СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ И НЕВРОННИ МРЕЖИ СЪС ЗАКЪСНЕНИЯ И ИМПУЛСИ

Валерий Ковачев

Department of Mathematics & Statistics, College of Science,

Sultan Qaboos University, Muscat, Sultanate of Oman

и

Институт по математика,

Българска академия на науките,

София, България

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за придобиване

на научната степен

“Доктор на математическите науки”

4. Природни науки, математика и информатика
4.5. Математика
01.01.13. Математическо моделиране и приложение на математиката

ОБЩА ХАРАКТЕРИСТИКА НА РАБОТАТА

При математическото описание на еволюцията на реални процеси, подложени на кратковременни смущения, често се оказва удобно да се пренебрегне времетраенето на тези смущения и да се приеме, че те имат „моментален“ характер. Такава идеализация води до необходимостта да се изучават динамични системи с прекъснати траектории или, както те също се наричат, *диференциални уравнения симпулсно въздействие* или *импулсни диференциални уравнения*.

Импулсните диференциални уравнения са сравнително нов дял от теорията на обикновените и частните диференциални уравнения. Те бележат своето начало през 1960 г. със статията на В. Д. Мильман и А. Д. Мышкис [9]. Отначало изследването на тези уравнения се извършвало изключително бавно. Това се дължало на големите затруднения, причинени от специфичните свойства на импулсните уравнения като "биене" на решенията, бифуркации и сливане на решенията, умиране на решенията и загуба на свойството автономност. Въпреки тези затруднения, наблюдава се бум в развитието на тази теория в последното четвърт столетие. Интересът към нея се дължи на големите възможности за математическо моделиране посредством импулсни диференциални уравнения във важни области на науката и техниката като теория на оптималното управление, теоретичната физика, популационната динамика, биотехнологиите, импулсната техника, промишлената роботика, икономиката и др.

В периода след 1988 г. бяха получени важни резултати, свързани с импулсни диференциални уравнения с малък параметър. Развитието на теорията на импулсните диференциални уравнения с малък параметър е свързано с имената на V. Lakshmikantham и неговите сътрудници, А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, А. А. Бойчук и много други в Украйна, Д. Д. Байнов и неговите сътрудници в България, и др.

Симулациите с невронни мрежи изглеждат да са ново явление. Обаче тази област се появи преди компютрите. Първият изкуствен неврон беше произведен от неврофизиолога Warren McCulloch и логика Walter Pitts [8]. Много важни успехи бяха улеснени от употребата на нескъпи компютърни симулации. След начален период на ентусиазъм областта изживява период на разочарование и лоша слава.

При все че началното предназначение на изкуствените невронни мрежи е било да изучава и възпроизвежда човешки процеси на обработка на информация като говор, зрение, обработка на знания, те също демонстрират тяхната превъзходна способност да решават комплексни задачи като системен контрол, компресиране на данни, оптимизационни задачи, разпознаване на образи и идентифициране на системи. Те са подходящи за предсказване на продажби, контрол на производствения процес, потребителски проучвания, валидиране на данни, оценяване на риска, маркетингови стратегии.

Повечето добре изучени и широко използвани невронни мрежи могат да бъдат класифицирани като непрекъснати или дискретни. Напоследък се появи нова категория невронни мрежи, които не са нито чисто непрекъснати, нито чисто дискретни. Тази трета категория невронни мрежи, наречени импулсни невронни мрежи, проявява комбинация от характеристики както на непрекъснатите, така и на дискретните невронни мрежи. Доколкото ми е известно, импулсни невронни мрежи се появяват за пръв път през 1999 г. [4], но ще отбележа, че след публикуването на нашата статия [25] през 2004 г. ежегодно се появяват стотици или може би хиляди статии, посветени на импулсни невронни мрежи, особено в Китай.

Настоящата дисертация изучава, преди всичко, съществуването на периодични и почти периодични решения на импулсни системи със закъснение, и глобалната асимптотическа (в повечето случаи, експоненциална) устойчивост на точки на равновесие и периодични решения на непрекъснати и дискретни невронни мрежи със закъснения и импулси. Използвани са методи като теореми за неподвижната точка, M-матрици, функционали на Ляпунов, минимални Липшицови константи и мерки за нелинейност, семи-дискретизация, теоремата за продължение на Mawhin [2].

Настоящата дисертация е написана по време на работата на автора в Sultan Qaboos University, Muscat, Oman. Обаче част от свързаните с нея около 36 публикации са писани по време на моята работа в Института по математика и информатика – БАН и Fatih University, Istanbul, Turkey, и на моите посещения във Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, Spain, и Université de Pau et du Pays del'Adour, Pau, France, през 1993 г. Резултатите от дисертацията са докладвани на редица международни конференции и на семинари в гореспоменатите организации. Част от публикациите са съкратени версии, предназначени за доклади на конференции, или разглеждат частни случаи. За минимизиране на евентуални повторения в литературата изброяваме 22 публикации [14-35], съдържащи резултати от дисертацията.

Бих желал да изразя своята благодарност към редица колеги от различни страни и особено към Prof. Lucas Jódar (Spain), проф. Александр Бойчук (Украйна), Prof. Haydar Akça (Turkey, сега в UAE), и посмъртно към проф. Друми Байнов (България) и Prof. Ovide Arino (France).

СЪДЪРЖАНИЕ НА РАБОТАТА

Дисертацията е на английски език. Тя се състои от увод, три глави, заключение и списък на литература, включващ 120 заглавия, и е изложена на 290 страници. Работата съдържа три графични изображения.

Глава първа има спомагателен характер. Тя съдържа необходимите сведения за импулсни диференциални уравнения, периодични решения на линейни импулсни системи в некритичния и критичния случаи, почти периодични решения на линейни импулсни системи, и диференциални уравнения с отклоняващ се аргумент.

Да разгледаме линейната ω-периодична импулсна система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + g(t), \qquad t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) &= B_k x(t_k) + a_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{1}$$

където $\Delta x(t_k) = x(t_k + 0) - x(t_k)$ са импулсите в момент t_k, матриците $E + B_k$ са неособени, и съответната хомогенна система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x, \qquad t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) &= B_k x(t_k), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Да означим с $X(t)$ фундаменталното решение на система (2). В така наречения *некритичен* случай, когато система (2) няма нетривиални ω-периодични решения (т.е. матрицата $Q = E - X(\omega)$ е неособена), система (1) има единствено ω-периодично решение

$$\varphi(t) = \int_0^{\omega} G(t,\tau)g(\tau\,)\,d\tau + \sum_{k=1}^{m} G(t,t_k+0)a_k, \qquad (3)$$

където $G(t,\tau)$ е *функцията на Грийн за периодичната задача за нехомогенната система*, съответстваща на (2) (виж [10, Глава 2, §7.1]).

В *критичния* случай, когато $\operatorname{rank} Q = n_1 < n$ и $r = n - n_1$, система (2) има r-параметрична фамилия от ω-периодични решения. Да означим с P^* ортопроектора $\mathbb{R}^n \to \operatorname{Ker}(Q^*)$. Тогава система (1) има ω-периодични решения тогава и само тогава, когато

$$P^*X(\omega)\left(\int_0^{\omega} X^{-1}(\tau)g(\tau)\,d\tau + \sum_{k=1}^{m} X^{-1}(t_k+0)a_k\right) = 0. \qquad (4)$$

Ако условие (4) е изпълнено, система (1) има r-параметрична фамилия от ω-периодични решения

$$x_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + \int_0^{\omega} G(t,\tau)g(\tau)\,d\tau + \sum_{k=1}^{m} G(t,t_k)a_k, \qquad (5)$$

където стълбовете на матрицата $X_r(t)$ са пълна система от линейно независими ω-периодични решения на (2), c_r е произволен r-мерен вектор и $G(t,\tau)$ е *обобщената функция на Грийн*.

Сега да допуснем, че система (2) е ω-периодична, а нехомогенностите $g(\cdot)$ и $\{a_k\}$ са почти периодични. Да означим

$$\Lambda = \frac{1}{\omega}\ln X(\omega), \quad \Phi(t) = X(t)e^{-\Lambda t}$$

и да допуснем, че матрицата Λ няма собствени стойности с нулева реална част.

При направените предположения система (1) има единствено почти периодично решение (виж [10, Теорема 25.3]), зададено с формулата

$$x_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)G(t-\tau)\Phi^{-1}(\tau)g(\tau)\,d\tau + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi(t)G(t-t_k)\,\Phi^{-1}(t_k)a_k. \qquad (6)$$

След тази встъпителна част можем да преминем към изложението на основните резултати на настоящата дисертация.

Един от класическите проблеми в качествената теория на диференциалните уравнения е съществуването на периодични (или почти периодични) решения. Традиционен подход към този проблем е изследването на линеаризираната система (също наречена *система във вариации*) относно периодично решение на несмутената задача, удовлетворяващо някои условия за неизроденост.

В началото на Глава втора, за импулсна система със закъснение доказваме, че ако съответната система без закъснение има изолирано ω-периодично решение, тогава във всяка околност на тази орбита разглежданата система също има ω-периодично решение, ако закъснението е достатъчно малко. Този резултат е обобщен за случая на неутрална импулсна система с малко закъснение.

Разглеждаме ω–периодична импулсна система с малко закъснение

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\big(t, x(t), x(t-h)\big), \quad t \neq t_i, \\ \Delta x(t_i) &= I_i\big(x(t_i), x(t_i - h)\big), \quad i \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{7}$$

При $h = 0$ получаваме така наречената *пораждаща система*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\big(t, x(t), x(t)\big), \quad t \neq t_i, \\ \Delta x(t_i) &= I_i\big(x(t_i), x(t_i)\big), \quad i \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{8}$$

за която предполагаме, че има ω-периодично решение $\psi(t)$.

Дефинираме линеаризираната система относно $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(t)y, \qquad t \neq t_i, \\ \Delta y(t_i) &= B_i y(t_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{9}$$

където

$$A(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, x)\bigg|_{x=\psi(t)}, \quad B_i = \frac{\partial}{\partial x} I_i(x, x)\bigg|_{x=\psi(t_i)}.$$

Ако $X(t)$ е фундаменталното решение на система (9), предполагаме, че матриците $E - X(\omega)$ и $E + B_i$ са неособени.

Доказваме, че за достатъчно малко закъснение h система (7) има единствено ω-периодично решение $x(t, h)$ зависещо непрекъснато от h и такова, че $x(t, h) \to \psi(t)$ при $h \to 0$. За тази цел в система (7) сменяме неизвестната функция по формулата

$$x = \psi(t) + y \tag{10}$$

и получаваме системата

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A(t)y(t) + Q\big(t, y(t)\big) + \delta f\big(t, x(t), x(t-h)\big), \quad t \neq t_i, \\ \Delta y(t_i) &= B_i y(t_i) + J_i\big(y(t_i)\big) + \delta I_i\big(x(t_i), x(t_i - h)\big), \quad i \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{11}$$

където $Q(t, y)$ и $J_i(y)$ са нелинейности, присъщи на пораждащата система (8), докато

$$\begin{aligned} \delta f\big(t, x(t), x(t-h)\big) &\equiv f\big(t, x(t), x(t-h)\big) - f\big(t, x(t), x(t)\big), \\ \delta I_i\big(x(t_i), x(t_i - h)\big) &\equiv I_i\big(x(t_i), x(t_i - h)\big) - I_i\big(x(t_i), x(t_i)\big) \end{aligned}$$

са нехомогенности, дължащи се на малкото закъснение.

Формално разглеждаме (11) като нехомогенна система от вида (1) със съответна хомогенна система (9). Тогава нейното единствено ω-периодично решение $y(t)$ трябва да удовлетворява равенство от вида (3), което в случая е операторно уравнение

$$y = U_h y, \tag{12}$$

където операторът U_h се задава от равенствата

$$\begin{aligned} U_h y(t) \quad &\equiv \int_0^\omega G(t, \tau) Q\big(\tau, y(\tau)\big)\, d\tau + \int_0^\omega G(t, \tau) \delta f\big(\tau, x(\tau), x(\tau - h)\big)\, d\tau \\ &+ \sum_{i=1}^{m} G(t, t_i + 0) J_i\big(y(t_i)\big) + \sum_{i=1}^{m} G(t, t_i + 0) \delta I_i\big(x(t_i), x(t_i - h)\big) \end{aligned}$$

и (10).

ω-периодично решение $x(t) = x(t, h)$ на система (7) съответства на неподвижна точка y на оператора U_h в подходящо избрано множество от ω-

периодични функции. За $\mu > 0$ означаваме с T_μ множеството от ω-периодични функции с точки на прекъсване от първи вид в $\{t_i\}$ и норма, ненадхвърляща μ, и намираме зависимост между h и μ, така че операторът U_h е свиващо изображение в T_μ.

Полученият резултат се обобщава за неутрална система с импулси, където в дясната част на диференциалното уравнение на система (7) е добавен членът $D(t)\dot{x}(t-h)$ и нормата на ω-периодичната матрична функция $D(t)$ е по-малка от единица. Това води до някои изменения в доказателството. Интегралите в дефиницията на U_h съдържат допълнителен множител $\left(E - D(t)\right)^{-1}$, и се появява допълнителният член

$$\int_0^\omega G(t,\delta)\left(E - D(\tau)\right)^{-1} D(\tau)\left(\dot{x}(\tau - h) - \dot{x}(\tau)\right) d\tau.$$

За да избегнем използването на C^1-норма, интегрираме по части в последния интеграл. Изчисленията изискват по-висока гладкост на дясната част на системата, отколкото в случая на система със закъснение.

По-нататък разглеждаме ω-периодична импулсна система със закъснение, такава че съответната система без закъснение е линейна и има r-параметрична фамилия от ω-периодични решения. Получено е уравнение за пораждащите амплитуди и са намерени достатъчни условия за съществуване на ω-периодични решения на дадената система в критичните случаи от първи и втори ред, ако закъснението е достатъчно малко.

И така, разглеждаме системата

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + f(t) + H\left(t, x(t), x(t-h)\right), \quad t \neq t_i, \\ \Delta x(t_i) &= B_i x(t_i) + a_i + I_i\left(x(t_i), x(t_i - h)\right), \quad i \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{13}$$

където $H(t, x, \bar{x}) = g(t, x, \bar{x})(x - \bar{x})$, $I_i(x, \bar{x}) = J_i(x, \bar{x})(x - \bar{x})$. За $h = 0$ получаваме линейна пораждаща система от вида (1) и съответна хомогенна система от вида (2). Ако Q, r и P^*са като във въведението, да означим с P_r^* матрица, чиито редове са r линейно независими реда на P^*. Ако е изпълнено условието

$$P_r^* X(\omega)\left(\int_0^\omega X^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau + \sum_{i=1}^m X^{-1}(t_i + 0) a_i\right) = 0,$$

пораждащата система има r-параметрична фамилия от ω-периодични решения

$$x_0(t, c_r) = X_r(t) c_r + \int_0^\omega G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau + \sum_{i=1}^m G(t, t_i) a_i.$$

Търсим условия за съществуването на ω-периодично решение $x(t,h)$ на система (13), зависещо непрекъснато от h и такова, че $x(t,0) = x_0(t, c_r)$ за някое $c_r \in \mathbb{R}^r$.

В система (13) извършваме субституцията

$$x(t,h) = x_0(t, c_r) + y(t,h)$$

и свеждаме задачата до намиране на ω-периодични решения $y(t) = y(t,h)$ на системата

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A(t)y(t) + H\left(t, x(t), x(t-h)\right), \quad t \neq t_i, \\ \Delta y(t_i) &= B_i y(t_i) + I_i\left(x(t_i), x(t_i - h)\right), \quad i \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{14}$$

такива че $y(t,h) \to 0$ при $h \to 0$. Формално разглеждаме (14) като нехомогенна система от вида (1). Тогава условието за разрешимост (4) приема вида

$$\begin{aligned} P_r^* X(\omega) \Bigg(\int_0^\omega X^{-1}(\tau) H\big(\tau, x(\tau,h), x(\tau-h,h)\big)\, d\tau \\ + \sum_{i=1}^m X^{-1}(t_i+0) I_i\big(x(t_i,h), x(t_i-h,h)\big) \Bigg) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Тъй като лявата страна на равенство (15) клони към 0 при $h \to 0$, разделяме я на h и след това извършваме граничен преход при $h \to 0$. Така получаваме необходимото условие

$$\begin{aligned} F(c_r) \quad & \equiv P_r^* X(\omega) \Bigg\{ \int_0^\omega X^{-1}(\tau) g\big(\tau, x_0(\tau,c_r), x_0(\tau,c_r)\big)\big(A(\tau)x_0(\tau,c_r) + f(\tau)\big)\, d\tau \\ & + \sum_{i=1}^m X^{-1}(t_i+0)\big[J_i\big(x_0(t_i,c_r), x_0(t_i,c_r)\big)\big(A(t_i)x_0(t_i,c_r) + f(t_i)\big) \\ & + g\big(t_i+0, (E+B_i)x_0(t_i,c_r) + a_i, x_0(t_i,c_r)\big)\big(B_i x_0(t_i,c_r) + a_i\big)\big]\Bigg\} = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

известно като *уравнение за пораждащите амплитуди* [3].

Нека c_r^* удовлетворява уравнение за пораждащите амплитуди. Ако

$$\det\left(\frac{\partial F(c_r)}{\partial c_r}\right)\Bigg|_{c_r=c_r^*} \neq 0$$

(критичен случай от първи ред), задачата се свежда до Фредхолмова операторна система от втори тип, към която може да се приложи сходящ прост итерационен метод. Ако

$$\det\left(\frac{\partial F(c_r)}{\partial c_r}\right)\Bigg|_{c_r=c_r^*} = 0,$$

при усилени условия за гладкост и допълнителни условия за съвместимост (критичен случай от втори ред), задачата се свежда до операторна система, към която може да се приложи сходящ прост итерационен метод.

Като приложение на тези резултати, за зависещ от възрастта модел с доминиращ възрастов клас се търси ω-периодичен режим на числеността на популацията посредством импулсни въздействия. Както в некритичния случай, така и в критичния случай от първи ред задачата се свежда до операторни системи, решими посредством сходящ прост итерационен метод.

Следният модел е описан в статиите на Т. Костова [6], Т. Костова и F. Milner [7]. За две фиксирани възрасти σ_1, σ_2, такива че $0 \le \sigma_1 < \sigma_2 < \infty$, се разглежда възрастовото разпределение $u(a,t)$ на популация, където a е възрастта и t времето, с динамика описана от следното интегродиференциално уравнение с възрастово гранично условие в интегрална форма

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial t} &= -\delta(a,Q)u(a,t), \qquad a,t > 0, \\ u(0,t) &= \int_0^\infty \beta(a,Q)u(a,t)\, da, \qquad t \ge 0, \\ u(a,0) &= u_0(a), \qquad\qquad a \ge 0, \end{aligned}$$

където

$$Q = Q(t) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} u(a,t)\, da$$

е числеността на доминиращия възрастов клас и $\delta(a,Q)$ и $\beta(a,Q)$ са съответно специфичните за възрастта смъртност и раждаемост, когато числеността на доминиращия възрастов клас е Q. Приема се, че δ, β и u_0 са неотрицателни, и че u_0 е интегруема (така че началната популация е крайна).

По-нататък, в [6,7] се разглежда частният случай

$$\beta(a,Q) = \begin{cases} \beta(Q), & a \in [\sigma_1, \sigma_2], \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Това означава, че доминиращият възрастов клас е единственият, способен да дава поколение, т.е. раждания са възможни единствено във възрастовия интервал $[\sigma_1, \sigma_2]$ и раждаемостта зависи само от числеността на доминиращия възрастов клас (а не от възрастта в групата). Освен това, $\beta(Q) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ и смъртността $\delta > 0$ се приема за постоянна. Тогава за числеността на цялата популация

$$P(t) = \int_0^\infty u(a,t)\, da$$

се получава уравнението

$$\dot{P} + \delta P = \beta(Q)Q, \tag{17}$$

където

$$Q(t) = P(t-\sigma_1)e^{-\sigma_1\delta} - P(t-\sigma_2)e^{-\sigma_2\delta} \ \text{ при } \ t > \sigma_2, \tag{18}$$

$$Q(t) = e^{-\delta t} \int_{\sigma_1 - t}^{\sigma_2 - t} u_0(a)\, da \ \text{ при } \ t \le \sigma_1,$$

докато при $\sigma_1 < t \le \sigma_2$ $Q(t)$ удовлетворява интегралното уравнение (приема се, че е еднозначно разрешимо)

$$e^{\delta t} Q(t) = \int_0^{t-\sigma_1} e^{\delta a} \beta\big(Q(a)\big) Q(a)\, da + \int_0^{\sigma_2 - t} u_0(a)\, da. \tag{19}$$

И така, при $t > \sigma_2$ $P(t)$ удовлетворява нелинейното скаларно уравнение със закъснение (17), където $Q(t)$ се дава от (18), докато при $t \in [0, \sigma_2]$ $Q(t)$ и евентуално $P(t)$ могат да се изразят чрез началната функция $u_0(a)$ на зависещия от възрастта модел:

$$P(t) = e^{-\delta t} \left[\int_0^\infty u_0(a)\, da + \int_0^t e^{\delta a} \beta\big(Q(a)\big) Q(a)\, da \right].$$

По такъв начин намираме началната функция $P_0(t), t \in [0, \sigma_2]$, на гореспоменатото уравнение със закъснение.

Фиксираме число $\omega > 0$ много по-голямо от възрастта σ_2 и се опитваме да получим ω-периодичен режим на числеността на популацията посредством импулсни въздействия при подходяща начална функция u_0. По-точно, да допуснем, че в дадени моменти t_i, такива че $t_{i+2} = t_i + \omega$ за всички цели i, числеността на популацията $P(t)$ се променя рязко, и приемаме, че уравнение (17) с (18) е валидно за всяко реално $t \ne t_i$. Нормализираме величините в уравнение (17) както следва:

$$s = \frac{t}{\omega}, \qquad \Pi(s) = P(\omega s), \quad D = \omega\delta, \quad B(Q) = \omega\beta(Q).$$

По-нататък ще пишем отново t, δ и β съответно вместо s, D и B, x вместо Π, и $h = \sigma_2/\omega$ ще бъде малкият параметър, докато за простота още по-малката величина

σ_1/ω се приема за равна на нула. Предполагаме, че времето между две последователни резки промени (импулсни въздействия) $t_{i+1} - t_i$ е голямо в сравнение с "възрастта" h за всички цели i, и търсим 1-периодични решения на задачата

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\delta x(t) + H\big(h, x(t), x(t-h)\big), & t \neq t_i, \\ \Delta x(t_i) = B_i x(t_i) + a_i, & i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{20}$$

където $H(h, x, \bar{x}) = \beta(Q)Q$, $Q = Q(h, x, \bar{x}) = x - \bar{x}e^{-h\delta}$, $0 < t_1 < t_2 < 1$.

Фундаменталното решение $X(t)$ на хомогенната система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\delta x(t), & t \neq t_i, \\ \Delta x(t_i) = B_i x(t_i), & i \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

е 1-периодично тогава и само тогава, когато

$$(1 + B_1)(1 + B_2) = e^{\delta}. \tag{21}$$

Ако условие (21) е нарушено, имаме работа с некритичния случай, можем да дефинираме функцията на Грийн $G(t, \tau)$ и 1-периодичното решение на система (20) трябва да удовлетворява

$$x(t) = \int_0^1 G(t, \tau) H\big(h, x(\tau), x(\tau - h)\big)\, d\tau + \sum_{i=1}^{2} G(t, t_i + 0) a_i.$$

За достатъчно малко h това уравнение е еднозначно разрешимо.

В критичния случай, когато условие (21) е в сила,

$$X(t) = \begin{cases} e^{-\delta t}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ (1 + B_1)e^{-\delta t}, & t_1 < t \leq t_2, \\ e^{\delta(1-t)}, & t_2 < t \leq 1, \end{cases}$$

и нехомогенната система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\delta x(t), & t \neq t_i, \\ \Delta x(t_i) = B_i x(t_i) + a_i, & i \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

има 1-параметрична фамилия от 1-периодични решения $x_0(t, c)$ тогава и само тогава, когато нехомогенностите a_1 и a_2 удовлетворяват

$$e^{\delta t_1} a_1 + e^{\delta(t_2 - 1)}(1 + B_1) a_2 = 0,$$

и

$$x_0(t, c) = \begin{cases} c e^{-\delta t}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ c(1 + B_1)e^{-\delta t} + a_1 e^{\delta(t_1 - t)}, & t_1 < t \leq t_2, \\ c e^{\delta(1-t)}, & t_2 < t \leq 1. \end{cases}$$

За уравнението за пораждащите амплитуди получаваме

$$e^{\delta t_1} \varphi_1(c) \beta\big(\varphi_1(c)\big) + e^{\delta(t_2 - 1)}(1 + B_1)\varphi_2(c)\beta\big(\varphi_2(c)\big) = 0, \tag{22}$$

където

$$\varphi_1(c) = B_1 e^{-\delta t_1} c + a_1, \quad \varphi_2(c) = B_2 e^{-\delta t_2}(1 + B_1)c + B_2 e^{\delta(t_1 - t_2)} a_1 + a_2.$$

На всеки прост реален корен c^* на уравнение (22) при достатъчно малко h (т.е., при σ_2 достатъчно малко в сравнение с ω) съответства 1-периодично решение на задача (20), клонящо към $x_0(t, c^*)$ при $h \to 0$, т.е., ω-периодично решение на уравнение (17).

Накрая, разглеждаме нелинейна гранична задача за импулсна система обикновени диференциални уравнения с концентрирани закъснения в общия случай, когато броят m на граничните условия не съвпада с реда n на системата, а именно,

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t) + H\big(t, x(t), y(t)\big), \quad t \in [a,b], \ t \neq t_i,\\
&\Delta x(t_i) = B_i x(t_i) + a_i + I_i\big(x(t_i), y(t_i)\big), \qquad\qquad i = \overline{1,p},\\
&x(t) = \varphi(t) \text{ при } t \in [a-\varepsilon_0, a],\\
&\ell x = \alpha + \varepsilon J(x, \varepsilon),
\end{aligned}$$

където $H(t,x,y) = \sum_{j=1}^{k} H_j\,(t,x,y)\big(x - y^j\big)$, $I_i(x,y) = \sum_{j=1}^{k} I_{ij}\,(x,y)\big(x - y^j\big)$, $y^j(t) = x\left(t - \varepsilon\omega^j(t)\right)$, $\omega^j\colon [a,b] \to [0,1]$, ε е малък параметър, и ℓ и $J(\cdot,\varepsilon)$ са съответно линеен и нелинеен по x m-мерни функционали.

Предполага се, че съответната гранична задача без закъснение е линейна и има r-параметрична фамилия решения. Извежда се уравнението за пораждащите амплитуди и са получени достатъчни условия за съществуване, и итерационен алгоритъм за построяване на решението на дадената задача в критичния случай от първи ред, ако закъсненията са достатъчно малки.

По-нататък разглеждаме система със закъснение, което се различава от константа (без ограничение на общността, единица) с малко периодично смущение:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f\left(t, x(t), x\big(t - 1 - \varepsilon\varphi(t)\big)\right), \quad t \neq t_i,\\
\Delta x(t_i) &= I_i\left(x(t_i), x\big(t_i - 1 - \varepsilon\varphi(t_i)\big)\right), \quad i \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Най-напред предполагаме, че функцията $\varphi(t)$ и системата с постоянно закъснение

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f\big(t, x(t), x(t-1)\big), \quad t \neq t_i,\\
\Delta x(t_i) &= I_i\big(x(t_i), x(t_i)\big), \qquad i \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{24}$$

имат един и същ период ω, а система (24) има ω-периодично решение $\psi(t)$. Дефинираме линеаризираната система относно $\psi(t)$:

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)z(t-1), \quad t \neq t_i, \tag{25}$$

$$\Delta z(t_i) = C_i z(t_i) + D_i z(t_i - 1), \qquad i \in \mathbb{Z}, \tag{26}$$

където

$$A(t) = \frac{\partial}{\partial x} f\big(t, x, \psi(t-1)\big)\Big|_{x=\psi(t)}, \quad D(t) = \frac{\partial}{\partial y} f(t, \psi(t), y)\Big|_{y=\psi(t-1)}$$

и

$$C_i = \frac{\partial}{\partial x} I_i\big(x, \psi(t_i - 1)\big)\Big|_{x=\psi(t_i)}, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial y} I_i(\psi(t_i), y)\Big|_{y=\psi(t_i-1)}.$$

Да означим с $X(t)$ фундаменталното решение на система (25). Ако матриците $(E + C_i)X(t_i) + D_i X(t_i)$ са неособени за $t_i \in (0,\omega)$ и система (25), (26) няма нетривиални ω-периодични решения, като в [10] можем да дефинираме функцията на Грийн $G(t,\tau)$ за периодичната задача за нехомогенна система, съответстваща на (25), (26).

При направените предположения във всяка достатъчно малка околност на орбитата $x = \psi(t)$ система (23) има единствено ω-периодично решение. За да покажем това, в система (23) сменяме неизвестната функция по формулата

$$x = \psi(t) + y \tag{27}$$

и получаваме системата

$$
\begin{aligned}
\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)z(t-1) + Q\big(t, z(t), z(t-1)\big) \\
+\delta f\left(t, x(t), x\big(t-1-\varepsilon\varphi(t)\big)\right), \quad t \neq t_i, \\
\Delta z(t_i) = C_i z(t_i) + D_i z(t_i - 1) + J_i\big(z(t_i), z(t_i - 1)\big) \\
+\delta I_i\left(x(t_i), x\big(t_i - 1 - \varepsilon\varphi(t_i)\big)\right), \quad i \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{28}
$$

където $Q\big(t, z(t), z(t-1)\big)$ и $J_i\big(z(t_i), z(t_i-1)\big)$ са нелинейности, присъщи на пораждащата система (24), докато

$$
\delta f\left(t, x(t), x\big(t-1-\varepsilon\varphi(t)\big)\right) \equiv f\left(t, x(t), x\big(t-1-\varepsilon\varphi(t)\big)\right) - f\big(t, x(t), x(t-1)\big),
$$

$$
\delta I_i\left(x(t_i), x\big(t_i-1-\varepsilon\varphi(t_i)\big)\right) \equiv I_i\left(x(t_i), x\big(t_i-1-\varepsilon\varphi(t_i)\big)\right) - I_i\big(x(t_i), x(t_i-1)\big)
$$

са нехомогенности, дължащи се на флуктуацията на закъснението.

Формално разглеждаме (28) като нехомогенна система със съответна хомогенна система (25), (26). Тогава нейното единствено ω-периодично решение $z(t)$ трябва да удовлетворява операторното уравнение

$$
z = U_\varepsilon z, \tag{29}
$$

където операторът U_ε се задава от равенствата

$$
\begin{aligned}
U_\varepsilon z(t) \quad \equiv & \int_0^\omega G(t,\tau) Q\big(\tau, z(\tau), z(\tau-1)\big)\, d\tau \\
& + \int_0^\omega G(t,\tau)\delta f\left(\tau, x(\tau), x\big(\tau-1-\varepsilon\varphi(\tau)\big)\right)\, d\tau \\
& + \sum_{i=1}^{m} G(t, t_i+0) J_i\big(z(t_i), z(t_i-1)\big) \\
& + \sum_{i=1}^{m} G(t, t_i+0)\delta I_i\left(x(t_i), x\big(t_i-1-\varepsilon\varphi(t_i)\big)\right)
\end{aligned}
$$

и (27).

ω-периодично решение $x(t) = x(t, \varepsilon)$ на система (23) съответства на неподвижна точка z на оператора U_ε в подходящо избрано множество от ω-периодични функции. За $\mu > 0$ означаваме с T_μ множеството от ω-периодични функции с точки на прекъсване от първи вид в $\{t_i\}$ и норма, ненадхвърляща μ, и намираме зависимост между ε и μ, така че операторът U_ε е свиващо изображение в T_μ.

Сега да допуснем, че системата с постоянно закъснение (24) е ω-периодична и има ω-периодично решение $\psi(t)$, а функцията $\varphi(t)$ е ω_1-периодична, където ω_1/ω е ирационално. Освен това предполагаме, че матриците

$$
\frac{\partial}{\partial y} f(t, \psi(t), y)\Big|_{y=\psi(t-1)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y} I_i(\psi(t_i), y)\Big|_{y=\psi(t_i-1)}
$$

са нулеви. Последното условие е от технически характер. То позволява да се приложи теорията на Флоке, приспособена за импулсни системи в [10]. В противен случай, би трябвало да приспособим спектралните разлагания, дадени в [5], за импулсни системи и да ги приложим в нашия случай.

Дефинираме линеаризираната система относно $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A(t)z(t), \quad t \neq t_i, \\ \Delta z(t_i) &= B_i z(t_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{30}$$

където

$$A(t) = \frac{\partial}{\partial x} f\big(t, x, \psi(t-1)\big)\Big|_{x=\psi(t)}, \quad C_i = \frac{\partial}{\partial x} I_i\big(x, \psi(t_i - 1)\big)\Big|_{x=\psi(t_i)}.$$

Да означим с $X(t)$ фундаменталното решение на система (30),

$$\Lambda = \frac{1}{\omega} \ln X(\omega), \quad \Phi(t) = X(t)e^{-\Lambda t}$$

и да допуснем, че матрицата Λ няма собствени стойности с нулева реална част и че матриците $E + B_i$, $i \in \mathbb{Z}$, са неособени. При направените предположения за достатъчно малко ε система (23) има единствено почти периодично решение $x(t, \varepsilon)$ зависещо непрекъснато от ε и такова, че $x(t, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Посредством субституцията (27) получаваме системата

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t) = A(t)z(t) + Q\big(t, z(t), z(t-1)\big) + \delta f\Big(t, x(t), x\big(t - 1 - \varepsilon\varphi(t)\big)\Big), \quad t \neq t_i, \\ &\Delta z(t_i) = B_i z(t_i) + J_i\big(z(t_i), z(t_i - 1)\big) + \delta I_i\Big(x(t_i), x\big(t_i - 1 - \varepsilon\varphi(t_i)\big)\Big), \quad i \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{31}$$

Формално разглеждаме (31) като нехомогенна система от вида (1). Тъй като ω_1/ω е ирационално, нехомогенностите са почти периодични, ако $z(t)$ е почти периодична. Тогава нейното единствено почти периодично решение $z(t)$ трябва да удовлетворява операторното уравнение

$$z = U_\varepsilon z, \tag{32}$$

където

$$\begin{aligned} U_\varepsilon z(t) \quad \equiv &\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)G(t-\tau)\Phi^{-1}(\tau)Q\big(\tau, z(\tau), z(\tau-1)\big)\,d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)G(t-\tau)\Phi^{-1}(\tau)\delta f\Big(\tau, x(\tau), x\big(\tau - 1 - \varepsilon\varphi(\tau)\big)\Big)\,d\tau \\ &+ \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Phi(t)G(t-t_i)\,\Phi^{-1}(t_i)J_i\big(z(t_i), z(t_i - 1)\big) \\ &+ \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Phi(t)G(t-t_i)\,\Phi^{-1}(t_i)\delta I_i\Big(x(t_i), x\big(t_i - 1 - \varepsilon\varphi(t_i)\big)\Big). \end{aligned}$$

Почти периодично решение $x(t) = x(t, \varepsilon)$ на система (23) съответства на неподвижна точка z на оператора U_ε в подходящо множество от почти периодични функции. За тази цел показваме, че U_ε е свиващо изображение в подходящо избрано множество.

Горните резултати са обобщени за случая на неутрална импулсна система с малко закъснение на аргумента на производната и друго закъснение, което се различава от константа с малко периодично смущение.

В началото на Глава трета са дадени някои сведения за невронните мрежи. След това изучаваме устойчивостта на неподвижни точки на непрекъснати невронни мрежи. Да разгледаме системата от тип на Hopfield

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} g_j\left(x_j\left(t-\tau_{ij}\right)\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} h_j\left(\int_0^\infty K_{ij}(s) x_j(t-s)\,ds\right) + I_i,\ \ t>0,\ \ t \neq t_k,\end{aligned} \tag{33}$$

$$\Delta x_i(t_k) = -B_{ik} x_i(t_k) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi_{ik}(s) x_i(s)\,ds + \gamma_{ik},\ \ i=\overline{1,m},\ \ k\epsilon\mathbb{N}. \tag{34}$$

Предполагаме, че активационните функции f_j, g_j, h_j удовлетворяват глобално условието на Липшиц с константи съответно F_j, G_j, H_j, $j=\overline{1,m}$, $K_{ij}(s) \geq 0$, $\int_0^\infty K_{ij}(s)\,ds = 1$ и съществува $\mu > 0$, такова че $\int_0^\infty K_{ij}(s) e^{\mu s}\,ds < \infty$, и че са валидни следните неравенства:

$$a_i - F_i \sum_{j=1}^{m} \left|b_{ji}\right| - G_i \sum_{j=1}^{m} \left|c_{ji}\right| - H_i \sum_{j=1}^{m} \left|d_{ji}\right| > 0,\ \ i=\overline{1,m}. \tag{35}$$

Ако x^* е точка на равновесие на импулсната система (33), (34), то нейните компоненти удовлетворяват алгебричната система

$$a_i x_i^* = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j\left(x_j^*\right) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} g_j\left(x_j^*\right) + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} h_j\left(x_j^*\right) + I_i,\ \ i=\overline{1,m}, \tag{36}$$

и линейните уравнения

$$\left(-B_{ik} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi_{ik}(s)\,ds\right) x_i^* + \gamma_{ik},\quad i=\overline{1,m},\quad k\epsilon\mathbb{N}.$$

Ако условия (35) са изпълнени, система (36) има единствено решение, т.е. системата без импулси (33) има единствено положение на равновесие. Доказателството се извършва с помощта на принципа на свиващото изображение.

Сега да допуснем, че система (33), (34) има точка на равновесие x^* и удовлетворява гореизброените условия. Тогава съществуват константи $M > 1$ и $\lambda \in (0, \mu)$, такива че всички решения $x(t)$ на система (34), (35) удовлетворяват оценката

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \left|x_i(t) - x_i^*\right| &\leq M e^{-\lambda t} \prod_{k=1}^{i(0,t)} \left\{ \max_{i=\overline{1,m}} \left|1 - B_{ik}\right| + \max_{i=1,m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left|\psi_{ik}(s)\right| e^{\lambda(t_k - s)} ds \right\} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^{m} \sup_{s\in(-\infty,0]} \left|x_i(s) - x_i^*\right| \text{ за всяко } \quad t>0,\end{aligned} \tag{37}$$

където $i(0,t) = \max\{k \in \{0\} \cup \mathbb{N} : t_k < t\}$ е броят на моментите на импулсно въздействие t_k в интервала $(0,t)$.

За да докажем оценка (37), последователно въвеждаме величините

$$y_i(t) = \left|x_i(t) - x_i^*\right| e^{\lambda t},\ \ t \geq 0,\ \ \lambda > 0,\ \ i=\overline{1,m},$$

функционала на Ляпунов

$$
\begin{aligned}
V(t) \quad &= \sum_{i=1}^{m} \left\{ y_i(t) + \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}| G_j e^{\lambda \tau_{ij}} \int_{t-\tau_{ij}}^{t} y_j(s)\, ds \right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^{m} |d_{ij}| H_j \int_0^{\infty} K_{ij}(s) e^{\lambda s} \left(\int_{t-s}^{t} y_j(\sigma)\, d\sigma \right) ds \right\}, \quad t \geq 0,
\end{aligned}
$$

и намираме, че съществува $\lambda^* > 0$ такава че за всяко $\lambda \in (0, \lambda^*)$ скоростта на изменение на $V(t)$ по протежение на коя да е траектория на (33) е неположителна.

В три частни случаи показваме, че от оценка (37) следва глобална експоненциална устойчивост на положението на равновесие x^*:

1) Съществува $\lambda \in (0, \lambda^*)$, такова че
$$
\max_{i=\overline{1,m}} |1 - B_{ik}| + \max_{i=\overline{1,m}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\psi_{ik}(s)| e^{\lambda(t_k - s)} ds \leq 1
$$
за всяко достатъчно голямо естествено k.

2) Нека
$$
\lim_{t \to 0} \sup \frac{i(0,t)}{t} = p < \infty
$$
и съществуват положителни константи $\lambda \in (0, \lambda^*)$ и B, удовлетворяващи неравенствата
$$
\max_{i=\overline{1,m}} |1 - B_{ik}| + \max_{i=\overline{1,m}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\psi_{ik}(s)| e^{\lambda(t_k - s)} ds \leq B
$$
за всяко достатъчно голямо естествено k и $p \ln B < \lambda$.

3) Съществуват константи $\lambda \in (0, \lambda^*)$ и $\kappa \in (0, \lambda)$, такива че
$$
\max_{i=\overline{1,m}} |1 - B_{ik}| + \max_{i=\overline{1,m}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\psi_{ik}(s)| e^{\lambda(t_k - s)} ds \leq e^{\kappa(t_k - t_{k-1})}
$$
за всяко достатъчно голямо естествено k.

В първия случай глобалната експоненциална устойчивост се осигурява от относително малките величини на импулсните въздействия. Във втория и третия случай можем да имаме глобална експоненциална устойчивост при достатъчно големи и даже неограничени величини на импулсните въздействия, ако последните не се случват твърде често.

По-нататък разглеждаме невронни мрежи на Cohen-Grossberg с крайни разпределени закъснения от S–тип (зададени посредством Лебег-Стилтесови интеграли):

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) \quad &= a_i(x_i(t)) \left[-b_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) \right. \qquad (38) \\
&\left. + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} \int_{-\tau}^{0} g_j\left(x_j(t+\theta)\right) d\eta_{ij}(\theta) + I_i \right], \quad t > 0, \ t \neq t_k, \\
\Delta x_i(t_k) \quad &= -B_{ik} x_i(t_k) + \int_{-\tau}^{0} x_i(t_k + \theta)\, d\zeta_k + \gamma_{ik}, \ i = \overline{1,m}, \ k \epsilon \mathbb{N}. \qquad (39)
\end{aligned}
$$

Предполагаме, че активационните функции f_j, g_j удовлетворяват глобално условието на Липшиц с константи съответно F_j, G_j, $j = \overline{1,m}$, усилващите функции a_i и стабилизиращите функции b_i удовлетворяват съответно неравенствата

$$0 < \underline{a}_i \leq a_i(x) \leq \overline{a}_i \text{ и } \; 0 \leq \underline{b}_i \leq \frac{b_i(x) - b_i(y)}{x - y}, \; i = \overline{1,m},$$

и $\int_{-\tau}^{0} d\eta_{ij}(\theta) = 1$. Ако x^* е точка на равновесие на импулсната система (38), (39), то нейните компоненти удовлетворяват алгебричната система

$$b_i(x_i^*) = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} f_j\left(x_j^*\right) + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} g_j\left(x_j^*\right) + I_i, \; i = \overline{1,m},$$

и линейните уравнения

$$(-B_{ik} + \beta_k) x_i^* + \gamma_{ik}, \quad i = \overline{1,m}, \quad k \epsilon \mathbb{N}.$$

Ако са в сила неравенствата

$$\underline{b}_i - F_i \sum_{j=1}^{m} \left|c_{ji}\right| - G_i \sum_{j=1}^{m} \left|d_{ji}\right| > 0, \; i = \overline{1,m},$$

то системата без импулси (38) има единствена точка на равновесие x^*.

Ако са изпълнени неравенствата

$$\underline{a}_i \underline{b}_i - F_i \sum_{j=1}^{m} \left|c_{ji}\right| \overline{a}_j - G_i \sum_{j=1}^{m} \left|d_{ji}\right| \overline{a}_j > 0, \; i = \overline{1,m},$$

и системата с импулси (38), (39) има единствена точка на равновесие x^*, то съществуват константи $M > 1$ и $\lambda > 0$ такива че всички решения $x(t)$ на система (38), (39) удовлетворяват оценката

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} |x_i(t) - x_i^*| \quad &\leq M e^{-\lambda t} \prod_{k=1}^{i(0,t)} \left\{ \max_{\underline{i = 1,m}} |1 - B_{ik}| + \int_{-\tau}^{0} e^{-\lambda\theta} \, d\zeta_k(\theta) \right\} \\ &\times \sum_{i=1}^{m} \sup_{s \in (-\infty, 0]} |x_i(s) - x_i^*| \text{ за всяко } \quad t > 0. \end{aligned} \tag{40}$$

В три частни случая, аналогични на изброените по-горе 1) – 3), от оценка (40) следва глобална експоненциална устойчивост на положението на равновесие x^*. Приведен е пример на система, удовлетворяваща горните условия, и импулсни въздействия, попадащи в съответните три частни случая.

По-нататък разглеждаме импулсна невронна мрежа на Cohen-Grossberg с безкрайни разпределени закъснения от S–тип и закъснения, зависещи от времето, с реакционно-дифузионни членове от общ вид и нулево условие на Дирихле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} \quad &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(D_{i\nu}(t,x,u) \frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x_\nu} \right) + \alpha_i\big(u_i(t,x)\big)\big[-\beta_i\big(u_i(t,x)\big) \\ &+ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j\left(u_j(t,x)\right) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} g_j\left(u_j\big(t - \tau_{ij}(t), x\big)\right) \end{aligned} \tag{41}$$

$$+\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\int_{-\infty}^{0} h_j\Big(u_j(t+\theta,x)\Big)\ d\eta_{ij}(\theta)+J_i\Bigg],\ \ t>0,\ \ t\neq t_k,$$

$$\Delta u_i(t_k,x)\ \ = -B_{ik}u_i(t_k,x)+\int_{t_{k-1}-t_k}^{0} u_i(t_k+\theta,x)\ d\zeta_{ik}(\theta),\ \ k\in\mathbb{N}, \qquad (42)$$

$$u_i|_{\partial\Omega}=0,\quad u_i(s,x)=\phi_i(s,x),\quad s\leq 0,\ \ x\in\Omega,\ \ i=\overline{1,m},$$

където $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geq 3)$ е ограничено отворено множество, съдържащо началото, с положителна мярка и гладка граница $\partial\Omega$, усилващите функции α_i, стабилизиращите функции β_i и активационните функции f_i,g_i,h_i удовлетворяват неравенства като по-горе, $D_{i\nu}(t,x,u)\geq \underline{D_i}$, зависещите от времето закъснения $\tau_{ij}(t)$ удовлетворяват $0\leq\tau_{ij}(t)\leq\tau_{ij},\ \ 0\leq\dot{\tau}_{ij}(t)\leq\mu_{ij}<1$, Стилтесовите интеграли

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda\theta}\ d\eta_{ij}(\theta)=K_{ij}(\lambda)$$

са непрекъснати функции за $\lambda\epsilon[0,\lambda_0)$ и $K_{ij}(0)=1$, началните данни $\phi(s,x)$ са такива, че

$$\sup_{s\leq 0}\sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega}\ \phi_i^2(s,x)\ ds<\infty,$$

а положителните константи ω и R_Ω са такива, че за $x\in\Omega$ имаме

$$|x|^2=\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2<\omega^2 \text{ и }\ \ \mathrm{mes}\,\{x\in\mathbb{R}^n\colon |x|<R_\Omega\}=\mathrm{mes}\,\Omega.$$

Поради нулевото условие на Дирихле единственото възможно равновесно положение на система (41) е началото. То наистина е такова тогава и само тогава, когато

$$\beta_i(0)=\sum_{j=1}^{m}\Big(a_{ij}f_j(0)+b_{ij}g_j(0)+c_{ij}h_j(0)\Big)+J_i,\ \ i=\overline{1,m}. \qquad (43)$$

Означаваме още

$$\|u_i(t,\cdot)\|=\left(\int_{\Omega}\ u_i^2(t,x)\ dx\right)^{1/2}$$

и нека $\Lambda_2=5.783\,...$ е първата собствена стойност на задачата на Дирихле за двумерния лапласиан в единичния кръг. Нашият основен резултат е следният:

Ако система (41), (42) удовлетворява горните условия и (43), и съществуват вектор $\xi\in\mathbb{R}^m$ с положителни компоненти и число $\lambda\in(0,\lambda_0)$, такива че

$$\sum_{i=1}^{m}\Bigg\{\Bigg[\lambda-\left(\frac{(n-2)^2}{4\omega^2}+\frac{\Lambda_2}{R_\Omega^2}\right)\underline{D_i}-\underline{\alpha_i}\underline{\beta_i}\Bigg]\delta_{ij}$$

$$+\overline{\alpha}_i\left[|a_{ij}|F_j+|b_{ij}|G_j\frac{e^{\lambda\tau_{ij}}}{1-\mu_{ij}}+|c_{ij}|H_jK_{ij}(\lambda)\right]\Bigg\}\xi_i<0,\ \ j=\overline{1,m},$$

където δ_{ij} е символът на Кронекер, то съществува константа $M\geq 1$, такава че за всяко решение $u(x,t)$ на система (41), (42) имаме

$$\sum_{i=1}^{m}\|u_i(t,\cdot)\| \quad \le Me^{-\lambda t}\prod_{k=1}^{i(0,t)}\left(\max_{i=1,m}|1-B_{ik}|+\max_{i=1,m}\int_{t_{k-1}-t_k}^{0}e^{-\lambda\theta}\,d\zeta_{ik}(\theta)\right) \times \sup_{s\le 0}\sum_{i=1}^{m}\|u_i(s,\cdot)\|,\ \ t\ge 0. \tag{44}$$

Доказателството използва теоремата на Грийн, нулевото гранично условие на Дирихле и неравенството на Hardy-Poincaré: За $u\in H_0^1(\Omega)$ имаме

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \ge \left(\frac{n-2}{2}\right)^2\int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x|^2}\,dx+\frac{\Lambda_2}{R_\Omega^2}\int_\Omega u^2(x)\,dx.$$

При три системи от допълнителни предположения за импулсните въздействия (подобни на случаи 1) - 3)) от оценка (44) следва глобална асимптотична устойчивост на равновесното положение 0 на импулсната система (41), (42).

Накрая разглеждаме следната невронна мрежа със зависещи от времето закъснения и импулси

$$\dot u_i(t) \quad = -a_i\big(u_i(t)\big)+\sum_{j=1}^{n}w_{ij}f_j\left(u_j(t)\right)+\sum_{j=1}^{n}v_{ij}g_j\left(u_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right)\right)+I_i, \quad t>t_0,\ \ t\ne t_k,\ \ i=\overline{1,n}, \tag{45}$$

$$u_i(t_k+0)=J_{ik}\big(u_i(t_k)\big),\ \ i=\overline{1,n},\ \ k\in\mathbb{N},$$

която в известен смисъл е по-обща от невронните мрежи на Cohen-Grossberg. Предполагаме, че функциите a_i са непрекъснати и удовлетворяват неравенствата

$$(x_1-x_2)[a_i(x_1)-a_i(x_2)]\ge\lambda_i(x_1-x_2)^2,$$

активационните функции f_i и g_i са непрекъснати и монотонно растящи, закъсненията $\tau_{ij}(t)$ удовлетворяват $0\le\tau_{ij}(t)\le b$, импулсните функции J_{ik} са монотонно растящи и броят $i(t_0,t)$ на моментите на импулсно въздействие между t_0 и t удовлетворява

$$\lim_{t\to 0}\sup\frac{i(t_0,t)}{t}=p<\infty.$$

По-нататък адаптираме подхода, изложен в [11,12], към импулсни системи.

Въвеждаме следните означения. Нека $\|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$. Ако $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ и $x^0\in\Omega$, то *минималната Липшицова константа на* f *относно* x^0 се дефинира с

$$L_\Omega(f,x^0)=\inf\{\alpha>0: \|f(x)-f(x^0)\|\le\alpha\|x-x^0\|,\ \ x\in\Omega\}.$$

Константата

$$m_\Omega(f,x^0)=\sup_{x\in\Omega\setminus\{x^0\}}\frac{\langle f(x)-f(x^0),\operatorname{sgn}(x-x^0)\rangle}{\|x-x^0\|}$$

се нарича *релативна (относителна) нелинейна мярка на* f *относно* x^0. Ако компонентите на f са монотонно растящи, то

$$m_\Omega(f,x^0)=\sup_{x\in\Omega\setminus\{x^0\}}\frac{\|f(x)-f(x^0)\|}{\|x-x^0\|}.$$

Нека u^* е равновесно положение на система (45). Да означим

$$d=\sup_{k\in\mathbb{N}}m_\Omega(J_k,u^*),\quad D=\max\left\{\sup_{k\in\mathbb{N}}m_\Omega(J_k^{-1},u^*)\,,1\right\},\quad \nu=\sup_{t>t_0}\big(i(t_0,t)-i(t_0,t-b)\big).$$

Нека Ω е околност на u^*. Да означим с Ω_i проекцията на Ω върху i-тата ос в $\mathbb{R}^n$, $m_i = m_{\Omega_i}(f_i, u_i^*)$, $M_i = m_{\Omega_i}(g_i, u_i^*)$. Ако r_i са положителни числа, такива че

$$\max_{i=\overline{1,n}} \frac{1}{\lambda_i} \left\{ m_i \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{r_i} |w_{ji}| + D^\nu M_i \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{r_i} |v_{ji}| \right\} < 1,$$

то точката на равновесие на система (45) е единствена. По-нататък, да допуснем, че единственото положително решение λ на уравнението

$$\lambda \min_{i=\overline{1,n}} \frac{1}{p_i} - 1 + D^\nu q e^{\lambda b} = 0$$

с

$$p_i = \lambda_i - m_i \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{r_i} |w_{ji}| \quad \text{и} \quad q = \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{M_i}{p_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{r_i} |v_{ji}| \right\}$$

удовлетворява $d < e^{\lambda/p}$. Ако $u(t)$ е решение на система (45) с начално условие $u_0(s) \in \Omega$ при $s \in [t_0 - b, t_0]$, то

$$\|u(t) - u^*\| \leq M e^{-\tilde{\lambda}(t-t_0)} \frac{\max_{i=\overline{1,n}} r_i}{\min_{i=\overline{1,n}} r_i} \sup_{s\epsilon[t_0-b,t_0]} \|u_0(s) - u^*\|,$$

където $\tilde{\lambda} \in (0, \lambda - p \ln d)$.

По-нататък в Глава трета се формулират дискретни аналози на някои непрекъснати импулсни невронни мрежи и се изследва устойчивостта на техни положения на равновесие или периодични решения. Да разгледаме отново (33), (34). Нека $h > 0$ е дискретизационна стъпка и $[t/h]$ означава цялата част на t/h. За удобство означаваме $[t/h] = n, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и пишем $x_i(n)$ вместо $x_i(nh)$. Заменяме интегралите $\int_0^\infty K_{ij}(s) x_j(t-s) ds$ със суми от вида $\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{K}_{ij}(p) x_j(n-p)$, където $\mathrm{K}_{ij}(p) \geq 0$, $\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{K}_{ij}(p) = 1$ и съществува $\nu > 1$, такова че $\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{K}_{ij}(p) \nu^p < \infty$. След това, в интервала $[nh, (n+1)h)$ апроксимираме система (33) с

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(s) \quad &= -a_i x_i(s) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j\left(x_j(n)\right) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} g_j\left(x_j(n - \kappa_{ij})\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{m} d_{ij} h_j \left(\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{K}_{ij}(p) x_j(n-p) \right) + I_i, \quad i = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{46}$$

Умножаваме двете страни на уравнение (46) по $e^{a_i s}$ и го записваме във вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(x_i(s) e^{a_i s}) \quad &= e^{a_i s} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j\left(x_j(n)\right) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} g_j\left(x_j(n - \kappa_{ij})\right) \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} h_j \left(\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{K}_{ij}(p) x_j(n-p) \right) + I_i \right), \quad i = \overline{1,m}. \end{aligned}$$

Интегрираме последното уравнение върху интервала $[nh, (n+1)h]$ и получаваме

$$x_i(n+1)e^{a_i(n+1)h} - x_i(n)e^{a_i nh} = \frac{e^{a_i(n+1)h} - e^{a_i nh}}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j\left(x_j(n)\right)\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} g_j\left(x_j(n-\kappa_{ij})\right) + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} h_j\left(\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{K}_{ij}(p) x_j(n-p)\right) + I_i\right)$$

или

$$x_i(n+1) \quad = e^{-a_i h} x_i(n) + \phi_i(h)\left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j\left(x_j(n)\right) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} g_j\left(x_j(n-\kappa_{ij})\right)\right. \quad (47)$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} h_j\left(\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{K}_{ij}(p) x_j(n-p)\right) + I_i\right), \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \qquad i = \overline{1,m},$$

където величините $\phi_i(h) = \frac{1-e^{-a_i h}}{a_i}$ са положителни. Очевидно системи (33) и (47) имат едни и същи точки на равновесие.

Означаваме $[t_k/h] = n_k$ и апроксимираме импулсните условия (34) с

$$x_i(n_k^+) - x_i(n_k) = \sum_{\ell=n_{k-1}+1}^{n_k} B_{ik\ell} x_i(\ell) + \gamma_{ik}, \quad i = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad (48)$$

където за удобство $n_0 = -1$ и $B_{ik\ell}$ са подходящо избрани константи.

За да гарантираме, че системите (33), (34) и (47), (48) имат едни и същи точки на равновесие, избираме константите $B_{ik\ell}$, така че

$$\sum_{\ell=n_{k-1}+1}^{n_k} B_{ik\ell} = -B_{ik} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi_{ik}(s)\, ds\,, \quad i = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ако са изпълнени горните условия, то съществуват константи $M > 1$ и $\lambda \in (1,\nu)$, такива че за всяко решение $x(n)$ на система (47), (48) е валидна оценката

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{|x_i(n) - x_i^*|}{\phi_i(h)} \le M\lambda^{-n} \prod_{k=1}^{i(1,n)} B_k(\lambda) \sum_{i=1}^{m} \sup_{\ell \in \{0\} \cup \mathbb{N}} \frac{|x_i(-\ell) - x_i^*|}{\phi_i(h)}\,, \qquad (49)$$

където

$$i(1,n) = \begin{cases} 0, & n \le n_1, \\ \max\{k \in \mathbb{N} : n_k < n\}, & n > n_1, \end{cases}$$

и

$$B_k(\lambda) = \max_{i=\overline{1,m}} \left|1 + B_{ikn_k}\right| + \sum_{\ell=n_{k-1}+1}^{n_k} \max_{i=\overline{1,m}} |B_{ik\ell}| \lambda^{n_k-\ell}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

В три частни случая от оценка (49) следва глобална експоненциална устойчивост на точката на равновесие x^*на система (47), (48):

4) Съществува $\lambda \in (1,\nu)$, такова че $B_k(\lambda) \le 1$ за всяко достатъчно голямо естествено число k.
5) Нека

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{i(1,n)}{n} = p < \infty$$
и съществуват константи $\lambda \in (1, \nu)$ и B, такива че $B_k(\lambda) \le B$ за всяко достатъчно голямо естествено число k и $B^p < \lambda$.

6) Съществуват $\lambda \in (1, \nu)$ и $\mu \in (1, \lambda)$, такива че $B_k(\lambda) \le \mu^{n_k - n_{k-1}}$ за всяко достатъчно голямо естествено число k.

По-нататък разглеждаме невронна мрежа на Cohen-Grossberg

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) \quad &= a_i\big(x_i(t)\big)\left[-b_i\big(x_i(t)\big) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} f_j\left(x_j(t-\tau_{ij})\right)\right. \qquad (50) \\ &\left. + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} \int_0^\infty K_{ij}(s) g_j\left(x_j(t-s)\right) ds + I_i\right], \quad t > t_0, \ \ t \ne t_k, \\ &\Delta x_i(t_k) = r_{ik}\big(x_i(t_k)\big), \quad i = \overline{1,m}, \ \ k \epsilon \mathbb{N}, \end{aligned}$$

удовлетворяваща условия, подобни на тези за система (38), като $\int_0^\infty K_{ij}(s)\, ds = 1$ и съществува $\nu_0 > 0$,такова че $\int_0^\infty K_{ij}(s) e^{\nu_0 s}\, ds < \infty$. Компонентите на всяка точка на равновесие за система (50) трябва да удовлетворяват алгебричната система

$$b_i(x_i^*) = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} f_j\big(x_j^*\big) + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} \kappa_{ij} g_j\big(x_j^*\big) + I_i, \ \ i = \overline{1,m}, \qquad (51)$$

За да приложим изложения по-горе метод на семи-дискретизация към система (50), апроксимираме i-тото диференциално уравнение на интервала $[nh, (n+1)h)$ с

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + \Bigg\{ &\beta_i x_i(n) + a_i\big(x_i(n)\big)\left[-b_i\big(x_i(n)\big) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} f_j\left(x_j(n-\sigma_{ij})\right)\right. \\ &\left.\left. + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{K}_{ij}(\ell) g_j\left(x_j(n-\ell)\right) + I_i\right]\right\}. \end{aligned} \qquad (52)$$

Като по-горе, от (52) получаваме дискретните уравнения

$$\begin{aligned} x_i(n+1) \quad &= e^{-\beta_i h} x_i(n) + \phi_i(h)\big\{\beta_i x_i(n) + a_i\big(x_i(n)\big)\big[-b_i\big(x_i(n)\big) \qquad (53) \\ &+ \sum_{j=1}^{m} c_{ij} f_j\left(x_j(n-\sigma_{ij})\right) + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{K}_{ij}(\ell) g_j\left(x_j(n-\ell)\right) + I_i\Big]\Big\}. \end{aligned}$$

Импулсните въздействия се апроксимират с

$$x_i(n_k^+) = x_i(n_k) + r_{ik}\big(x_i(n_k)\big), \quad i = \overline{1,m}, \quad k \epsilon \mathbb{N}. \qquad (54)$$

Въвеждаме матриците

$$B_0 = \mathrm{diag}\big(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\big), \quad C_0 = \big(|c_{ij}|\big)_{m\times m}, \quad D_0 = \big(|d_{ij}|\kappa_{ij}\big)_{m\times m},$$

$$C_0^* = \operatorname{diag}\left(\sum_{j=1}^{m} |c_{1j}| F_j, \dots, \sum_{j=1}^{m} |c_{mj}| F_j\right),$$
$$D_0^* = \operatorname{diag}\left(\sum_{j=1}^{m} |d_{1j}| \kappa_{1j} G_j, \dots, \sum_{j=1}^{m} |d_{mj}| \kappa_{mj} G_j\right),$$
$$F = \operatorname{diag}(F_1, \dots, F_m), \quad G = \operatorname{diag}(G_1, \dots, G_m).$$
Нека $p \geq 1$. Ако
$$\Xi_0 = B_0 - \frac{p-1}{p}(C_0^* + D_0^*) - \frac{1}{p}(C_0 F + D_0 G)$$
е M-матрица, то алгебричната система (51) има единствено решение x^*.

По-нататък въвеждаме матриците
$$B_1 = \operatorname{diag}(\underline{a}_m \underline{b}_1, \dots, \underline{a}_m \underline{b}_m), \quad C_1 = \left(\overline{a}_i |c_{ij}|\right)_{m \times m}, \quad D_1 = \left(\overline{a}_i |d_{ij}| \kappa_{ij}\right)_{m \times m},$$
$$C_1^* = \operatorname{diag}\left(\overline{a}_1 \sum_{j=1}^{m} |c_{1j}| F_j, \dots, \overline{a}_m \sum_{j=1}^{m} |c_{mj}| F_j\right),$$
$$D_1^* = \operatorname{diag}\left(\overline{a}_1 \sum_{j=1}^{m} |d_{1j}| \kappa_{1j} G_j, \dots, \overline{a}_m \sum_{j=1}^{m} |d_{mj}| \kappa_{mj} G_j\right).$$
Да допуснем, че
$$\Xi_1 = B_1 - \frac{p-1}{p}(C_1^* + D_1^*) - \frac{1}{p}(C_1 F + D_1 G)$$
е M-матрица и съществуват положителни числа $\Lambda > 1$ и μ, удовлетворяващи $\frac{\ln \Lambda}{\theta} < \mu < \nu$, за които $1 + \gamma_{ik} \leq \Lambda$ за $i = \overline{1,m}, k \epsilon \mathbb{N}$. Тогава съществува константа $M \geq 1$, такава че всяко решение $x(n)$ на система (53), (54) удовлетворява оценката
$$\left[\sum_{i=1}^{m} |x_i(n) - x_i^*|\right]^{1/p} \leq M e^{-\left(\mu - \frac{\ln \Lambda}{\theta}\right) h(n-n_0)} \left[\sum_{i=1}^{m} \sup_{\ell \leq n_0} |\varphi_i(\ell) - x_i^*|\right]^{1/p} \quad \text{за} \quad n \geq n_0.$$

По-нататък, за два различни класа (съответно с постоянни и периодични скорости, с които невроните възстановяват състоянието си, когато са изолирани от системата) невронни мрежи на Hopfield с периодични импулси и крайни разпределени закъснения въвеждаме дискретни аналози. Използвайки различни методи, намираме достатъчни условия за съществуване и глобална експоненциална устойчивост на единствено периодично решение на дискретните системи. Даден е пример.

В [13] е разгледана системата
$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) \quad &= -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} g_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\omega} c_{ij}(s) g_j\left(x_j(t-s)\right) ds + d_i(t), \\ &\qquad t > 0, \ t \neq t_k, \\ &x_i(t_k + 0) = \beta_{ik} x_i(t_k), \quad i = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{55}$$

където $g_j(\cdot)$ са глобално Липшицови с константи L_j, $d_i(\cdot)$ са ω–периодични, $t_1 = 0$, $t_{k+p} = t_k + \omega$, $\beta_{i,k+p} = \beta_{ik}$ и съществуват положителни константи $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, такива че

$$\lambda_i a_i > L_i \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(|b_{ji}| + \int_0^{\omega} |c_{ji}(s)| \right) ds, \quad i = \overline{1,m}.$$

Система (55) се придружава от начално условие $x(r) = \psi(r)$, $r \in [-\omega, 0]$, където ψ е частично непрекъсната с точки на прекъсване $t_k - \omega$, $k = \overline{2,p}$, в които удовлетворява условията

$$\psi_i(t_k - \omega + 0) = \beta_{ik} \psi_i(t_k - \omega).$$

Сега ще формулираме дискретния аналог на система (55). За $N \in \mathbb{N}$ избираме дискретизационната стъпка $h = \omega/N$, при това считаме N за толкова голямо, че

$$h < \min_{k=\overline{1,p}} (t_{k+1} - t_k).$$

В такъв случай всеки интервал $[nh, (n+1)h]$ съдържа най-много една точка на импулсно въздействие t_k. За удобство означаваме $n = [t/h], n_k = [t_k/h]$. За $n \neq n_k$ апроксимираме диференциалното уравнение в (55) на интервала $[nh, (n+1)h]$ с

$$\frac{d}{dt}(x_i(t) e^{a_i t}) = e^{a_i t} \left\{ \sum_{j=1}^{m} b_{ij} g_j \left(x_j(n) \right) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{N} C_{ij}(\nu) g_j \left(x_j(n-\nu) \right) + d_i(n) \right\},$$

където величините $C_{ij}(\nu)$ са подходящо избрани. Един възможен избор е например $C_{ij}(\nu) = \int_{(\nu-1)h}^{\nu h} c_{ij}(s) ds$. Както преди, от това уравнение получаваме

$$x_i(n+1) = e^{-a_i h} x_i(n+1)$$

$$+\phi_i(h) \left\{ \sum_{j=1}^{m} b_{ij} g_j \left(x_j(n) \right) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{N} C_{ij}(\nu) g_j \left(x_j(n-\nu) \right) + d_i(n) \right\}, \tag{56}$$

$$i = \overline{1,m}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \neq n_k.$$

На интервала $[n_k h, (n_k+1)h]$ апроксимираме импулсното условие в (55) с

$$x_i(n_k + 1) = \beta_{ik} x_i(n_k), \quad i = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{57}$$

Накрая, заменяме началното условие за система (55) с

$$x(n) = \psi(n), \;\; n = \overline{-N, 0}, \tag{58}$$

където $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)^T : \{-N, -N+1, \dots, 0\} \to \mathbb{R}^m$. Предполагаме, че ψ удовлетворява $\psi_i(-N) = \psi_i(0)$ и

$$\psi_i(n_k + 1 - N) = \beta_{ik} \psi_i(n_k - N), \quad i = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,p}.$$

Ще означаваме решението на система (56), (57), (58) с $x(n, \psi)$.

Изброените по-горе условия за система (55) се заменят съответно с

$$0 = n_1 < n_2 < \cdots < n_p < N, \;\; n_{k+p} = n_k + N, \;\; \beta_{i,k+p} = \beta_{ik}, \;\; i = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N},$$

и съществуват положителни константи $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, такива че

$$\lambda_i a_i > L_i \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(|b_{ji}| + \sum_{\nu=1}^{N} |C_{ji}(\nu)| \right) ds, \quad i = \overline{1,m}.$$

Нашият основен резултат е следният: Ако система (56), (57) удовлетворява горните условие, то съществува число N_0, такова че за всяко цяло $N \geq N_0$ тя е глобално експоненциално периодична, т.е. съществува N-периодично решение $x(n, \psi^*)$ на система (56), (57) и положителни константи α и $q < 1$, такива че всяко решение $x(n, \psi)$ на система (56), (57) удовлетворява оценката

$$\|x(n, \psi) - x(n, \psi^*)\| \leq \alpha q^n \|\psi - \psi^*\| \text{ за всяко } \quad n \in \mathbb{N}.$$

За да докажем това твърдение, най-напред с помощта на подходящ функционал на Ляпунов получаваме оценка на нормата на разликата на кои да са две решения на (56), (57) чрез нормата на разликата на техните начални функции. След това дефинираме оператора на Poincaré $P\psi = \left\{x(n, \psi) : n = \overline{1, N}\right\}$ в пространството от начални функции и показваме, че за достатъчно голямо естествено число s операторът P^s е свиващ. Ако означим с ψ^* неговата единствена неподвижна точка, то лесно се вижда, че $x(n, \psi^*)$ е N-периодично решение на система (56), (57). Глобалната експоненциална устойчивост на това решение следва от гореспоменатата оценка на нормата на разликата на кои да са две решения на (56), (57) чрез нормата на разликата на техните начални функции.

По-нататък разглеждаме клас от невронни мрежи на Hopfield с периодични интегрални импулсни условия и крайни разпределени закъснения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) \quad &= -a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t) f_j\left(\int_0^\omega g_{ij}(s) x_j(t-s)\, ds\right) + I_i(t), \quad t \neq t_k, && (59) \\ \Delta x_i(t_k) \quad &= -\gamma_{ik} x_i(t_k) + \sum_{j=1}^{m} B_{ijk} \Phi_j\left(\int_0^\omega c_{ij}(s) x_j(t_k - s)\, ds\right) + \alpha_{ik}, && (60) \\ & \qquad i = \overline{1, m}, \ \ k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

където γ_{ik} са положителни константи, $a_i(t), b_{ij}(t), I_i(t)$ са ω-периодични, $t_{k+p} = t_k + \omega$, $\gamma_{i,k+p} = \gamma_{ik}, B_{ij,k+p} = B_{ijk}, \alpha_{i,k+p} = \alpha_{ik}$. Без ограничение на общността приемаме, че

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < \omega.$$

Можем да разглеждаме система (59) при $t > 0$, импулсните условия (60) при $k \in \mathbb{N}$, с начални условия $x_i(s) = \phi_i(s)$ при $s \in [0, \omega]$. Да се намери ω-периодично решение на система (59), (60) значи да се определят началните функции $\phi_i(s)$, така че решението на съответната начална задача да е ω-периодично.

Избираме N и h като при дискретизацията на система (55) и за $n \neq n_k$ апроксимираме диференциалното уравнение (59) на интервала $[nh, (n+1)h]$ с

$$\dot{x}_i(t) + a_i(nh) x_i(t) = I_i(nh) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(nh) f_j\left(\sum_{\ell=1}^{N} g_{ij}(\ell h) x_j\big((n-\ell)h\big)\, \varphi(h)\right),$$

където $\varphi(h) = h + O(h^2)$. Оттук получаваме

$$\begin{aligned} x_i\big((n+1)h\big) - x_i(nh) &= -\big(1 - e^{-a_i(nh)h}\big) x_i(nh) \\ + \frac{1 - e^{-a_i(nh)h}}{a_i(nh)} &\left\{ I_i(nh) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(nh) f_j\left(\sum_{\ell=1}^{N} g_{ij}(\ell h) x_j\big((n-\ell)h\big)\, \varphi(h)\right)\right\}. \qquad (61) \end{aligned}$$

Отново ще използваме означението $x_i(n) = x_i(nh)$ и дефинираме $\Delta x_i(n) = x_i(n+1) - x_i(n)$. Въвеждаме и обозначенията

$$A_i(n) = 1 - e^{-a_i(nh)h}, \qquad I_i(n) = \frac{1 - e^{-a_i(nh)h}}{a_i(nh)} I_i(nh),$$

$$b_{ij}(n) = \frac{1 - e^{-a_i(nh)h}}{a_i(nh)} b_{ij}(nh), \qquad g_{ij}(\ell) = g_{ij}(\ell h)\varphi(h),$$

където $n \neq n_k, \ell = \overline{1, N}$. Уравнение (61) приема вида

$$\Delta x_i(n) = -A_i(n)x_i(n) + I_i(n) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(n) f_j\left(\sum_{\ell=1}^{N} g_{ij}(\ell)x_j(n-\ell)\right), \; n \neq n_k. \quad (62)$$

Апроксимираме импулсното условие (60) с

$$\Delta x_i(n_k) = -\gamma_{ik}x_i(n_k) + \alpha_{ik} + \sum_{j=1}^{m} B_{ijk}\Phi_j\left(\sum_{\ell=1}^{N} c_{ij}(\ell)x_j(n_k-\ell)\right), \quad (63)$$

където $c_{ij}(\ell) = c_{ij}(\ell h)\varphi(h)$. За еднообразие на означенията дефинираме

$$A_i(n_k) = \gamma_{ik}, \quad I_i(n_k) = \alpha_{ik}$$

и записваме диференчната система (62), (63) в операторен вид като

$$\Delta x = Hx, \quad (64)$$

където

$$(Hx)_i(n) = -A_i(n)x_i(n) + I_i(n) + \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} b_{ij}(n) f_j\left(\sum_{\ell=1}^{N} g_{ij}(\ell)x_j(n-\ell)\right), & n \neq n_k, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} B_{ijk}\Phi_j\left(\sum_{\ell=1}^{N} c_{ij}(\ell)x_j(n-\ell)\right), & n = n_k. \end{cases} \quad (65)$$

Ако са изпълнени подходящи условия, уравнение (64) има поне едно N-периодично решение. Доказателството се извършва с помощта на теоремата за продължение на Mawhin [2].

Нека $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ са реални банахови пространства, $L: \operatorname{Dom} L \subset \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ е линеен оператор, а $H: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ е непрекъснат оператор. L се нарича фредхолмов оператор с индекс нула, ако $\dim \operatorname{Ker} L = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L < \infty$ и $\operatorname{Im} L$ е затворен в $\mathbf{Y}$. Ако L е фредхолмов оператор с индекс нула и съществуват непрекъснати проектори $P: \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ и $Q: \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$, такива че $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L = \operatorname{Im}(I - Q)$, тогава изображението $L|_{\operatorname{Dom} L \cap \operatorname{Ker} P}: (I - P)\mathbf{X} \to \operatorname{Im} L$ е обратимо. Да означим обратното изображение с K_P. Ако Ω е отворено ограничено подмножество на $\mathbf{X}$, операторът H се нарича L-компактен в $\overline{\Omega}$, ако $QH(\overline{\Omega})$ е ограничено и $K_P(I - Q)H: \overline{\Omega} \to \mathbf{X}$ е компактно. Тъй като $\operatorname{Im} Q$ е изоморфно на $\operatorname{Ker} L$, то съществува изоморфизъм $J: \operatorname{Im} Q \to \operatorname{Ker} L$.

Теорема за продължение на Mawhin. *Нека L е фредхолмов оператор с индекс нула, $\Omega \subset \mathbf{X}$ е отворено ограничено множество и $H: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ е непрекъснат оператор, който е L-компактен в $\overline{\Omega}$. Да допуснем, че следните условия са в сила:*

а) *за всяко $\lambda \in (0,1), x \in \partial\Omega \cap \operatorname{Dom} L$, $Lx \neq \lambda Hx$;*

б) *за всяко $x \in \partial\Omega \cap \operatorname{Ker} L$, $QHx \neq 0$;*

в) $\deg(JQH, \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0) \neq 0$, *където* $\deg(\cdot)$ *е степента на Brouwer.*

Тогава уравнението $Lx = Hx$ има поне едно решение в $\overline{\Omega} \cap \operatorname{Dom} L$.

В нащия случай избираме $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \left\{x(n) = \left(x_1(n), \dots, x_m(n)\right)^T : x(n+N) = x(N)\right\}$. $\mathbf{X}$ е банахово пространство с норма $\|x\| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$, където $|x_i| = \max_{i=\overline{0,N-1}} |x_i(n)|$. За $x \in \mathbf{X}$, нека Hx е дифинирано с (65), $Lx = \Delta x$ и

$$Px = Qx = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n).$$

Тогава $\operatorname{Ker} L = \{x \in \mathbf{X}: x = h \in \mathbb{R}^m\}$ (вектори, независещи от n),

$$\operatorname{Im} L = \left\{ x \in \mathbf{X}: \sum_{n=0}^{N-1} x_i(n) = 0, \quad i = \overline{1,m} \right\}$$

е затворено множество в $\mathbf{X}$ и $\operatorname{codim} L = m$. И така, L е фредхолмов оператор с индекс нула. Лесно се вижда, че P и Q са непрекъснати проектори, такива че $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L, \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L = \operatorname{Im}(I - Q)$, и H е L-компактен в $\overline{\Omega}$ за всяко ограничено множество $\Omega \subset \mathbf{X}$. В условие в) на теоремата за продължение изоморфизмът J може да бъде тъждественият оператор I.

По-нататък показваме, че за достатъчно голямо $C > 0$ областта $\Omega = \{x \in \mathbf{X}: \|x\| < C\}$ удовлетворява условия а)-в) на теоремата за продължението.

След като съществуването на поне едно N-периодично решение е доказано, с помощта на подходящ функционал на Ляпунов се доказва, че то е единствено и глобално експоненциално устойчиво.

Разглеждаме непрекъсната импулсна невронна мрежа със закъснение в стабилизиращия член

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -a_i x_i(t-\sigma) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} g_j\left(x_j(t-\tau_{ij})\right) \qquad (66) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} h_j\left(\int_0^\infty K_{ij}(s) x_j(t-s)\, ds\right) + I_i, \quad t > 0, \ t \neq t_k, \\ \Delta x_i(t_k) &= B_{ik} x_i(t_k) + \int_{t_k-\sigma}^{t_k} \psi_{ik}(s) x_i(s)\, ds + \gamma_{ik}, \quad i = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad (67) \end{aligned}$$

където $0 < a_i < 1/\sigma$, а останалите условия са същите като при система (33).

Членовете $-a_i x_i(t-\sigma)$ в десните страни на уравнения (66) затрудняват приложението на описаната по-горе процедура на семи-дискретизация. Вместо това, дискретизираме всички членове в дясната страна на (66).

Да допуснем, че $\sigma < \theta$, и нека естественото число N е толкова голямо, че

$$\left(1 + \frac{1}{N}\right) a_i \sigma < 1, \quad \left(1 + \frac{1}{N}\right) \sigma < \theta.$$

За $h = \sigma/N$ получаваме следната дискретизация на дясната страна на (66):

$$-a_i x_i(n-N) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j\left(x_j(n)\right) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} g_j\left(x_j(n-\kappa_{ij})\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{m} d_{ij} h_j\left(\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{K}_{ij}(p) x_j(n-p)\right) + I_i, \quad n \in \mathbb{N}, \ \ i = \overline{1,m}.$$

Отрицателният знак на първия член затруднява използването на функционали на Ляпунов. За да преодолеем тази трудност, елиминираме този член, като използваме подходяща апроксимация на стойността на производната $\dot{x}_i(t)$ в лявата страна на уравнение (66) в точка nh за достатъчно малко σ чрез израза

$$\frac{1-Nha_i}{h} x_i(n+1) - \frac{1-(N+1)ha_i}{h} x_i(n) - a_i x_i(n-N).$$

Така получаваме следния дискретен аналог на системата без импулси (66):

$$(1-Nha_i)x_i(n+1) = (1-(N+1)ha_i)x_i(n) + h\left\{\sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j\left(x_j(n)\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{m} c_{ij} g_j\left(x_j(n-\kappa_{ij})\right) + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} h_j\left(\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{K}_{ij}(p) x_j(n-p)\right) + I_i\right\}, \tag{68}$$

$$n \in \mathbb{N}, \ \ i = \overline{1,m},$$

с начални условия от вида $x_i(-\ell) = \phi_i(-\ell)$ ($\ell \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), където редиците $\{\phi_i(-\ell)\}_{\ell=0}^{\infty}$ са ограничени за всяко $i = \overline{1,m}$. Импулсните условия (67) се апроксимират с (48).

Ако x^* е единствената точка на равновесие, съществуват константи $M' > 1$ и $\lambda \in (1,\nu]$, такива че всяко друго решение $x(n)$ на система (68), (48) удовлетворява оценката

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i(n) - x_i^*| \le M' \lambda^{-N} \prod_{k=1}^{i(1,n)} B'_k \sum_{i=1}^{m} \sup_{\ell \in \{0\} \cup \mathbb{N}} |x_i(-\ell) - x_i^*|, \tag{69}$$

където $B'_k = B_k\left(1 + \sigma \max_{i=\overline{1,m}} (1-\sigma a_i)^{-1}\right)$ и

$$B_k = \max_{i=\overline{1,m}} \max\left\{\left|1 + B_{ikn_k}\right|, \max_{n_k - N \le \ell \le n_k - 1} |B_{ikl}|\right\}, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Оценка (69) се получава с помощта на подходящи функционали на Ляпунов. От нея в три частни случаи, подобни на 4)-6), следва равномерна експоненциална устойчивост на точката на равновесие x^* на система (68), (48).

Да разгледаме невронна мрежа на Cohen-Grossberg от неутрален тип

$$\dot{x}_i(t) \quad + \sum_{j=1}^{m} e_{ij} \dot{x}_j(t-\tau_j) = a_i\left(x_i(t)\right)\left[-b_i\left(x_i(t)\right) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} f_j\left(x_j(t)\right)\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} d_{ij} g_j\left(x_j(t-\tau_j)\right) + I_i\right], \ \ i = \overline{1,m}, \ \ t > 0. \tag{70}$$

Нека E е единичната $(m \times m)$-матрица. Да означим с $\in$ и $|\in|$ $(m \times m)$-матрици съответно с елементи e_{ij} и $|e_{ij}|$. Освен обичайните предположения за невронни мрежи на Cohen-Grossberg допускаме, че спектралната норма $\|\in\| < 1$, а $E - |\in|$ е M-матрица.

Най-напред показваме, че ако са изпълнени неравенствата

$$\underline{b}_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(|c_{ij}|F_j + |c_{ji}|F_i\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(|d_{ij}|G_j + |d_{ji}|G_i\right) > 0, \qquad i = \overline{1,m}, \tag{71}$$

то система (70) има единствена точка на равновесие x^*. Доказателството използва същата идея като в случая на невронна мрежа на Cohen-Grossberg със закъснение.

По-нататък, ако са изпълнени неравенствата

$$\begin{aligned} &\underline{a}_i\underline{b}_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\overline{a}_i|c_{ij}|F_j + \overline{a}_j|c_{ji}|F_i\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\overline{a}_i|d_{ij}|G_j + \overline{a}_j|d_{ji}|G_i\right) \\ &-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\overline{a}_i\overline{b}_i|e_{ij}| + \overline{a}_j\overline{b}_j|e_{ji}|\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\overline{a}_j\sum_{k=1}^{m}\left(|c_{ji}||e_{jk}|F_i + |c_{jk}||e_{ji}|F_k\right) \\ &-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\overline{a}_j\sum_{k=1}^{m}\left(|d_{ji}||e_{jk}|G_i + |d_{jk}||e_{ji}|G_k\right) > 0, \qquad i = \overline{1,m}, \end{aligned} \tag{72}$$

и система (70) има точка на равновесие x^*, то тя е глобално асимптотически устойчива. Доказателството се извършва с помощта на подходящ функционал на Ляпунов.

Неравенства (71) се получават от (72) при $\underline{a}_i = \overline{a}_i = 1$, $e_{ij} = 0$ при $i, j = \overline{1,m}$. Обаче в общия случай неравенства (71) не следват от (72).

Система (70) е по-обща от невронната мрежа на Cohen-Grossberg от неутрален тип, разглеждана в [1]. Там вместо m-те неравенства (72) е дадено едно единствено неравенство, което при нашите означения има вида

$$\begin{aligned} &\min_{i=\overline{1,m}}\left(\underline{a}_i\underline{b}_i\right) - \max_{i=\overline{1,m}}\left(\overline{a}_i\overline{b}_i\right)\|\in\| \\ &- \max_{i=\overline{1,m}}\overline{a}_i\left(\max_{i=\overline{1,m}}F_i\,\|C\| + \max_{i=\overline{1,m}}G_i\,\|D\|\right)(1 + \|\in\|) > 0, \end{aligned} \tag{73}$$

където C и D са $(m \times m)$-матрици съответно с елементи c_{ij} и d_{ij}. При все че неравенство (73) изглежда значително по-просто от (72), по наше мнение то е много по-малко точно, тъй като индивидуалните долни и горни граници, Липшицови константи, и елементи на матрици са заменени от техните минимуми или максимуми, и матрични норми. Привеждаме пример на система, удовлетворяваща условия (72), но не (73).

Накрая разглеждаме отново невронната мрежа (70) при $t > t_0 = 0$, $t \neq t_k$, удовлетворяваща изброените по-горе условия с изключение на изискването $E - |\in|$ да е M-матрица, което в случая не е необходимо, и снабдена с импулсните условия

$$\Delta x_i(t_k) = \gamma_{ik}x_i(t_k) + \sum_{j=1}^{m}\delta_{ijk}x_j\left(t_k - \tau_j\right) + \zeta_{ik}, i = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{74}$$

Точка на равновесие x^* на система (70) е такава и за импулсната система (70), (74), ако компонентите ѝ удовлетворяват линейните уравнения

$$\gamma_{ik}x_i^* + \sum_{j=1}^{m} \delta_{ijk}x_j^* + \zeta_{ik}, i = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При дискретизационна стъпка $h > 0$ на всеки интервал $[nh, (n+1)h)$, несъдържащ момент на импулсно въздействие t_k, апроксимираме уравнение (70) с

$$\frac{d}{dt}\left(x_i(t)e^{\beta_i t} + \sum_{j=1}^{m} e_{ij}x_j(t - \sigma_j h)e^{\beta_i t} \right) = \beta_i e^{\beta_i t}\left(x_i(nh) + \sum_{j=1}^{m} e_{ij}x_j\left((n - \sigma_j)h\right)e^{\beta_i t} \right)$$

$$+e^{\beta_i t}a_i\big(x_i(nh)\big)\left[-b_i\big(x_i(nh)\big) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij}f_j\left(x_j(nh)\right) + \sum_{j=1}^{m} d_{ij}g_j\left(x_j\left((n - \sigma_j)h\right)\right) + I_i \right],$$

където $\beta_i = \underline{a}_i\underline{b}_i > 0$, откъдето получаваме

$$\begin{aligned} x_i(n+1) &= x_i(n) + \sum_{j=1}^{m} e_{ij}\left(x_i(n - \sigma_j) - x_i(n + 1 - \sigma_j)\right) \\ &+\psi_i(h)a_i\big(x_i(n)\big)\left[-b_i\big(x_i(n)\big) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij}f_j\left(x_j(n)\right) + \sum_{j=1}^{m} d_{ij}g_j\left(x_j(n - \sigma_j)\right) + I_i \right] \end{aligned} \tag{75}$$

при $i = \overline{1,m},\ n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, където $\psi_i(h) = \frac{1 - e^{-\beta_i h}}{\beta_i}$.

След това дискретизираме импулсното условие (74) и получаваме

$$x_i^+(n_k) = (1 + \gamma_{ik})x_i(n_k) + \sum_{j=1}^{m} \delta_{ijk}x_j(n_k - \sigma_j) + \zeta_{ik}, \quad i = \overline{1,m}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{76}$$

Ако са изпълнени гореспоменатите условия и

$$\delta_{ijk} = \gamma_{ik}e_{ij}, \qquad -2 \le \gamma_{ik} \le 0,\ \ i,j = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N},$$

то точката на равновесие x^* е глобално асимптотически устойчива при всички достатъчно малки стойности на $h > 0$. Доказателството се извършва с помощта на подходящ функционал на Ляпунов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дисертацията са представени следните основни резултати:

- За импулсна система с постоянно закъснение е доказано, че ако съответната система без закъснение има изолирано ω-периодично решение, то във всяка околност на тази орбита разглежданата система също има ω-периодично решение, ако закъснението е достатъчно малко.
- За неутрална импулсна система с постоянно закъснение е доказано, че ако съответната система без закъснение има изолирано ω-периодично решение, то във всяка околност на тази орбита разглежданата система също има ω-периодично решение, ако закъснението е достатъчно малко.
- За импулсна диференциално-диференчна система, такава че съответната система без закъснение е линейна и има r-параметрична фамилия от ω-периодични решения, е изведено уравнение за пораждащите амплитуди

(необходимо условие за съществуване на ω-периодични решения) и са получени достатъчни условия за съществуването на ω-периодични решения в критичните случаи от първи (прост корен на уравнението за пораждащите амплитуди) и втори ред.

- За зависещ от възрастта модел с доминиращ възрастов клас задачата за съществуване на периодичен режим в присъствието на импулсни смущения е сведена до операторни системи, решими със сходящ прост итерационен метод както за некритичния случай, така и за критичния случай от първи ред.
- За нелинейна гранична задача за импулсна система от обикновени диференциални уравнения със съсредоточени закъснения в общия случай, когато броят на граничните условия не съвпада с реда на системата, при предположение, че съответната гранична задача без закъснение е линейна и има r-параметрична фамилия от решения, е изведено уравнение за пораждащите амплитуди и са получени достатъчни условия за съществуването и итерационен алгоритъм за построяването на решение на дадената задача в критичния случай от първи ред, ако закъсненията са достатъчно малки.
- За импулсна система със закъснение, което се различава от константа с малко ω-периодично смущение, такава че съответната система с постоянно закъснение има изолирано ω-периодично решение, при условие за неизроденост е доказано, че във всяка достатъчно малка околност на тази орбита смутената система също има единствено ω-периодично решение.
- За импулсна система със закъснение, което се различава от константа с малко ω-периодично смущение, такава че съответната система с постоянно закъснение има изолирано ω-периодично решение, ако периодът на закъснението е рационално независим с ω, при условие за неизроденост е доказано, че във всяка достатъчно малка околност на тази орбита смутената система също има единствено ω-периодично решение.
- Последните два резултата са обобщени за случая на неутрална импулсна система с малко закъснение на аргумента на производната и друго закъснение, което се различава от константа с малко периодично смущение.
- За импулсни непрекъснати невронни мрежи от тип на Hopfield с както постоянни, така и безкрайни разпределени закъснения, са намерени достатъчни условия за съществуване на единствена точка на равновесие и нейната глобална експоненциална устойчивост.
- За импулсни непрекъснати невронни мрежи от тип на Cohen-Grossberg с крайни разпределени закъснения от тип S (зададени с интеграли на Лебег-Стилтес) са намерени достатъчни условия за съществуване на единствена точка на равновесие и нейната глобална експоненциална устойчивост.
- За импулсни непрекъснати невронни мрежи от тип на Cohen-Grossberg със зависещи от времето закъснения и безкрайни разпределени закъснения от тип S и реакционно-дифузионни членове с пространствена размерност $n \geq 3$, използвайки неравенството на Hardy-Poincaré са получени подобрени оценки на устойчивостта за система с нулеви гранични условия на Дирихле.

- Получени са достатъчни условия, изразени чрез минимални Липшицови константи и мерки на нелинейност, за съществуването на единствена точка на равновесие и нейната експоненциална устойчивост за импулсни невронни мрежи, които са обобщения на невронните мрежи от тип на Cohen-Grossberg, със зависещи от времето закъснения.
- За импулсни непрекъснати невронни мрежи от тип на Hopfield с както постоянни, така и безкрайни разпределени закъснения, са формулирани дискретни аналози посредством метода на семи-дискретизацията и са получени достатъчни условия за глобалната експоненциална устойчивост на единственото положение на равновесие.
- За импулсни непрекъснати невронни мрежи от тип на Cohen-Grossberg с постоянни и безкрайни разпределени закъснения са формулирани дискретни аналози посредством обобщение на метода на семи-дискретизацията и са получени достатъчни условия за глобалната експоненциална устойчивост на единственото положение на равновесие.
- За два различни класа непрекъснати невронни мрежи от тип на Hopfield с периодични импулси и крайни разпределени закъснения са въведени дискретни аналози. Използвайки различни методи, са намерени достатъчни условия за съществуване и глобална експоненциална устойчивост на единствено периодично решение на дискретната система.
- Въведен е дискретен аналог на клас невронни мрежи от тип на Hopfield с импулси и съсредоточени и безкрайни разпределени закъснения, както и малко закъснение в стабилизиращия член. Намерени са достатъчни условия за съществуване и глобална експоненциална устойчивост на единственото положение на равновесие на дискретната система.
- За неутрална непрекъсната невронна мрежа от тип на Cohen-Grossberg са получени достатъчни условия за съществуване и глобална асимптотична устойчивост на единствена точка на равновесие.
- Получен е дискретен аналог на неутрална импулсна непрекъсната невронна мрежа от тип на Cohen-Grossberg посредством обобщение на метода на семи-дискретизацията. За достатъчно малки стойности на дискретизационната стъпка е показано, че достатъчните условия за глобална асимптотична устойчивост на единствената точка на равновесие на непрекъснатата система са такива и за дискретния ѝ аналог.

ЛИТЕРАТУРА

1. C.-J. Cheng, T.-J. Liao, J.-J. Yan and C.-C. Hwang, *Globally asymptotic stability of a class of neutral-type neural networks with delays*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part B: Cybernetics, **36** (2006), No. 5, 1191-1195.
2. R. E. Gaines and J. L. Mawhin, *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
3. Е. А. Гребенников, Ю. А. Рябов, *Конструктивные методы анализа нелинейных систем*, Наука, Москва, 1979.
4. Z.-H. Guan, G. Chen, *On delayed impulsive Hopfield neural networks*, Neural Networks, **12** (1999), 273-280.

5. J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer, New York – Heidelberg – Berlin, 1977.
6. T. Kostova, *Oscillations in an age-dependent model with a dominant age class*, Institute of Mathematics, Bulgarian Academy of Sciences, Preprint No. 5 (March 1995).
7. T. Kostova, F. Milner, *An age-structured model of population dynamics with dominant ages, delayed behavior, and oscillations*, Mathematical Population Studies, **5** (1995), No. 4, 359-375.
8. W. McCulloch, W. Pitts, *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*, Bulletin of Mathematical Biophysics, **9** (1943), 127-147.
9. В. Д. Мильман, А. Д. Мышкис, *Об устойчивости движения при наличии толчков*, Сибирьский математический журнал, **1** (1960), 233-237.
10. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища школа, Киев, 1987.
11. J. Peng, H. Qiao, Z. Xu, *A new approach to stability of neural networks with time-varying delays*, Neural Networks, **15** (2002), No. 1, 95-103.
12. X. Song, J. Peng, *Exponential stability of equilibria of differential equations with time-dependent delay and non-Lipschitz nonlinearity,* Nonlinear Analysis: Real World Applications, **11** (2010), No. 5, 3628-3638.
13. X. Yang, X. Liao, D. J. Evans, Y. Tang, *Existence and stability of periodic solution in impulsive Hopfield neural networks with finite distributed delays*, Physics Letters A, **343** (2005), 108-116.
14. L. Jódar, R. J. Villanueva and V. Chr. Covachev, *Periodic solutions of neutral impulsive systems with a small delay*, in: Proceedings of the Fourth International Colloquium on Differential Equations. Plovdiv, Bulgaria, 18-23 August 1993. VSP. Utrecht, The Netherlands. Tokyo, Japan, 1994, 125-135.
15. D. D. Bainov and V. Chr. Covachev, *Periodic solutions of impulsive systems with a small delay*, Journal of Physics. A: Mathematical and General, **27** (1994), 5551-5563.
16. D. D. Bainov and V. Chr. Covachev, *Periodic solutions of impulsive systems with delay viewed as a small parameter*, Rivista di Matematica Pura ed Applicata, **19** (1996), 9-25.
17. A. Boichuk, V. Covachev, *Periodic solutions of impulsive systems with a small delay in the critical case of second order*, Nonlinear Oscillations, **1** (1998), No. 1, 6-19.
18. Haydar Akça, Valéry Covachev, *Periodic solutions of impulsive systems with delay*, Functional Differential Equations **5** (1998), No. 3-4, 275-286.
19. Haydar Akça, Valéry Covachev, *Periodic solutions of impulsive systems with periodic delays*, Proceedings of the International Conference on Biomathematics Bioinformatics and Applications of Functional Differential - Difference Equations, Akdeniz University, July 14-19, 1999, pp. 65-76.
20. Valéry Covachev, *Periodicity of the population size of an age-dependent model with a dominant age class by means of impulsive perturbations*, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, **10** (2000), No. 1, 147-155.
21. Alexander Boichuk, Valéry Covachev, *Weakly-nonlinear boundary value problems for impulsive systems with small concentrated delays of the argument*, Nonlinear Oscillations, **3** (2000), No. 1, 13-30.
22. Valéry Covachev, *Almost periodic solutions of impulsive systems with periodic time-dependent perturbed delays*, Functional Differential Equations, Vol. **9** (2002), No. 1-2, 91-108.
23. Valéry Covachev, Haydar Akça and Eada Ahmed Al-Zahrani, *Periodic solutions of neutral impulsive systems with periodic time-dependent perturbed delays*, Functional Differential Equations, **10** (2003), No. 3-4, 441-461.

24. Valéry Covachev, Zlatinka Covacheva, Haydar Akça, Eada Ahmed Al-Zahrani, *Almost periodic solutions of neutral impulsive systems with periodic time-dependent perturbed delays*, Central European Journal of Mathematics, **1** (2003), No. 3, 292-314.
25. Haydar Akça, Rajai Alassar, Valéry Covachev, Zlatinka Covacheva and Eada Al-Zahrani, *Continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulses*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **290** (2004), No. 2, 436-451.
26. Haydar Akça, Rajai Alassar, Valéry Covachev and Zlatinka Covacheva, *Discrete counterparts of continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulses*, Dynamic Systems and Applications, **13** (2004), No. 1, 77-92.
27. Haydar Akça, Rajai Alassar, Valéry Covachev, H. Ali Yurtsever, *Discrete-time impulsive Hopfield neural networks with finitedistributed delays*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, **14** (2007), No. 2, 145-158.
28. Sannay Mohamad, Haydar Akça, Valéry Covachev, *Discrete-time Cohen-Grossberg neural networks with transmission delays and impulses*, Tatra Mountains Mathematical Publications, **43** (2009), 145-161.
29. Haydar Akça, Valéry Covachev and Kumud Singh Altmayer, *Exponential stability of neural networks with time-varying delays and impulses*, in: The Sixth International Symposium on Neural Networks (ISNN 2009), Hongwei Wang, Yi Shen, Tingwen Huang,ZhigangZeng (Eds.), Advances in Intelligent and Soft Computing **56**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009, pp. 153-163.
30. H. Akça, V. Covachev, Z. Covacheva and S. Mohamad, *Global exponential periodicity for the discrete analogue of an impulsive Hopfield neural network with finite distributed delays*, Functional Differential Equations, **16** (2009), No. 1, 53-72.
31. Haydar Akça, Valéry Covachev, *Impulsive Cohen-Grossberg neural networks with S-type distributed delays*, Tatra Mountains Mathematical Publications, **48** (2011), 1-13.
32. Valéry Covachev, Haydar Akça, and Makhtar Sarr, *Discrete-time counterparts of impulsive Cohen-Grossberg neural networks of neutral type*, Neural, Parallel and Scientific Computations, **19** (2011), 345-360.
33. Haydar Akça, Valéry Covachev and Zlatinka Covacheva, *Discrete-time counterparts of impulsive Hopfield neural networks with leakage delays*, International Conference on Differential & Difference Equations and Applications (Ponta Delgada, Portugal, 2011), Differential and Difference Equations with Applications, S. Pinelas, M. Chipot and Z. Došla (eds.), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **47**, Springer Science+Business Media, New York, 2013, pp. 335-342.
34. Haydar Akça, Valéry Covachev and Zlatinka Covacheva, *Improved stability estimates for impulsive delay reaction-diffusion Cohen-Grossberg neural networks via Hardy-Poincaré inequality*, Tatra Mountains Mathematical Publications, **54** (2013), 1-18.
35. Haydar Akça, Valéry Covachev and Zlatinka Covacheva, Global asymptotic stability of Cohen-Grossberg neural networks of neutral type, Nonlinear Oscillations, (accepted for publication).