$ . Тестовите с различни мрежи потвърждават тези третични вихри, които са в съгласие с [84].

При  $Re = 10000$  се забелязва появата на трети третичен вихър в горния ляв ъгъл на каверната — Фигура 2.16. Този третичен вихър не е бил наблюдаван в [84, 132, 133]. Тази структура зависи силно от размерите на мрежата и от апроксимациите и поради тази причина, според нас, не е получена в посочените работи. Почти във всички цитирани работи от литературата са използвани насочени разлики (upwind), които имат изглаждащ ефект при достигането на втори ред на точност на апроксимация.

Таблица 2.5 дава представа за екстремалните стойности на функцията на тока, които се достигат в центъра на първичния вихър и центъра на долния десен вторичен вихър. Координатите на точките, в които се достига екстремалната стойност, са интерполирани. Резултатите са сравнени с тези от [153], [84] и [61].

За  $Re = 10000$  са проведени пресмятания върху мрежи със стъпки  $h = 1/256$  и  $h/2 = 1/512$  и е направена екстраполация на Ричардсън

$$f_{\text{Rich.}} = \frac{4f_h - f_{h/2}}{3}.$$

На Фигура 2.16 са представени резултатите от този експеримент. Вижда се, че мрежата със стъпка  $h = 1/512$  е достатъчно гъста за решаване на задачата при това число на Рейнолдс.

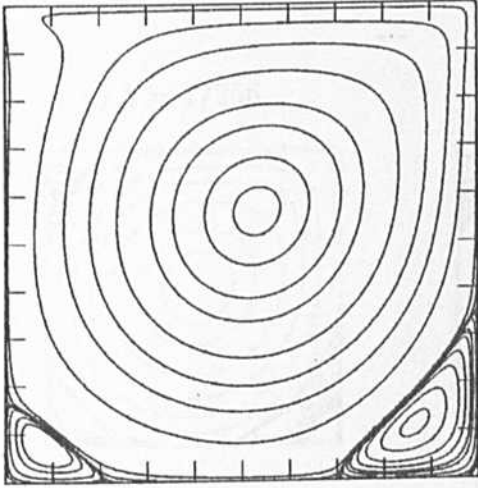
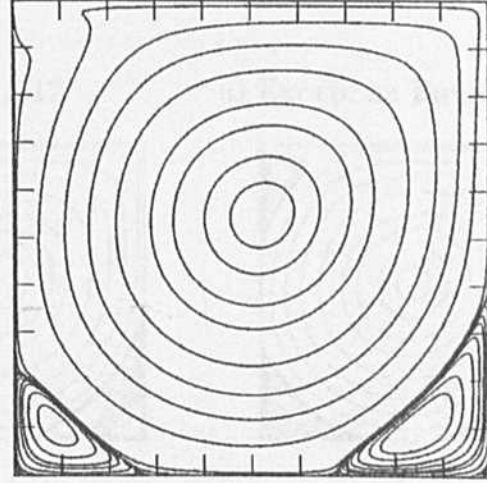
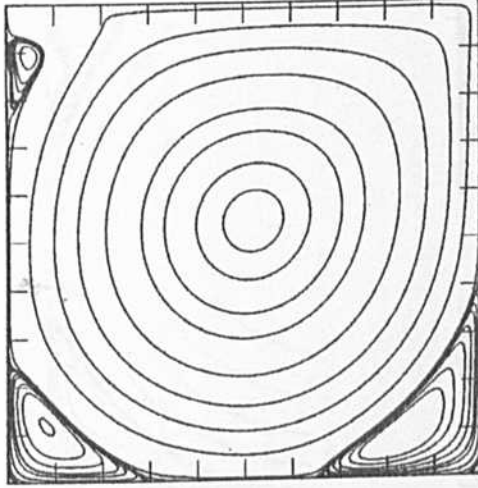
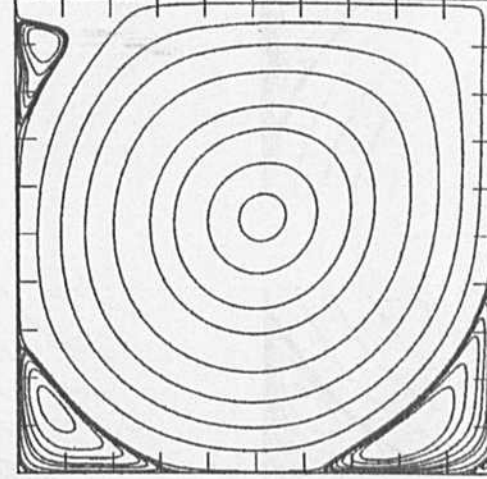
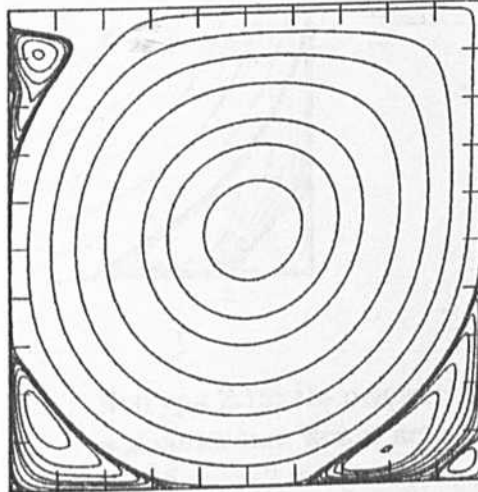
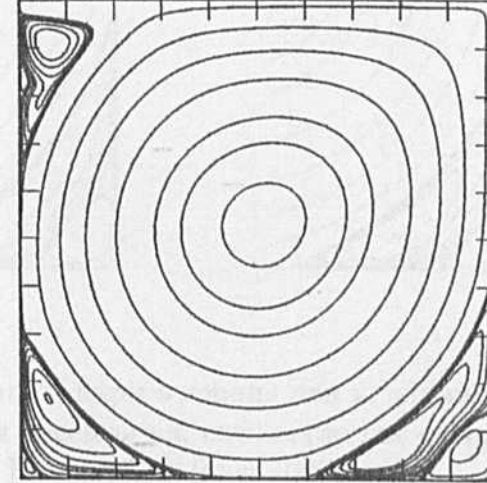
В цитираните работи, в които са представени резултати с  $Re = 10000$ , не е намерено стационарно решение за по-големи числа на Рейнолдс. Шен в [133], който решава нестационарната задача, наблюдава загуба на устойчивост на решението за  $Re \in (10000, 10500]$ . С предложени в настоящата работа алгоритъм сходимост беше постигната и с  $Re = 11000$  върху мрежа  $513 \times 513$ , а върху мрежа  $65 \times 65$  и с  $Re = 20000$ .

Изолиниите на вихъра за големи числа на Рейнолдс ( $\geq 3200$ ) показват обширна област в каверната, в която вихърът е почти почти константа. Тази област е заобиколена от почти кръгова тънка област от допълнителни обратни вихри в близост до и в ъглите на каверната.

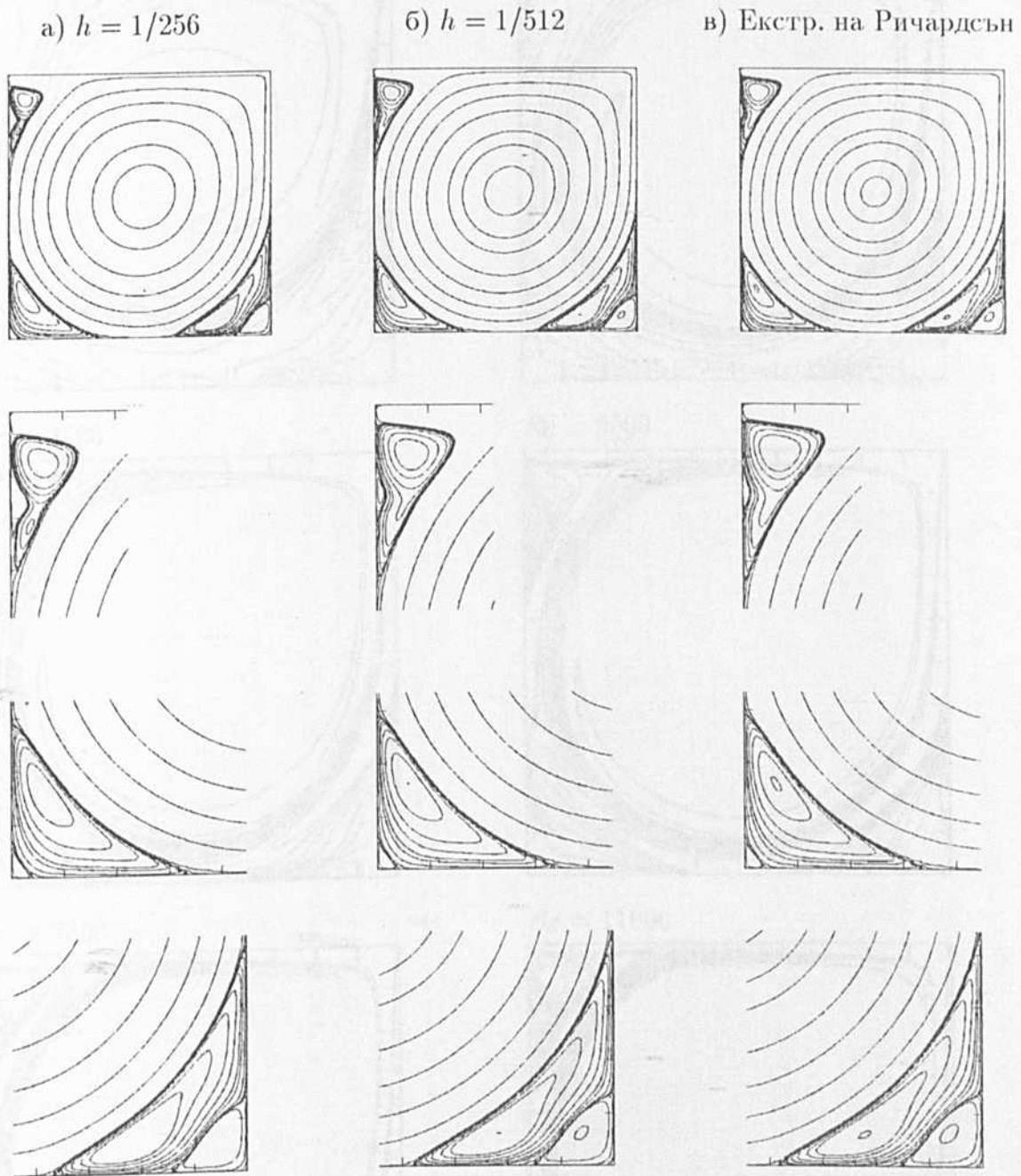
На Фигура 2.18 са представени изолиниите на налягането за съответните числа на Рейнолдс от Фигурите 2.15 и 2.17. Вижда се, че максималната и минималната стойност на налягането, които се достигат върху движещата се стена, намаляват по модул с нарастване на числото на Рейнолдс. В ъглите на областта налягането е почти константа.

Получените резултати показват, че е създаден един ефикасен неявен метод на разцепване на оператора за решаване на стационарните уравнения на Навие-Стокс, в който скоростта и налягането са свързани на всяка дробна стъпка по времето. Така граничните условия участват напълно неявно в схемата.

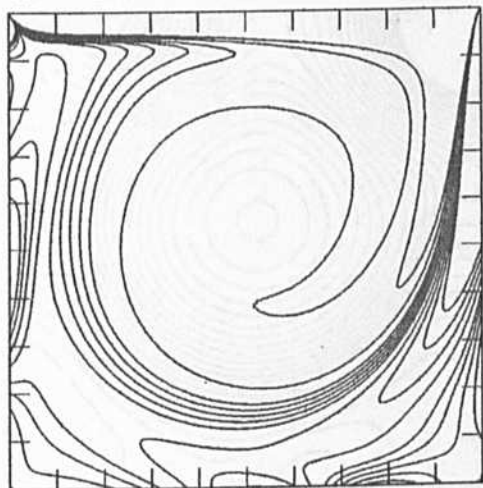
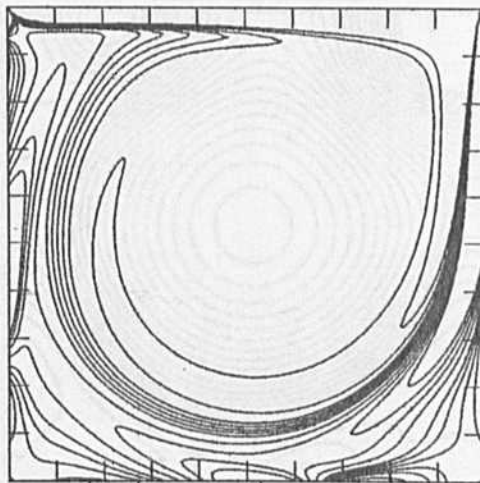
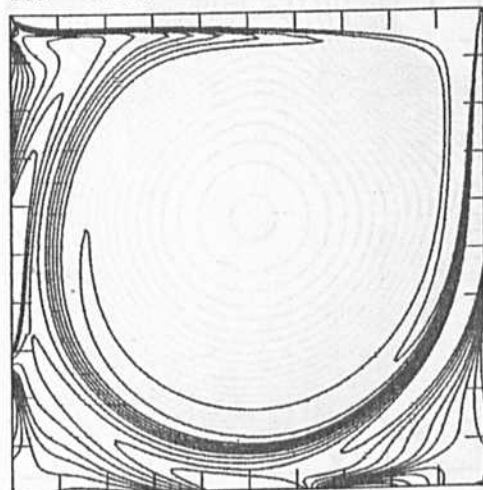
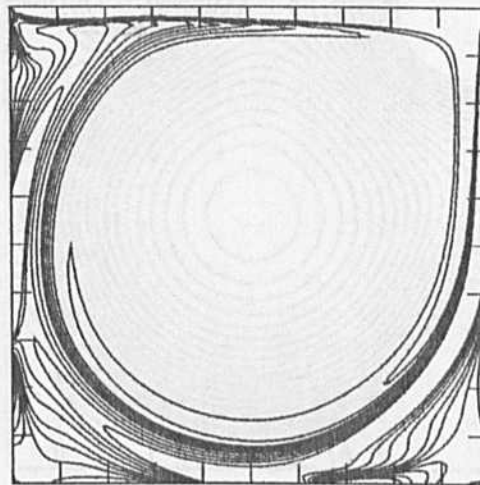
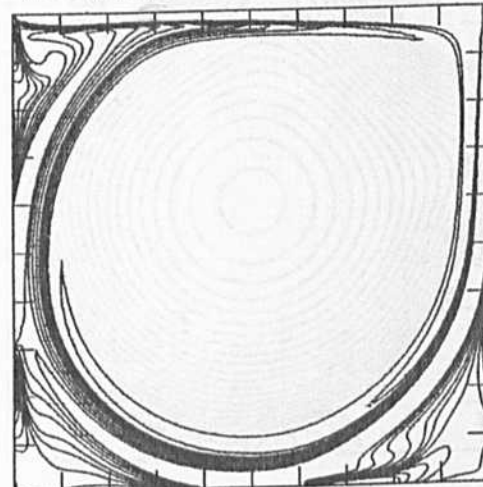
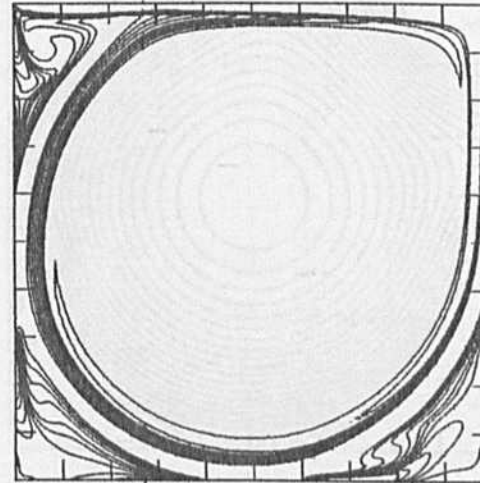
Сходимостта на схемата е потвърдена с различни експерименти. Получени са резултати за големи числа на Рейнолдс върху мрежи като  $513 \times 513$ . Направени са сравнения с други автори. Получените резултати са в много добро количествено съгласие с известните резултати от литературата.

$Re = 1000$  $Re = 2000$  $Re = 3200$  $Re = 5000$  $Re = 7500$  $Re = 11000$ 

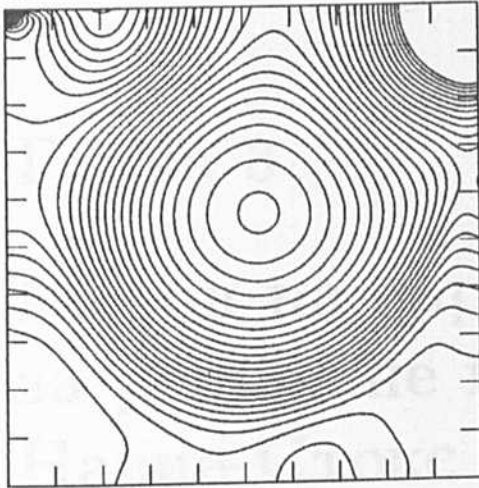
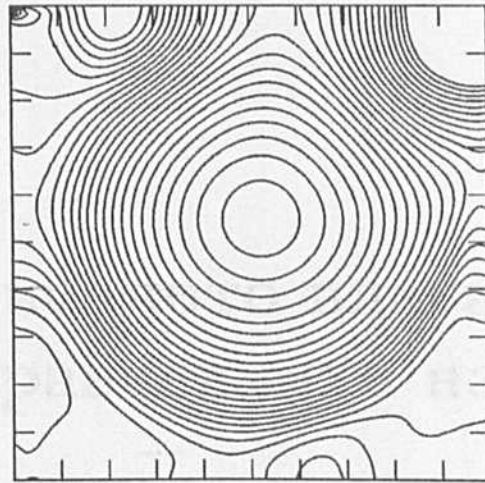
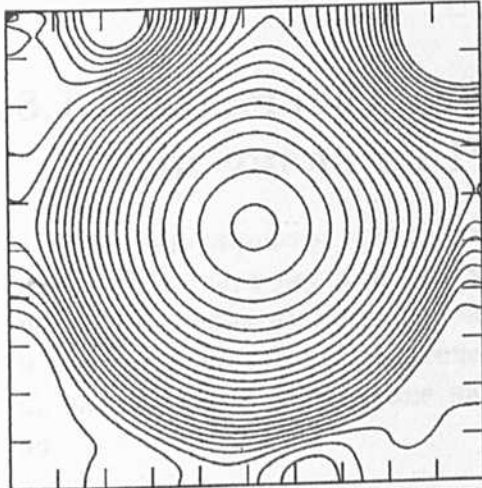
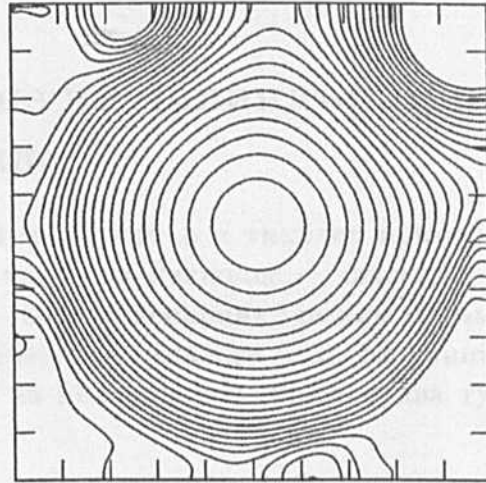
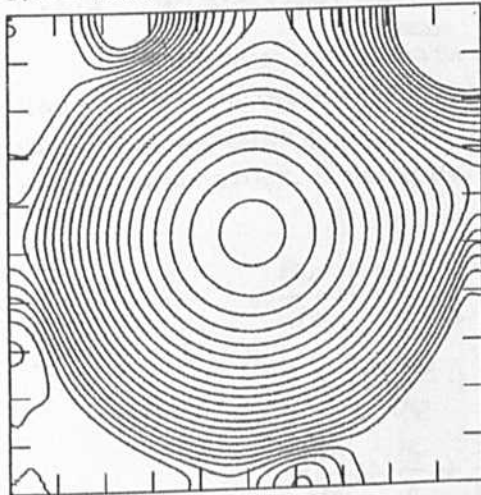
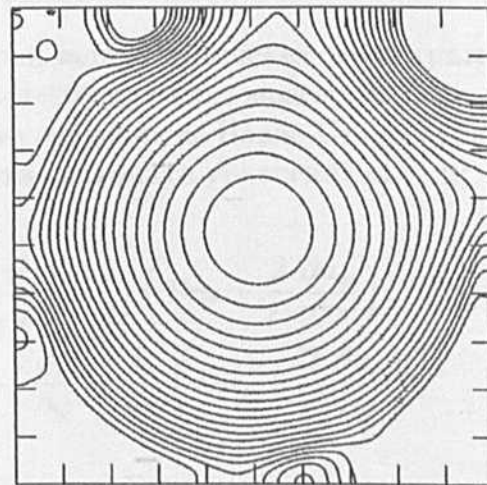
Фигура 2.15: Токови линии. Стойностите на константите са:  $-0.115$ ,  $-0.11$ ,  $-0.10$ ,  $-0.09$ ,  $-0.07$ ,  $-0.05$ ,  $-0.03$ ,  $-0.01$ ,  $-1.0 \times 10^{-4}$ ,  $-1.0 \times 10^{-5}$ ,  $-1.0 \times 10^{-7}$ ,  $0$ ,  $1.0 \times 10^{-7}$ ,  $1.0 \times 10^{-5}$ ,  $5.0 \times 10^{-5}$ ,  $1.0 \times 10^{-4}$ ,  $2.5 \times 10^{-4}$ ,  $5.0 \times 10^{-4}$ ,  $1.0 \times 10^{-3}$ ,  $1.5 \times 10^{-3}$ ,  $3.0 \times 10^{-3}$ .



Фигура 2.16: По редове: токови линии; вихри в горния ляв ъгъл; вихри в долния ляв ъгъл; вихри в долния десен ъгъл, съответно със стъпки  $1/256$ ,  $1/512$  и с екстраполация на Ричардсън,  $Re = 10000$ .

$Re = 1000$  $Re = 2000$  $Re = 3200$  $Re = 5000$  $Re = 7500$  $Re = 11000$ 

Фигура 2.17: Изолинии на функцията на вихъра. Стойностите на константите са: 0.0,  $\pm 0.5$ ,  $\pm 1.0$ ,  $\pm 2.0$ ,  $\pm 3.0$ , 4.0, 5.0.

$Re = 1000$  $Re = 2000$  $Re = 3200$  $Re = 5000$  $Re = 7500$  $Re = 11000$ 

Фигура 2.18: Изолинии на налягането. Стойности на константите:  $\pm 0.050$ ,  $\pm 0.045$ ,  $\pm 0.040$ ,  $\pm 0.035$ ,  $\pm 0.030$ ,  $\pm 0.025$ ,  $\pm 0.020$ ,  $\pm 0.015$ ,  $\pm 0.010$ ,  $\pm 0.005$ ,  $0.$ ,  $0.055$ ,  $0.060$ ,  $0.065$ ,  $0.070$ ,  $0.075$ ,  $0.080$ ,  $0.085$ ,  $0.090$ ,  $0.095$ ,  $0.100$ .

## Глава 3

# Метод на вариационното влагане за решаване на уравненията на Навие-Стокс

### 3.1 Задачата за обтичане на цилиндър при големи числа на Рейнолдс

Стационарното течение около кръгов цилиндър е типичен пример за течение, което става неустойчиво за малки числа на Рейнолдс — около  $Re = 40$ . За по-големи числа на Рейнолдс  $40 < Re < 100$  стационарният режим се замества от нестационарно ламинарно течение, наречено „Карманова вихрова улица“ [40]. С по-нататъшното нарастване на числото на Рейнолдс течението става турбулентно.

#### 3.1.1 Формулировка на задачата

Разглеждаме двумерната стационарна задача за течение около кръгов цилиндър. Както вече беше казано в Глава 1, математическият модел, описващ движението на несвиваемия флуид, включва двете уравнения на Навие-Стокс и уравнението на непрекъснатост. В полярни координати системата уравнения е:

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( Du_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (3.1)$$

$$u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{Re} \left( Du_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (3.3)$$

където:

- $u_r = u_r(r, \varphi)$  и  $u_\varphi = u_\varphi(r, \varphi)$  са компонентите на скоростта, успоредни на съответните полярни координатни оси  $r$  и  $\varphi$ ;

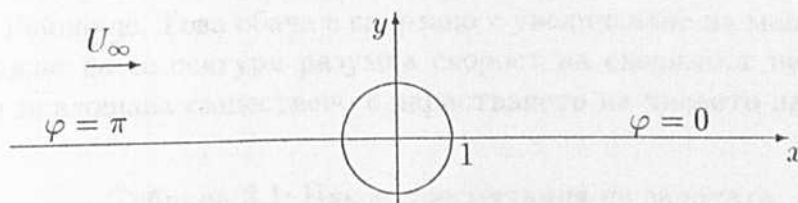
- $p = p(r, \varphi)$  е налягането;
- $Re = dU_\infty/\nu$  е числото на Рейнолдс, което е водещият безразмерен параметър в задачата. Диаметърът на цилиндъра  $d$  е характерната дължина, скоростта в безкрайност  $U_\infty$  е характерната скорост, а  $\nu$  е кинематичния коефициент на вискозност. По този начин, повърхността на цилиндъра е  $r = 1$ , а  $U_\infty = 1$ ;
- $D \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$  е т.нар. оператор на Стокс.

Граничните условия, при които решаваме задачата, записани в безразмерен вид, изразяват условията за полепване и непротичане върху повърхността на цилиндъра

$$u_r(1, \varphi) = u_\varphi(1, \varphi) = 0 \quad (3.4)$$

и за асимптотичен преход към несмутеното течение в безкрайност

$$u_r(r, \varphi) \rightarrow \cos \varphi, \quad u_\varphi(r, \varphi) \rightarrow -\sin \varphi \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$



Фигура 3.1: Областта, в която решаваме задачата.

При численото решаване на задачата не е възможно извършването на граничен преход. Затова въвеждаме т. нар. „актуална безкрайност“  $r_\infty$  като достатъчно голяма стойност на радиалната компонента, така че асимптотичните условия (3.5) да може да се заменят с условията

$$u_r(r_\infty, \varphi) = \cos \varphi, \quad u_\varphi(r_\infty, \varphi) = -\sin \varphi. \quad (3.6)$$

Поради очевидната симетрия на течението (вж. Фигура 3.1) относно правите  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ , областта  $\mathcal{D}$ , в която се извършват пресмятанията, може да бъде сведена до

$$\mathcal{D} = \{0 \leq \varphi \leq \pi, 1 \leq r \leq r_\infty\}.$$

Допълнителните гранични условия върху правите  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  се получават от условието за симетрия и имат вида

$$u_\varphi = \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \pi. \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Числено решаване на задачата за обтичане при големи числа на Рейнолдс

В продължение на шест десетилетия са прилагани различни числени техники за решаване на задачата за обтичане (вж. Таблица 3.1 и коментара към нея). Развитието на изчислителните ресурси през този период е огромно. Числените алгоритми също бележат значителен напредък. Обаче съответното число на Рейнолдс, с което са извършени успешни пресмятания, е увеличено само около 20 пъти. Въпреки това, според Форнберг [82], тези резултати дават възможност да се направят някои качествени изводи за полето на течението за всяко число на Рейнолдс. Например, че областта на завихряне зад обтичаното тяло (*следа*) се удължава и разширява с нарастване на числото на Рейнолдс.

При конструирането на диференчна схема и алгоритъм за решаване на задачата за обтичане на тела от безкраен поток възникват няколко специфични проблеми. Основният проблем е свързан с необходимостта от конструирането на сходяща диференчна схема от една страна, и ограничените машинни ресурси от друга. Също така трябва да се съобразяваме и с изискването за намаляване на размерите на мрежата в близост до тялото, където градиентите на скоростите са най-големи. До неадекватност на получените числени резултати може да доведе и изборът на актуалната безкрайност, която е необходимо да се увеличава с нарастването на числото на Рейнолдс. Това обаче е свързано с увеличаване на машинните ресурси. Затова е важно да се осигури разумна скорост на сходимост на пресмятаннията, която да не се влошава съществено с нарастването на числото на Рейнолдс.

Таблица 3.1: Някои пресмятания на задачата за обтичане на цилиндър.

Work	$Re$	$r_\infty$
Thom, [143]	10	
Thom, [144]	20	
Kawaguti, [104]	40	
Jain & Kawaguti, [100]	50	111
Keller & Takami, [105]	15	59
Jain & Sankara Rao, [101]	40	111
Son & Hanratty, [138]	40	157
Takami & Keller, [142]	60	17
Underwood, [151]	10	40
Dennis & Chang, [68]	100	39
Nieuwstadt & Keller, [119]	40	23
Ta, [139]	120	36
Tuann & Olson, [147]	100	20
Patel, [120]	40	103
Fornberg, [73]	300	600
Fornberg, [74]	600	600
Fornberg, [79]	700	



През 1923 година Бродецки следва идеята на Кирхоф за невискозно течение около пластина и я прилага към случая за невискозно течение около цилиндър. Той предполага тангенциално откъсване и намира едно решение с безкрайна следа с граница парабола, заграждаща застойна зона. И безкрайната следа, и крайният коефициент на съпротивление, са в съгласие с лабораторните експерименти тогава.

Първите числени решения на задачата за обтичане на цилиндър получава Том през 1928 г. и 1933 г. (вж. Таблица 3.1), които са и първите числени решения на частно диференциално уравнение на задача от хидродинамиката на вискозни флуиди. Той пресмята стационарни решения за  $Re = 10$  в [143] и за  $Re = 20$  в [144] с крайни разлики, като използва интерполация на повърхността на цилиндъра, за да получи гранично условие за функцията на вихъра. В [144] Том използва конформното преобразуване  $\xi + i\eta = x + iy + 1/(x + iy)$ .

Съществували са различни предположения за дължината и ширината на следата. Числените и експериментални изследвания на Том за  $Re = 10$  и  $Re = 20$ , на Кавагути за  $Re = 40$  (вж. Таблица 3.1) и много лабораторни експерименти са били в подкрепа на идеята за линейно нарастване на дължината на следата. Тогава се е считало, че тънките и дълги елиптични следи при нарастване на числото на Рейнолдс клонят към модела на Бродецки за стационарно ламинарно течение с откъсване. Обаче идеята за тънката следа не е достатъчно добре обоснована в тези работи [82].

От друга страна, през 1955 г. в [44] е решавана задачата за обтичане на цилиндър за  $Re = 0, 1, 10$ , и 1000 с релаксационен метод (метод на минималната невязка), разработен от Southwell и преобразуването, използвано от Том в [144]. Получени са следи, чиято дължина започва да намалява за стойности на  $Re$  между 10 и 100. При пресмятанията авторите се сблъскали с ясно изразена неустойчивост при  $Re = 100$  и отдали това на физическата неустойчивост на потока.

Една година по-късно Бетчелър в [47] прогнозира модел на следата (крайна дължина и ширина), много приличащ на малките следи, получени в [44].

През 1968 г. Таганов [141] предлага модел с ширина и дължина на следата, пропорционални на числото на Рейнолдс. Но неговата работа не била забелязана на Запад поради секретност и била пренебрегвана на Изток, тъй като била срещу научните тенденции по онова време.

В [43] са представени експериментални резултати за стационарно течение около различни тела. Акривос и съавтори [43] стигат до извода, че дължините на следите нарастват пропорционално на числото на Рейнолдс, а ширината клони към единица. Този резултат по-късно е обсъждан от Смит в [135, 136], Форнберг в [73, 74] и Перегрин в [122]. Те са единодушни, че ширината на следата нараства с числото на Рейнолдс.

В [68] Денис и Ченг получават числени решения за някои числа на Рейнолдс в интервала [5, 100]. Наблюдават дължината на следата, която нараства пропорционално на числото на Рейнолдс. Поради сравнително малкото число на Рейнолдс те правят извода, че ширината остава приблизително от порядъка на диаметъра на цилиндъра. Техните резултати се съгласуват отлично с тези на Таками и Келер в [142].

Изобщо през осемдесетте години общото мнение е подкрепяло силно идеята за

дълги и тънки следи. В края на осемдесетте Форнберг с помощта на мощен компютър съществено разширява обхвата на пресмятанията като получава решения до  $Re = 300$  [73]. Той използва метод на Нютон и подходящи изглаждащи техники за достигането на това число на Рейнолдс. За изненада на всички, неговите пресмятания показали преход към много широка следа. Форнберг наблюдава намаляване на дължината на следата около  $Re = 300$ , което по-късно в [74] опровергава. Но наблюдението на прехода към широка следа се потвърждава в [74]. Според тези пресмятания *дължината на следата е пропорционална на числото на Рейнолдс  $Re$ , а ширината — на  $\sqrt{Re}$  до  $Re = 300$  и на  $Re$ , когато  $Re > 300$ .*

Тези широки следи са били обсъждани теоретично впоследствие от Перегрин и Смит, съответно в [122] и [136]. Смит през 1979 г. в [135] дава подробно теоретично описание на течението около кръгов цилиндър при големи числа на Рейнолдс.

Изглежда, че широките следи са в значителна степен независими от формата на тялото. Пластините причиняват подобни следи, макар и по-дълги в сравнение с тези, породени от цилиндрите (вж. [71, 118, 94]).

Таблица 3.1 показва (без претенции за изчерпателност) някои постижения в опитите за решаването на стационарната задача за обтичане на цилиндър като пример за течение около просто „лошообтекаемо тяло“. Почти всички автори са решавали системата от уравнения за вихъра и функцията на тока. Горна граница на повечето пресмятания е  $Re = 100$ . От публикуваните досега резултати, Форнберг [79] е получил решение за най-голямо число на Рейнолдс —  $Re = 700$ . Въпреки че съществува известно съгласие между теоретични, числени и експериментални резултати, все още има нужда от по-нататъшна работа във всички аспекти на тази класическа и важна задача на хидродинамиката на вискозни флуиди.

## 3.2 Приложение на метода на вариационното влагане

В Глава 1 беше представен методът на вариационното влагане за решаване на обратни и некоректни задачи. Граничната или начално-граничната задача се свежда до задача за минимизиране на квадратичен функционал от изходните уравнения, така че решенията на изходната задача да са измежду локалните екстремуми на „вложената“ задача, за които минимумът на функционала е нула. При числено решаване на стационарната задача с числа на Рейнолдс  $Re > 40$  обикновено се използват изглаждащи техники (явно или неявно), за да се намали влиянието на случайните смущения, които водят до нестационарен режим [73]. Целта на тази работа е прилагането на нов подход — задачата се разглежда като обратна и като такава се решава по метода на вариационното влагане.

Разглеждаме функционала

$$\mathcal{J}(u_r, u_\varphi, p) = \int_0^\pi \int_1^\infty (\Omega^2 + \Phi^2 + X^2) r \, dr \, d\varphi, \quad (3.8)$$

където

$$\Omega = u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{Re} \left( Du_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (3.9)$$

$$\Phi = u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{Re} \left( Du_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right), \quad (3.10)$$

$$X = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (3.11)$$

Ако граничната задача за системата уравнения (3.1), (3.2) и (3.3) при гранични условия (3.4), (3.5) и (3.7) има решение, то тогава глобалният минимум на квадратичния функционал  $\mathcal{J}(u_r, u_\varphi, p)$  е равен на нула. Затова, ако е достигнат минимум на функционала  $\mathcal{J}(u_r, u_\varphi, p)$  при гранични условия (3.4), (3.5) и (3.7) и той е равен на нула, то е намерено и решение на изходната задача. Това позволява да се търси локален минимум на функционала  $\mathcal{J}(u_r, u_\varphi, p)$  и да се провери впоследствие дали този минимум е равен на нула.

Има различни начини за намиране на локалния минимум на функционала  $\mathcal{J}$ . Следвайки идеята на МВВ, ние решаваме уравненията на Ойлер–Лагранж, които са необходими условия за минимизиране на функционала (вж. [4]). В случая, за трите търсени функции  $u_r$ ,  $u_\varphi$  и  $p$ , тези уравнения имат вида

$$\frac{\partial F}{\partial u_r} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial r}} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2}} \right) = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_\varphi} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2}} \right) = 0, \quad (3.13)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial p}{\partial r}} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial p}{\partial \varphi}} \right) = 0, \quad (3.14)$$

където  $F = (\Omega^2 + \Phi^2 + X^2)r$ .

От уравненията на Ойлер–Лагранж се получават следните условия, които трябва да удовлетворяват търсените функции:

Необходимото условие за минимум по  $u_r$  е

$$\left[ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{u_\varphi}{r} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] (r\Omega) - \left( \frac{1}{Re} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) (r\Phi) + \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) (rX) = 0, \quad (3.15)$$

а за минимум по  $u_\varphi$  условието е

$$\left[ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{u_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r} \right] (r\Phi) + \left( \frac{1}{Re} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2u_\varphi}{r} \right) (r\Omega) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (rX) = 0. \quad (3.16)$$

Условието за минимизиране на функционала  $\mathcal{J}(u_r, u_\varphi, p)$  по  $p$  е

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\Omega) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\Phi) = 0. \quad (3.17)$$

От последното условие като се отчете, че е изпълнено

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \\ \equiv \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) X = 0, \quad (3.18) \end{aligned}$$

се получава известното уравнение на Поасон за налягането

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right) \\ + \frac{1}{r} \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} \right) = 0. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Уравнението за налягането (3.19) може да се представи и във вида

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = 0. \quad (3.20)$$

Преобразуванията, при които от уравнение (3.19) се получава уравнение (3.20), са дадени в Приложение А.

Вложената система (3.15), (3.16), (3.20) е от по-висок ред в сравнение с изходната и изисква повече гранични условия. Допълнителните гранични условия се получават от т. нар. естествени гранични условия за минимизация на функционал. В случая те съвпадат с изходните уравнения (3.1), (3.2), (3.3), взети върху границата на разглежданата област, а именно

$$\Omega(1, \varphi) = 0, \quad \Omega(r_\infty, \varphi) = 0, \quad \Omega(r, 0) = 0, \quad \Omega(r, \pi) = 0, \quad (3.21)$$

$$\Phi(1, \varphi) = 0, \quad \Phi(r_\infty, \varphi) = 0, \quad \Phi(r, 0) = 0, \quad \Phi(r, \pi) = 0, \quad (3.22)$$

$$X(1, \varphi) = 0, \quad X(r_\infty, \varphi) = 0, \quad X(r, 0) = 0, \quad X(r, \pi) = 0. \quad (3.23)$$

Тези гранични условия заедно с условията (3.4), (3.6) и (3.7), които удовлетворяват компонентите на скоростта, са достатъчни за затваряне на вложената система.

Уравненията на влагането за компонентите на скоростта (3.15) и (3.16) са от четвърти ред относно функциите  $u_r$  и  $u_\varphi$ , а уравнението за налягането (3.20) — от втори ред. И трите са от елиптичен тип. Въпреки че новата система изглежда много по-сложна от изходната, като гранична задача тя е добре поставена.

В дисертацията са разработени два подхода за решаване на уравненията на влагането:

- При първия подход за неизвестните  $u_r$ ,  $u_\varphi$  и  $p$  се решават двете уравнения от четвърти ред (3.15) и (3.16)<sup>1</sup> спрямо неизвестните  $u_r$  и  $u_\varphi$  и уравнението от втори ред (3.19) за  $p$  — *вложена система от три уравнения*.
- При втория подход се решава система от пет уравнения от втори ред за неизвестните  $u_r$ ,  $u_\varphi$ ,  $\Omega$ ,  $\Phi$  и  $p$ , т.е. двете уравнения (3.9) и (3.10), уравненията на влагането (3.15) и (3.16), и петото уравнение е уравнението (3.20) за налягането — *вложена система от пет уравнения*. Функциите  $\Omega$  и  $\Phi$  са невязките („residuals“) на уравненията за движение.

Ако бъде намерено решение, в което невязките са равни на нула, то изходната задача е решена.

### 3.2.1 Вложена система от три уравнения

Разглежда се системата на влагането за определяне на  $u_r$ ,  $u_\varphi$  и  $p$  от двете нелинейни уравнения (3.15), (3.16) и уравнението за налягането (3.19). За да не се натоварва изложението, преобразуваните и подробно разписани уравнения на Ойлер–Лагранж за компонентите на скоростта са дадени в Приложение Б.

Първите две уравнения са от четвърти ред и за тях са необходими по две гранични условия във всяка точка от границата на областта  $\mathcal{D}$ . За уравнението за налягането, което е от втори ред, е необходимо само едно гранично условие.

Преобразуваме естествените гранични условия (3.21)–(3.23), които са изходните уравнения върху границата на областта, като отчитаме условията за полепване и непротичане (3.4), за асимптотичен преход (3.6) върху условно въведената граница  $r = r_\infty$  и за симетрия (3.7). Получаваме следните гранични условия за двете компоненти на скоростта върху четирите страни на областта  $\mathcal{D}$

За  $u_\varphi$ :

$$u_\varphi(1, \varphi) = 0, \quad \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} u_\varphi - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad (3.24)$$

$$u_\varphi(r_\infty, \varphi) = -\sin \varphi, \quad \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}(r_\infty, \varphi) = 0, \quad (3.25)$$

$$u_\varphi(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2}(r, 0) = 0, \quad (3.26)$$

$$u_\varphi(r, \pi) = 0, \quad \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2}(r, \pi) = 0. \quad (3.27)$$

За  $u_r$ :

$$u_r(1, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial r}(1, \varphi) = 0, \quad (3.28)$$

$$u_r(r_\infty, \varphi) = \cos \varphi, \quad \frac{\partial u_r}{\partial r}(r_\infty, \varphi) = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}(r, \pi) = 0, \quad (3.30)$$

<sup>1</sup>В уравненията (3.15) и (3.16) са заместени  $\Omega$  от (3.9) и  $\Phi$  от (3.10)

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{Re} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (3.31)$$

при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ .

Преодолими проблеми се появяват с използването на изходните уравнения като гранични условия, поради техния нелокален характер. Например граничното условие (3.31) съдържа както нормални, така и тангенциални производни на търсената функция. Това налага много внимателен подход при прилагането на метода на дробните стъпки — това уравнение също трябва да бъде „разцепено“. Условието (3.24), (3.25), (3.26) и (3.27) се използват за гранични условия на уравнението (3.15), а (3.28), (3.27), (3.30) и (3.31) — за гранични условия на уравнението (3.16).

Граничните условия за налягането, които се получават от условията

$$\Omega(1, \varphi) = \Omega(r_\infty, \varphi) = 0, \quad \Phi(r, 0) = \Phi(r, \pi) = 0,$$

имат вида

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right|_{r=1, r=r_\infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0, \varphi=\pi} = 0. \quad (3.32)$$

И така, с добавянето на естествените гранични условия, се получава гранична задача, която има необходимия брой гранични условия за всяка от търсените функции —  $u_\varphi$ ,  $u_r$  и  $p$ . Както вече казахме, решението на тази гранична задача, за което функционалът  $\mathcal{J}$  е равен на нула, е решение на изходната гранична задача.

### 3.2.2 Вложена система от пет уравнения

След опростяване на уравненията на Ойлер-Лагранж се получава следната система за  $\Phi$ ,  $u_\varphi$ ,  $\Omega$ ,  $u_r$  и  $p$ :

$$\frac{1}{Re} \left( D\Phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \right) + \left( u_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{2u_\varphi \Omega}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right) + \Phi \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\Omega}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{Re} \left( Du_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) - \left( u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \Phi = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{Re} \left( D\Omega - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \left( u_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi \Phi}{r} + \frac{\partial X}{\partial r} \right) - \Phi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \Omega \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{Re} \left( Du_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) - \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \Omega = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.37)$$

И петте уравнения са от елиптичен тип от втори ред спрямо производните. Затова са необходими пет гранични условия във всяка точка от границата на областта. Две гранични условия бяха наложени при формулировката на задачата, а именно (3.4), (3.5) и (3.7). Останалите три са естествените гранични условия за

минимизация на функционала  $\mathcal{J}$ , които в случая са  $\Phi = \Omega = X = 0$ . От уравнението на непрекъснатост  $X = 0$  следва, че е в сила  $\partial u_r / \partial r = 0$  върху границите  $r = 1$  и  $r = r_\infty$ . По аналогичен начин стигаме до извода, че върху линиите на симетрия  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  е изпълнено  $\partial p / \partial \varphi = 0$ , което е еквивалентно с условието за симетрия на функцията  $u_\varphi(r, \varphi)$  върху същите прави, а именно —  $\partial^2 u_\varphi / \partial \varphi^2 = 0$ . Така че получената задача е коректно поставена гранична задача за търсените функции.

Върху различните граници на областта граничните условия имат вида:

— върху цилиндъра  $r = 1$

$$\Phi = 0, \quad \Omega = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad u_r = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0; \quad (3.38)$$

— върху  $r = r_\infty$

$$\Phi = 0, \quad \Omega = 0, \quad u_\varphi = -\sin \varphi, \quad u_r = \cos \varphi, \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0; \quad (3.39)$$

— върху линиите на симетрия  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  са

$$\Phi = 0, \quad \Omega = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.40)$$

Ясно е, че ако бъде намерено решение на вложената задача, за което  $\Phi$  и  $\Omega$  са равни на нула, то  $u_\varphi$ ,  $u_r$  и  $p$  ще бъдат решения на изходната задача.

### 3.3 Решаване на вложената система от три уравнения

#### 3.3.1 Схема на разцепване

Задачата за решаване на вложената система от три уравнения, именно (3.15), (3.16), (3.20), беше формулирана в 3.2.1 на страница 69. Тъй като задачата е нелинейна, численото ѝ решаване включва итерационен процес. Използвана е проста линеаризация — предполага се, че коефициентите пред производните на  $u_r(r, \varphi)$  и  $u_\varphi(r, \varphi)$  са определени или отнапред зададени — например, получени при предходни итерации. Тези „известни“ функции са означени с  $\hat{u}_\varphi(r, \varphi)$  и  $\hat{u}_r(r, \varphi)$ .

За решаване на елиптичните уравнения (3.15), (3.16), (3.20) е използвана схемата на стабилизиращата поправка, аналогична на представената в Глава 2.

Въвеждаме означенията за диференчната апроксимация на основните диференциални оператори:

$$\Lambda_{4\varphi}^{[\varphi]} \approx -\frac{1}{Re^2 r^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.41)$$

$$\Lambda_{4r}^{[\varphi]} \approx -\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \hat{u}_r - \frac{1}{Re r} \right)^2 \frac{\partial}{\partial r} \right] - \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} - \frac{\hat{u}_\varphi}{r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 Re} \right)^2 \right], \quad (3.42)$$

$$\Lambda_{4\varphi}^{[r]} \approx -\frac{1}{Re^2 r^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} - \left[ \left( \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial r} + \frac{\hat{u}_\varphi}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{Re r^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.43)$$

$$\Lambda_{4r}^{[r]} \approx -\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \hat{u}_r - \frac{1}{Re r} \right)^2 \frac{\partial}{\partial r} \right], \quad (3.44)$$

$$\Lambda_{\varphi\varphi} \approx \frac{1}{Re.r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \Lambda_{rr} \approx \frac{1}{Re.r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \Lambda_{\varphi\varphi}^{[p]} \approx \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \Lambda_{rr}^{[p]} \approx \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (3.45)$$

Останалите членове на уравненията в системата (3.15), (3.16) и (3.20), които не участват в (3.41)–(3.45) са означени с  $\mathcal{N}_{[r]}$ ,  $\mathcal{N}_{[\varphi]}$  и  $\mathcal{N}_{[p]}$ , съответно.

В уравненията (3.15), (3.16) и (3.20), след добавяне на производна по фиктивното време  $t_1$ , се стига до решаване на обобщена параболична гранична задача. Трябва да се подчертае, че тази задача се различава от нестационарната задача за уравненията на Навие–Стокс, която е силно неустойчива.

За решаване на получената „параболизирана“ вложена гранична задача е конструиран алгоритъм, който не изисква големи машинни ресурси. Той е аналогичен на метода за покоординатно разцепване, предложен за пръв път в [121] (вж. също [41]) и използван вече в Глава 2. Основната разлика със споменатите основополагащи работи е, че параболичната система съдържа и оператор от четвърти ред.

### Разцепване на уравнението за $u_\varphi$ :

След въвеждане на фиктивно време в уравнението (3.16) за пресмятане на  $u_\varphi$  се получава параболично диференциално уравнение. Една неявна схема по отношение на оператора  $\Lambda_{4r}^{[\varphi]} + \Lambda_{4\varphi}^{[r]}$  би изглеждала по следния начин

$$\frac{u_\varphi^{n+1} - u_\varphi^n}{\tau} = \left( \Lambda_{4r}^{[\varphi]} + \Lambda_{4\varphi}^{[r]} \right) u_\varphi^{n+1} + \mathcal{N}_{[\varphi]}, \quad (3.46)$$

където горният индекс  $n$  показва номера на стъпката по фиктивното време. Съответно  $n+1$  е „новият“ слой.

Разгледаната схема за „цяла стъпка“ по фиктивното време се апроксимира с помощта на две полустъпки (използвано е означението  $u_\varphi^{n+\frac{1}{2}}$  и  $u_r^{n+\frac{1}{2}}$  за съответните стойности на полустъпката)

$$\frac{u_\varphi^{n+\frac{1}{2}} - u_\varphi^n}{\tau} = \Lambda_{4r}^{[\varphi]} u_\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{4\varphi}^{[r]} u_\varphi^n + \mathcal{N}_{[\varphi]}, \quad (3.47)$$

$$\frac{u_\varphi^{n+1} - u_\varphi^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_{4\varphi}^{[\varphi]} (u_\varphi^{n+1} - u_\varphi^n), \quad (3.48)$$



при гранични условия (3.24), (3.25) на първа и (3.26), (3.27) на втора полустъпка.

Последната схема може да бъде записана като

$$(E - \tau \Lambda_{4r}^{[\varphi]}) u_\varphi^{n+\frac{1}{2}} = (E + \tau \Lambda_{4r}^{[\varphi]}) u_\varphi^n + \tau \mathcal{N}_{[\varphi]}^n, \quad (3.49)$$

$$(E - \tau \Lambda_{4\varphi}^{[\varphi]}) u_\varphi^{n+1} = E u_\varphi^{n+\frac{1}{2}} - \tau \Lambda_{4\varphi}^{[\varphi]} u_\varphi^n, \quad (3.50)$$

където  $E$  е единичният оператор.

За да се покаже, че схемата на разцепване апроксимира уравнението (3.46) е необходимо да се изключи  $u_\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ . За тази цел върху двете страни на уравнението (3.50) се прилага операторът  $(E - \tau \Lambda_{4r}^{[\varphi]})$  и полученият резултат се прибавя към (3.49). След очевидни преобразувания се получава

$$\left[ E + \tau^2 \Lambda_{4r}^{[\varphi]} \Lambda_{4\varphi}^{[\varphi]} \right] \frac{u_\varphi^{n+1} - u_\varphi^n}{\tau} = \left( \Lambda_{4r}^{[\varphi]} + \Lambda_{4\varphi}^{[\varphi]} \right) u_\varphi^{n+1} + \mathcal{N}_{[\varphi]}^n, \quad (3.51)$$

което е апроксимация на уравнението (3.46). Нещо повече — получената схема на разцепване е не само „по-евтина“ откъм машинни ресурси, но и по-устойчива от схемата (3.46), тъй като нормата на оператора  $[E + \tau^2 \Lambda_{4r}^{[\varphi]} \Lambda_{4\varphi}^{[\varphi]}]$ , който действа върху диференчната производна по фиктивното време, е по-голяма от единица. При обръщането му се получава оператор с норма по-малка от единица, което подобрява устойчивостта на схемата.

#### Схема на разцепване за $u_r$ :

По аналогичен начин при решаването на уравнението за определяне на стойностите на функцията  $u_\varphi$  се въвежда неявна схема за уравнението (3.15) за пресмятане на  $u_r$  във вида

$$\frac{u_r^{n+1} - u_r^n}{\tau} = \left( \Lambda_{4r}^{[r]} + \Lambda_{4\varphi}^{[r]} \right) u_r^{n+1} + \mathcal{N}_{[r]}^n, \quad (3.52)$$

която се апроксимира с помощта на двете полустъпки

$$\frac{u_r^{n+\frac{1}{2}} - u_r^n}{\tau} = \Lambda_{4\varphi}^{[r]} u_r^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{4r}^{[r]} u_r^n + \mathcal{N}_{[r]}^n, \quad (3.53)$$

$$\frac{u_r^{n+1} - u_r^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_{4r}^{[r]} (u_r^{n+1} - u_r^n), \quad (3.54)$$

при граничните условия (3.30), (3.31) на първа полустъпка и (3.28), (3.29) на втора.

Тъй като процедурата на изключване на стойността на полустъпката  $u_r^{n+\frac{1}{2}}$  е както в предходния случай, няма да се спираме на детайлите.

На първа полустъпка възникват проблеми с граничното условие (3.31), върху правите  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ . Тъй като това гранично условие включва производни и по двете променливи, налага се то да бъде разцепено по начин, аналогичен на

описания по-горе. Уравненията, които се използват за гранични условия на полустъпките, имат вида

$$\frac{u_r^{n+1} - u_r^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_{\varphi\varphi} u_r^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{rr} u_r^n + \mathcal{L}^n[u_r], \quad (3.55)$$

$$\frac{u_r^{n+\frac{1}{2}} - u_r^n}{\tau} = \Lambda_{rr}(u_r^{n+1} - u_r^n), \quad (3.56)$$

където

$$\mathcal{L}[u_r] = -u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{Re} \frac{u_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Уравнението (3.53) заедно с граничните условия (3.30), (3.55) позволява да се определи  $u_r$  на първа полустъпка. На втора полустъпка по фиктивното време във вътрешността на областта се решава уравнението (3.54) заедно с граничните условия (3.28), (3.29), а от „разцепения“ вариант на граничните условия върху границите  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  се получава едномерна диференчна задача за уравнението (3.56) при гранични условия (3.28).

### Разцепване на уравнението за $p$ :

Схемата на разцепване на уравнението за  $p(r, \varphi)$  има вида:

$$\frac{p^{n+\frac{1}{2}} - p^n}{\tau} = \Lambda_{rr}^{[p]} p^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{\varphi\varphi}^{[p]} p^n + \mathcal{N}^n[p], \quad (3.57)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_{\varphi\varphi}^{[p]} (p^{n+1} - p^n). \quad (3.58)$$

Граничните условия, които затварят тридиагоналната система за налягането, са (3.32).

### 3.3.2 Избор на мрежа и диференчни апроксимации

Използвана е равномерна мрежа и в двете направления. Броят на линиите по съответните направления е  $N_r$  и  $N_\varphi$ . За да се осигури апроксимация с втори ред на точност на граничните условия, мрежата включва допълнителни линии, които лежат вън от разглежданата област (вж. Фигура 2.6 на стр. 44). Двойните линии представляват границите на областта на пресмятанята. Стъпките по съответните направления са

$$h_r = \frac{r_\infty - 1}{N_r - 3}, \quad h_\varphi = \frac{\pi}{N_\varphi - 3}.$$

Тази мрежа осигурява апроксимации с втори ред на точност за граничните условия.

### Диференчни апроксимации на операторите в уравненията

Във вътрешните възли на областта е използвана стандартната триточкова апроксимация с централни разлики за първите и втори производни и стандартните петточкови апроксимации с централни разлики за производните от четвърти ред, а именно

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i \approx \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}), \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i \approx \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad (3.59)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} w^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i \approx \frac{1}{h^2} \left[ w_{i+\frac{1}{2}}^2 u_{i+1} + w_{i-\frac{1}{2}}^2 u_{i-1} - (w_{i+\frac{1}{2}}^2 + w_{i-\frac{1}{2}}^2) u_i \right], \quad (3.60)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} w \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i \approx \frac{1}{h^2} \left[ w_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1} + w_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1} - (w_{i+\frac{1}{2}} + w_{i-\frac{1}{2}}) u_i \right], \quad (3.61)$$

където  $w_{i+\frac{1}{2}} = (w_{i+1} + w_i)/2$ ,  $w_{i+\frac{1}{2}}^2 = (w_{i+1} + w_i)^2/4$ ,

$$\left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_i \approx \frac{1}{h^4}(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}), \quad (3.62)$$

$$\left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i \approx \frac{1}{2h^3}(-u_{i-2} + 2u_{i-1} - 2u_{i+1} + u_{i+2}), \quad (3.63)$$

където  $u$  е произволна функция, която може да бъде заместена от  $u_r$ ,  $u_\varphi$  или  $p$ , а  $x$  — с  $r$  или  $\varphi$ . Съответно  $h$  е  $h_r$  или  $h_\varphi$ , а  $w$  означава  $u_\varphi$  или  $(u_r - \frac{1}{Re r})$ .

Смесените производни са апроксимирани както следва

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \right|_{i,j} \approx \frac{1}{4h_\varphi h_r} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}), \quad (3.64)$$

$$\left. \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi \partial r^2} \right|_{i,j} \approx \frac{1}{2h_\varphi h_r^2} [(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) - (u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})], \quad (3.65)$$

$$\left. \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \varphi^2} \right|_{i,j} \approx \frac{1}{2h_r h_\varphi^2} [(u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) - (u_{i-1,j+1} - 2u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1})]. \quad (3.66)$$

### Диференчни апроксимации на граничните условия

Допълнителните линии извън областта позволяват да се апроксимират производните върху границата с централни разлики. Освен, че тази апроксимация има втори ред на точност, тя се съгласува с апроксимацията на производните във

вътрешните възли на областта. Това осигурява консервативност на диференчната схема и спомага за устойчивостта ѝ.

В уравнението за  $u_\varphi$  граничните условия се апроксимират по следния начин: при  $r = 1$ :

$$u_\varphi|_{2,j} = 0, \quad \Phi_{2,j} = 0; \quad (3.67)$$

при  $r = r_\infty$ :

$$u_\varphi|_{N_r-1,j} = -\sin \varphi_j, \quad u_\varphi|_{N_r,j} - u_\varphi|_{N_r-2,j} = 0; \quad (3.68)$$

при  $\varphi = 0$ :

$$u_\varphi|_{i,2} = 0, \quad u_\varphi|_{i,1} + u_\varphi|_{i,3} = 0; \quad (3.69)$$

при  $\varphi = \pi$ :

$$u_\varphi|_{i,N_\varphi-1} = 0, \quad u_\varphi|_{i,N_\varphi-2} + u_\varphi|_{i,N_\varphi} = 0, \quad (3.70)$$

които затварят петдиагоналните системи (3.47) и (3.48).

За функцията  $u_r$  граничните условия са апроксимирани както следва при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ :

На първа полустъпка

$$u_r|_{i,1} - u_r|_{i,3} = u_r|_{i,N_\varphi-2} - u_r|_{i,N_\varphi} = 0, \quad (3.71)$$

и уравнението (3.55)

$$\frac{u_r^{n+\frac{1}{2}} - u_r^n}{\tau} = \Lambda_{\varphi\varphi} u_r^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{rr} u_r^n + \mathcal{L} u_r^n, \quad (3.72)$$

при  $j = 2$  и  $j = N_\varphi - 1$ .

На втора полустъпка граничните условия се апроксимират при  $r = 1$ :

$$u_r|_{2,j} = 0, \quad u_r|_{3,j} - u_r|_{1,j} = 0; \quad (3.73)$$

при  $r = r_\infty$ :

$$u_r|_{N_r-1,j} = \cos \varphi_j, \quad u_r|_{N_r,j} - u_r|_{N_r-2,j} = 0, \quad (3.74)$$

като се решава и едномерна задача за уравнението (3.56) върху правите  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ . По този начин петдиагоналните системи (3.53) и (3.54) са затворени. Всички описани до тук диференциални оператори са апроксимирани с втори ред на точност.

От апроксимациите с централни разлики на граничните условия за налягането се получават триточкови съотношения за затваряне на тридиагоналните системи (3.57) и (3.58) за пресмятане на  $p(r, \varphi)$ . Тъй като уравнението за пресмятане на

$p(r, \varphi)$  е от втори ред по всяка от променливите, необходими са двучковни съотношения за затваряне на тридиагоналните системи за  $p(r, \varphi)$  на всяка полустъпка. За да удовлетворим тези две изисквания, постъпваме по следния начин:

при  $r = 1$ :

от естествените гранични условия за минимизиране на функционала

$$p_{3,j} - p_{1,j} = \frac{2}{h_r Re} (u_r|_{1,j} - 2u_r|_{2,j} + u_r|_{3,j}) \quad (3.75)$$

и от уравнение (3.57) при  $i = 2$  като се изключи  $p_{3,j}$  се получава връзка между  $p_{1,j}$  и  $p_{2,j}$ .

Аналогично при  $r = r_\infty$  от съответната апроксимация на уравненията на Навие–Стокс се получава

$$p_{N_r,j} - p_{N_r-2,j} = \frac{2}{h_r Re} (u_r|_{N_r-2,j} - 2u_r|_{N_r-1,j} + u_r|_{N_r,j}) \quad (3.76)$$

и от уравнение (3.57) при  $i = N_r - 1$  след изключване на  $p_{N_r-2,j}$  се получава двучково съотношение между  $p_{N_r,j}$  и  $p_{N_r-1,j}$ .

при  $\varphi = 0$ :

По аналогичен начин се изключва стойността  $p_{i,3}$  на търсената функция, например от

$$p_{i,1} - p_{i,3} = 0 \quad (3.77)$$

и уравнението (3.58) взето при  $j = 2$  се изключва  $p_{i,3}$  и се намира двучково съотношение между  $p_{i,1}$  и  $p_{i,2}$ .

при  $\varphi = \pi$  от

$$p_{i,N_\varphi-2} - p_{i,N_\varphi} = 0 \quad (3.78)$$

и уравнението (3.58) взето при  $j = N_\varphi - 1$  се изключва  $p_{i,N_\varphi-2}$  и се получава двучково съотношение между  $p_{i,N_\varphi}$  и  $p_{i,N_\varphi-1}$ . По този начин тридиагоналните системи за пресмятане на налягането са затворени. Всички гранични условия са апроксимирани с втори ред на точност.

### 3.3.3 Алгоритъм за решаване на диференчната задача

Системата от уравнения за определяне на диференчните апроксимации на трите неизвестни функции  $u_\varphi(r, \varphi)$ ,  $u_r(r, \varphi)$  и  $p(r, \varphi)$  е решена в следната последователност:

- (i) началните приближения за неизвестните  $u_\varphi^0$ ,  $u_r^0$ ,  $p^0$  за малки числа на Рейнолдс ( $Re = 2, 4$ ), се задават по следния начин

$$u_{\varphi i,j} = \frac{r_i - 1}{r_\infty - 1} \cos \varphi_j, \quad u_{r i,j} = \frac{r_i - 1}{r_\infty - 1} \sin \varphi_j, \quad p_{i,j} = 0, \quad (3.79)$$

за  $1 \leq i \leq N_r$ ,  $1 \leq j \leq N_\varphi$ . За големи числа на Рейнолдс решението, получено за по-малките  $Re$ , се използва за начално приближение на итерационния процес за текущото число.

Горният индекс, показващ номера на стъпката, е  $n = 0$ ;

- (ii) задават се  $\hat{u}_r \equiv u_r^n$ ,  $\hat{u}_\varphi \equiv u_\varphi^n$  и  $\hat{p} \equiv p^n$ , и се пресмята  $u_\varphi^{n+1}$  от съответното уравнение до установяване;
- (iii) задава се  $\hat{u}_\varphi \equiv u_\varphi^{n+1}$  и се пресмята функцията  $u_r^{n+1}$  от съответното уравнение;
- (iv) задава се  $\hat{u}_r \equiv u_r^{n+1}$  и функцията  $p^{n+1}$  се пресмята от съответното уравнение;
- (v) за всяка от трите функции се пресмята нормата на разликата

$$\max_{i,j} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n|$$

между приближенията на решението за две съседни итерации  $n + 1$  и  $n$  (две съседни стъпки по фиктивното време). Ако тази разлика е по-малка от предварително определената точност, то изчисленията се прекратяват. В противен случай се полага  $n + 1 = n$  и алгоритъмът се връща отново на т. (ii).

### 3.3.4 Пресмятане на функцията на вихъра и функцията на тока

Разглежданата задача е стационарна и токовете линии съвпадат с траекториите на частиците на флуида. За визуализацията интерес представляват изолините на токовата функция. Затова се налага пресмятането на функцията на тока след като  $u_r$  и  $u_\varphi$  са намерени. Както е известно, в полярни координати, функцията на тока  $\psi$  удовлетворява съотношенията

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = u_\varphi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -ru_r. \quad (3.80)$$

Уравнението, което използваме за определяне на функцията на тока, има вида

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\omega, \quad \omega \equiv \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}, \quad (3.81)$$

където  $\omega$  е функцията на вихъра.

Граничните условия за  $\psi$  следват от дефиницията (3.80) и съответните гранични условия за скоростта. Така се получава гранична задача от типа на Нойман. Поради симетрията на разглежданата област, върху линиите на симетрия може да се използват и граничните условия на Дирихле

$$\begin{aligned} \psi = 0 \quad \text{при} \quad r = 1, \varphi = 0, \pi, \\ \psi \rightarrow -r \sin \varphi \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Задачата (3.81), (3.82) също е решена чрез схема на разцепване, аналогична на използваната в Глава 2 за уравнението за функцията на тока. Поради това няма да се спираме подробно на нейното решаване. Диференциалните оператори са апроксимирани стандартно с централни разлики. Диференчната схема е абсолютно устойчива.

Както в Глава 2 всички петдиагонални или тридиагонални системи от алгебрични уравнения за определяне на функциите  $u_r$ ,  $u_\varphi$ ,  $p$  и  $\psi$ , са решени с т. пар. метод на немонотонната прогонка [58], който е тип Гаусова елиминация с избор на водещ елемент и е високо ефективен в случая на многодиагонални системи.

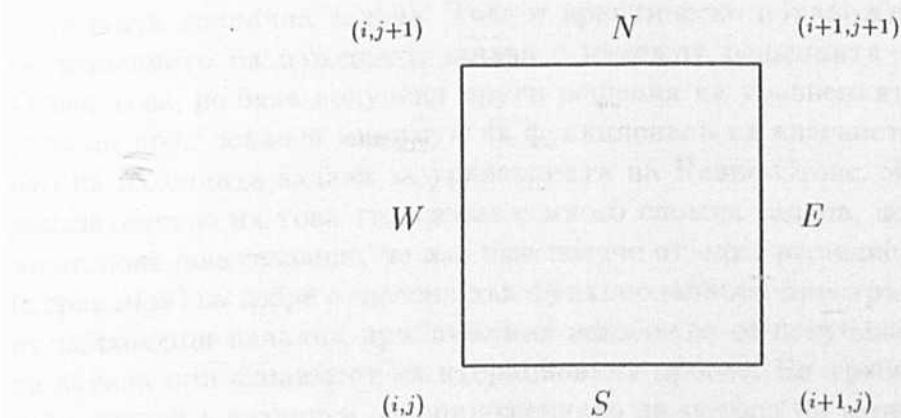
### 3.3.5 Описание на резултатите от числените пресмятания

#### Графично представяне на резултатите

За визуализиране на резултатите за получените функции на две променливи в началото бяха използвани някои стандартни графични пакети. Оказа се, че тези пакети изкривяват подадените данни, когато данните са върху неравномерна мрежа. При преминаване от полярни в декартови координати, с отдалечаване от центъра на координатната система нарастват разстоянията между възлите на мрежата. Това наложи използването на продукти само за двумерна графика, на които да се подават линиите на ниво на съответните функции.

Задачата за намиране на линиите на ниво за дискретно зададена функция представлява самостоятелен интерес. Ако тази линия може да се представи като функция само на една от променливите, то тя може да бъде намерена с цялостно претърсване на масива. Проблеми възникват, когато тази линия е затворена крива. Въпреки, че няма принципни трудности да бъдат намерени точките, принадлежащи на тази крива, проблемът е в тяхното подреждане в правилен ред. За решаване на тази задача е направена помощна програма.

Накратко описан, алгоритъмът на тази програма представлява следното: Нека да се търси линията на ниво  $\psi = c$  ( $c = \text{const}$ ). Преглежда се двумерният масив със стойности на функцията  $\psi_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq N_r$ ,  $1 \leq j \leq N_c$ ) до захващане на точка от търсената токова линия. По-точно, претърсва се всяка клетка, образувана от четири съседни възела на мрежата. На Фигура 3.2 е дадена клетката, образувана от възлите  $(i,j)$ ,  $(i+1,j)$ ,  $(i,j+1)$  и  $(i+1,j+1)$ , чиито страни са означени с  $S$ ,  $E$ ,  $N$ ,  $W$ .



Фигура 3.2: Клетка от мрежата.

Например, ако стойностите на  $(\psi_{i,j} - c)$  и  $(\psi_{i+1,j} - c)$  имат различни знаци, то  $(\psi - c)$  е равна на нула в някоя точка от страната  $S$ . Тази точка се намира с линейна интерполация. По същия начин се преглеждат отсечките  $E$ ,  $N$  и  $W$ . Точките от изолинията се намират като се следва принципа: щом кривата влиза в дадена клетка, то тя трябва да излезе от нея. Така се намира точката върху някоя от другите страни, през която търсената крива напуска клетката. Тази точка е

вход на търсената крива в съседната клетка от мрежата и за нея се разсъждава по същия начин. Така става придвижването докато линията се затвори или докато се обходи целия масив.

### Резултати от числени пресмятания

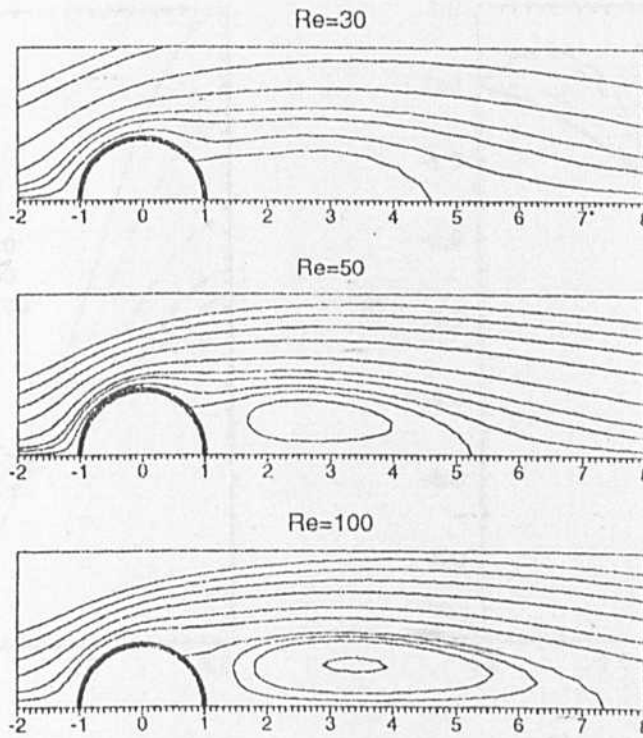
Течението около цилиндър е външно течение и поставя сериозни трудности, свързани с геометрията на областта. Целта, която си поставихме при подхождането към задачата по този начин, беше да се покажем приложимостта на метода на вариационното влагане към задачата за обтичане на цилиндър и да определим границите на параметрите, в които метода дава резултат. За да не се усложнява допълнително алгоритъма, не са използвани неравномерни мрежи и др. По равномерната мрежа води до очевидни ограничения, свързани с факта, че крайт на следата нараства пропорционално на числото на Рейнолдс [82]. Въпреки това, проблемът със следата при големи числа на Рейнолдс е все още обект на интензивни изследвания. Това е причината, поради която пресмятанията при тази реализация на решаваната задача са ограничени в случая  $Re \leq 100$ . Това налага използването на много гъсти мрежи — необходими са поне 500 възела в радиалното направление  $r$  за по-големите числа на Рейнолдс  $Re \geq 80$ .

За да се разбере, че е получено решение на изходната задача, се проверяват стойностите на  $\Omega$ ,  $\Phi$  и  $X$  за получените стойности на  $u_\varphi$ ,  $u_r$  и  $p$  (невязките). При всички пресмятания стойностите на невязките са в границите на допустимата грешка от апроксимация. От това следва, че получените числени решения на вложената система (минимизационната задача), са числени решения на изходната.

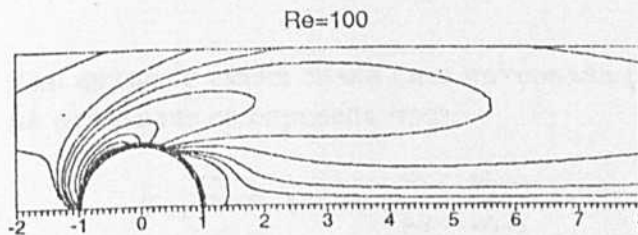
Първият, и най-важният според нас резултат е, че действително може да бъде получено решение на изходната задача за уравненията на Навие-Стокс от вложената гранична задача. Това е практическо потвърждение на твърдението, че решението на изходната задача е измежду решенията на вложената задача. Освен това, не бяха получени други решения на уравненията на Ойлер-Лагранж, даващи друг локален минимум на функционала на влагането (3.8), освен решението на изходната задача за уравненията на Навие-Стокс. Ясно е, че формалното доказателство на това твърдение е много сложна задача, но получените резултати са поне подсказващи, че ако има повече от едно решение, тогава тези решения (атрактори) са добре отделени във функционалното пространство и ако се започва от подходящи начални приближения неизбежно се получава решение на изходната задача при сходимост на итерационния процес. Би трябвало да се спомене, че този случай е различен от приложението на метода на вариационното влагане за идентификация на хомоклиники ([53, 59]), където същността на регуляризирането се състои в гладки преходи към лесно пресмятащи се фиктивни решения на вложената задача с ненулеви стойности на функционала, към решението на изходната задача.

Най-голямото число на Рейнолдс, за което се получи адекватно решение въпреки равномерната мрежа, е  $Re = 100$ . Фигура 3.3 показва токовите линии за различни числа на Рейнолдс, когато при течението вече има откъсване. Както вече казахме, с нарастване на числото на Рейнолдс областта на завихряне става все





Фигура 3.3: Токови линии с различни числа на Рейнолдс.



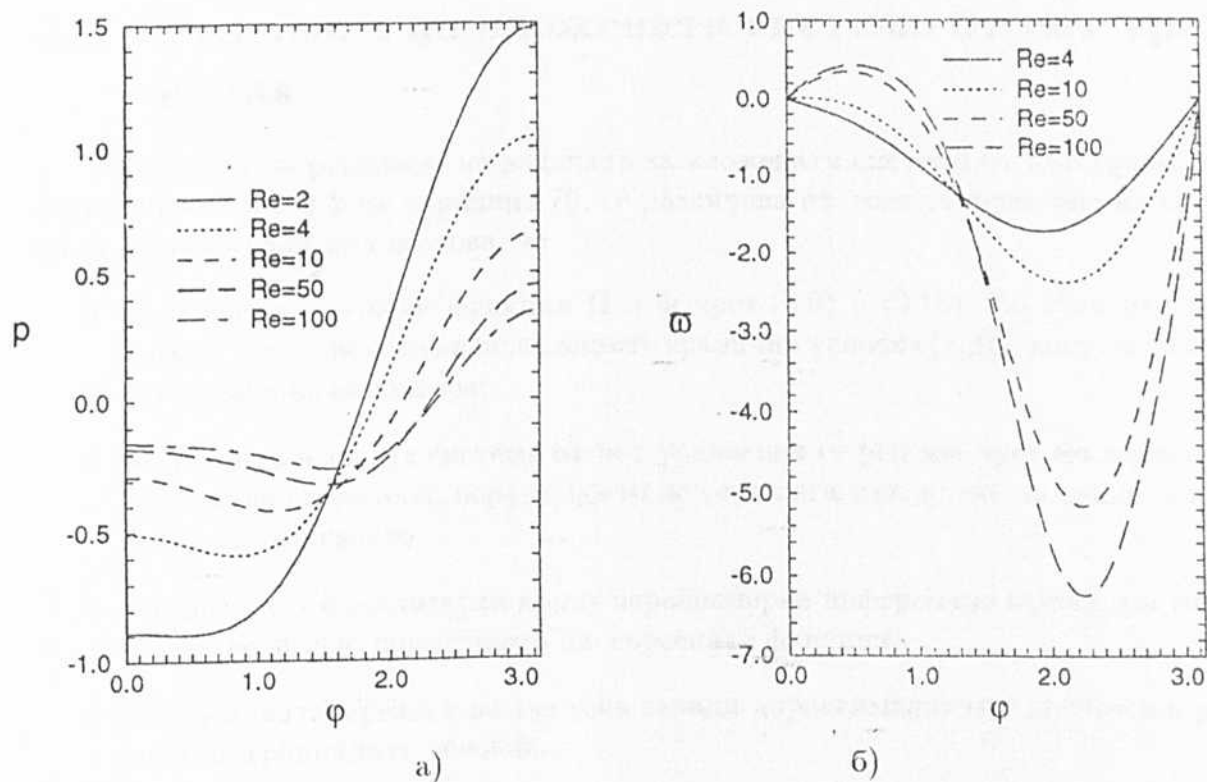
Фигура 3.4: Изолинии на вихъра за  $Re = 100$ .

по-дълга и все по-широка — на Фигура 3.4 са представени изолиниите на вихъра при  $Re = 100$ . Резултатите са в съгласие с резултатите на Форнберг.

Важни характеристики на течението са разпределението на налягането и вихъра върху повърхността на цилиндъра. Графиката на Фигура 3.5-а) показва разпределението на налягането за различни числа на Рейнолдс. Вижда се, че когато  $Re \geq 30$  разпределението на налягането клони към това на идеално течение с откъсване.

Графиката на Фигура 3.5-б) показва разпределението на вихъра върху повърхността на цилиндъра. Отново може да се види, че при  $Re \geq 30$  числото на Рейнолдс престава да играе количествена роля.

За стационарни течения, според [68, 120], точката на откъсване съвпада с точката, в която се анулира вихъра върху цилиндъра. Ъгълът на откъсване  $\varphi_{sep}$  намираме с обратна линейна интерполация на пресметнатите стойности на вихъра



Фигура 3.5: Разпределение на налягането и вихъра върху повърхността на цилиндъра: а) разпределение на налягането; б) разпределение на вихъра.

върху цилиндъра. Ако вихърът сменя знака си в интервала  $(\varphi_{i-1}, \varphi_i)$ , то апроксимацията на ъгъла на откъсване се определя чрез

$$\varphi_{\text{sep}} = \varphi_{i-1} - \omega_{i-1} \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\omega_i - \omega_{i-1}} \quad (3.83)$$

От Фигура 3.3 и Фигура 3.5-б) се вижда, че точката на откъсване се измества по посока на предната критична точка.

Сравненията с числените резултати от литературата показват, че наистина е получено решение на изходната задача. Както вече беше казано, основните проблеми при численото решаване на задачата за обтичане на тела от безкраен поток са свързани с необходимостта от конструирането на сходяща диференчна схема от една страна, и ограничените машинни ресурси от друга. Диференчната схема трябва да отчита характерните свойства на течението, за да бъдат адекватни получените решения. Равномерната мрежа има много предимства пред неравномерната. На големи разстояния от тялото обаче тя става неефективна. За да се намалят стъпките по пространствените променливи, което осигурява по-добра точност на изчисленията в областта, където стават промените, трябва да се увеличи многократно броя на възлите в цялата област. Това увеличава машинното време за решаване на задачата. Проблемите от такъв характер се преодоляват с използване на подходящо избрана неравномерна мрежа. Така се намалява и влиянието на мрежовата вискозност, която се появява с нарастването на числото на Рейнолдс.

### 3.4 Решаване на вложената система от пет уравнения

Подходът за решаване на задачата за вложената система от пет уравнения, формулирана в 3.2.2 на страница 70, се различава от този за решаване на системата от три уравнения по това, че

- са въведени две нови функции  $\Omega$  и  $\Phi$  чрез (3.9) и (3.10). По този начин се избягва използването на нелокалните гранични условия (3.31), които изискват разцепване на оператора;
- получената вложена система от пет уравнения се решава чрез векторно разцепване на оператора, поради което не се налага извеждане на гранични условия за налягането;
- алгоритъмът е реализиран върху неравномерна диференчна мрежа, която отразява по-пълно поведението на търсените функции;
- диференчната мрежа е разместена заради апроксимациите с централни разлики на граничните условия.

#### 3.4.1 Векторна форма на вложената система от пет уравнения

Въвеждаме означенията ( $E$  е единичния оператор):

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \Phi \\ u_\varphi \\ \Omega \\ u_r \\ p \end{pmatrix}, \quad F^{\vec{\theta}} = \begin{pmatrix} F^\Phi \\ F^{u_\varphi} \\ F^\Omega \\ F^{u_r} \\ F^p \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

$$F^\Phi = \frac{2}{Re \cdot r^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} + u_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{2u_\varphi \Omega}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial \varphi} + \Phi \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\Omega}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi},$$

$$F^{u_\varphi} = \frac{2}{Re \cdot r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \left( u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} \right),$$

$$F^\Omega = -\frac{2}{Re \cdot r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + u_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi \Phi}{r} + \frac{\partial X}{\partial r} - \Phi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \Omega \frac{\partial u_r}{\partial r},$$

$$F^{u_r} = -\frac{2}{Re \cdot r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right),$$

$$F^p = -\frac{2}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right),$$

$$\Lambda_{rr} = \frac{1}{Re} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \Lambda_{\varphi\varphi} = \frac{1}{Re \cdot r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \Lambda_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \Lambda_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\Lambda_{rr}^{[p]} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}, \quad \Lambda_{\varphi\varphi}^{[p]} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

След означенията

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_{rr} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}E & \Lambda_{rr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}E & \Lambda_{rr} & -\Lambda_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{rr}^{[p]} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \Lambda_{\varphi\varphi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}E & \Lambda_{\varphi\varphi} & 0 & 0 & -\Lambda_\varphi \\ 0 & 0 & \Lambda_{\varphi\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}E & \Lambda_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\varphi\varphi}^{[p]} \end{pmatrix},$$

уравненията за  $\Phi$ ,  $u_\varphi$ ,  $\Omega$ ,  $u_r$  и  $p$  се привеждат в следния векторен вид:

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)\vec{\theta} + F\vec{\theta} = 0. \quad (3.84)$$

След въвеждане на производна по фиктивното време  $t_1$  се получава параболичната система

$$\frac{\partial \vec{\theta}}{\partial t_1} = (\Lambda_1 + \Lambda_2)\vec{\theta} + F\vec{\theta}. \quad (3.85)$$

### 3.4.2 Схема на векторно разцепване на оператора за вложената система

Нека разгледаме диференчната схема за уравнението (3.85)

$$\frac{\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^n}{\tau} = (\Lambda_1 + \Lambda_2)\vec{\theta}^{n+1} + F\vec{\theta}^n, \quad (3.86)$$

където  $\tau$  е стъпката по фиктивното време.

Аналогично на предложената в Глава 2 схема на векторно разцепване, схемата на разцепване за системата от пет уравнения има вида

$$\frac{\vec{\theta}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{\theta}^n}{\tau} = \Lambda_1 \vec{\theta}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 \vec{\theta}^n + F\vec{\theta}^n, \quad (3.87)$$

$$\frac{\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 \vec{\theta}^{n+1} - \Lambda_2 \vec{\theta}^n, \quad (3.88)$$

или

$$(I - \tau\Lambda_1)\vec{\theta}^{n+\frac{1}{2}} = (I + \tau\Lambda_2)\vec{\theta}^n + \tau F\vec{\theta}^n, \quad (3.89)$$

$$(I - \tau\Lambda_2)\vec{\theta}^{n+1} = \vec{\theta}^{n+\frac{1}{2}} - \tau\Lambda_2\vec{\theta}^n. \quad (3.90)$$

Това, че схемата (3.87), (3.88) апроксимира на цяла стъпка по времето схемата (3.86) се доказва по същия начин, както в Глава 2. Изключва се  $\vec{\theta}^{n+\frac{1}{2}}$  и след известни манипулации, се получава уравнението

$$(I + \tau^2\Lambda_1\Lambda_2) \frac{\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^n}{\tau} = (\Lambda_1 + \Lambda_2)\vec{\theta}^{n+1} + F\vec{\theta}^n, \quad (3.91)$$

което апроксимира схемата (3.86) с ред  $O(\tau^2)$ . Различието между схемата на разцепване и неявната схема е оператора  $I + \tau^2\Lambda_1\Lambda_2$ . При установяване от уравненията (3.86) и (3.91) се получава едно и също стационарно решение.

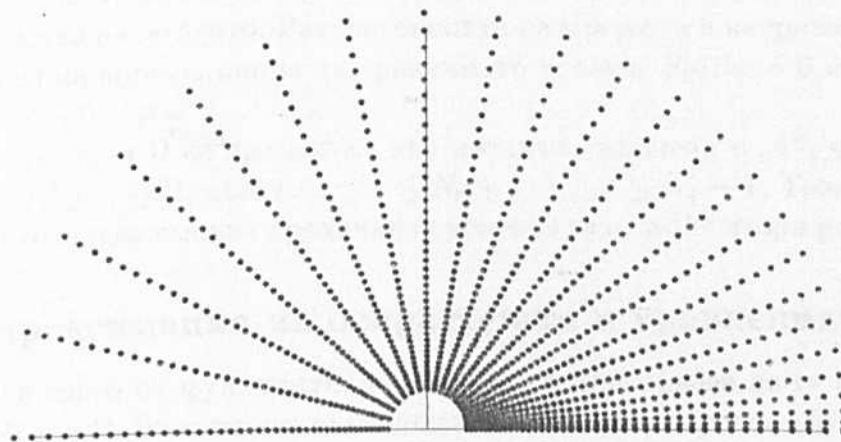
### 3.4.3 Диференчна мрежа

Граничната задача е в неограничена област, което значително затруднява построяването на ефективен алгоритъм за решаването ѝ. При големи числа на Рейнолдс полето на течението има няколко различни слоя с рязко отличаващи се мащаби. В близост до тялото има тънък граничен слой, който се откъсва и разширява по течението. Там е необходимо мрежата за решаване да бъде достатъчно гъста. Следата зад тялото също изисква специално внимание. Същевременно има обширни области, в които промените са малки. Равномерната мрежа в полярната координатна система относително добре обхваща следата далече от тялото, но е излишно гъста в другите направления. Проблемите се увеличават с нарастване на числото на Рейнолдс. Затова при този подход диференчната схема е реализирана върху мрежа, в която големината на стъпките може се задава в зависимост от изискванията, които налага задачата.

Като се отчита геометрията на течението, пресмятанията с по-големите числа на Рейнолдс са проведени върху неравномерна мрежа, възлите на която са  $(r_i, \varphi_j)$ , чиито координати са

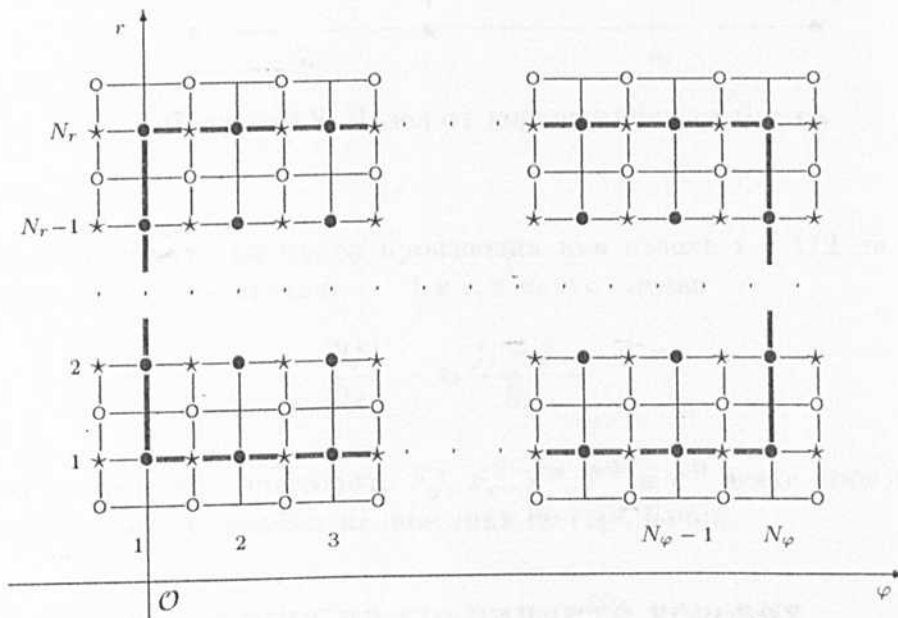
$$r_i = \exp \left[ \frac{i-1}{N_r-1} (R-1) \right] \quad \text{и} \quad \varphi_j = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{j-1}{N_\varphi-1} \pi \right]^2,$$

$i = 1, \dots, N_r$ ,  $j = 1, \dots, N_\varphi$ , където  $N_r$  е броя на възлите в интервала  $[1, R]$  и  $N_\varphi$  в интервала  $[0, \pi]$  съответно. Линиите в направление  $r$  се сгъстяват в близост до цилиндъра и се разреждат с отдалечаване от него. По направлението  $\varphi$  мрежата е избрана така, че линиите да се сгъстяват зад обтичаното тяло. На Фигура 3.6 е показано разпределението на възлите  $(r_i, \varphi_j)$  около цилиндъра.



Фигура 3.6: Разпределение на възлите от неравномерната мрежа в равнината  $Oxy$ .

Мрежата е перазместена за функциите  $u_\varphi$  и  $\Phi$  в двете направления, разместена за  $p$  в направление  $\varphi$ , а за  $u_r$  и  $\Omega$  е разместена в двете направления. Мрежата е представена на Фигура 3.7 като границата на областта на пресмятания е с двойна линия. Възлите от мрежата, означени с „●“ са с координати  $(r_i, \varphi_j)$ . В тези възли се пресмятат стойностите на функциите  $u_\varphi$  и  $\Phi$ . Ясно е, че координатите на възел



Фигура 3.7: Диференчна мрежа: във възлите „●“ се пресмятат стойностите на функциите  $u_\varphi$  и  $\Phi$ , в „★“ — налягането  $p$  (разместена в направление  $\varphi$  и перазместена в направление  $r$ ) и в „○“ —  $u_r$  и  $\Omega$  (разместена в двете направления).

от мрежата се определят от следните параметри -  $N_r$ ,  $N_\varphi$  и  $r_\infty$  (или  $R$ ). Връзката между параметъра  $R$  и актуалната безкрайност е  $r_\infty = r_{N_r} = \exp(R - 1)$ .

Във възлите от мрежата  $(i, j - 1/2)$  при  $1 \leq i \leq N_r$ ,  $1 \leq j \leq N_\varphi + 1$ , означени с „★“, се пресмята налягането. Разместеността на мрежата в направление  $\varphi$  осигурява втори ред на апроксимация на граничното условие  $\partial p / \partial \varphi = 0$  върху правите на симетрия  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ .

Функциите  $u_r$  и  $\Omega$  се пресмятат във възлите, означени с „○“, чиито координати са  $(i - 1/2, j - 1/2)$ , където  $1 \leq i \leq N_r + 1$ ,  $1 \leq j \leq N_\varphi + 1$ . Това разместване позволява да се апроксимират граничните условия за  $u_r$  и  $\Omega$  с втори ред на точност.

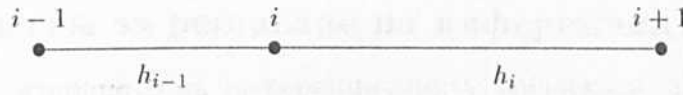
### 3.4.4 Апроксимация на операторите в уравненията

Нека  $f$  е някоя от функциите, чиито производни трябва да се апроксимират —  $u_\varphi$ ,  $u_r$ ,  $p$ ,  $\Phi$  или  $\Omega$ . Използвани са следните триточкови апроксимации на първите и вторите производни

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i \approx \frac{h_{i-1}}{h_i(h_i + h_{i-1})} f_{i+1} + \frac{h_i - h_{i-1}}{h_i h_{i-1}} f_i - \frac{h_i}{h_{i-1}(h_i + h_{i-1})} f_{i-1} \quad (3.92)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i \approx \frac{2}{h_i + h_{i-1}} \left( \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \quad (3.93)$$

където  $x$  е  $r$  или  $\varphi$ . Също  $h_{i-1}$  и  $h_i$  са съответно лявата и дясна стъпка в разглеждания възел (Фигура 3.8).



Фигура 3.8: Възел от неравномерната мрежа

Апроксимацията на първа производна във възела  $i - 1/2$  на функцията  $f$ , която се пресмята във възлите  $i - 1$  и  $i$ , е както следва

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i-1/2} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}. \quad (3.94)$$

За апроксимиране на операторите  $F_\varphi^u$ ,  $F_r^u$ ,  $F^p$ ,  $F^\Phi$  и  $F^\Omega$  всяка производна е апроксимирана отделно по подобен на описания по-горе начин.

### 3.4.5 Апроксимация на граничните условия

Така дефинираната мрежа позволява да се апроксимират производните върху границата с централни разлики. Използвани са следните апроксимации на граничните условия:

Върху цилиндъра:

$$u_\varphi|_{1,j} = 0; \quad u_r|_{2,j} + u_r|_{1,j} = 0; \quad u_r|_{2,j} - u_r|_{1,j} = 0; \quad (3.95)$$

$$\Phi_{1,j} = 0; \quad \Omega_{2,j} + \Omega_{1,j} = 0. \quad (3.96)$$

Върху  $r = r_\infty$ :

$$u_\varphi|_{N_r,j} = -\sin \varphi_j; \quad u_r|_{N_r+1,j} + u_r|_{N_r,j} = 2 \cos \varphi_j; \quad u_r|_{N_r+1,j} - u_r|_{N_r,j} = 0; \quad (3.97)$$

$$\Phi_{N_r,j} = 0; \quad \Omega_{N_r+1,j} + \Omega_{N_r,j} = 0. \quad (3.98)$$

Върху линията на симетрия  $\varphi = 0$ :

$$u_\varphi|_{i,1} = 0; \quad u_r|_{i,2} - u_r|_{i,1} = 0; \quad p_{2j} - p_{1j} = 0; \quad (3.99)$$

$$\Phi_{i,1} = 0; \quad \Omega_{i,2} + \Omega_{i,1} = 0. \quad (3.100)$$

Върху линията на симетрия  $\varphi = \pi$ :

$$u_\varphi|_{i,N_\varphi} = 0; \quad u_r|_{i,N_\varphi+1} - u_r|_{i,N_\varphi} = 0; \quad p_{i,N_\varphi+1} - p_{i,N_\varphi} = 0; \quad (3.101)$$

$$\Phi_{i,N_\varphi} = 0; \quad \Omega_{i,N_\varphi+1} + \Omega_{i,N_\varphi} = 0. \quad (3.102)$$

### 3.4.6 Алгоритъм за решаване на диференчната задача

След дискретизирането на диференциалните оператори, за да се определят стойностите на търсените функции  $u_r$ ,  $u_\varphi$ ,  $p$ ,  $\Omega$  и  $\Phi$ , на всяка от двете полустъпки по времето трябва да се реши по една система с около  $5N_r N_\varphi$  на брой линейни уравнения. Системите на всяка полустъпка са със силно разреждени матрици — единадесетдиагонални, ако се решават уравненията за трите функции заедно. За да се спести компютърно време за пресмятането на търсените стойности, уравненията за петте функции се разделят на групи в зависимост от връзките между отделните уравнения.

Както в задачата, разгледана в Глава 2, за налягането липсва явно зададено гранично условие във всяка точка от границата на областта. По броят на граничните условия за системата като цяло е точно равен на необходимия за решаването ѝ. При конструирането на числен алгоритъм за отделно решаване на уравненията за търсените функции, като описания в 3.3, се появяват проблеми с граничните условия, които са преодолими. Все пак апроксимациите на граничните условия създават известни трудности при конструиране на алгоритъм за решаване на задачата. При съвместното решаване на уравненията за функциите, които са свързани помежду си, този проблем се избягва.

Начинът, по който е решена системата за петте търсени функции, е аналогичен на описания в Глава 2 алгоритъм за решаване на дискретизираната система от три уравнения за определяне на компонентите на скоростта и налягането. В този случай обаче неизвестните функции са повече. Освен това в схемата на разцепване уравненията за определяне на функциите  $\Phi$  и  $u_\varphi$  са свързани, а също така и уравненията за  $\Omega$  и  $u_r$ . Поради това тези две двойки уравнения не може да се решават поотделно. От друга страна, граничните условия налагаат на първа полустъпка (при фиксирано  $\varphi = \varphi_j$ ) уравнението за налягането да се решава заедно с уравненията за  $\Omega$  и  $u_r$  (наложени са две гранични условия за функцията  $u_r$  и нито едно за налягането). Изборът на диференчна мрежа позволява производната  $\partial p / \partial r$  на налягането по  $r$  в уравнението за  $u_r$  да участва на новия слой по времето в оператора, който се обръща. А на втора полустъпка (при фиксирано  $r = r_i$ ) уравнението за налягането трябва да се решава заедно с уравненията за  $\Phi$  и  $u_\varphi$ . По този начин производната  $\partial p / \partial \varphi$  от уравнението за  $u_\varphi$  може да бъде включена в оператора, който се обръща на втора полустъпка.

Изложените по-горе разсъждения дават основание системата от пет уравнения да се решава по следния начин: на първа полустъпка една петдиагонална система определяне на  $\{\Phi, u_\varphi\}$  и една седемдиагонална за  $\{\Omega, u_r, p\}$ ; на втора полустъпка седемдиагонална система за  $\{p, u_\varphi, \Phi\}$  и петдиагонална за  $\{\Omega, u_r\}$ .

Пакратко, алгоритъмът за решаване на диференчната задача е следния:

- (i) Задават се стойности на параметрите на задачата  $Re$ ,  $\tau$ ,  $\varepsilon$ , стъпките на мрежата  $(h_r)_i$  и  $(h_\varphi)_j$  и начални приближения за търсените функции, като  $\Phi^0$ ,  $u_\varphi^0$ ,  $\Omega^0$ ,  $u_r^0$  и  $p^0$  за малки числа на Рейнолдс ( $Re \approx 2 \div 4$ ) са

$$\Phi|_{i,j} = 0, u_\varphi|_{i,j} = \frac{r_i - 1}{r_\infty - 1} \cos \varphi_j, \Omega|_{i,j} = 0, u_r|_{i,j} = \frac{r_i - 1}{r_\infty - 1} \sin \varphi_j, p|_{i,j} = 0.$$



За по-големи числа на Рейнолдс решението за най-близкото по-малко число на Рейнолдс се използва като начално приближение за текущото пресмятане.

Полага се  $n = 0$ ;

- (ii) На първа полустъпка върху правите  $\varphi = \varphi_j$  се решават две системи за неизвестните  $\Phi^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $u_\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $\Omega^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $u_r^{n+\frac{1}{2}}$  и  $p^{n+\frac{1}{2}}$  — със седемдиагонална матрица за  $\{\Omega, u_r, p\}$  и с петдиагонална матрица за  $\{\Phi, u_\varphi\}$ ;
- (iii) Аналогично на втора полустъпка за неизвестните  $\Phi^{n+1}$ ,  $u_\varphi^{n+1}$ ,  $\Omega^{n+1}$ ,  $u_r^{n+1}$  и  $p^{n+1}$ , се решават върху линиите  $r = r_i$  две системи — с петдиагонална матрица за  $\{\Omega, u_r\}$  и със седемдиагонална матрица за  $\{\Phi, u_\varphi, p\}$ ;
- (iv) Пресмята се нормата на разликата на търсените функции между две последователни итерации  $|\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^n|$  и се проверява дали е удовлетворен критерият за край

$$|\vec{\theta}^{n+1} - \vec{\theta}^n| < \varepsilon.\tau$$

Ако критерият за край е удовлетворен, пресмятанятията се прекратяват. В противен случай се полага  $n = n + 1$  и алгоритъмът се връща на стъпка (ii).

За решаването на пет- и седем- диагоналните системи отново е използван представения в [58] метод за решаване на многодиагонални системи.

## 3.5 Числени резултати

### 3.5.1 Тестове за проверка на алгоритъма

За да се провери апроксимацията на предложената схема и реализацията на алгоритъма, са проведени много числени експерименти.

Проследени са следните величини:

- изолинии на функциите на вихъра и тока;
- край на следата  $L$ ;
- ширина на следата  $W$ ;
- разпределение на вихъра и налягането върху повърхността на тялото;
- ъгъл на откъсване  $\varphi_{\text{sep}}$ ;
- разлика между налягането в предната критична точка  $p(1, \pi)$  и налягането в задната критична точка  $p(1, 0)$ ;

- *коэффициент на съпротивление*, който се дефинира като  $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 d}$  (вж. [39]), където  $D$  е съпротивлението върху цилиндъра,  $\rho$  е плътността. Коэффициентът на съпротивление  $C_D$  може да бъде пресметнат (вж. например [68]) като сума от *коэффициента на триене*  $C_f$  и *коэффициента на налягане*  $C_p$ , т.е.  $C_D = C_f + C_p$ .

Коэффициента на триене  $C_f$  пресмятаме от интеграла

$$C_f = -\frac{4}{Re} \int_0^\pi \left. \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right|_{r=1} \sin \varphi \, d\varphi \quad (3.103)$$

по формула на трапеците, където  $\left. \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right|_{r=1} = \omega(1, \varphi)$ . Върху цилиндъра стойностите на производната  $\partial u_\varphi / \partial r$  може да се апроксимират с дясна крайна разлика с точност  $O(h_1 h_2)$  чрез

$$\omega_{1j} \approx -\frac{2h_1 + h_2}{h_1(h_1 + h_2)} u_\varphi|_{1,j} + \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} u_\varphi|_{2,j} - \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} u_\varphi|_{3,j}, \quad (3.104)$$

където  $h_1 = r_2 - r_1$ ,  $h_2 = r_3 - r_2$ .

Коэффициентът на налягане  $C_p$  е равен на

$$C_p = -2 \int_0^\pi p(1, \varphi) \cos \varphi \, d\varphi, \quad (3.105)$$

където  $p(1, \varphi)$  е обезразмереното налягане върху цилиндъра. Интегралът във формула (3.105) също пресмятаме по формула на трапеците.

Точността на диференчната схема и алгоритъм са проверени със стандартните тестове, включващи различни стъпки по фиктивното време  $\tau$ , различни мрежи (равномерни, неравномерни) с различни параметри на мрежата:  $N_\varphi$ ,  $N_r$  и  $r_\infty$ . Критерий за край на пресмятанията е нормата на разликата на стойностите на всяка от петте функции за две съседни итерации да бъде по-малка от  $10^{-4} \cdot \tau$ .

### Влияние на големината на стъпката по фиктивното време

Най-напред беше проверено, че апроксимацията на стационарното решение не зависи от стъпката по фиктивното време, т.е. потвърдено е, че схемата на разцепване има пълна апроксимация по фиктивното време. Проведени са пресмятания при  $Re = 40$  с неравномерната мрежа, описана по-рано, с три различни стъпки по фиктивното време:  $\tau = 0.1, 0.01, 0.001$ . Установено беше, че численото решение на стационарната задача не зависи от големината на стъпката по фиктивното време  $\tau$ . Получените решения с различни стъпки по фиктивното време не се различават до петия-шестия знак след десетичната запетая, поради което резултатите не са представени (в таблица или графично).

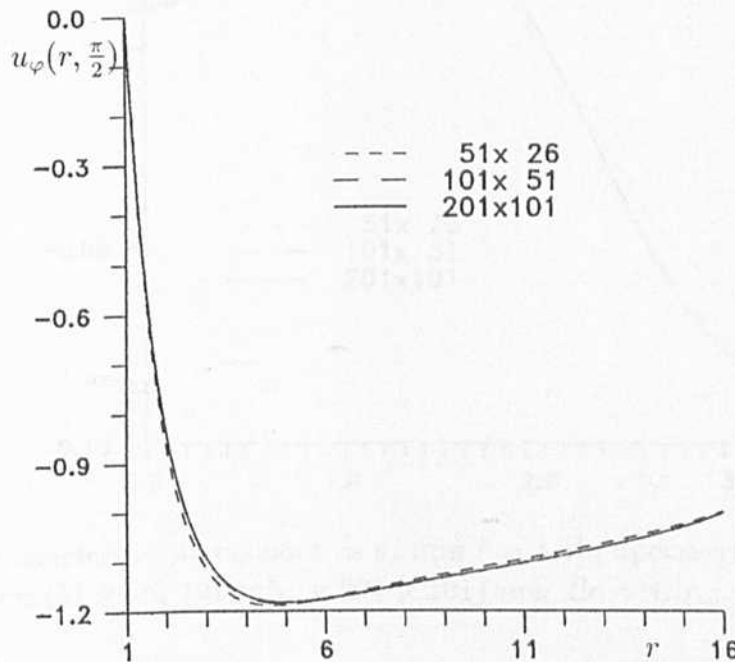
Таблица 3.2: Резултати за  $C_p$ ,  $C_f$ ,  $C_D$  и  $p(1, \pi) - p(1, 0)$ , получени върху равномерна мрежа с различни стъпки  $h_\varphi$  и  $h_r$  и фиксирани  $Re = 4$ ,  $r_\infty = 16$ .

Мрежа	$C_p$	$C_f$	$C_D$	$p(1, \pi) - p(1, 0)$
$51 \times 26$	2.9732	2.3695	5.3427	1.9533
$101 \times 51$	2.9652	2.5203	5.4855	1.9420
$201 \times 101$	2.9623	2.5812	5.5435	1.9384

### Влияние на големината на стъпките по пространствените променливи

Вторият важен експеримент е за проверка на апроксимацията на схемата по пространствените променливи. Проведени са множество пресмятания с различни мрежи и различни стойности на параметрите на тези мрежи, които потвърждават сходимостта и апроксимацията на диференчната схема.

При тези тестове мрежата е избрана да бъде равномерна по двете направления със стъпки с големина  $h_r$  и  $h_\varphi$ . С такива мрежи са проведени пресмятания за стойности на числото на Рейнолдс до  $Re = 40$ , тъй като за по-големи числа на Рейнолдс равномерната мрежа не е подходяща за решаване на задачата.



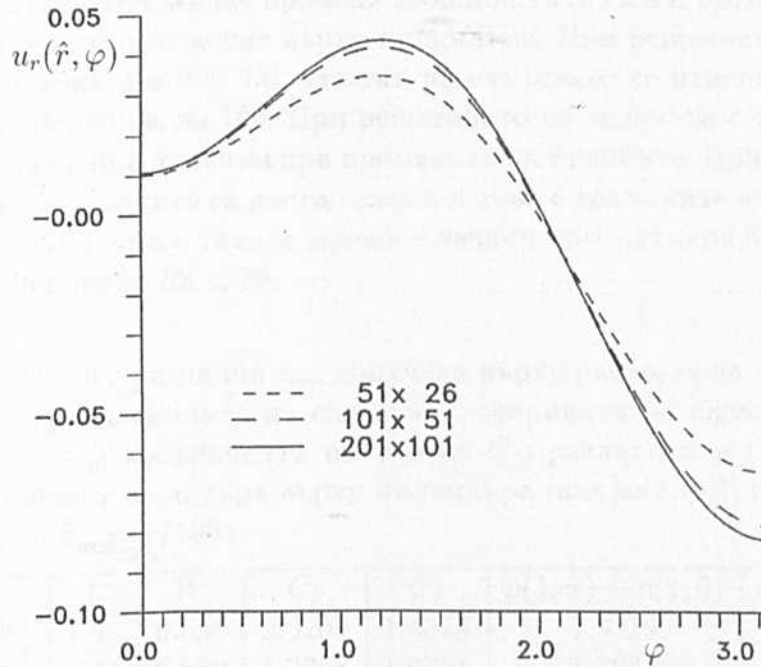
Фигура 3.9: Компонентата на скоростта  $u_\varphi$  при  $\varphi = \pi/2$ , пресметната с различни равномерни мрежи ( $51 \times 26$ ,  $101 \times 51$  и  $201 \times 101$ ) при  $Re = 4$ ,  $r_\infty = 16$ .

За проверка на сходимостта по  $h_r$  и  $h_\varphi$  са проведени пресмятания при фиксирано  $r_\infty = 16$  с различни мрежи с брой възли  $N_r \times N_\varphi$ . Тъй като се решава задачата в променливи скорост и налягане, за наблюдение са избрани стойностите  $u_\varphi(r_i, \pi/2)$  (т.е. функцията  $u_\varphi$  при фиксирано  $\varphi = \pi/2$ ) и  $u_r(\hat{r}, \varphi_j)$  при фиксирано

$r = \hat{r}$ , където  $\hat{r} = 1.16$ . Причината за този избор е, че там стават най-големите промени за съответните функции при промяна на стъпките по пространствените променливи. Проведени са пресмятания върху мрежи  $51 \times 26$ ,  $101 \times 51$  и  $201 \times 101$ , като актуалната безкрайност е фиксирана  $r_\infty = 16$ . Резултатите за двете компоненти на скоростта са представени съответно на Фигура 3.9 и на Фигура 3.10.

Проследени са и стойностите на следните основни характеристики на течението: коефициента на налягане  $C_p$ ; коефициента на триене  $C_f$ ; коефициента на съпротивление  $C_D$  и разликата в налягането в предната и задна критична точка  $p(1, \pi) - p(1, 0)$ . Резултатите за  $Re = 4$  са представени в Таблица 3.2.

Вижда се, че големината на стъпките влияе на параметрите на течението. Дори за толкова малко число на Рейнолдс като  $Re = 4$  мрежата  $51 \times 26$  е груба за решаване на задачата. Както вече казахме, малки стъпки са необходими в близост до тялото и в областта зад цилиндъра (следата), но така се съгъстява излишно равномерната мрежа в части от областта, където промените в течението са незначителни.



Фигура 3.10: Компонентата на скоростта  $u_r$  при  $\hat{r} = 1.16$ , пресметната с различни равномерни мрежи ( $51 \times 26$ ,  $101 \times 51$  и  $201 \times 101$ ) при  $Re = 4$ ,  $r_\infty = 16$ .

Тези тестове потвърждават апроксимацията на диференчната схема спрямо стъпките по пространствените променливи и независимостта на решението от стъпката по фиктивното време. Обясними трудности се появяват при изследването върху равномерна мрежа на оптималните по големина стъпки  $h_r$  и  $h_\varphi$  при по-големи числа на Рейнолдс ( $Re \geq 20$ ), когато вече има откъсване. Поради това е конструирана мрежа, при която стъпките се задават в зависимост от геометрията на течението, съответстващо на известното решение на задачата за  $Re \leq 40$ . Стъпките в направление  $r$  са различни по големина в следните подобласти, като

във всяка отделна подобласт мрежата е равномерна: граничен слой ( $1 \leq r \leq 1.2$ ); непосредствено до граничния слой ( $1.2 \leq r \leq 1.3$ ); в областта на следата — до  $r = L_{\text{end}}$ , за което е изпълнено  $L_{\text{end}} > L$  ( $1.3 \leq r \leq L_{\text{end}}$ ); непосредствено след края на следата ( $L_{\text{end}} \leq r \leq 2L_{\text{end}}$ ); на несмутеното течение ( $2L_{\text{end}} \leq r \leq r_{\infty}$ ). Ясно е, че мрежата трябва да бъде най-гъста в близост до цилиндъра и може да се разрежда с отдалечаване от него. Памаляването на стъпката само в областта на граничния слой от 0.01 на 0.005 (в останалите области стъпките остават непроменени). Краят на следата при  $Re = 40$  се променя, като промяната е около 0.25%. Останалите параметри на течението (ъгъл на откъсване, ширина на следата  $W$  и др.) също се променят в подобни граници, а промяната в налягането върху цилиндъра е съвсем незначителна. Установено беше, че в областта на следата стъпка  $h_r = 0.1$  е приемлива, а в областта на несмутеното течение са допустими големи стъпки, като например  $h_r \geq 1$ . В направлението  $\varphi$  мрежата е необходимо да бъде гъста в областта на задната критична точка, а също и там, където става откъсването — в тези области стъпката  $h_{\varphi}$  трябва да бъде по-малка от 0.03. За различните числа на Рейнолдс точката на откъсване променя координатите си и е трудно да се предскаже отнапред нейното положение върху цилиндъра. При решението, получено в настоящата дисертация и в [68, 73], ъгълът на откъсване се изменя в интервала  $[0, 1.2]$  за числа на Рейнолдс до 100. При решаването на задачата с тази мрежа не са използвани изглаждащи техники при промяната на стъпките. При някои от преходите промените на стъпките са доста големи и това е допълнителен източник на неустойчивост. Поради това с такива мрежи успешни пресмятания бяха проведени само за числа на Рейнолдс  $Re < 50$ .

Таблица 3.3: Резултати с различни  $r_{\infty}$ , получени върху равномерна мрежа за: ъгъла на откъсване  $\varphi_{\text{sep}}$ ; дължината на следата  $L$ ; ширината на следата  $W$ ; коефициента на налягане  $C_p$ ; коефициента на триене  $C_f$ ; разликата  $p(1, \pi) - p(1, 0)$  и екстремалната стойност на вихъра върху цилиндъра  $\max |\omega(1, \varphi_j)|$  при фиксирани  $Re = 20$ ,  $h_r = 0.07$  и  $h_{\varphi} = \pi/100$ .

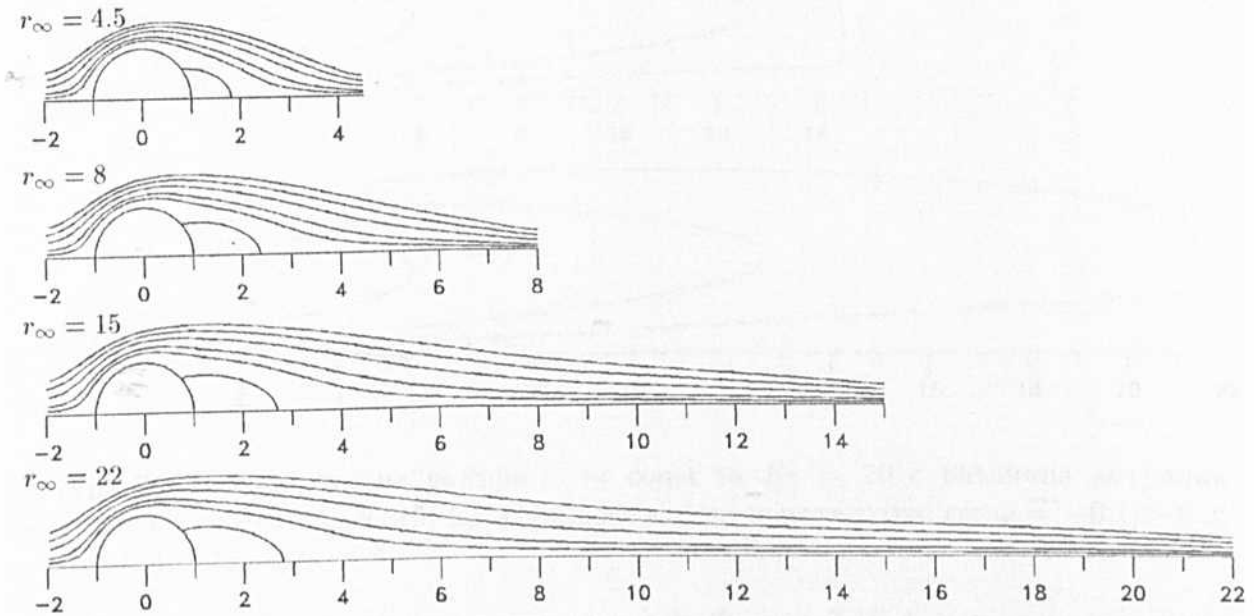
$r_{\infty}$	$\varphi_{\text{sep}}$	$L$	$W$	$C_p$	$C_f$	$p(1, \pi) - p(1, 0)$	$\max  \omega(1, \varphi_j) $
4.5	0.636(36.45°)	1.81	0.581	2.5105	1.4345	1.8219	6.61
8	0.717(41.06°)	2.35	0.689	1.7368	1.0701	1.3945	5.15
15	0.744(42.63°)	2.68	0.728	1.4208	0.9098	1.0706	4.45
22	0.749(42.94°)	2.78	0.749	1.3308	0.8621	1.0056	4.24

Въпреки че са направени много изводи за големината на стъпките по двете направления, не е лесно да се конструира на практика мрежа, приложима за всяко число на Рейнолдс, за което се извършват пресмятанията. Една от причините за това е, че задачата е неустойчива и итерационният процес не може да започне от произволно начално приближение. Вече беше казано, че за начално приближение се използва пресметнатото решение с предишното число на Рейнолдс и ако скокът в числото на Рейнолдс е много голям и стъпката по фиктивното време  $\tau$  неподходящо избрана, може да се появи неустойчивост и липса на сходимост. Преминаването към по-голямо число на Рейнолдс при решаване на задачата зависи от големината на

това число. При  $Re > 40$  е допустимо следващото число на Рейнолдс да е около два пъти по-голямо от предишното (при подходящ избор на стъпката  $\tau$ ), докато при  $Re \leq 40$  няма такива ограничения. Някои пресмятания са започвани от по-големи числа на Рейнолдс, като например  $Re > 40$ . В тези случаи начални приближения са конструирани чрез интерполиране на решението, получено върху по-рядка мрежа, с помощта на сплайни.

### Влияние на актуалната безкрайност

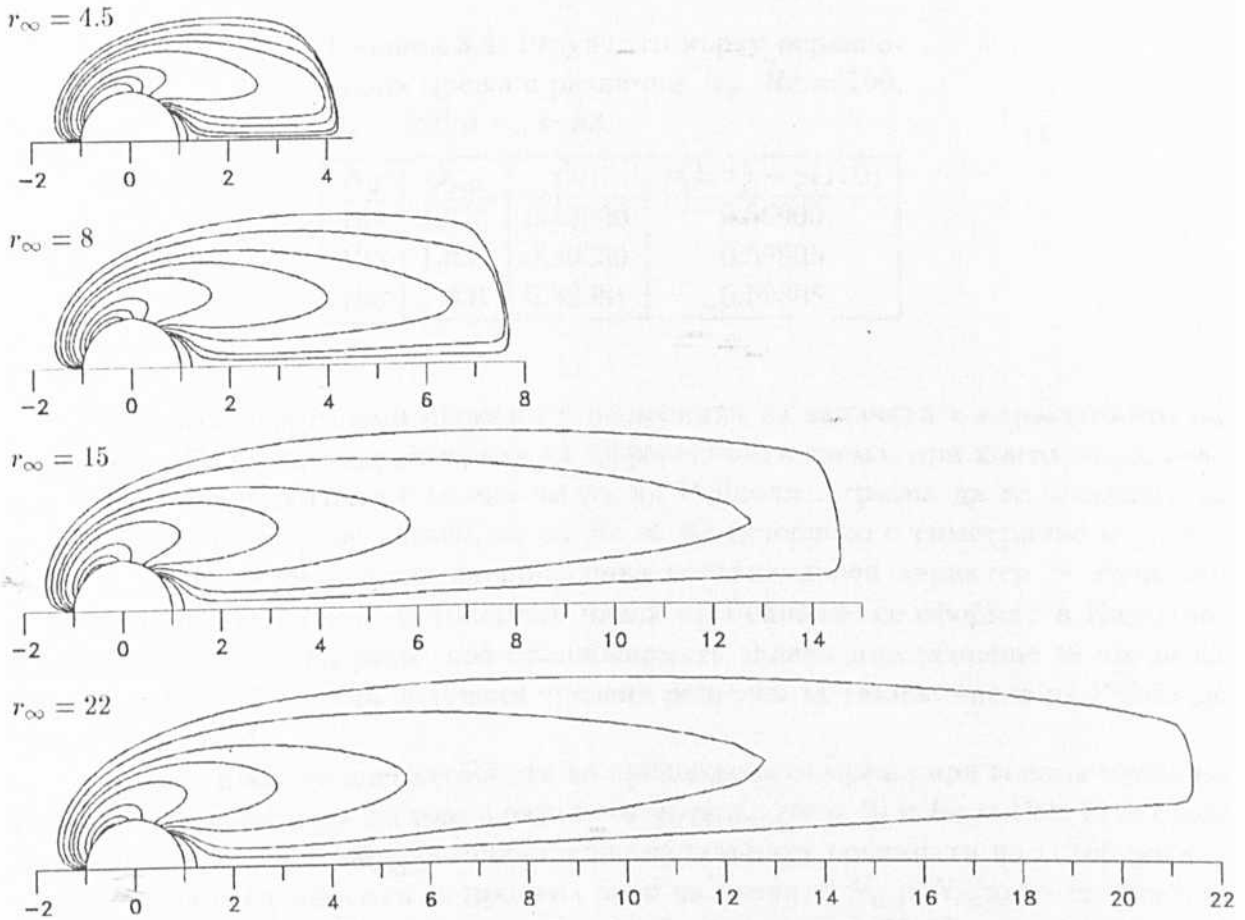
Проследена е и зависимостта на решението от актуалната безкрайност  $r_\infty$ , която има голямо значение за адекватността на получените резултати, от една страна, и за необходимия машинен ресурс, от друга. Граничното условие е добре да се постави колкото е възможно по-близо до тялото, за да се спести изчислителен ресурс. Но от друга, страна граничното условие трябва да се постави на достатъчно голямо разстояние от края на следата, за да не се деформира решението. Направени са изследвания на решението на диференчната задача върху равномерна мрежа при  $Re = 20$  — число на Рейнолдс, при което има откъсване. Стъпките по двете направления са избрани  $h_r = 0.07$  и  $h_\varphi = \pi/100$ . Проведени са пресмятания за следните стойности на актуалната безкрайност:  $r_\infty = 4.5; 7; 15$  и  $22$ .



Фигура 3.11: Токови линии  $\psi = \text{const}$  за  $Re = 20$  с различна актуална безкрайност:  $r_\infty = 4.5; 8; 15; 22$ . Стойностите на константите (отгоре надолу) са:  $\psi = 0.4; 0.3; 0.2; 0.1; 0.05; 0$ .

На Фигура 3.11 са представени токовите линии на получените решения. Изолиниите на функцията на тока са: отгоре надолу —  $\psi = 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05$  и линията на откъсване, за която  $\psi = 0$ . В Таблица 3.3 са представени получените от пресмятанията стойности на някои характеристики. Краят на следата  $L$  зависи от актуалната безкрайност, като с нарастване на  $r_\infty$  се увеличава. Ширината  $W$

също става по-голяма при нарастването на актуалната безкрайност. Палягането върху повърхността на цилиндъра има големи изменения, както това се вижда от представените в таблицата разлики на стойностите му в предната и задната критична точка. Големи са промените и в коефициента на налягане  $C_p$ . От таблицата се вижда зависимостта от актуалната безкрайност и на други характеристики на течението като коефициента на триене  $C_f$ , ъгъла на откъсване  $\varphi_{sep}$ , максималната (по модул) стойност на вихъра върху цилиндъра  $\max |\omega(1, \varphi_j)|$ .



Фигура 3.12: Изолинии на вихъра  $\omega = \text{const}$  за  $Re = 20$  с различна актуална безкрайност:  $r_\infty = 4.5; 8; 15; 22$ . Стойностите на константите са:  $\omega = -0.1; -0.2; -0.4; -0.6; -1; -2$ .

Изолиниите на вихъра са представени на Фигура 3.12. С нарастване на  $r$  вихърът, който се поражда от вискозитета и се пренася по течението, намалява като  $r^2$  и клони към нула в безкрайност. Ако се използва малка актуална безкрайност, се появяват големи отклонения — променя се вихърът върху тялото (това се вижда от Таблица 3.3), а оттам и в цялата област на пресмятанията. Особено големи са деформациите при пресмятанията с най-малката стойност на актуалната безкрайност ( $r_\infty = 4.5$ ) — тази стойност на  $r_\infty$  очевидно е малка. С увеличаването ѝ деформациите в решението намаляват. Резултатите с  $r_\infty = 22$  се различават с по-малко от 6% от тези, получени с  $r_\infty = 15$ , освен коефициента на налягане, при който разликата е над 6%.

### 3.5.2 Пресмятания върху неравномерна мрежа при различни числа на Рейнолдс

Много от проблемите, свързани с големина на стъпките  $h_r$  и  $h_\varphi$ , актуална безкрайност и др., са преодоляни успешно с използването на описаната по-рано неравномерна мрежа. С тази мрежа бяха извършени успешни пресмятания за числа на Рейнолдс в интервала  $[2, 200]$  върху мрежи с различна гъстота.

Таблица 3.4: Резултати върху неравномерна мрежа с различни  $N_\varphi$ ,  $Re = 100$ ,  $N_r = 126$  и  $r_\infty \approx 53$ .

$N_\varphi$	$\varphi_{\text{sep}}$	$C_D$	$p(1, \pi) - p(1, 0)$
100	1.013	0.89820	0.56900
125	1.031	0.89289	0.59805
195	1.031	0.89081	0.59805

Тъй като има големи промени в решенията на задачата с нарастването на числото на Рейнолдс, параметрите на диференчната схема, при които се получават адекватни резултати с малки числа на Рейнолдс, трябва да се променят за по-големите. Вече беше казано, че за  $Re < 40$  течението е симетрично и устойчиво, а за  $Re > 40$  започва да придобива нестационарен характер — появяват се колебания, които при по-големите числа на Рейнолдс се оформят в Карманова вихрова улица. Въпреки това стационарната задача има решение за числа на Рейнолдс  $Re > 40$  — има получени числени решения за такива числа на Рейнолдс (вж. Таблица 3.1).

За да се провери адекватността на предложената мрежа при големи числа на Рейнолдс, са проведени тестове с различни мрежи с  $Re = 50$  и  $Re = 100$ . Тези стойности на числото на Рейнолдс значително надхвърлят границата на устойчивостта. При тези експерименти се променя броя на възлите  $N_\varphi$  и  $N_r$ , като стойността на актуалната безкрайност се запазва една и съща —  $r_\infty \approx 53$ . Получените числени резултати с  $Re = 100$  са представени в Таблица 3.4 и в Таблица 3.5. Проследени са някои характеристики като положението на точката на откъсване  $\varphi_{\text{sep}}$ , мерена от задната критична точка, коефициента на съпротивление  $C_D$  и разликата между налягането в предната и задната критична точка. От Таблица 3.4 се вижда, че когато  $N_\varphi = 125$  и  $N_\varphi = 195$ , представените резултати за  $\varphi_{\text{sep}}$  и  $p(1, \pi) - p(1, 0)$  не се различават. При  $N_r = 161$  и  $N_r = 199$  (вж. Таблица 3.5) решението обаче се променя по-съществено — до около 1.5%.

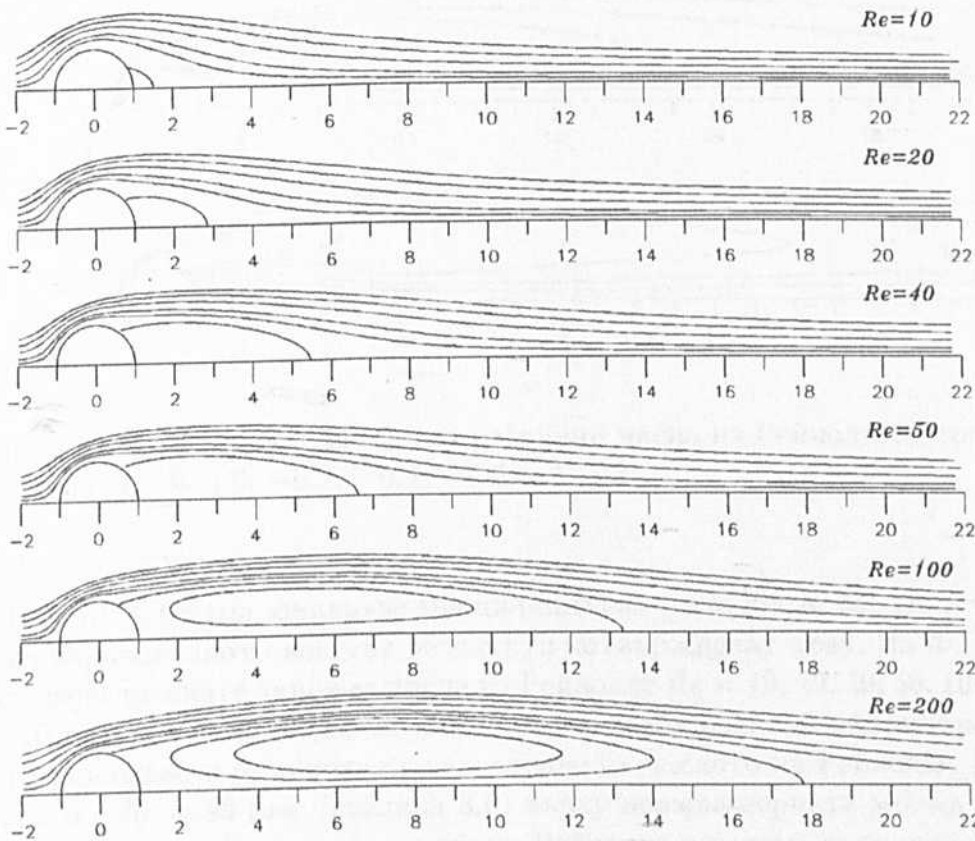
Направените множество пресмятания с равномерна и наравномерна мрежа, а също така и проучванията на опита на други автори [68, 73, 120], показват, че е желателно актуалната безкрайност да бъде пропорционална на числото на Рейнолдс, т.е.  $r_\infty \propto Re$ . Но да се осигурят такива стойности на  $r_\infty$  като същевременно се запазва гъстотата на мрежата в направлението  $r$  означава, че трябва да се използва голям брой възли в това направление. Конструираната схема на разцепване е неявна относно линейните членове (дифузионните членове и налягането) и явна



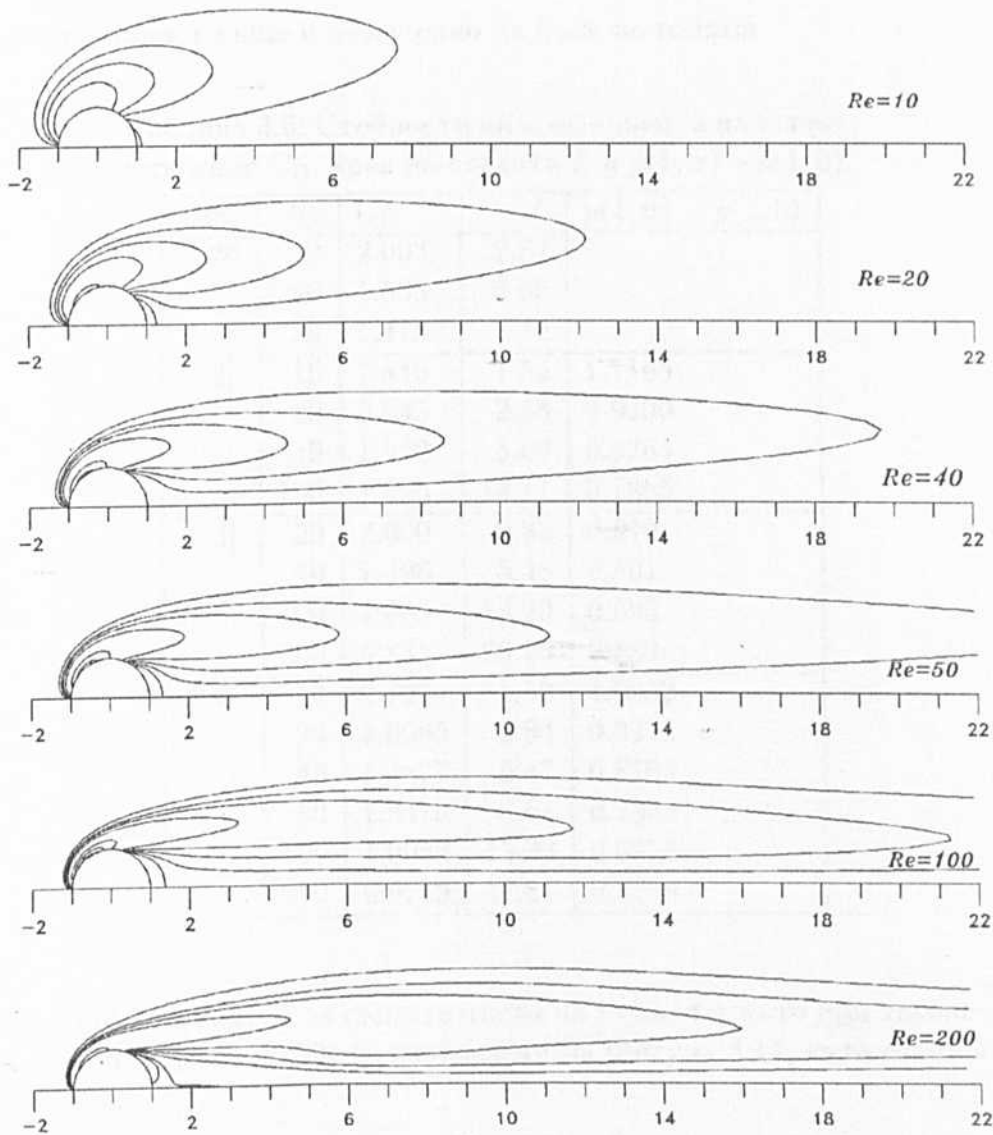
Таблица 3.5: Резултати върху неравномерна мрежа с различни  $N_r$ ,  $Re = 100$ ,  $N_\varphi = 126$  и  $r_\infty \approx 53$ .

$N_r$	$\varphi_{\text{sep}}$	$C_D$	$p(1, \pi) - p(1, 0)$
126	1.031	0.89289	0.59805
161	1.049	0.94539	0.63609
199	1.065	0.96055	0.64400

относно нелинейните членове, т.е. от полуявен тип. Известно е, че при тези схеми съществува ограничение на стъпката по времето в зависимост от стъпката по пространствените променливи, а оттам и времето за получаване на решението се увеличава. Мощността на техниката, с която са извършени пресмятанията, не позволява използването на много гъсти мрежи. Затова при изследванията е направен компромис между изискванията на задачата и изчислителния ресурс, особено при  $Re \geq 100$ . За  $Re \leq 100$  е използвана мрежа с  $N_\varphi = 150$ ,  $N_r = 251$  и  $r_\infty = 88$ , а тези с  $Re = 200$  са извършени върху мрежа с параметри  $N_\varphi = 125$ ,  $N_r = 199$  и  $r_\infty = 80$ .



Фигура 3.13: Токови линии за различни числа на Рейнолдс. Стойностите на константите отгоре надолу са: 0.4; 0.3; 0.2; 0.1; 0.05; 0; -0.05; -0.1.



Фигура 3.14: Изолинии на вихъра за различни числа на Рейнолдс. Стойностите на константите са: 0.1; 0; -0.2; -0.4; -0.6; -1; -3; ....

При  $Re \leq 6$  няма завихряне зад цилиндъра — вж. [68, 8, 73]. Получените с метода на вариационното влагане резултати потвърждават това. На Фигура 3.13 са представени токовите линии за числа на Рейнолдс  $Re = 10, 20, 40, 50, 100$  и  $200$ . При  $Re = 10$  вече има ясно изразено откъсване и завихряне зад цилиндъра, като следата се удължава и разширява с нарастване на числото на Рейнолдс. Получените резултати с  $Re = 20$  (вж. Таблица 3.6) върху неравномерната мрежа с достатъчна гъстота на възлите за това число на Рейнолдс и голяма актуална безкрайност  $r_\infty \approx 88$ , се различават до 10% от представените по-рано върху равномерна мрежа  $301 \times 101$  с актуална безкрайност  $r_\infty = 22$ . Причината за тези немалки разлики са големите стъпки по пространствените променливи в близост до цилиндъра при равномерната мрежа (особено в направление  $r$ , където  $h_r = 0.07$ ). Използваната

актуална безкрайност също е желателно да бъде по-голяма.

Таблица 3.6: Стойности на коефициента на съпротивление  $C_D$ , края на следата  $L$  и  $p(1, \pi) - p(1, 0)$ .

Ref.	$Re$	$C_D$	$L$	$p(1, \pi) - p(1, 0)$
[142]	20	2.003	2.87	
	40	1.536	5.65	
	50	1.418	7.10	
[68]	10	2.846	1.53	1.1165
	20	2.045	2.88	0.9290
	40	1.522	5.69	0.8265
	100	1.056	14.11	0.7265
[73]	20	2.000	2.82	0.910
	40	1.498	5.48	0.801
	100	1.060	13.20	0.693
	200	0.831	26.20	0.589
PW	10	2.7971	1.50	1.0952
	20	2.0095	2.84	0.9215
	40	1.4877	5.47	0.8163
	50	1.3470	6.61	0.7843
	100	1.0052	13.33	0.6956
	200	0.6769	17.81	0.4740

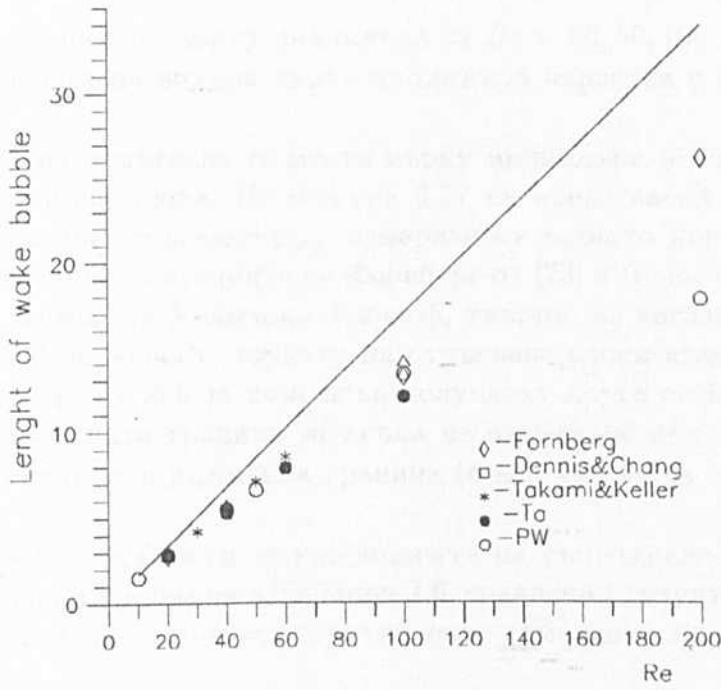
Изолинните на вихъра за същите числа на Рейнолдс като при токовите линии ( $Re = 10, 20, 40, 50, 100$  и  $200$ ) са изобразени на Фигура 3.14, като стойностите на константите са:

$$0.1; 0; -0.2; -0.4; -0.6; -1; -3; \dots$$

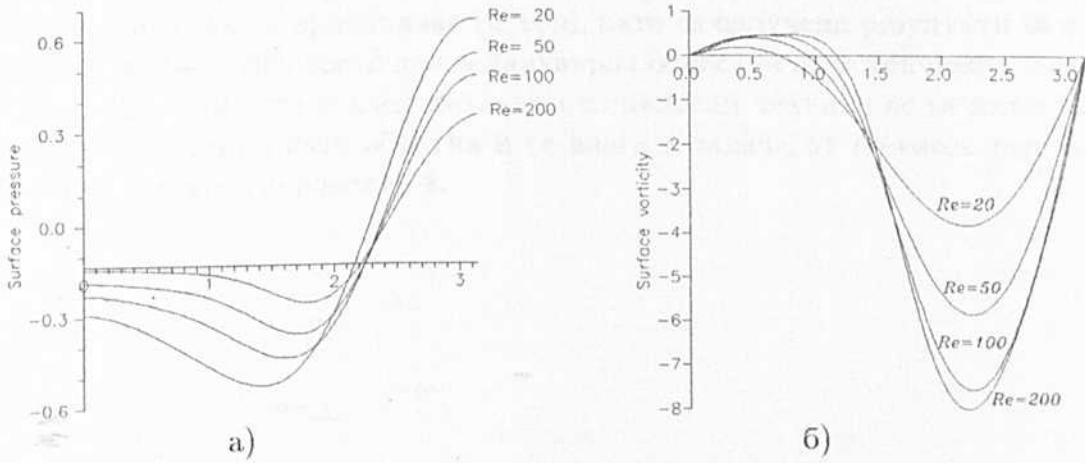
Областта, в която вихърът е различен от нула и претърпява по-съществени промени, се удължава зад цилиндъра с нарастване на числото на Рейнолдс.

Крайт на следата в зависимост от числото на Рейнолдс е представен в Таблица 3.6 и е сравнен с данни от литературата [73, 68, 142] на Фигура 3.15. Вижда се, че крайт на следата зависи линейно от числото на Рейнолдс и получените в настоящата работа резултати са в съгласие с резултатите на цитираните автори. Според Смит [136] крайт на следата удовлетворява съотношението  $L \propto 0.17 \cdot Re$  и тази права (на графиката е изобразена с непрекъснатата линия) е горна граница на резултатите от пресмятанията на Форнберг [79]. Вижда се, че мрежата, която използваме за  $Re = 200$  е недостатъчно гъста и разликите в резултатите са съществени.

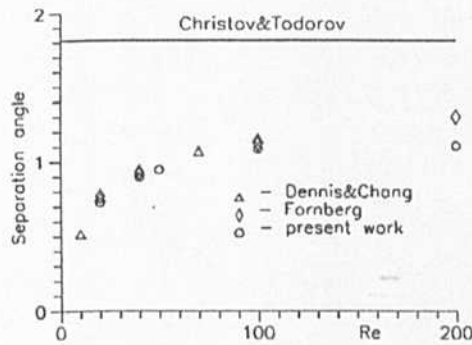
На Фигура 3.16а) е представено налягането върху повърхността на цилиндъра за някои числа на Рейнолдс, а разликата между стойностите му в предната и задната критична точка са дадени в Таблица 3.6. Резултатите се съгласуват добре с тези на другите автори, цитирани в таблицата. На Фигура 3.16б) е дадено



Фигура 3.15: Края на следата  $L$  в зависимост от числото на Рейнолдс.



Фигура 3.16: (а) Налягането върху цилиндъра; (б) Вихъра върху цилиндъра.



Фигура 3.17: Ъгъла на откъсване  $\varphi_{sep}$  в зависимост от  $Re$ .

изменението на вихъра върху цилиндъра за  $Re = 20, 50, 100$  и  $200$ . Максималната по модул стойност на вихъра върху цилиндъра нараства с растенето на числото на Рейнолдс.

Точката на откъсване се мести върху цилиндъра в посока от задната към предната критична точка. На Фигура 3.17 са представени пресметнатите стойности на ъгъла на откъсване  $\varphi_{sep}$ , измерван от задната критична точка. Те са в добро съгласие с пресмятанията на Форнберг от [73] и Денис и Ченг [68]. Теорията, основана на модела на Хелмхолц–Кирхоф, твърди, че когато числото на Рейнолдс клони към безкрайност, точката на откъсване клони към ъгъл, равен на  $125^\circ$ . Христов и Тодоров в [63] за този ъгъл получават друга стойност  $\varphi = 1.815(104^\circ)$ , която е по-вероятната граница за ъгъла на откъсване при  $Re \rightarrow \infty$ . Пресметнатите резултати и тази възможна граница (с непрекъснатата линия) са показани на Фигура 3.17.

Получените стойности за коефициента на съпротивление  $C_D$  при различни числа на Рейнолдс са дадени в Таблица 3.6, сравнени с резултатите, публикувани в [142, 68, 73]. Коефициентът на съпротивление намалява с нарастването на числото на Рейнолдс.

С помощта на метода на вариационното влагане и на основа на разработения числен алгоритъм, реализиран върху неравномерна мрежа, е решена задачата за обтичане на цилиндър в променливи  $(u, v, p)$ , като са получени резултати за числа на Рейнолдс до  $Re = 200$ , което далеч надхвърля областта на устойчивост на задачата ( $Re \leq 40$ ). При този подход никакви изглаждащи техники не са използвани. Задачата се разглежда като обратна и се влага в задача от по-висок ред, което помага да се намали твърдостта ѝ.

# Заклучение

Настоящата дисертация е посветена на разработването на диференчни схеми и алгоритми за решаването на стационарните уравнения на Навие-Стокс при големи числа на Рейнолдс. Предложените схеми на разцепване са приложени към две задачи — течение в каверна и обтичане на кръгов цилиндър. Основният принос на дисертацията е създаването на устойчиви диференчни схеми на разцепване, които решават уравненията на Навие-Стокс при големи числа на Рейнолдс. Успешното решаване на основната задача на дисертацията е основано на следните по-важни резултати:

1. Разработена е полуявна и неявна схема на векторно разцепване за решаване на уравненията на Навие-Стокс в  $(u, v, p)$  променливи в декартова координатна система при големи числа на Рейнолдс. В предложените схеми на векторно разцепване на оператора се решават заедно уравненията за скоростта и налягането.
2. Доказано е, че полуявната схема на разцепване апроксимира съответната полуявна схема, в която няма разцепване, като подобрява устойчивостта ѝ. Доказана е консервативност на предложената реализация на схемата на разцепване. Направени са сравнения на схемата на векторно разцепване и схемата на разцепване на бихармоничното уравнение за функцията на тока, като двата подхода са приложени към задачата за течение в правоъгълна каверна при големи числа на Рейнолдс.
3. Разработена е неявна схема на разцепване и по отношение на нелинейните членове с втори ред на точност на апроксимация на тези членове. С неявната схема е преодоляна зависимостта на стъпката по фиктивното време от стъпките по пространствените променливи. Създаден е устойчив алгоритъм, с който е решена задачата за течение в правоъгълна каверна при много големи числа на Рейнолдс ( $Re \geq 10000$ ).
4. Приложен е методът на вариационното влагане към силно неустойчивата задача за идентификация на параметрите на течение около кръгов цилиндър при големи числа на Рейнолдс. Получена е вложена система, която е следствие от изходната система уравнения на Навие-Стокс и уравнението на непрекъснатостта, записани в полярни координати в променливи  $(u, v, p)$ . За решаването на получената система са разработени две схеми от типа на схемата на стабилизиращата поправка.

5. Разработени са диференчна схема и алгоритъм за решаването на вложената система като двете уравнения (за компонентите на скоростта) са от четвърти ред и уравнението за налягането е от втори ред. Получени са резултати за числа на Рейнолдс, по-големи от критичното.
6. Получена е система от пет уравнения, в която невязките на изходните уравнения са част от търсените неизвестни в задачата. Разработена е диференчна схема и алгоритъм за решаване на системата на влагането, при която петте уравнения се решават заедно. Проблемите, свързани с неограничеността на областта, са преодоляни с подходящо въведена неравномерна мрежа. Получени са резултати за числа на Рейнолдс до 200, за които няма данни в известната ни литература да са достигани в  $(u, v, p)$  формулировка на задачата.

## Приложение А

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial r} \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right) \\
 & + \frac{1}{r} \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} \right) \\
 & = \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + u_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi^2}{r^2} \\
 & + \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r^2} \\
 & + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \\
 & = \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{u_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -\frac{u_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\
 & - \frac{2u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{u_r}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \\
 & = \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{u_r^2}{r^2} - \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{u_r}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} \\
 & - \frac{2u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{u_r}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \\
 & = \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{u_r^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{2u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{2u_r}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \\
 & = \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{2u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{2u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 & = -\frac{2}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)
 \end{aligned}$$



## Приложение Б

При извеждането на уравненията на Ойлер–Лагранж се използват въведените означения в Глава 3 за  $\Omega$ ,  $\Phi$  и  $X$ , които имат вида

$$\begin{aligned}\Omega &= u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{Re} \left( Du_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \Phi &= u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{Re} \left( Du_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right), \\ X &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi},\end{aligned}$$

и оператора на Стокс

$$D \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Необходимото условие за минимум по  $u_r$

$$\begin{aligned}\left[ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{u_\varphi}{r} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] (r\Omega) \\ - \left( \frac{1}{Re} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) (r\Phi) + \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) (rX) = 0\end{aligned}$$

преобразуваме по следния начин:

Делим на  $r$  и извършваме някои диференцирания

$$\begin{aligned}\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{2\Omega}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (u_r \Omega) + \frac{u_r \Omega}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi \Omega) - \frac{\partial u_r}{\partial r} \Omega \\ - \left( \frac{2}{Re \cdot r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi \Phi}{r} + \Phi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} X = 0.\end{aligned}$$

Преобразуваме

$$\begin{aligned}\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( u_r - \frac{1}{Re \cdot r} \right) \Omega \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi \Omega) - \frac{2}{Re \cdot r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{2}{Re \cdot r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \\ + \left( \frac{u_r}{r} - \frac{2}{Re \cdot r^2} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \Omega - \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \right) \Phi + \frac{\partial}{\partial r} X = 0.\end{aligned}$$

Като заместим  $\Omega$ ,  $\Phi$  и  $X$ , получаваме уравнението от четвърти ред за функцията  $u_r$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{Re} \left( Du_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \\
& + \frac{1}{Re \cdot r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{Re} \left( Du_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left( u_r - \frac{1}{Re \cdot r} \right) \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{Re} \left( Du_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \right\} \\
& + \frac{2}{Re \cdot r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{Re} \left( Du_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ u_\varphi \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{Re} \left( Du_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \right\} \\
& - \frac{2}{Re \cdot r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{Re} \left( Du_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] \\
& + \left( \frac{u_r}{r} - \frac{2}{Re \cdot r^2} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{Re} \left( Du_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \\
& - \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \right) \left[ u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{Re} \left( Du_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0.
\end{aligned}$$

По аналогичен начин преобразуваме необходимото условие за минимум по  $u_\varphi$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{u_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r} \right] (r\Phi) \\
& + \left( \frac{1}{Re} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2u_\varphi}{r} \right) (r\Omega) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (rX) = 0.
\end{aligned}$$

Делим на  $r$  и диференцираме

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{2\Phi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial r} (u_r \Phi) + \frac{u_r \Phi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi \Phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \Phi - \frac{u_r \Phi}{r} \\
& + \left( \frac{2}{Re \cdot r^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} + \frac{2u_\varphi \Omega}{r} - \frac{\Omega}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} X = 0,
\end{aligned}$$

откъдето следва

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( u_r - \frac{1}{Re \cdot r} \right) \Phi \right] + \frac{2}{Re \cdot r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi \Phi) + \frac{2}{Re \cdot r^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} - \left( \frac{2}{Re \cdot r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \Phi \\ + \left( \frac{2u_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \Omega + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} X = 0. \end{aligned}$$

Като заместим  $\Omega$ ,  $\Phi$  и  $X$ , получаваме уравнението от четвърти ред за функцията  $u_\varphi$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[ u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{Re} \left( Du_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] \\ + \frac{1}{Re \cdot r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[ u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{Re} \left( Du_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left( u_r - \frac{1}{Re \cdot r} \right) \left[ u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{Re} \left( Du_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] \right\} \\ + \frac{2}{Re \cdot r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{Re} \left( Du_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ u_\varphi \left[ u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{Re} \left( Du_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] \right\} \\ + \frac{2}{Re \cdot r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{Re} \left( Du_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \\ - \left( \frac{2}{Re \cdot r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \left[ u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{Re} \left( Du_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] \\ + \left( \frac{2u_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{Re} \left( Du_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0. \end{aligned}$$

## Библиография

- [1] Алифанов, О. М., Артюхин, Е. А. и Румянцев, С. В., Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к задачам теплообмена. *Наука, Москва*, (1988).
- [2] Аниконов, Ю. Е., Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. *Наука, Новосибирск*, (1978).
- [3] Вабищевич, П. Н., Разностные методы решения неустойчивых эволюционных задач. *Вычислительные методы в математической физике, Издательство Московского университета*, (1986).
- [4] Гельфанд, И. М. и Фомин, С. В., Вариационное исчисление. *Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва*, (1961).
- [5] Гласко, В. Б., Обратные задачи математической физики. *Издательство Московского университета*, (1984).
- [6] Годунов, С. К. и Рявенький, В. С., Разностные схемы. *Наука, Москва*, (1973).
- [7] Еремеев, В. С., Диффузия и напряжения. *Энергоатомиздат, Москва*, (1984).
- [8] Запрянов, З. Д., Полянин, А. Д. и Рязанцев, Ю. С., Математическое моделирование на переноси явления. *Университетско издательство „Св. Климент Охридски“, София*, (1995).
- [9] Касты, Дж. (CASTI, J.) и Калаба, Р. (КАЛАБА, R.), Методы погружения в прикладной математике. *Наука, Москва*, (1976).
- [10] Козлов, Л. Ф., Теоретические исследования пограничного слоя. *Научная думка, Киев*, (1982).
- [11] Колмогоров А. Н. и Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа. *Наука, Москва*, (1976).
- [12] Колтон, Д. и Кресс, Р. (COLTON, D. AND KRESS, R.), Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. *Мир, Москва*, (1987).
- [13] Лаврентьев, М. М., Романов, В. Г. и Васильев, В. Г., Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. *Наука, Новосибирск*, (1969).
- [14] Лаврентьев, М. М., Романов, В. Г. и Шишатский, С. П., Некорректные задачи математической физики и анализа. *Наука, Новосибирск*, (1980).

- [15] ЛАТТЕС, Р. (LATTES, R.) и ЛИОНС, Ж.-Л. (LIONS, J.-L.), Метод квазиобращения и его приложения. *Мир, Москва, (1970).*
- [16] ЛАДЫЖЕНСКАЯ, О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. *Наука, Москва, (1970).*
- [17] ЛАДЫЖЕНСКАЯ, О. А., Краевые задачи математической физики. *Наука, Москва, (1973).*
- [18] ЛАДЫЖЕНСКАЯ, О. А. и УРАЛЬЦЕВА, Н. П., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. *Наука, Москва, (1970).*
- [19] ЛАНДАУ, Л. Д. и ЛИФШИЦ, Е. М., Теоретическая физика - том VI. Гидродинамика. *Наука, Москва, (1988).*
- [20] ЛИОНС & ПРОДИ, Неоднородные граничные задачи и их приложения. *Мир, Москва, (1971).*
- [21] ЛОЙЦЯНСКИЙ, Л. Г., Механика жидкости и газа *ГИТТЛ, Москва, (1950).*
- [22] МАРЧУК, Г. И., Методы вычислительной математики. *Наука, Москва, (1977).*
- [23] МОРОЗОВ, В. А., Методы регуляризации неустойчивых задач. *Издательство Московского университета, (1987).*
- [24] МОРС, Ф. (MORSE, PHILIP), Теплофизика. *Наука, Москва, (1968).*
- [25] РИХТМАЙЕР, Р. (RICHTMYER, ROBERT D.) и МОРТОН, К. (MORTON, K. W.) Разностные методы решения краевых задачи. *Мир, Москва, (1972).*
- [26] РОМАНОВ, В. Г., Обратные задачи математической физики. *Наука, Москва, (1984).*
- [27] РОУЧ, П. (ROACHE, P. J.), Вычислительная гидродинамика. *Мир, Москва, (1980).*
- [28] САМАРСКИЙ, А. А., Введение в численные методы, *Наука, Москва, (1982).*
- [29] САМАРСКИЙ, А. А., Теория разностных схем. *Наука, Москва, (1983).*
- [30] САМАРСКИЙ, А. А., ЛАЗАРОВ, Р. Д. и МАКАРОВ, В. Л., Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. *Высшая школа, Москва, (1987).*
- [31] СЕЛОВ, Л. И., Механика сплошной среды, том II. *Наука, Москва, (1984).*
- [32] СЕНДОВ, Б. и ПОПОВ, В., Числени методи, I част. *Наука и изкуство, София, (1976).*
- [33] СЕНДОВ, Б. и ПОПОВ, В., Числени методи, II част. *Наука и изкуство, София, (1978).*
- [34] СМИРНОВ, В. И., Курс высшей математики, том IV, часть первая. *Наука, Москва, (1974).*
- [35] ТЕМАМ, Р. (ТЕМАМ, R.), Уравнения Навье-Стокса. *Мир, Москва, (1981).*

- [36] ТИХОНОВ, А. Н., Об обратных задачах. *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Наука, Новосибирск, (1984).
- [37] ТИХОНОВ, А. Н. и АРСЕНИН, В. Я., Методы решения некорректных задач. *Наука, Москва*, (1986).
- [38] ХРИСТОВ, Х. И., Механо-математично моделиране на непрекъснати среди със случайна структура. *Дисертация за присъждане на степен „доктор на математическите науки“*, София, 1986.
- [39] ШКАДОВ, В. и ЗАПРЯНОВ, З., Динамика на вискозни флуиди. *Наука и изкуство, София*, (1986).
- [40] ШЛИХТИНГ, Г. (SCHLICHTING, H.), Теория пограничного слоя. *Наука, Москва*, (1874).
- [41] ЯНЕНКО, Н. Н. Метод дробных шагов. *Наука, Новосибирск*, (1967).
- [42] ACAR, R. AND VOGEL, C. R., Analysis of Bounded Variation Penalty Methods for Ill-Posed Problems *Inverse Problems*, Vol.10, No.6, 1217-1229 (1994)
- [43] ACRIVOS, A., LEAL, L. G., SNOWDEN, D. D. AND PAN, F., Further experiments on steady separated flows past bluff objects. *J. Fluid Mech.* 34, 25-48 (1968).
- [44] ALLEN, D. N. DE G. AND SOUTHWELL, R. V., Relaxation methods applied to determine the motion in two dimensions of a viscous fluid past a fixed cylinder. *Quart. J. of Mech. and Appl. Math.* 8, 129-145 (1955).
- [45] BAKKER, P.G., Bifurcations in flow patterns. Some applications of the qualitative theory of differential equations in fluid dynamics. *Nonlinear Topics in the Mathematical Sciences. 2. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, (ISBN 0-7923-1428-X/hbk). xi, 209 p.* (1991).
- [46] BENSON, M. G., BELLAMY-KNIGHTS, P. G., AND GERRARD, J. H., AND GLADWELL, I. A viscous splitting algorithm applied to low Reynolds number flows round a circular cylinder. *J. Fluids Struct.* 3, No. 5, 439-479 (1989).
- [47] BATCHELOR, G. K., On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. *J. Fluid Mech.* 1, 177-190 (1956).
- [48] BATCHELOR, G. K., A proposal concerning laminar wakes behind bluff bodies at large Reynolds number. *J. Fluid Mech.* 1, 388-398 (1956).
- [49] BATCHELOR, G. K., An Introduction to Fluid Mechanics. *Cambridge University Press*, (1967).
- [50] BELLOMO, N. AND PREZIOSI, L., Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation. *CRC Press, Inc.*, (1995).
- [51] CHORIN, A. J., A Numerical Method for solving Incompressible Viscous Flow Problems. *J. Comp. Phys.* 2, 12-26 (1967).
- [52] CHORIN, A. J., Numerical Solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.* 23, 341-354 (1968).

- [53] CHRISTOV, C. I., A Method for Identification of Homoclinic Trajectories. In: *Proc. 14-th Spring Conf. Union of Bulg. Mathematicians, Sunny Beach*, 6–9.04., 571–577. (1985)
- [54] CHRISTOV, C. I., The method of variational imbedding for elliptic incorrect problems. *Comp. Rend. Acad. Bulg. Sci.*, 39, No12, 23–26. (1986)
- [55] CHRISTOV, C. I., The method of variational imbedding for parabolic incorrect problems of coefficient identification. *Comp. Rend. Acad. Bulg. Sci.*, 40, No 2, 21–24 (1987)
- [56] CHRISTOV, C. I., The method of variational imbedding for time reversal incorrect parabolic problems. *Comp. Rend. Acad. Bulg. Sci.*, 40, No 6, 5–8 (1987)
- [57] CHRISTOV, C. I., Numerical implementation of the method of variational imbedding for coefficient identification for heat conduction equation. *Unpublished*.
- [58] CHRISTOV, C. I., Gaussian Elimination with Pivoting for Multidiagonal Systems. *University of Reading, Internal Report 4*, (1994)
- [59] CHRISTOV, C. I. AND VELARDE, M. G., On Localized Solutions of an Equations Governing Benard–Marangoni Convection. *Appl. Mathem. Modelling* 17, 311–320 (1993).
- [60] CHRISTOV, C. I. AND NARTOV, V. P. Application of the Method of Variational Imbedding for Calculating Shapes of Solitons on Falling Thin Films. In: *Proc. Conf. on Centenary of Academician L. Tchakalov, Samokov*, 1986, Bulgaria, 135–142.
- [61] CHRISTOV, C. I. AND RIDHA, A., Splitting Scheme for Iterative Solution of Bi–Harmonic Equation. Application to 2D Navier–Stokes Problems. *Advances in Numerical Methods & Applications, Sofia, Bulgaria, World Scientific Publishing Company*, 341–352, 1994.
- [62] CHRISTOV, C. I. and RIDHA, A. Splitting Scheme for the stream–function formulation of 2D unsteady Navier–Stokes equations. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 320, II b, p. 441–446, 1995.
- [63] CHRISTOV, C. I. and TODOROV, M. D., An inviscid model of flow separation around blunt bodies. *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.*, 1987, 7:43–46.
- [64] CHRISTOV, C. I. and TZANKOV, I. T., Numerical investigation of the laminar boundary layer flow around an impulsively moved circular cylinder. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 109, 1–15 (1993).
- [65] CHURBANOV, A. G., PAVLOV, A. N. and VABISHCHEVICH, P. N., Operator–splitting methods for the incompressible Navier–Stokes equations on non–staggered grids. Part 1: First order schemes. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 21, 617–640 (1995).
- [66] D’ALESSIO, S. J. D. and DENNIS, S. C. R., A vorticity model for viscous flow past a cylinder. *Comput. Fluids* 23, No.2, 279–293 (1994).
- [67] D’ALESSIO, S. J. D. and DENNIS, S. C. R., A method of domain decomposition for calculating the steady flow past a cylinder. *J. Eng. Math.* 28, No.3, 227–240 (1994).
- [68] DENNIS, S. C. R. and CHANG, GAU–ZU, Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100. *J. Fluid Mech.* 42, part 3, 471–489 (1970).

- [69] DENNIS, S. C. R., NG, M. and NGUYEN, P., Numerical solution for the steady motion of a viscous fluid inside a circular boundary using integral conditions. *J. Comput. Phys.* 108, No.1, 142–152 (1993).
- [70] DENNIS, S. C. R. and KOCABIYIK, S., The solution of two-dimensional Oseen flow problems using integral conditions. *IMA J. Appl. Math.* 45, No.1, 1–31 (1990).
- [71] DENNIS, S. C. R., QIANG., WANG, COUTANCEAU, M. and LAUNAY, J.-L., Viscous flow normal to a flat plate at moderate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* 248, 605–635 (1993).
- [72] EWING, R.E., ILIEV, O.P., MARGENOV, S.D. and VASSILEVSKI, P.S., Numerical study of three multilevel preconditioners for solving 2D unsteady Navier–Stokes Equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 121, 177–186 (1995).
- [73] FORNBERG, B., A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* 98, 819–835, (1980).
- [74] FORNBERG, B., Steady flow past a circular cylinder up to Reynolds number 600. *J. Comput. Phys.* 61, No.2, 297–320, (1985).
- [75] FORNBERG, B., Steady viscous flow past a sphere at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.* 190, 471–480, (1988).
- [76] FORNBERG, B., Generation of finite difference formulas on arbitrary spaced grids. *Math. Comput.* 51, No.184, 699–706 (1988).
- [77] FORNBERG, B., High-order finite differences and the pseudospectral method on staggered grids. *SIAM J. Numer. Anal.* 27, No.4, 904–918 (1990).
- [78] FORNBERG, B., An improved pseudospectral method for initial-boundary value problems. *J. Comput. Phys.* 91, No.2, 381–397 (1990).
- [79] FORNBERG, B., Steady incompressible flow past a row of circular cylinders. *J. Fluid Mech.* 225, 655–671 (1991).
- [80] FORNBERG, B., High order finite differences and the pseudospectral method on staggered grids. *Hyperbolic problems. Theory, numerical methods and applications. Vol. I, Proc. Conf., Uppsala/Sweden 1990*, 418–432 (1991).
- [81] FORNBERG, B., MEYER-SPASCHE, R., A finite difference procedure for a class of free boundary problems. *J. Comput. Phys.* 102, No.1, 72–77 (1992).
- [82] FORNBERG, B., Computing steady incompressible flows past blunt bodies – A historical overview. *Baines, M. J. (ed.) et al., Numerical methods for fluid dynamics 4. Proceedings of the conference held at Reading University, United Kingdom, April 1992. Oxford: Clarendon Press, (ISBN 0-19-853696-8/hbk). 115–133 (1993).*
- [83] FORNBERG, B., SLOAN, DAVID M., A review of pseudospectral methods for solving partial differential equations. *Iserles, A. (ed.), Acta Numerica 1994. Cambridge: Cambridge University Press, (ISBN 0-521-46181-2/hbk). 203–267 (1994).*



- [84] GHIA, U., GHIA, K. N. and SHIN, C. N., High- $Re$  solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equation and a multigrid method. *J. Comp. Phys.* 48, 387-411 (1982).
- [85] GOODRICH, J. W. and SOH, W. Y., Time-dependent viscous incompressible Navier-Stokes equations: The finite-difference galerkin formulation issues. *J. Comput. Phys.* 84, 207-241 (1989).
- [86] GOYON, O., High-Reynolds number solutions of Navier-Stokes equation using incremental unknowns. *J. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 130, 319-355 (1996).
- [87] GRESHO, PH. M., Incompressible fluid dynamics: Some fundamental formulation issues. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 23, 413-453 (1991).
- [88] GRESHO, PH. M. and CHAN, S. T., On the Theory of Semi-Implicit Projection Methods for Viscous Incompressible Flow and its Implementation via a Finite Element Method that also Introduces a Nearly Consistent Mass Matrix. Part 2: Implementation. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 11, 621-659, (1990).
- [89] GRESHO, PH. M., CHAN, S. T., UPSON, C. and LEE, R., A modified finite element method for solving the time-dependent, incompressible Navier-Stokes equations. part 1: Theory. part 2: Applications. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 4, 557-598, 619 (1984).
- [90] GUPTA, M. M., High accuracy solutions of incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.* 93, 343-359 (1991).
- [91] HARLOW, F. H. and WELCH, J. E., Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *The Physics of Fluids*, Vol.8, No.12, 2182-2189 (1965).
- [92] HUNG, CHING-MAO, Computation of Navier-Stokes equations for three-dimensional flow separation. *AIAA J.* 29 No.10, 1659-1667 (1991).
- [93] ILIEV, O.P. and MAKAROV, M.M., A Block-Matrix Iterative Numerical Method for Coupled Solving 2D Navier-Stokes Equations. *J. Comput. Physics*, 121, 324-330 (1995).
- [94] INGHAM, D.B., TANG, T. and MORTON, B.R., Steady two-dimensional flow through a row of normal flat plates. *J. Fluid Mech.* 210, 281-302 (1990).
- [95] LESNIC, D., ELLIOTT, L., INGHAM, D. B., Treatment of singularities in exterior fluid domains with corners using the boundary element method. *Comput. Fluids* 23, No.6, 817-827 (1994).
- [96] INGHAM, D. B. and YAN, B., Fluid flows around cascades. *Z. Angew. Math. Phys.* 44, No.1, 53-72 (1993).
- [97] INGHAM, D. B., YUAN, Y. and HAN, H., The boundary-element method for an improperly posed problem. *IMA J. Appl. Math.* 47, No.1, 61-79 (1991).
- [98] INGHAM, D. B. AND POP, I., Forced flow in a right-angled corner: Higher-order theory. *Eur. J. Mech. B* 10, No.3, 313-331 (1991).

- [99] JAFROUDI, HAMID; YANG, HSUN-TIAO AND HERMEL, JERRY Matched asymptotic solutions of impulsive flow over an elliptic cylinder. *J. Comput. Phys.* 109, No.2, 289–305 (1993).
- [100] JAIN, P. C. and KAWAGUTI, M., Numerical study of viscous flow past circular cylinder. *J. Phys. Soc. Japan* 21, 2055, (1966).
- [101] JAIN, P. C. and SANKARA RAO, K., Numerical solution of unsteady viscous incompressible fluid flow past a circular cylinder. *Phys. Fluids Suppl. II*, 57, (1969).
- [102] KAPORIN, I. E. and AXELSSON, OWE, On a Class of Nonlinear Equation Solvers Based on the Residual Norm Reduction over a Sequence of Affine Subspaces. *SIAM J. Sci. Comput.* Vol. 16, №1, 228–249 (1995).
- [103] KARNIADAKIS, G., ISRAELI, M. and ORSZAG, S. A., High-Order Splitting Methods for the Incompressible Navier–Stokes equations. *J. Comput. Phys.* 97, 414–443, (1991).
- [104] KAWAGUTI, M., Numerical solution of Navier–Stokes equations for the flow around a circular cylinder at Reynolds number 40. *J. Phys. Soc. Japan* 8, 747, (1953).
- [105] KELLER, H. B. and TAKAMI, H., Numerical studies of viscous flow about cylinders. In D. Greenspan, editor, *Numerical Solutions of Nonlinear Differential Equations*, 115, Wiley, (1966).
- [106] KIM, J. and MOIN, P., Application of fractional-step method to incompressible Navier–Stokes equations. *J. Comput. Phys.* 59, 308–323 (1985).
- [107] KIRCHHOFF, G., Zur Theorie freier Flüssigkeits-Strahlen. *J. Reine Angew. Math.* 70, 289–298 (1969).
- [108] KUNISCH, K. and RING, W., Regularization of Nonlinear Ill-Posed Problems with Closed Operators. *Num. Func. Analysis and Opt.* Vol.14, No.3–4, 389–404 (1993).
- [109] LAX, P., Hyperbolic difference equation: A review of the Courant–Friedrichs–Lewy paper in the light of recent developments. *IBM Journal* 11, 235–238 (1967).
- [110] LIAO, S. J., Higher-order stream function–vorticity formulation of 2D steady-state Navier–Stokes equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 15, 595–612 (1992).
- [111] LIAO, S. J. and ZHU, J. M., A short note on High-order Streamfunction–Vorticity Formulation of 2D Steady State Navier–Stokes Equations. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol. 22, 1–9 (1996).
- [112] LIU, J., A Sensitivity Analysis for Least-Squares Ill-Posed Problems Using the Haar Basis. *SIAM Jour. on Num. Analysis* Vol.31, No.5, 1486–1496 (1994).
- [113] LUCE, R. and KERNEVEZ, J. P., Numerical resolution of Ill-Posed Problems. *Lecture Notes in Control and Inf. Sci.* Vol.159, 106–115, (1991).
- [114] LUCHINI, P. and D’ALASCIO, A., Multigrid Pressure Corection Techniques for the Computation of Quasi-incompressible Internal Flows. *Intern. J. Numer. Methods in Fluids* Vol.18, 489–507, (1994).

- [115] MARINOV, T. T. and CHRISTOV, C. I. Boundary-Layer Thickness as an Inverse Problem of Coefficient Identification. In: *HADMAR'91*, Varna, Bulgaria, p. 57, (1991).
- [116] MILOS, F. S. and ACRIVOS, A., Steady flow past sudden expansions at large Reynolds number. Part I: Boundary layer solutions. *Phys. Fluids* 29, 1353 (1986).
- [117] MILOS, F. S., ACRIVOS, A. and KIM, J., Steady flow past sudden expansions at large Reynolds number. Part II: Navier–Stokes solutions for the cascade expansion. *Phys. Fluids* 30, 7 (1987).
- [118] NATARAJAN, R., FORNBERG, B., ACRIVOS, A., Flow past a row of flat plates at large Reynolds numbers. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* 441, No.1912, 211-235 (1993).
- [119] NIEUWSHADT, F. and KELLER, H. B., Viscous flow past cylinders. *Comp. Fluids* 1, 59, (1973).
- [120] PATEL, V. A., Symmetry of the flow around a circular cylinder. *J. Comput. Phys.* 71, 65–99 (1987).
- [121] PEACEMAN, D. W. and RACHFORD, JR. H., The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 3 (No 1) 28–41, 1955.
- [122] PEREGRINE, D. H., A note on steady high–Reynolds–number flow about a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* 157, 493–500 (1985).
- [123] PEROT, J. B., An Analysis of the Fractional Step Method. *J. Comp. Physics* 108, 51–58 (1993).
- [124] POP, I. and INGHAM, D. B., A note on conjugate forced convection boundary–layer flow past a flat plate. *Int. J. Heat Mass Transfer* 36, No.15, 3873–3876 (1993).
- [125] RABINOWITZ, P. H., Existence and nonuniqueness of rectangular solutions of the Bénard problem. *Arch. Rational Mech. Anal.* 29, 32–58 (1968).
- [126] RICHARDSON, L. F., The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. *Trans. Roy. Soc. London, Ser. A.*, 210, 307–357 (1910).
- [127] RICHTER, G. R., An inverse problem for the state diffusion equation. *SIAM J. Appl. Math.* 41, No.2, 210–221 (1981).
- [128] ROSENFELD, M., KWAK, D. and VINOKUR, M., A fractional step solution method for the unsteady incompressible Navier–Stokes equations in generalized coordinate system. *J. Comput. Phys.* 94, 102–137 (1991).
- [129] RUBIN, S. G. and KHOSLA, P. K., Navier–Stokes calculations with a Coupled Strongly Implicit Method–I. *Computers and Fluids* 9, 163–180 (1981).
- [130] SADOVSKII, V. S., Vortex regions in a potential stream with a jump of Bernoulli's constant at the boundary. *Prikl. Math. Mekh.* 35, 773–779 (1971). transl. *Appl. Math. Mech.* 35, 729–735 (1971).

- [131] SAFFMAN, P. G. and TANVEER, S., Prandtl-Batchelor flow past a flat plate with a forward-facing flap. *J. Fluid Mech.* 143, 351-365 (1984).
- [132] SCHREIBER, R. and KELLER, H. B., Driven cavity flows by efficient numerical techniques. *J. Comput. Phys.* 49, 310-333 (1983).
- [133] SHEN, J., Hopf Bifurcation of the Unsteady Regularized Driven Cavity Flow. *J. Comp. Physics.*, 228-245, (1991).
- [134] SMAGULOV, SH. and CHRISTOV, C. I. Iterationless numerical implementation of the boundary conditions in the vorticity-stream function formulation of Navier-Stokes equations. Preprint 20 *Inst. Theor. Appl. Mech.*, Russian Acad. Sci., Novosibirsk, (1980).
- [135] SMITH, F. T., Laminar flow of an incompressible fluid past a bluff body: the separation, reattachment, eddy properties and drag. *J. Fluid Mech.* 92, 171-205 (1979).
- [136] SMITH, F. T., A structure for laminar flow past a bluff body at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.* 155, 175-191 (1985).
- [137] SCHÄFER, M. and TUREK, S., Benchmark Computations of Laminar Flow Around a Cylinder. Preprint 96 - 03 (SFB 359), Universität Heidelberg, January 1996.
- [138] SON, J. S. and HANRATTY, T. J., Numerical solution for the flow around a cylinder at Reynolds number of 40, 200 and 500. *J. Fluid Mech.* 25, 369-386 (1969).
- [139] TA, P. L., Étude numérique de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'un cylindre fixe ou en rotation. effet magnus. *J. Mecanique* 14, 109, (1975).
- [140] TAFTI, D. K. and VANKA, S.P., A numerical study of flow separation and reattachment on a blunt plate. *Phys. Fluids*, A 3, No.7, 1749-1759 (1991).
- [141] ТАГАНОВ, Г.И., *Механики жидкости и газа* No 5, Акад. Наук СССР, стр. 3 (1968).
- [142] TAKAMI, H. and KELLER, H. B., Steady two-dimensional viscous flow of an incompressible fluid past a circular cylinder. *Phys. Fluids Suppl. II*, 51, (1969).
- [143] THOM, A., An investigation of fluid flow in two dimensions. *Aerospace Research Center*, R. and M., No. 1194, United Kingdom, (1928).
- [144] THOM, A., The flow past circular cylinders at low speeds. *Proc. Roy. Soc. A* 141, 651-666 (1933).
- [145] THOMAN, D. C. and SZEWCZYK, A. A., Time dependent viscous flow over a circular cylinder. *Phys. Fluids Suppl. II*, 76-87, (1969).
- [146] THOMPSON, M. C. and FERZIGER, J. H., Un adaptive multigrid technique for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.* 82, 94-121 (1989).
- [147] TUANN, S. Y. and OLSON, M. D., Numerical studies of the flow around a circular cylinder by a finite element method. *Comp. Fluids* 6, 219, (1978).

- [148] TUREK, S., Tools for simulating non-stationary incompressible flow via discretely divergence-free finite element models. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 18, 71–105 (1994).
- [149] TUREK, S., A comparative study of time-stepping techniques for the incompressible Navier-Stokes equations: from fully implicit non-linear schemes to semi-implicit projection methods. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 987–1011 22 (1996).
- [150] TZANKOV, I. T. and CHRISTOV, C. I., Numerical Investigation of the Boundary-Layer Flow around Impulsively Moved Cylinder. *Comptes ren. de l'Acad. Bul. des Sci.* 43, No.2, 21–24 (1990).
- [151] UNDERWOOD, R. L., Calculations of incompressible flow past a circular cylinder at moderate reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* 37, 95, (1969).
- [152] VABISHCHEVICH, P. N., Implicit finite-difference schemes for the nonstationary Navier-Stokes equations with the stream function and the vorticity as variables. *Differential equations*, 20 No 7, (1984), 820.
- [153] VANKA, S. P., Block-implicit multigrid solution of Navier-Stokes equations in primitive variables. *J. Comput. Phys.* 65, 138–158 (1986).
- [154] VORUS, W. S., A theory of flow separation. *J. Fluid Mech.* 132, 163–183 (1983).
- [155] WU, H. M., OVERMAN II, E. A. and ZABUSKY, N. J., Steady state solutions the Euler equations in two dimensions: Rotating and translating V-states with limiting cases. 1. Numerical algorithms and results. *J. Comput. Phys.* 53, 42 (1984).
- [156] ZAPRYANOV, Z., KOZHOUKHAROVA, ZH. and IORDANOVA, A., On the hydrodynamic interaction of two circular cylinders oscillating in a viscous fluid. *Z. Angew. Math. Phys.* 39, No.2, 204–220 (1988).

# Апробация на дисертацията

## Публикувани статии и доклади по дисертацията

- [A1] МАРИНОВА Р., ХРИСТОВ Х., Числено изследване на стационарното двумерно течение около цилиндър с метод на вариационното влагане, Сборник доклади на XVIII лятна школа „Приложение на математиката в техниката“, стр. 162–165, 1993.
- [A2] CHRISTOV C. I., MARINOVA R. S., Numerical Investigation of High *Re* Stationary Viscous Flow around Circular Cylinder as Inverse Problem, *Bulg. J. Meteorology & Hydrology* Vol. 5 (1994), No 3–4, 105–118.
- [A3] MARINOVA R., Identification of the Unstable Stationary Solutions of Navier–Stokes Equations at High Reynolds Numbers, Continuum Models and Discrete Systems, ed. K.Z.Markov, *World Sci.*, 452–460, 1996.
- [A4] CHRISTOV C. I., MARINOVA R. S., Implicit Scheme for Navier–Stokes Equations in Primitive Variables via Vectorial Operator Splitting, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 62, ed. M.Griebel, O.P.Iliev, S.D.Margenov, P.S.Vassilevski, *Vieweg*, 251–259, 1997.
- [A5] CHRISTOV C. I., MARINOVA R. S., Numerical Solutions for Steady Flow past a Circular Cylinder via Method of Variational Imbedding, *Annu. de l'Université de Sofia “St. Kl. Ohridski”*, vol.90, (под печат).

## Части от дисертационния труд са докладвани на следните научни семинари и конференции

- [B1] ХРИСТОВ Х., МАРИНОВА Р., Стационарното двумерно течение около цилиндър като обратна задача за уравненията на Навие–Стокс. Числен алгоритъм на вариационното влагане, *Отчетна научна сесия на направление Информатика на НИМХ при БАН*, София, 1991.
- [B2] МАРИНОВА Р., ХРИСТОВ Х., Метод на вариационното влагане за уравненията на Навие–Стокс, *Научен семинар на катедра „Математика“ при ВМЕИ (сега ТУ) Варна с ръководител доц. Д. ГЕНЕВ*, Варна, 1991.

- [Б3] ХРИСТОВ Х., МАРИНОВА Р., Числен алгоритъм на вариационното влагане за стационарното двумерно течение около цилиндър, *Юбилейна научна сесия на ТУ — Варна*, Варна, 1992.
- [Б4] МАРИНОВА Р., ХРИСТОВ Х., Числено изследване на стационарното двумерно течение около цилиндър с метод на вариационното влагане, *XVIII Национална лятна школа „Приложение на математиката в техниката“*, Варна, 1992.
- [Б5] МАРИНОВА Р., Изследване на стационарното вискозно течение около кръгов цилиндър с метода на вариационното влагане, доклад за зачисляване в свободна аспирантура, *Научен семинар на катедра „Математика“ при ВМЕИ (сега ТУ) Варна с ръководител доц. Д. ГЕНЕВ*, Варна, 1992.
- [Б6] MARINOVA R., Identification of the Unstable Stationary Solutions of Navier–Stokes Equations at High Reynolds Numbers, *Continuum Models and Discrete Systems*, Varna, Bulgaria, June 11-16, 1995.
- [Б7] CHRISTOV C. I., MARINOVA R. S., Implicit Scheme for Navier–Stokes Equations in Primitive Variables via Vectorial Operator Splitting, *1st Workshop on “Large-Scale Scientific Computations”*, Varna, Bulgaria, June 7-11, 1997.
- [Б8] МАРИНОВА Р. Схеми на операторно разцепване за уравненията на Н-С при големи числа на Рейнолдс, *Научен семинар на сектор „Физика на морето“ с ръководител ст.н.с. Д. ТРУХЧЕВ, Институт по Океанология на БАН*, Варна, 4 септември, 1997.
- [Б9] МАРИНОВА Р. Диференчни схеми и алгоритми за уравненията на Н-С при големи числа на Рейнолдс, *Научен семинар на Секцията по Изчислителна Математика с ръководител проф. М. КАСЧИЕВ, Институт по Математика на БАН*, София, 10 септември, 1997.
- [Б10] МАРИНОВА Р. Диференчни схеми и алгоритми за стационарните уравнения на Навие-Стокс при големи числа на Рейнолдс, *Научен семинар на Секцията по Механика на Флуидите с ръководител ст.н.с. С. СЛАВЧЕВ, Институт по Механика на БАН*, София, 30 септември, 1997.
- [Б11] MARINOVA R., Operator-Splitting Methods for Incompressible Navier–Stokes Equations, *Seminar of the Group of Numerical Analysis*, head Prof. OWE AXELSSON, *Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, University of Nijmegen*, The Netherlands, December 11, 1997.