С У «Св Кл. Охридски»

Нели Стоянова Димитрова

ДИСЕРТАЦИЯ

София, 1997г.

Софийски Университет „Св. Климент Охридси“
Факултет по математика и информатика
Катедра „Числени методи и алгоритми“

Нели Стоянова Димитрова

ЧИСЛЕНИ АЛГОРИТМИ С ВЕРИФИКАЦИЯ НА РЕЗУЛТАТА ЗА НЕЛИНЕЙНИ АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМИ НЕЛИНЕЙНИ АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на
образователна и научна степен Доктор

Научен ръководител:
ст. н. с. II ст. кмн Светослав Марков

София, 1997 г.

СЪДЪРЖАНИЕ

ПРЕДГОВОР

В традиционния числен анализ числените алгоритми са формулирани в термините на аритметични операции между реални числа. Но реалната аритметика е непознаваема за компютрите – те не могат да извършват реално-аритметични операции в общия случай. В резултат на това един алгоритъм дава различни резултати, когато се изпълнява на различни компютри поради произволни програмни реализации на аритметиката и конвертирането на входните данни. Тази ситуация противоречи на основната идея за еднозначност на изчислителния процес, заложена в понятието алгоритъм. Поради произволността на изчислителния процес потребителят на традиционните числени алгоритми се натъква на нерешимия проблем за установяване на връзка между точното решение на задачата и числения резултат, получен от компютъра. На практика се използват редица интуитивни техники „за оценка на грешките от изчисленията", като например изчисляване на остатъци (за които се очаква да бъдат близки до нула), повторение на изчислителния процес с леко променени входни данни и сравняване на резултатите с получените преди това, повторение на изчисленията с различни точности (единична, двойна, разширена и т. н.) и сравняване на резултатите. Обаче може да се покаже (вж. [49], [80], [118], [122]), че нито една от горепосочените три техники не е надеждна за получаване на такава оценка и може дори да се окаже подвеждаща за потребителя.

През последните 2–3 десетилетия възниква нова методология, обединяваща нови типове числени методи и нови софтуерни/хардуерни средства – сега говорим за нови средства за програмиране, поддържащи числени алгоритми с верификация на резултатите и за нова методология за научни изчисления, осигуряваща пълен контрол върху ефектите от изчислителните грешки и неточностите в данните (вж. напр. [56], [81], [135], [136]). Тази методология включва:

– специален анализ на съответните математически задачи за монотонност по отношение на аргументи и параметри, целящи формулиране на алгоритми за включване на множества от решения на числови задачи или задачи с неточни (интервални) данни;

– използване на еднозначно дефинирани компютърно-аритметични операции във всички изчислителни пространства (реални и комплексни числа, интервали, вектори, матрици, интервални вектори и др.). За необходимите компютърна и интервална аритметика се възприемат международни стандарти [64], [66] и в тях задължително се включват операции с насочени закръглявания;

– подходящо формулиране на числени алгоритми в термините на компютърно-аритметични операции. Използването на компютърна аритметика във всички изчислителни пространства позволява конструирането на числени алгоритми, които дават еднозначно дефинирани междинни и крайни резултати;

– нови програмни техники, с които пресметнатите граници могат да бъдат направени произволно близки до точните чрез използуване на различни техники като т. нар. STC-формат. Това се налага например когато тези граници служат за входни данни при лошо обусловени математически задачи.

По такъв начин получените резултати от компютъра имат качеството на математическо доказателство на твърдения от вида „полученият компютърен интервал съдържа точното решение на задачата“ или „задачата няма решение в зададения компютърен интервал“. Това точно решение може да бъде в частност интервал или друго множество (какъвто е например случая при интервални входни данни).

Новата методология използува нови математически средства като интервална аритметика, интервален анализ и компютърна аритметика [25], [78]–[81], [98], [99], [130], [135], [136] и нови приложения на добре известни теореми за монотонност, теореми за неподвижната точка и др. [36], [37], [101], [112], [119]. На базата на класически итерационни техники са създадени интервални итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения и системи линейни и нелинейни уравнения [25], [31], [37], [53], [54], [63], [73], [56], [97], [101], [118]–[123], методи за глобална оптимизация [59], [113].

Едно от най-важните приложения на интервалната аритметика (и нейните разширения) е в пресмятането на обхвати (множества от стойности) на функции и във възможността за автоматизиране на това пресмятане. Пресмятането на обхват на непрекъсната функция или на свързаните с нея функции (производни, частни производни, обратни функции и т. н.) е от особен интерес за специалистите, работещи в областта на числения и функционалния анализ, теория на оптимизацията, диференциалните уравнения, алгебрата и мн. др. Например ако $f'(X)$ е обхватът на f' в интервала X, то $0 \notin f'(X)$ означава, че f е монотонна в X; ако $f''(X) \geq 0$, то f е изпъкнала функция в X; множеството $f(X) \bigcap X$ съдържа всички неподвижни точки на f и ако $f(X) \bigcap X = \emptyset$, то f няма неподвижна точка в X.

Числени алгоритми с верификация на резултатите се разработват интензивно от много учени в много центрове в Европа и САЩ. Нов силен тласък на развитие идва в последно време от страна на софтуерната и хардуерна индустрия. В момента редица мощни фирми като SUN, Maple, Wolfram Research, IBM разработват реализации на интервално-аритметични операции и програмни пакети за работа с интервални обекти и алгоритми с верификация.

За първи работи по тази тема у нас могат да се считат публикациите на Благовест Сендов и Светослав Марков. Бл. Сендов [126]–[128] разработва апарат за работа с функции, които имат интервални стойности в изброимо множество от точки (т. нар. сегментни функции). С. Марков [83]–[87] разработва разширение на интервалната аритметика, което намира широки приложения за пресмятане на обхвати (множество от стойности) на функции, както и при създаване на итерационни интервални методи за нелинейни задачи, осигуряващи по-ефективен критерий за съществуване/несъществуване на решение в предварително зададен интервал. Работите на Бл. Сендов и С. Марков се използуват от много чужди учени. Така например сегментният анализ се използува в [32]. Разширената интервална аритметика на Марков се използува от редица чужди автори [30], [75], [100], [125], реализирана е в наши програмни пакети HIFICOMP [61], RINA [117] и се взема под внимание при формулирането на стандарти за програмна реализация на интервална аритметика [66].

Настоящата работа е посветена на числени алгоритми с верификация на резултата за нелинейни алгебрични уравнения и системи уравнения. На базата на известни техники от интервалния анализ са изведени итерационни методи, формулирани в термините на разширена интервална аритметика. За всеки метод е дадена съответна реализация чрез компютърно-аритметични операции и е формулиран числен алгоритъм с верификация на резултата във вид на строго определена последователност от изчисления, изходът от която има силата на математическо доказателство.

Работата е разделена на три глави и приложение. Всяка глава започва с предварителни бележки, в които са дадени известни дефиниции и резултати, използувани по-нататък в изложението. Глава 1 е посветена на интервалната аритметика и пресмятане на обхвати на функции. Разширената интервална аритметика включва осем операции между интервали – четири стандартни (външни) операции $+, -, \times, /$ и четири нестандартни (вътрешни) операции $+^-, -^-, \times^-, /^-$. Известно е, че в интервалната аритметика е в сила т. нар. субдистрибутивен закон: ако A, B, C са интервали, то $(A+B)\times C \subseteq A\times C + B\times C$. Х. Рачек пръв изследва случаите, когато горното включване може да се замени с равенство [110]. С помощта на операциите на разширената интервална аритметика могат да се изведат условно-дистрибутивни закони (правила за разкриване на скоби) в интервално-аритметични изрази от вида $(A+B)\times C$, $(A+^- B)\times C$ [85]. В т. 1.2 са формулирани и доказани правила за разкриване на скоби в изрази от вида $(A+B)\times^- C$, $(A+^- B)\times^- C$, $(A-B)/C$, $(A-^- B)/C$, $(A-B)/^- C$, $(A-^- B)/^- C$, $(A+B)/C$, $(A+^- B)/C$, $(A-B)\times C$, $(A-^- B)\times C$ и $(A-B)/^- C$, както и правила за изнасяне на множител извън скоби в изрази като $A\times C+^- B\times C$, $A\times^- C+B\times^- C$, $A\times^- C+^- B\times^- C$, $A\times^- C+B\times C$, $A\times^- C+^- B\times C$. В т. 1.3 е въведен класът на т. нар. K-изотонни функции на n променливи. Това са монотонни функции относно частична наредба, зададена посредством изпъкнал и затворен конус K. Разгледани са редица свойства на тези функции и е формулирана и доказана теорема за пресмятане на обхват на K-изотонна функция в даден интервален вектор.

Глава 2 е посветена на числени алгоритми с верификация на резултата за нелинейни алгебрични уравнения. Нека $f: D\to R$, $D\subseteq R$, е непрекъснато диференцируема функция. Да означим с ID множеството от всички интервали, които се съдържат в D, т. е. $ID=\{X\in IR: X\subseteq D\}$. В т. 2.2 е въведен интервално-аритметичен оператор $\mathcal{N}: ID\to IR$, $\mathcal{N}(X)=X-^- f(X)/^- F'(X)$, където $f(X)$ е обхватът на f в интервала X, а $F': ID\to IR$ е изотонно по включване интервално разширение на производната f', такова че $0\notin F'(X)$. Доказани са редица свойства на $\mathcal{N}$ и е формулиран интервален итерационен метод от Нютонов тип, който има вида $X_{n+1}=\mathcal{N}(X_n)$, $\quad n=0,1,2,\ldots$, за намиране на единствен реален корен на $f(x)=0$ в даден начален интервал X_0. При естествени предположения за f и F' е доказано, че редицата от интервали $\{X_n\}$ е квадратично сходяща към решението на уравнението в смисъл $\omega(X_{n+1})\le c\omega^2(X_n)$, където $\omega(X_n)$ означава ширината на интервала X_n, а $c>0$ е реална константа. Доказано е, че същият метод има кубична сходимост, когато $f(x^*)=f''(x^*)=0$, $\quad f'(x^*)\neq 0$. В същата точка са разгледани и модификации на метода с по-нисък и по-висок ред на сходимост. За всеки метод е формулиран алгоритъм с верификация на резултата, който е реализиран програмно на езика за научни изчисления Pascal-SC [76]. Дадени са резултати от числени експерименти. Направени са сравнения с известни от литературата интервални методи. Интервален итерационен метод от тип Хели е изведен и изследван в т. 2.3. В т. 2.4, чрез представяне на оператора $\mathcal{N}$ чрез краищата му, е получено обобщение на интервалния итерационен метод от Нютонов тип за намиране на интервал с най-малка ширина, съдържащ множеството от всички корени на $f(x)=0$ в предварително зададен начален интервал X_0. Последният подход е приложен и за намиране на всички изолирани корени x_i^*, $1\le i\le p$, на уравнението, намиращи се в X_0. Формулирани са алгоритми с верификация на резултата, които са реализиран програмно на Pascal-SC и са представени резултати от числени експерименти. Направени са сравнения с известни от литературата алгоритми. Същият подход е обобщен при построяване на итерационен метод за намиране на интервал $X^* \supseteq \{x \in X_0 : 0 \in F(x)\}$, където F е интервалнозначна функция на реален аргумент, а X_0 е предварително зададен интервал. Методът е изведен въз основа на теорията за диференциране на интервални функции. Формулираният алгоритъм с верификация на резултата е реализиран програмно на Pascal-SC и е приложен при изследване на статичната характеристика на процеса на метанова ферментация в условия на неопределеност. Числени резултати и графични изходи са дадени в Приложението. В т. 2.5 е формулиран интервален итерационен метод за едновременно пресмятане на всички реални нули на полином в предварително зададени интервали. Методът е изведен въз основа на теорията на интервалнозначните функции и техните производни. Доказана е сходимост на метода в случая, когато началните интервали се пресичат. Формулиран е алгоритъм с верификация на резултата, който е реализиран програмно на Pascal-SC. Алгоритъмът е приложен за намиране на собствени стойности на реална симетрична матрица.

Глава 3 е посветена на числени алгоритми с верификация на резултата за системи линейни и нелинейни алгебрични уравнения. Да разгледаме системата линейни уравнения $\check{A}x = b$ с реална квадратна $(n \times n)$-матрица $\check{A} = (a_{ij})$ и реален n-мерен вектор $b = (b_j)$. В много приложения елементите на матрицата $\check{A}$ и/или елементите на вектора b не са известни точно. Да предположим, че са известни интервали $A_{ij} \ni a_{ij}$, $B_j \ni b_j$. Нека $A = (A_{ij})$ е интервална матрица, а $B = (B_j)$ е интервален вектор. Множеството $\Sigma(A, B) = \{x \in R^n | \exists \check{A} \in A, \exists b \in B : \check{A}x = b\}$ се нарича множество от решения на интервалната линейна система $Ax = B$. В т. 3.2 е представена модификация и програмна реализация на предложения в [49]–[52], [121] метод за намиране на интервален вектор, съдържащ $\Sigma(A, B)$, в системата за компютърна алгебра *Maple V Release 3* [40]. Със създадения пакет програми Velisy са проведени множество числови експерименти, които показват целесъобразността от вграждане на числени алгоритми с верификация на резултатите в системи за компютърна алгебра. В т. 3.3 е представен итерационен метод от Нютонов тип за намиране на единствено решение на система нелинейни алгебрични уравнения в предварително зададен интервален вектор. При извеждането и формулирането на метода е използван стандартен подход за линеаризация и свеждане на задачата до решаване на интервална линейна система от вида $Ax = B$. Формулираният алгоритъм с верификация на резултата е реализиран в *Maple*, като са използвани както пакета Velisy за решаване на интервални линейни системи, така и възможностите на *Maple* за символна обработка. Техниката за пресмятане на обхвати на K-изотонни функции е използувана за намиране на оптимално решение $X = [\inf \Sigma(A, B), \sup \Sigma(A, B)]$ на тридиагонална линейна система с числова (точкова) матрица A и интервална дясна страна B (т. 3.4). Показано е, че чрез използуване само на стандартните (външните) интервално-аритметични операции, X може да се намери само в случая на M-матрици A. В т. 3.5 е изведен итерационен метод за намиране на единствен корен x^* на нелинейна система $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в случая, когато всяка функция f_i е K-изотонна. Намирането на корена x^* се свежда до решаване на ~~на~~ нелинейни уравнения на една променлива, за които е приложим някой от алгоритмите, описани в т. 2.2. Формулираният алгоритъм с верификация е реализиран програмно на Pascal-SC и са дадени резултати от числени експерименти.

Представените резултати са отразени в [1]–[17] както следва: резултати от първа глава са публикувани в [1], [6]–[8], [11], [17]; от втора глава – в [2], [3], [5], [9], [10], [12]; от трета глава – [4], [6], [13] [14]; от Приложението – в [15], [16].

Резултатите са докладвани на следните международни конференции, проведени у нас и в чужбина:

- International Symposium on Computer Arithmetic and Self-Validating Numerical Methods (SCAN-89), 2–6 октомври 1989 г., Базел, Швейцария; докладът е публикуван в [10].
- International Symposium on Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling (SCAN-90), 23–28 септември 1990 г., Албена, България; докладът е публикуван в [11].
- International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics (SCAN-93), 26–29 септември 1993 г., Виена, Австрия; изнесен доклад на тема "On an Interval Halley-like Method for Nonlinear Equations"; публикуван е в [5].
- Third International Conference "Advances in Numerical Methods and Applications $O(h^3)$", 21–26 август 1994 г., София, България; докладът е публикуван в [3].
- International Conference on Biomathematics and Bioinformatics (BIOMATH-95), 23–27 август 1995 г., София, България; докладът е публикуван в [16].

- International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics (SCAN-95), 26–29 септември 1995 г., Вупертал, Германия; докладът е публикуван в [6].

- First Workshop on Numerical Analysis and Application, 24–27 юни 1996 г., Русе, България; докладът е публикуван в [14].

- International Symposium on Interval Methods and Computer Aided Proofs in Science and Engineering (INTERVAL-96), 30 септември – 2 октомври 1996 г., Вюрцбург, Германия; представен постер на тема "Verified Solving of Nonlinear Systems in Maple".

- 3rd European Conference on Mathematics Applied to Biology and Medicine (ECMBM-96), 6–10 октомври 1996 г., Хайделберг, Германия; изнесен доклад на тема "Steady-States Analysis of Some Biotechnological Processes Under Uncertainties".

Изказвам най-искрена благодарност на научния си ръководител ст. н. с. Светослав Марков за помощта, постоянното му внимание и интерес към моята научна работа. Благодаря на колегите от секция „Биоматематика“ при ИМИ – БАН, за полезните разговори и обсъждания при оформянето на дисертационния труд.

ГЛАВА 1

ИНТЕРВАЛНА АРИТМЕТИКА И ОБХВАТИ НА ФУНКЦИИ

1.1 Предварителни бележки

Множеството на реалните числа ще означаваме с R. Нека $a, b \in R$. Интервал $[a, b]$, $a \leq b$, е компактно подмножество на R, дефинирано посредством $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$. Множеството от всички интервали ще означаваме с IR. Елементите на IR ще означаваме с главни латински букви A, B, C, ..., X, Y, а със съответната малка латинска буква ще означаваме произволна точка от интервала, напр. $a \in A$, $b \in B$ и т. н. За $A \in IR$ с A^- съответно A^+ ще означаваме левия, съответно десния край, на интервала A и ще записваме $A = [A^-, A^+]$. Тези "плюс-минус" означения за представяне краищата на интервалите са въведени в [83], [90], [92]. За $A \in IR$ символът A^s, $s \in \{+, -\}$, означава единия от краищата на A – левия или десния, в зависимост от стойността на s. За $s, t \in \{+, -\}$ дефинираме произведение st по следния начин: $++ = -- = +$, $+- = -+ = -$, така че $A^{++} = A^{--} = A^+, A^{+-} = A^{-+} = A^-$. Интервал A, за който $A^- = A^+ = a$, се нарича изроден (точков). Да означим със Z множеството от интервалите, съдържащи нула та, т. е.

$$Z = \{A \in IR : 0 \in A\} = \{A \in IR : A^- \leq 0 \leq A^+\}.$$

Тогава $IR \setminus Z$ е множеството от интервали, несъдържащи нула, т. е.

$$IR \setminus Z = \{A \in IR : 0 \notin A\} = \{A \in IR : A^- > 0 \text{ или } A^+ < 0\}.$$

Символите $\bigcap$, $\bigcup$ ще използуваме в обичайния теоретико-множествен смисъл.

Нека $A = [A^-, A^+]$, $B = [B^-, B^+] \in IR$. В IR теоретико-множествената релация за включване се представя с краища посредством

$$A \subseteq B \iff (B^- \leq A^-) \text{ и } (A^+ \leq B^+).$$

Функцията $\sigma : (IR \setminus Z) \bigcup \{[-a, 0], [0, a] : a > 0\} \bigcup [0, 0] \to \{+, -\}$, дефинирана посредством равенството [92]

$$\sigma(A) = \{+, \text{ ако } A^- \geq 0; \ -, \text{ ако } A^+ \leq 0\}, \ \sigma([0,0]) = +,$$

се нарича знак на интервала A. Знак на интервал не се дефинира за интервали, съдържащи нула като вътрешна точка, т. е. за интервали, които съдържат както положителни, така и отрицателни числа. Ако интервалът A е изроден, $A = [a, a] = a$, то $\sigma(A) = \sigma(a) = \{+, \text{ ако } a \geq 0; \ -, \text{ ако } a < 0\}$.

Дефинираме следните функционали:

$|\cdot| : IR \to [0, +\infty)$, $|A| = \max\{|A^-|, |A^+|\}$ – абсолютна стойност на A;

$]\cdot[: IR \to [0, +\infty)$,

$$]A[\ = \begin{cases} \min\{|A^-|, |A^+|\}, & \text{ако } A \in IR \setminus Z, \\ 0 & \text{в противен случай;} \end{cases}$$

$\omega : IR \to [0, +\infty)$, $\omega(A) = A^+ - A^-$ – ширина на A;

$\rho(A) = \frac{1}{2}\omega(A)$ – радиус на A;

$\mu : IR \to R$, $\mu(A) = \frac{1}{2}(A^- + A^+)$ – център на A;

$\chi : IR \setminus [0, 0] \to [-1, 1]$ (виж [111]),

$$\chi(A) = \{A^-/A^+, \text{ ако } \mu(A) \geq 0; \ A^+/A^-, \text{ ако } \mu(A) < 0\}.$$

Свързано обединение $\vee$ се дефинира по следния начин [98], [134]:

$$A \vee B = [\min\{A^-, B^-\}, \max\{A^+, B^+\}], \ A = [A^-, A^+], \ B = [B^-, B^+] \in IR.$$

Интервалът $A \vee B$ е интервалът с най-малка ширина, който съдържа интервалите A и B. Свързаното обединение $A \vee B$ ще използуваме често за случая, когато A и B са изродени интервали, $A = a \in R$, $B = b \in R$. В тези означения $a \vee b$ или $[a \vee b]$ се чете "интервал с краища a и b".

Твърдение 1.1 [25]. В сила са следните релации:
(a) $A \subseteq B \implies |A| \leq |B|, \ A, B \in IR$;

(б) $\omega(A) = |A| - \rceil A \lceil,\ A \in IR \setminus Z$;
(в) $|A| \le \omega(A),\ A \in Z$;
(г) $\rceil A \lceil \le \omega(A) \le |A|,\ A \in IR \setminus Z$.

В IR въвеждаме релацията $\preceq$, дефинирана посредством

$$A \preceq B \iff A^- \le B^- \text{ и } A^+ \le B^+,\ A, B \in IR.$$

Тази дефиниция се различава от общоприетата дефиниция $A \le B$ [101]: $A \le B \iff A^+ \le B^-$. Релацията $\le$ е дефинирана само за интервали A, B, за които $A \bigcap B = \emptyset$.

Операциите $+, -\ \times,\ /$ в IR се дефинират чрез равенството

$$A * B = \{a * b : a \in A, b \in B\},\ * \in \{+, -, \times, /\},$$

като в случая на / се предполага, че $B \in IR \setminus Z$ (виж [25], [59], [77], [98], [101], [109]–[113], [130], [134], [140]). Тази дефиниция на интервално-аритметичните операции не е удобна при практически приложения, напр. при програмна реализация. Използувайки "плюс-минус" означенията, можем да запишем интервално-аритметичните операции чрез краищата на операндите $A = [A^-, A^+]$, $B = [B^-, B^+]$ по следния начин [90], [92]:

$$\begin{aligned}
A + B &= [A^- + B^-, A^+ + B^+];\\
A - B &= [A^- - B^+, A^+ - B^-];\\
A \times B &= \begin{cases} [A^{-\sigma(B)} B^{\sigma(A)},\ A^{\sigma(B)} B^{-\sigma(A)}], & A, B \in IR \setminus Z;\\ [A^{\sigma(A)} B^{-\sigma(A)},\ A^{\sigma(A)} B^{\sigma(A)}], & A \in IR \setminus Z,\ B \in Z;\\ [A^{-\sigma(B)} B^{\sigma(B)},\ A^{\sigma(B)} B^{\sigma(B)}], & A \in Z,\ B \in IR \setminus Z;\\ [\min\{A^- B^+, A^+ B^-\}, \max\{A^- B^-, A^+ B^+\}], & A, B \in Z;\end{cases}\\
A/B &= \begin{cases} [A^{-\sigma(B)}/B^{\sigma(A)}, A^{\sigma(B)}/B^{-\sigma(A)}], & A, B \in IR \setminus Z;\\ [A^{-\sigma(B)}/B^{-\sigma(B)}, A^{\sigma(B)}/B^{-\sigma(B)}], & A \in Z,\ B \in IR \setminus Z.\end{cases}
\end{aligned}$$

В специалния случай, когато A е изроден интервал, $A = [a, a] = a$, $a \in R$, имаме $A \times B = a \times B = aB = [aB^{-\sigma(a)},\ aB^{\sigma(a)}] = \{[aB^-, aB^+]$, ако $a \ge 0$; $[aB^+, aB^-]$, ако $a < 0\}$. За $a = -1$ получаваме $(-1) \times B = -B = [-B^+, -B^-]$. При $a = 1$ и $B \in IR \setminus Z$ имаме $1/B = [1/B^+, 1/B^-]$. Интервалът $1/B$ се нарича реципрочен интервал на B [92]. Операциите $-$ и / могат да се изразят по следния начин:

$$A - B = A + (-B); \qquad A/B = A \times (1/B),\ B \in IR \setminus Z. \tag{1}$$

Разширена интервална аритметика. В IR въвеждаме още четири операции $+^-$, $-^-$, $\times^-$ и $/^-$ [84] – [93]. За тази цел дефинираме функционалите $\phi : IR^2 \to \{+,-\}$, $\psi : (IR \setminus \{0\})^2 \to \{+,-\}$, посредством

$$\begin{aligned}
\phi(A,B) &= \sigma(\omega(A)-\omega(B)) \\
&= \{+, \text{ ако } \omega(A) \geq \omega(B);\ -, \text{ в противен случай}\}; \\
\psi(A,B) &= \sigma(\chi(A)-\chi(B)) \\
&= \{+, \text{ ако } \chi(A) \geq \chi(B);\ -, \text{ в противен случай}\}.
\end{aligned}$$

Нека $A = [A^-, A^+]$, $B = [B^-, B^+] \in IR$. Операциите $+^-$, $-^-$, $\times^-$, $/^-$ се дефинират чрез краищата на операндите по следния начин:

$$\begin{aligned}
A +^- B &= [A^{-\gamma} + B^{\gamma}, A^{\gamma} + B^{-\gamma}],\ \gamma = \phi(A,B),\ A, B \in IR; \\
A -^- B &= [A^{-\gamma} - B^{-\gamma}, A^{\gamma} - B^{\gamma}],\ \gamma = \phi(A,B),\ A, B \in IR, \\
A \times^- B &= \begin{cases} [A^{\sigma(B)\varepsilon} B^{-\sigma(A)\varepsilon}, A^{-\sigma(B)\varepsilon} B^{\sigma(A)\varepsilon}],\ \varepsilon = \psi(A,B),\ A, B \in IR \setminus Z, \\ [A^{-\sigma(A)} B^{-\sigma(A)}, A^{-\sigma(A)} B^{\sigma(A)}],\ A \in IR \setminus Z,\ B \in Z, \\ [A^{-\sigma(B)} B^{-\sigma(B)}, A^{\sigma(B)} B^{-\sigma(B)}],\ A \in Z,\ B \in IR \setminus Z, \\ [\max\{A^- B^+, A^+ B^-\}, \min\{A^- B^-, A^+ B^+\}],\ A, B \in Z. \end{cases} \\
A /^- B &= \begin{cases} [A^{\sigma(B)\varepsilon} / B^{\sigma(A)\varepsilon}, A^{-\sigma(B)\varepsilon} / B^{-\sigma(A)\varepsilon}],\ \varepsilon = \psi(A,B),\ A, B \in IR \setminus Z; \\ [A^{-\delta}/B^{\delta}, A^{\delta}/B^{\delta}],\ \delta = \sigma(B),\ A \in Z,\ B \in IR \setminus Z. \end{cases}
\end{aligned}$$

Аналогично на $-$ и $/$, за операциите $-^-$, $/^-$ са в сила представянията

$$A -^- B = A +^- (-B); \qquad A /^- B = A \times^- (1/B),\ B \in IR \setminus Z. \tag{2}$$

Операциите $+, -, \times, /$ и операциите $+^-, -^-, \times^-, /^-$ са свързани посредством включването

$$A *^- B \subseteq A * B,\ * \in \{+, -, \times, /\}.$$

Това включване ни дава основание да наричаме операциите $+$, $-$, $\times$, $/$ външни (стандартни) операции между интервали, а операциите $+^-$, $-^-$, $\times^-$, $/^-$ — вътрешни (нестандартни) [90], [92].

Външните (стандартните) интервално-аритметични операции $+, -, \times, /$ са изотонни по включване в следния смисъл [25], [98]:

$$X_1 \subseteq X,\ Y_1 \subseteq Y \Longrightarrow X_1 * Y_1 \subseteq X * Y,\ * \in \{+, -, \times, /\},\ X, X_1, Y, Y_1 \in IR.$$

Операциите $-$, $-^-$, $/$ и $/^-$ имат следните свойства:

$$A - A = [-\omega(A), \omega(A)] \ni 0, \quad A -^- A = 0, \ A \in IR; \tag{3}$$
$$A/A = [\chi(A), 1/\chi(A)] \ni 1, \quad A/^- A = 1, \ A \in IR \setminus Z.$$

Множеството от интервално-аритметичните операции $+, -, \times, /, +^-, -^-, \times^-, /^-$ върху IR заедно с техните свойства се нарича разширена интервална аритметика (на Марков) [30]. Множеството от интервално-аритметичните операции $+, -, \times, /$ се нарича интервална аритметика. Последната се приписва обикновено на Р. Мур [98], но е въведена в по-ранните работи на Р. Янг [140] и Т. Сунага [134].

За $A, B \in IR$ пишем $A \asymp B$, ако е изпълнено $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$. В противен случай ще означаваме $A \not\asymp B$. Ще отбележим, че $0 \in A$, $0 \notin A$ са еквивалентни съответно на $0 \asymp A$, $0 \not\asymp A$. Следващото твърдение показва връзка между $\asymp$ и операцията $-^-$.

Твърдение 1.2 [86]. За $A, B \in IR$, $A -^- B \asymp 0$ тогава и само тогава, когато $A \asymp B$. Алтернативно, $0 \not\asymp A -^- B$ точно тогава, когато $A \not\asymp B$.

Следващите твърдения често се използуват в приложенията.

Твърдение 1.3 [17]. За $A, B, C \in IR$ е изпълнено равенството

$$(A -^- B) -^- C = \begin{cases} (A -^- C) -^- B, & \omega(A) \geq \omega(C), \ \omega(A) \geq \omega(B); \\ (A -^- C) \ - \ B, & \omega(A) \geq \omega(C), \omega(A) < \omega(B); \\ (A \ - \ C) -^- B, & \omega(A) < \omega(C). \end{cases}$$

Твърдение 1.4 [87]. Нека $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$. Тогава

$$[(\alpha + \beta) \vee (\gamma + \delta)] \ = \ \begin{cases} [\alpha \vee \gamma] + [\beta \vee \delta], & (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) \geq 0, \\ [\alpha \vee \gamma] +^- [\beta \vee \delta], & (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) < 0; \end{cases}$$
$$[(\alpha - \beta) \vee (\gamma - \delta)] \ = \ \begin{cases} [\alpha \vee \gamma] -^- [\beta \vee \delta], & (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) \geq 0, \\ [\alpha \vee \gamma] - [\beta \vee \delta], & (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) < 0. \end{cases}$$

Твърдение 1.5 [87]. Нека $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ са такива, че $\alpha\gamma > 0$ и $\beta\delta > 0$. Тогава

$$[(\alpha\beta) \vee (\gamma\delta)] \ = \ \begin{cases} [\alpha \vee \gamma] \times [\beta \vee \delta], & (|\alpha| - |\gamma|)(|\beta| - |\delta|) \geq 0, \\ [\alpha \vee \gamma] \times^- [\beta \vee \delta], & (|\alpha| - |\gamma|)(|\beta| - |\delta|) < 0; \end{cases}$$

$$[(\alpha/\beta) \vee (\gamma/\delta)] = \begin{cases} [\alpha \vee \gamma]/^-[\beta \vee \delta], & (|\alpha| - |\gamma|)(|\beta| - |\delta|) \geq 0, \\ [\alpha \vee \gamma]/[\beta \vee \delta], & (|\alpha| - |\gamma|)(|\beta| - |\delta|) < 0. \end{cases}$$

В IR е в сила т. нар. субдистрибутивен закон [25], [110]

$$(A + B) \times C \subseteq A \times C + B \times C, \quad A, B, C \in IR.$$

Условията, при които е изпълнено равенството $(A+B) \times C = A \times C + B \times C$ са дадени в [110]. В сила е следният условно-дистрибутивен закон (правило за разкриване на скоби в интервално-аритметичен израз):

Теорема 1.6 [110]. Имаме $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ тогава, когато е изпълнено едно от следните условия:

1. $A, B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$;
2. $A, B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$;
3. $A, B, C \in Z$, $\chi(A) \leq \chi(C)$, $\chi(B) \leq \chi(C)$;
4. $A, B, C \in Z$, $\mu(A)\mu(B) \geq 0$, $\chi(A) \geq \chi(C)$, $\chi(B) \geq \chi(C)$.

С помощта на операциите на разширената интервална аритметика Теорема 1.6 може да бъде допълнена по следния начин:

Теорема 1.7 [85]. За $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$, е изпълнено:

$$(A + B) \times C = \begin{cases} A \times C + B \times^- C, & \sigma(A + B) = \sigma(A),\ \chi(C) \geq \chi(B); \\ A \times C +^- B \times^- C, & \sigma(A + B) = \sigma(A),\ \chi(C) \leq \chi(B); \\ A \times^- C + B \times C, & \sigma(A + B) = \sigma(B),\ \chi(C) \geq \chi(A); \\ A \times^- C +^- B \times C, & \sigma(A + B) = \sigma(B),\ \chi(C) \leq \chi(A). \end{cases}$$

По-нататък често ще използваме означения от вида λa, където $\lambda \in \{+, -\}$, $a \in R$. По дефиниция полагаме

$$\lambda a = \{-a, \text{ ако } \lambda = -;\ a, \text{ ако } \lambda = +\}.$$

Символът λ може да бъде и произведение от вида $\lambda = st$, $s, t \in \{+, -\}$, което дефинирахме по-горе.

Теорема 1.8 [85]. Имаме $(A +^- B) \times C = A \times C +^- B \times C$ тогава, когато е изпълнено едно от следните условия:

1. $A, B, A +^- B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$, $\sigma(A)\sigma(A +^- B))(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0$;
2. $A, B, A +^- B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$;
3. $A, B, A +^- B, C \in Z$, $\max\{\chi(A), \chi(B), \chi(A +^- B)\} \leq \chi(C)$;
4. $A, B, A +^- B, C \in Z$, $\min\{\chi(A), \chi(B), \chi(A +^- B)\} \geq \chi(C)$, $\mu(A)\mu(B) \geq 0$, $\mu(A)\mu(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0$.

Ако $A, B, C, A +^- B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$, $\sigma(A)\sigma(A +^- B))(\rho(A) - \rho(B)) \leq 0$, то

$$(A +^- B) \times C \;=\; \begin{cases} A \times^- C \; +^- \; B \times^- C, & (\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \geq 0, \\ A \times^- C \; + \; B \times^- C, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Теорема 1.9 [85]. За $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$, е изпълнено

$$(A +^- B) \times C \;=\; \begin{cases} A \times C \; +^- \; B \times^- C, & \rho(A) \geq \rho(B),\ \chi(C) \geq \chi(B); \\ A \times C \; + \; B \times^- C, & \rho(A) \geq \rho(B),\ \chi(C) \leq \chi(B); \\ A \times^- C \; +^- \; B \times C, & \rho(A) \leq \rho(B),\ \chi(C) \geq \chi(A); \\ A \times^- C \; + \; B \times C, & \rho(A) \leq \rho(B),\ \chi(C) \leq \chi(A). \end{cases}$$

Обхвати на функции. Да означим с IR^n множеството от n-мерни вектори с компоненти от IR, т.е. $X \in IR^n$, ако $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $X_i = [X_i^-, X_i^+] \in IR$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. Елементите на IR^n ще наричаме интервални вектори. В IR^n релацията $\subseteq$ се дефинира покомпонентно: за $X, Y \in IR^n$ е изпълнено $X \subseteq Y \iff X_i \subseteq Y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Нека $D \subseteq R^n$. Да означим с $ID = \{X \in IR^n : X \subseteq D\}$. Всяка функция $F : ID \to IR$ се нарича интервална (или интервално-значна) функция на n интервални аргументи, а всяка функция $F : D \to IR$ се нарича интервална функция на n реални аргументи. В двата случая ще наричаме F интервална функция. В случаите, когато трябва да се направи разлика между двата вида интервални функции, това ще бъде специално указано. Някои свойства на интервалните функции ще разгледаме в т. 2.1.

Дефиниция 1.10 [25]. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R^n$, е непрекъсната и $X \in ID$. Интервалът $f(X) = [\min\{f(x) : x \in X\}, \max\{f(x) : x \in X\}]$ се нарича обхват на функцията f в интервалния вектор X.

За краткост ще пишем също $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.

Всяка реалнозначна непрекъсната функция $f : D \to R$, $D \subseteq R^n$, поражда интервална функция $f_R : ID \to IR$, дефинирана за $X \in ID$ с равенството $f_R(X) = f(X)$. Интервалната функция f_R се нарича функция–обхват или просто обхват [112].

Едно от най-важните приложения на разширената интервална аритметика е в пресмятането на обхвати на непрекъснати монотонни функции.

Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъсната и монотонна функция в D. Да предположим, че f може да се представи във вида $f = f_1 * f_2$, където $* \in \{+, -, \times, /\}$. За $X = [X^-, X^+] \in ID$ да означим с $f_i(X)$ обхвата на f_i, $i = 1, 2$, в X. Дефинираме величините

$$\begin{aligned} \delta(f_i(X)) &= f_i(X^-) - f_i(X^+), \\ \varrho(f_i(X)) &= |f_i(X^-)| - |f_i(X^+)|, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Теорема 1.11 [87]. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъсната и монотонна в $X \in ID$ и нека $f = f_1 * f_2$, $* \in \{+, -, \times, /\}$. Да предположим, че за $* \in \{+, -\}$ функциите f_1 и f_2 са монотонни, а за $* \in \{\times, /\}$ са монотонни функциите $|f_1|$ и $|f_2|$. Тогава е в сила следното представяне за обхвата $f(X)$:

(а) $f = f_1 + f_2$:

$$f(X) = \begin{cases} f_1(X) + f_2(X), & \text{ако } \delta(f_1(X)) \cdot \delta(f_2(X)) \geq 0, \\ f_1(X) +^- f_2(X), & \text{в противен случай;} \end{cases}$$

(б) $f = f_1 - f_2$:

$$f(X) = \begin{cases} f_1(X) -^- f_2(X), & \text{ако } \delta(f_1(X)) \cdot \delta(f_2(X)) \geq 0, \\ f_1(X) - f_2(X), & \text{в противен случай;} \end{cases}$$

(в) $f = f_1 \times f_2$:

$$f(X) = \begin{cases} f_1(X) \times f_2(X), & \text{ако } \varrho(f_1(X)) \cdot \varrho(f_2(X)) \geq 0, \\ f_1(X) \times^- f_2(X), & \text{в противен случай;} \end{cases}$$

(г) $f = f_1/f_2$, $f_2(x) \neq 0$ за всяко $x \in X$:

$$f(X) = \begin{cases} f_1(X) /^- f_2(X), & \text{ако } \varrho(f_1(X)) \cdot \varrho(f_2(X)) \geq 0, \\ f_1(X)/f_2(X), & \text{в противен случай;} \end{cases}$$

Забележка 1.12. Условията $\delta(f_1(X)) \cdot \delta(f_2(X)) \geq 0$ съответно $\varrho(f_1(X)) \cdot \varrho(f_2(X)) \geq 0$ означават, че функциите f_1, f_2 съответно $|f_1|$, $|f_2|$ са едновременно изотонни (монотонно ненамаляващи) или антитонни (монотонно нерастящи) в X. В случая, когато $f = f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$ и всички функции $|f_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$, са или изотонни или антитонни в разглеждания интервал X, получаваме следното представяне за $f(X)$:

$$f(X) = f_1(X) \times f_2(X) \times \cdots \times f_n(X).$$

Пример 1.1 [87]. $f(x) = x - x^2$, $x \in R$.

Представяме $f = f_1 - f_2$, където $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2 = x \cdot x$. Обхватът на f_2 може да се пресметне за интервали $X \not\ni 0$, тъй като тогава $|x|$ е изотонна функция. Съгласно Теорема 1.11(в) за такива интервали имаме $f_2(X) = X \times X = X^2$. Прилагайки Теорема 1.11(б) виждаме, че обхватът на f може да се пресметне за интервали X, такива че $X \not\ni 0$ и $X \not\ni 0.5$ като вътрешни точки. Получаваме

$$f(X) \;=\; \begin{cases} X -^{-} X^2, & \text{ако } X \subset [0, 0.5] \text{ или } X \geq 0.5; \\ X - X^2, & \text{ако } X \leq 0. \end{cases}$$

Компютърна аритметика и програмни езици за научни изчисления. Когато възникват първите програмни езици през 50-те години, спецификацията на аритметиката, вградена в компютрите, е оставена на производителите на компютри. Като следствие от това потребителят не може да прецени какво се случва, когато използува символите $+$, $-$, $*$ или $/$. Нещо повече, компютри от два различни типа могат да се различават и по свойствата на аритметиките си. В литературата са известни множество примери (вж. [118], [122], [135]), които показват, че обичайната аритметика с плаваща точка не може да осигури пресмятането на надеждни и точни резултати. В последните 25 години от Кулиш и Миранкер [78]–[80] е създадена строга математическа теория на компютърна аритметика, която накратко ще представим по-долу.

Компютрите работят с крайно подмножество от реални числа. Най-често тези числа се представят като числа с плаваща точка. Едно число с плаваща точка е от вида

$$x = \pm m \cdot b^e = \pm 0.m_1 m_2 \ldots m_l \cdot b^e,$$

където m е мантиса със знак и с фиксирана дължина l; l е цяло число, $l \geq 1$, показващо максималния брой цифри, използувани за представянето на x; b е цяло число, $b \geq 2$ и се нарича основа, а e е експонентата. Цифрите на мантисата са ограничени от $1 \leq m_1 \leq b-1$ и $0 \leq m_i \leq b-1$, $i = 2, \ldots, l$. Тъй като $\frac{1}{b} \leq m < 1$, x се нарича нормализирано число с плаваща точка. Експонентатта му е ограничена от $e_1 \leq e \leq e_2$. Множеството от всички числа x заедно с числото $+0.00\ldots0 \cdot b^{e_1}$ като единствено представяне за нулата, образуват системата от числа с плаваща точка $S = S(b, l, e_1, e_2)$. Елементите на S ще наричаме още машинни (компютърни) числа. Най-голямото и най-малкото машинни числа в S са $x_{\max} = 0.(b-1)(b-1)\ldots(b-1) \cdot b^{e_2}$ и $x_{\min} = 0.10\ldots0 \cdot b^{e_1}$. Очевидно елементите на S не са разпределени равномерно, но са подредени симетрично около нулата, така че от $x \in S$ следва $-x \in S$. Реалните числа, лежащи в интервала $[x_{\min}, x_{\max}]$ могат да се апроксимират с машинните числа от S. Тази апроксимация се постига чрез т. нар. закръгляване. Изображението $\square : R \to S$ се нарича закръгляване, ако притежава следните свойства [78]:

(а) $\square x = x$ за всяко $x \in S$ (проекция)

и

(б) $x \leq y \implies \square x \leq \square y$ за всеки $x, y \in R$. (монотонност)

Ако едно закръгляване притежава свойството

(в) $\square(-x) = -\square x$ за всяко $x \in R$,

то се нарича антисиметрично. Най-често използуваните антисиметрични закръглявания са закръгляване към нулата, закръгляване настрани от нулата или закръгляване към най-близкото машинно число. С помощта на закръгляването $\square$ се въвеждат операции $\boxed{*}$, $* \in \{+, -, \times, /\}$, между числа в плаваща точка:

(г) $x \boxed{*} y = \square(x * y),\ x, y \in S,\ * \in \{+, -, \times, /\}$.

Изображение, удовлетворяващо свойствата (а), (б), (в) и (г) се нарича семиморфизъм [78]–[80]. Операциите, дефинирани посредством (г), (а) и (б), са максимално точни в смисъл, че не съществува елемент от S, лежащ между точния резултат $x * y$, пресметнат в R, и неговото машинно приближение $x \boxast y$, пресметнато в S. В този случай е в сила оценката

$$\left|\frac{x * y - x \boxast y}{x * y}\right| \leq \frac{1}{2} b^{-l+1}$$

и казваме, че относителната точност е 0.5 ulp (англ. unit in the last place).

Особен интерес за числените алгоритми с верификация на резултата представляват т. нар. насочени закръглявания $\nabla, \Delta : R \to S$. Дефинираме

$$\begin{aligned} \nabla x &= \max\{a \in S : a \leq x\}, \\ \Delta x &= \min\{a \in S : a \geq x\}. \end{aligned}$$

Очевидно ∇, Δ удовлетворяват (а) и (б). Казваме, че машинното число ∇x е получено от x чрез закръгляване надолу (наляво) или чрез закръгляване с недостиг, а машинното число Δx — чрез закръгляване нагоре (надясно) или закръгляване с излишък. В сила е равенството $\Delta x = - \nabla(-x)$ за $x \in R$. Насочените закръглявания пораждат съгласно (г) операциите

$$\begin{aligned} a \mathbin{\overset{*}{\nabla}} b &= \nabla(a * b), \ a, b \in S; \ * \in \{+, -, \times, /\}; \\ a \mathbin{\overset{*}{\Delta}} b &= \Delta(a * b), \ a, b \in S; \ * \in \{+, -, \times, /\}. \end{aligned}$$

Насочените закръглявания ∇, Δ дават възможност за приближаване на реални интервали чрез машинни. Да означим с IS множеството от всички интервали, чиито краища са машини числа, т. е. $IS = \{[x_1, x_2] : x_1, x_2 \in S, x_1 \leq x_2\}$. Елементите на IS ще наричаме машинни (компютърни) интервали. Нека $A \in IR$, $A = [A^-, A^+]$. Ако $A \subseteq [x_{\min}, x_{\max}]$, можем да намерим $\Diamond A = [\nabla A^-, \Delta A^+]$. Очевидно машинният интервал $\Diamond A$ съдържа реалния интервал A; нещо повече, $\Diamond A$ е най-малкият машинен интервал, съдържащ реалния интервал A. Така въведеното закръгляване $\Diamond : IR \to IS$ се нарича закръгляване навън или закръгляване с раздуване на реални интервали. В сила е следното включване

$$A \subseteq B \Longrightarrow \Diamond A \subseteq \Diamond B.$$

Закръглянето $\Diamond$ поражда компютърни интервално-аритметични операции

$$\begin{aligned} A \langle * \rangle B &= \Diamond(A * B), \ A, B \in IS, \\ & * \in \{+, +^-, -, -^-, \times, \times^-, /, /^-\}. \end{aligned}$$

От практическа гледна точка насочените закръглявания $\triangledown$, $\triangle$, $\Diamond$ произвеждат машинни числа или интервали, които дават най-доброто (оптимално) приближение, а резултатът от коя да е компютърно-аритметична операция е най-доброто (оптимално) приближение на съответния реално-аритметичен резултат. Този принцип е възприет при дефинирането на аритметичните операции в S в IEEE стандарта за компютърна аритметика ([64], вж. също [34]) и е разширен по-нататък за изчислителни пространства с по-голяма размерност. Така например S^n е пространството от n-мерните вектори с компоненти от S в резолюцията на $GAMM$ ([135], стр. 301–302) за компютърна аритметика от 1987 г. В S^n е въведена [78]– [80], [135] още една основна операция – скаларно произведение с максимална точност (точно скаларно произведение) $\boxdot$, която се дефинира за $u = (u_1; u_2, \ldots, u_n), v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in S^n$ по следния начин:

$$u \boxdot v = \square(u \cdot v), \quad u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

и $\square$ е кое да е от горепосочените закръглявания.

Множеството от всички компютърно-аритметични операции, включително и в изчислителните пространства с по-голяма размерност, заедно с техните свойства се нарича компютърна аритметика.

През последните двадесет години се появяват езици от високо ниво, поддържащи компютърно-аритметични операции между предефинирани типове данни както от основното изчислително пространство S, така и в пространствата с по-голяма размерност S^n, $S^{n\times n}$, включително и точно скаларно произведение, и в съответните интервални пространства IS, IS^n и $IS^{n\times n}$. Всички тези операции са с максимална точност и са вградени ефективно. През 1976–1979 г. в Университетите Карлсруе и Кайзерслаутерн, Германия, е създаден Pascal-SC като разширение на Pascal за научни изчисления (англ. Pascal for Scientific Computation) и е внедрен като компилатор на различни машини [33], [35], [76]. По-късно, в резултат на съвместна работа между фирмата IBM и Института по приложна математика на Универсистет Карлсруе възниква разширение на Fortran 77 за машини IBM/370. Резултатът от тази работа е известен днес като ACRITH-XSC [65] и се разпространява като програмен продукт от IBM. Успоредно с развитието на ACRITH-XSC възниква езикът за научни изчисления Pascal-XSC [68], а в последните години и C-XSC [69]. Например езикът Pascal-SC използва системата от числа с плаваща точка

$S(10,12,-99,+99)$, като аритметиката е с максимална точност и с насочени закръглявания; аритметиката е внедрена не само за числа от тип *real*, но така също и за комплексни (машинни) числа, (машинни) интервали, както и за вектори и матрици върху тези типове. Pascal-SC поддържа точно скаларно произведение за вектори с произволна дължина. Чрез т. нар. универсална операторна концепция потребителят може да дефинира оператори за работа с нестандартни типове данни чрез препокриване на символите за обичайните математически операции. Освен това препокриване Pascal-SC позволява на потребителя да дефинира оператори с произволни имена и да им присвоява приоритет. Pascal-SC поддържа стандартни функции с максимална точност за основните типове данни *real, complex, interval, complex interval*, външни библиотеки от прекомпилиран код, които компилаторът свързва с потребителска програма, библиотеки от текстов (source) код, който може да бъде компилиран като част от потребителската програма.

1.2 Условно-дистрибутивни закони

Означения, дефиниции и твърдения. За приложенията се оказва удобно още едно представяне на интервалите, което може да се разглежда като обобщение на представянето на един интервал чрез краищата му. Да означим с $\overline{R} = R\bigcup\{+\infty\}$ и нека $\lambda \in \overline{R}$. За $A \in IR$, $A = [A^-, A^+]$, с $A^{+\lambda}$ и $A^{-\lambda}$ означаваме краищата

$$A^{+\lambda} = \begin{cases} A^-, & \lambda \le \mu(A), \\ A^+, & \text{в противен случай;} \end{cases} \qquad A^{-\lambda} = \begin{cases} A^+, & \lambda \le \mu(A), \\ A^-, & \text{в противен случай.} \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно можем да запишем $A^{+\lambda} = A^{\sigma(\lambda-\mu(A))}$, $A^{-\lambda} = A^{-\sigma(\lambda-\mu(A))}$. Казваме, че $A^{+\lambda}$ е този край на интервала A, който е разположен "по-близо" до числото λ, а $A^{-\lambda}$ е този край, който лежи "по-далеко" от λ. В сила е неравенството $|A^{+\lambda} - \lambda| \le |A^{-\lambda} - \lambda|$. За да запишем A с краищата $A^{+\lambda}$ и $A^{-\lambda}$ ще използуваме означението $A = [A^{+\lambda} \vee A^{-\lambda}]$. В частност при $\lambda = +\infty$ получаваме представянето $A = [A^{-\infty}, A^{+\infty}]$ и изпускайки символа ∞ получаваме въведеното по-горе "плюс-минус" представяне. При $\lambda = 0$ получаваме $A = [A^{-0} \vee A^{+0}]$, където A^{+0} е по-близкия до нулата край на A, а A^{-0} е по-далечния. Тогава функционалът $\chi : IR \setminus [0,0] \to [-1,1]$, въведен по-горе, се дефинира като $\chi(A) = A^{+0}/A^{-0}$, а $|A| = |A^{-0}|$.

Операциите на разширената интервална аритметика $\times$, $/$, $+^-$, $-^-$, $\times^-$, $/^-$ могат да се представят в по-обозрим вид по следния начин: нека $A,\ B \in IR$, $A = [A^-, A^+] = [A^{+0} \vee A^{-0}]$, $B = [B^-, B^+] = [B^{+0} \vee B^{-0}]$; тогава

$$
\begin{aligned}
A \times B &= \begin{cases} [A^{+0}B^{+0} \ \vee \ A^{-0}B^{-0}], \ A, B \in IR \setminus Z, \\ B^{-0}A = [B^{-0}A^- \ \vee \ B^{-0}A^+], \ A \in Z, \ B \in IR \setminus Z, \\ A^{-0}B = [A^{-0}B^- \ \vee \ A^{-0}B^+], \ A \in IR \setminus Z, \ B \in Z, \\ [\min\{A^+B^-, A^-B^+\}, \ \max\{A^+B^+, A^-B^-\}], \ A, B \in Z; \end{cases} \\
A \ / \ B &= \begin{cases} [A^{+0}/B^{-0} \ \vee \ A^{-0}/B^{+0}], \ A, B \in IR \setminus Z, \\ A/B^{+0} = [A^-/B^{+0} \ \vee \ A^+/B^{+0}], \ A \in Z, B \in IR \setminus Z; \end{cases} \\
A +^- B &= [A^- + B^+ \ \vee \ A^+ + B^-]; \\
A -^- B &= [A^- - B^- \ \vee \ A^+ - B^+]; \\
A \times^- B &= \begin{cases} [A^{-0}B^{+0} \ \vee \ A^{+0}B^{-0}], \ A, B \in IR \setminus Z, \\ B^{+0}A = [B^{+0}A^- \ \vee \ B^{+0}A^+], \ A \in Z, \ B \in IR \setminus Z, \\ A^{+0}B = [A^{+0}B^- \ \vee \ A^{+0}B^+], \ A \in IR \setminus Z, \ B \in Z, \\ [\max\{A^+B^-, A^-B^+\}, \ \min\{A^+B^+, A^-B^-\}], \ A, B \in Z; \end{cases} \qquad (5) \\
A \ /^- B &= \begin{cases} [A^{+0}/B^{+0} \ \vee \ A^{-0}/B^{-0}], \ A, B \in IR \setminus Z, \\ A/B^{-0} = [A^-/B^{-0} \ \vee \ A^+/B^{-0}], \ A \in Z, \ B \in IR \setminus Z. \end{cases} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Нека $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \overline{R}$ и A има относно λ_1 представяне $A = [A^{+\lambda_1} \vee A^{-\lambda_1}]$, а спрямо λ_2 – представяне $A = [A^{+\lambda_2} \vee A^{-\lambda_2}]$. Съществува следната връзка между двата начина на представяне на A:

$$
\begin{aligned}
A^{+\lambda_1} &= \begin{cases} A^{+\lambda_2}, & (\lambda_1 - \mu(A))(\lambda_2 - \mu(A)) \geq 0, \\ A^{-\lambda_2}, & \text{в противен случай}; \end{cases} \\
A^{-\lambda_1} &= \begin{cases} A^{-\lambda_2}, & (\lambda_1 - \mu(A))(\lambda_2 - \mu(A)) \geq 0, \\ A^{+\lambda_2}, & \text{в противен случай}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Можем да направим още едно обобщение на представянето (4), като вместо число $\lambda \in \overline{R}$ разгледаме интервал $\Lambda = [\Lambda^-, \Lambda^+] \in IR$. При предположение, че $\Lambda \bigcap A = \emptyset$ можем да запишем $A = [A^{-\Lambda} \vee A^{+\Lambda}]$, където

$$
\begin{aligned}
&\text{при} \ \ \Lambda^+ < A^- : \begin{cases} A^{+\Lambda} = A^{+\Lambda^-} = A^{+\Lambda^+} = A^-, \\ A^{-\Lambda} = A^{-\Lambda^-} = A^{-\Lambda^+} = A^+; \end{cases} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (7) \\
&\text{при} \ \ \Lambda^- > A^+ : \begin{cases} A^{+\Lambda} = A^{+\Lambda^-} = A^{+\Lambda^+} = A^+, \\ A^{-\Lambda} = A^{-\Lambda^-} = A^{-\Lambda^+} = A^-; \end{cases}
\end{aligned}
$$

Твърдение 1.13. Нека $A, B \in IR$.
(а) От $A -^- B \asymp A$ следва $0 \in B$;
(б) Ако $0 \in B$ и $\omega(A) \geq \omega(B)$, то $A -^- B \asymp A$;
(в) От $0 \notin B$ следва $A -^- B \not\asymp A$;
(г) Ако $A -^- B \not\asymp A$, то или $0 \notin B$ или ($0 \in B$ и $\omega(A) < \omega(B)$) .

Доказателство. Съгласно Твърдение 1.2, $A -^- B \asymp A$ е еквивалентно на $0 \in (A -^- B) -^- A$. Прилагайки Твърдение 1.3 към разликата $(A -^- B) -^- A$, получаваме

$$(A -^- B) -^- A = \begin{cases} (A -^- A) -^- B, & \omega(A) \geq \omega(B), \\ (A - A) -^- B, & \text{в противен случай}; \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -B, & \omega(A) \geq \omega(B), \\ [-\omega(A), \omega(A)] -^- B, & \text{в противен случай}. \end{cases}$$

Да предположим първо, че $\omega(A) \geq \omega(B)$. Тогава $0 \in (A -^- B) -^- A$ е еквивалентно с $0 \in B$, а $0 \notin B$ е еквивалентно на $0 \notin (A -^- B) -^- A$, т. е. $(A -^- B) \not\asymp A$, което доказва (б).

Да разгледаме случая $\omega(A) < \omega(B)$. Тогава $(A -^- B) \asymp A$ е еквивалентно на $0 \in (A -^- B) -^- A = [-\omega(A), \omega(A)] -^- B$, т. е. на $[-\omega(A), \omega(A)] \asymp B$. Имаме две възможности: (i) $[-\omega(A), \omega(A)] \subseteq B$, което води до $0 \in B$, и (ii) $[-\omega(A), \omega(A)] \supseteq B$, което заедно с неравенството $\omega(A) < \omega(B)$ дава $0 \in B$. Това доказва (а).

Сега да приемем, че $0 \notin B = [B^-, B^+]$. Това означава, че $B^- B^+ > 0$. Ще покажем, че произведението от краищата на интервала $[-\omega(A), \omega(A)] -^- B = [(-\omega(A) - B^-) \vee (\omega(A) - B^+)]$ е положително. Наистина,

$$\begin{aligned} (-\omega(A) - B^-)(\omega(A) - B^+) &= -\omega^2(A) + \omega(A)\omega(B) + B^- B^+ \\ &= \omega(A)(\omega(B) - \omega(A)) + B^- B^+ > 0, \end{aligned}$$

тъй като по предположение $\omega(A) < \omega(B)$. Последното неравенство означава $0 \notin [-\omega(A), \omega(A)] -^- B$, т. е. $0 \notin (A -^- B) -^- A$, с което (в) е доказано. Обратно, нека е изпълнено $0 \notin (A -^- B) -^- A$. Тогава $[-\omega(A), \omega(A)] \not\asymp B$, което може да означава $0 \in B$ или $0 \notin B$. □

В следващите твърдения са дадени някои свойства на функционала χ.

Твърдение 1.14. Нека $A, B, A + B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A + B) = \sigma(A) = -\sigma(B)$. Тогава:

(а) $\chi(A) \leq \chi(C) \Longrightarrow \chi(A+B) \leq \chi(C)$;
(б) $\chi(A) \geq \chi(C) \Longrightarrow \chi(A+B) \geq \chi(C)$.

Твърдение 1.15. Нека $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$. Тогава от $\chi(A) \geq \chi(C)$, $\chi(B) \geq \chi(C)$ следва $\chi(A+B) \geq \chi(C)$.

Твърдение 1.16. Нека $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$. Тогава от $\chi(A) \geq \chi(C)$, $\rho(A) \geq \rho(B)$ следва $\chi(A +^- B) \geq \chi(C)$.

Вътрешните (нестандартните) операции $+^-$, $-^-$, $\times^-$, $/^-$ са условно монотонни по включване в смисъла на следните твърдения [12], [92]:

Твърдение 1.17. Нека $X, X_1, Y, Y_1 \in IR$ и $X \supseteq X_1$, $Y \subseteq Y_1$, $* \in \{+^-, -^-\}$. Тогава
(а) $\omega(X) \leq \omega(Y) \Longrightarrow X * Y \subseteq X_1 * Y_1$;
(б) $\omega(X_1) \geq \omega(Y_1) \Longrightarrow X * Y \supseteq X_1 * Y_1$.

Твърдение 1.18. Нека $X, X_1 \in IR$, $Y, Y_1 \in IR \setminus Z$ и $X \supseteq X_1$, $Y \subseteq Y_1$, $* \in \{\times^-, /^-\}$. Тогава:
(а) $\min \{\chi(X), \chi(X_1)\} \geq \chi(Y) \Longrightarrow X * Y \subseteq X_1 * Y_1$;
(б) $\max \{\chi(X), \chi(X_1)\} \leq \chi(Y_1)\} \Longrightarrow X * Y \supseteq X_1 * Y_1$.

За $A, B \in IR$, $A = [A^-, A^+]$, $B = [B^-, B^+]$, дефинираме

$$A \sqcap B \;=\; \begin{cases} [\min\{A^+, B^+\}, \max\{A^-, B^-\}], & \text{ако } A \bigcap B = \emptyset, \\ \emptyset & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Интервалът $A \sqcap B$ е интервалът с най-голяма ширина, който е разположен "между" интервалите A и B.

За $A = [A^-, A^+] \in IR$ закръгленият навън интервал $\Diamond A$ може да се представи като $\Diamond A = \Diamond A^- \vee \Diamond A^+$. Ако в този израз вместо оператора $\vee$ поставим оператора $\sqcap$, въведен по-горе, получаваме нов тип закръгляване на интервалите – закръгляване навътре или закръгляване със свиване, което ще означаваме с $\bigcirc$:

$$\bigcirc A \;=\; [\Diamond A^- \sqcap \Diamond A^+] = \begin{cases} [\bigtriangleup A^-, \bigtriangledown A^+], & \bigtriangleup A^- \leq \bigtriangledown A^+, \\ \emptyset, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Очевидно за $A \in IR$ е изпълнено $\bigcirc A \subseteq A$ и $\bigcirc A$ е най-големият машинен интервал, който се съдържа в реалния интервал A. Закръгляването $\bigcirc$

може да доведе до намаляване на дължината на интервала, което може да се използува като допълнителен контрол върху машинните пресмятания. В сила е включването

$$A \subseteq B \implies \bigcirc A \subseteq \bigcirc B.$$

Закръглянето $\bigcirc$ поражда компютърно-аритметични операции между интервали $(*)$, $* \in \{+,+^-,-,-^-,\times,\times^-,/,/^-\}$, дефинирани по следния начин:

$$A(*)B = \bigcirc(A*B), \;\; A,B \in IS.$$

При компютърна реализация на итерационни методи, записани в интервално-аритметична форма, ще използуваме следното твърдение:

Твърдение 1.19. Нека $A,B \in IR$ са неизродени интервали, т. е. такива че $\omega(A) \neq 0$, $\omega(B) \neq 0$. В сила са следните включвания:

$$\begin{array}{lllll}
\bigcirc A\,(+^-)\,\Diamond B & \subseteq A+^-B & \subseteq \Diamond A\langle +^-\rangle \bigcirc B, & \omega(A) \geq \omega(B), \\
\Diamond\, A\,(+^-)\bigcirc B & \subseteq A+^-B & \subseteq \bigcirc A\langle +^-\rangle \Diamond B, & \omega(A) < \omega(B); \\
\bigcirc A\,(-^-)\,\Diamond B & \subseteq A-^-B & \subseteq \Diamond A\langle -^-\rangle \bigcirc B, & \omega(A) \geq \omega(B), \\
\Diamond\, A\,(-^-)\bigcirc B & \subseteq A-^-B & \subseteq \bigcirc A\langle -^-\rangle \Diamond B, & \omega(A) < \omega(B); \\
\bigcirc A\,(\times^-)\,\Diamond B & \subseteq A\;\times^-B & \subseteq \Diamond A\langle \times^-\rangle \bigcirc B, & \chi(A) \leq \chi(B), \\
\Diamond\, A\,(\times^-)\bigcirc B & \subseteq A\;\times^-B & \subseteq \bigcirc A\langle \times^-\rangle \Diamond B, & \chi(A) > \chi(B); \\
\bigcirc A\,(/^-)\,\Diamond B & \subseteq A\;/^-B & \subseteq \Diamond A\langle /^-\rangle \bigcirc B, & \chi(A) \leq \chi(B), \\
\Diamond\, A\,(/^-)\bigcirc B & \subseteq A\;/^-B & \subseteq \bigcirc A\langle /^-\rangle \Diamond B, & \chi(A) > \chi(B).
\end{array}$$

Доказателство. Следва от дефинициите на закръглянията $\Diamond$ и $\bigcirc$, на компютърно-аритметичните операции $\langle * \rangle$, $(*)$, $\langle *^- \rangle$, $(*^-)$, $* \in \{+,-,\times,/\}$, свойството изотонност по включване на външните (стандартните) интервално-аритметични операции $+$, $-$, $\times$, $/$ и свойството условна монотонност по включване на операциите $+^-$, $-^-$, $\times^-$ и $/^-$ (Твърдения 1.17 и 1.18). □

Интервална аритметика в център-радиус форма. Теореми 1.7, 1.8 и 1.9 показват, че дистрибутивни връзки с определени условия могат да се търсят и за други операции от разширената интервална аритметика. Такива връзки са намерени от автора и са представени по-долу. Техниката за тяхното получаване се базира на т. нар. център-радиус форма.

Нека $A = [A^-, A^+] \in IR$ и $\mu(A)$ е центърът, а $\rho(A)$ е радиусът на A. Очевидно $\mu(A)$ и $\rho(A)$ еднозначно определят A, което ще означаваме с

$A = (\mu(A), \rho(A))$. Обратно, всяка наредена двойка от реални числа (μ, ρ), $\rho \geq 0$, еднозначно задава интервал A, чиито краища могат да бъдат определени посредством връзките $A^- = \mu - \rho$, $A^+ = \mu + \rho$. Представянето $A = (\mu(A), \rho(A))$ се нарича център-радиус форма на интервала A.

Твърдение 1.20. Нека $A = (\mu(A), \rho(A))$, $B = (\mu(B), \rho(B)) \in IR$. Да означим $|\mu(A)| = \sigma(A)\mu(A)$ и $\Delta(B) = \mu^2(B) - \rho^2(B)$. В сила е следното представяне на операциите на разширената интервална аритметика:

(а) $A + B \;=\; (\mu(A) + \mu(B)\;,\; \rho(A) + \rho(B))$;

(б) $A - B \;=\; (\mu(A) - \mu(B)\;,\; \rho(A) + \rho(B))$;

(в) $A \times B \;=\; (\mu(A \times B)\;,\; \rho(A \times B))$,

където:

$$\mu(A \times B) \;=\; \begin{cases} \mu(A)\mu(B) + \sigma(A)\sigma(B)\rho(A)\rho(B), \text{ ако } A, B \in IR \setminus Z, \\ |B|\sigma(B)\mu(A), \text{ ако } A \in Z,\ B \in IR \setminus Z \\ \qquad\qquad\qquad \text{или } A, B \in Z,\ \chi(A) \leq \chi(B), \\ |A|\sigma(A)\mu(B), \text{ ако } A \in IR \setminus Z,\ B \in Z \\ \qquad\qquad\qquad \text{или } A, B \in Z,\ \chi(A) \geq \chi(B); \end{cases}$$

$$\rho(A \times B) \;=\; \begin{cases} |\mu(A)|\rho(B) + |\mu(B)|\rho(A), \text{ ако } A, B \in IR \setminus Z, \\ |B|\rho(A), \text{ ако } A \in Z,\ B \in IR \setminus Z \\ \qquad\qquad \text{или } A, B \in Z, \chi(A) \leq \chi(B), \\ |A|\rho(B), \text{ ако } A \in IR \setminus Z,\ B \in Z \\ \qquad\qquad \text{или } A, B \in Z,\ \chi(A) \geq \chi(B); \end{cases}$$

(г) $A/B \;=\; (\mu(A/B)\;,\; \rho(A/B))$,

където:

$$\mu(A/B) \;=\; \begin{cases} (\mu(A)\mu(B) + \sigma(A)\sigma(B)\rho(A)\rho(B))/\Delta(B), \text{ ако } A, B \in IR \setminus Z, \\ \mu(A)/\, \rceil B \lceil\ \sigma(B), \text{ ако } A \in Z,\ B \in IR \setminus Z; \end{cases}$$

$$\rho(A/B) \;=\; \begin{cases} (|\mu(A)|\rho(B) + |\mu(B)|\rho(A))/\Delta(B), \text{ ако } A, B \in IR \setminus Z, \\ \rho(A)/\, \rceil B \lceil, \text{ ако } A \in Z,\ B \in IR \setminus Z; \end{cases}$$

(д) $A +^- B \;=\; (\mu(A) + \mu(B)\;,\; |\rho(A) - \rho(B)|)$;

(е) $A -^{-} B \;=\; (\mu(A) - \mu(B)\;,\; |\rho(A) - \rho(B)|)$;

(ж) $A \times^{-} B \;=\; (\mu(A \times^{-} B)\;,\; \rho(A \times^{-} B))$,

където:

$$\mu(A \times^{-} B) \;=\; \begin{cases} (\mu(A)\mu(B) - \sigma(A)\sigma(B)\rho(A)\rho(B), & \text{ако } A, B \in IR \setminus Z, \\ \mu(A)\rceil B \lceil \sigma(B), & \text{ако } A \in Z,\ B \in IR \setminus Z; \end{cases}$$

$$\rho(A \times^{-} B) \;=\; \begin{cases} |\rho(A)|\mu(B)| - \rho(B)|\mu(A)||, & \text{ако } A, B \in IR \setminus Z, \\ \rho(A)\rceil B \lceil, & \text{ако } A \in Z,\ B \in IR \setminus Z; \end{cases}$$

(з) $A /^{-} B \;=\; (\mu(A /^{-} B)\;,\; \rho(A /^{-} B))$,

където:

$$\mu(A /^{-} B) \;=\; \begin{cases} (\mu(A)\mu(B) - \sigma(A)\sigma(B)\rho(A)\rho(B))/\Delta(B), & \text{ако } A, B \in IR \setminus Z, \\ \mu(A)/|B|\sigma(B), & \text{ако } A \in Z,\ B \in IR \setminus Z; \end{cases}$$

$$\rho(A /^{-} B) \;=\; \begin{cases} |\rho(A)|\mu(B)| - \rho(B)|\mu(A)||/\Delta(B), & \text{ако } A, B \in IR \setminus Z, \\ \rho(A)/|B| & \text{ако } A \in Z,\ B \in IR \setminus Z. \end{cases}$$

Доказателство. Извършва се непосредствено. □

От формулата за $\rho(A \times^{-} B)$ при $A, B \in IR \setminus Z$ лесно се получава следното еквивалентно представяне, което е по-удобно при практически приложения:

$$\rho(A \times^{-} B) = \begin{cases} \sigma(A)\mu(A)\rho(B) - \sigma(B)\mu(B)\rho(A), & \chi(A) \geq \chi(B); \\ -\sigma(A)\mu(A)\rho(B) + \sigma(B)\mu(B)\rho(A), & \chi(A) \leq \chi(B). \end{cases} \tag{8}$$

Правила за разкриване на скоби. Първо ще формулираме и докажем твърдения за разкриване на скоби в интервално-аритметични изрази $(A +^{-} B) \times C$ и $(A +^{-} B) \times^{-} C$.

Теорема 1.21. Имаме $(A + B) \times^{-} C = A \times^{-} C \;+\; B \times^{-} C$ тогава, когато е изпълнено едно от следните условия:

1. $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$, $(\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \geq 0$;
2. $A, B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$.

Ако $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$, $(\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \leq 0$, то

$$(A+B) \times^- C = A \times^- C \;+^-\; B \times^- C.$$

Доказателство. Да предположим първо, че $A, B, C \in IR \setminus Z$. Имаме

$$\begin{aligned}
\mu((A+B) \times^- C) &= \mu(A+B)\mu(C) - \sigma(A+B)\sigma(C)\rho(A+B)\rho(C) \\
&= (\mu(A) + \mu(B))\mu(C) - \sigma(A+B)\sigma(C)(\rho(A) + \rho(B))\rho(C).
\end{aligned}$$

Тъй като $\sigma(A) = \sigma(B) = \sigma(A+B)$, получаваме

$$\begin{aligned}
\mu((A+B) \times^- C) &= \mu(A)\mu(C) - \sigma(A)\sigma(C)\rho(A)\rho(C) + \mu(B)\mu(C) \\
&\quad - \sigma(B)\sigma(C)\rho(B)\rho(C) \\
&= \mu(A \times^- C) + \mu(B \times^- C).
\end{aligned}$$

От (8) имаме

$$\rho((A+B) \times^- C) = \begin{cases} \sigma(A+B)\mu(A+B)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A+B), \\ \qquad\qquad \text{ако } \chi(A+B) \geq \chi(C); \\ -\sigma(A+B)\mu(A+B)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(A+B), \\ \qquad\qquad \text{ако } \chi(A+B) \leq \chi(C). \end{cases} \tag{9}$$

Ще разгледаме подробно случая $\chi(A) \geq \chi(C)$, $\chi(B) \geq \chi(C)$. Съгласно Твърдение 1.15 е изпълнено неравенството $\chi(A+B) \geq \chi(C)$; тогава

$$\begin{aligned}
\rho((A+B) \times^- C) &= \sigma(A)\mu(A)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A) + \sigma(B)\mu(B)\rho(C) \\
&\quad - \sigma(C)\mu(C)\rho(B) \\
&= \rho(A \times^- C) + \rho(B \times^- C) \;=\; \rho(A \times^- C \;+\; B \times^- C).
\end{aligned}$$

Случаят $\chi(A) \leq \chi(C)$, $\chi(B) \leq \chi(C)$ се доказва аналогично.

Дотук показахме, че ако $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$ и $(\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \geq 0$, то $(A+B) \times^- C = A \times C \;+^-\; B \times^- C$.

Сега да предположим, че $\chi(A) \geq \chi(C)$, $\chi(B) \leq \chi(C)$. В случая, когато $\chi(A+B) \geq \chi(C)$, от (9) получаваме

$$\begin{aligned}
\rho((A+B) \times^- C) &= \sigma(A)\mu(A)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A) - (-\sigma(B)\mu(B)\rho(C) \\
&\quad + \sigma(C)\mu(C)\rho(B)) \\
&= \rho(A \times^- C) - \rho(B \times^- C).
\end{aligned} \tag{10}$$

Аналогично, ако $\chi(A+B) \leq \chi(C)$, от (9) следва

$$\begin{aligned}\rho((A+B)\times^- C) &= -(\sigma(A)\mu(A)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A)) + (-\sigma(B)\mu(B)\rho(C) \\ &\quad + \sigma(C)\mu(C)\rho(B)) \\ &= \rho(B\times^- C) - \rho(A\times^- C). \qquad (11)\end{aligned}$$

Обединявайки (10) и (11), получаваме $\rho((A+B)\times^- C) = |\rho(A\times^- C) - \rho(B\times^- C)|$. С това втората част на теоремата е доказана.

Остана да разгледаме случая $A, B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$. В този случай е изпълнено $A+B \in Z$. Получаваме

$$\begin{aligned}\mu((A+B)\times^- C) &= \mu(A+B)\sigma(C)\rceil C\lceil \\ &= \mu(A)\sigma(C)\rceil C\lceil + \mu(B)\sigma(C)\rceil C\lceil \\ &= \mu(A\times^- C) + \mu(B\times^- C);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho((A+B)\times^- C) &= \rho(A+B)\rceil C\lceil \;=\; \rho(A)\rceil C\lceil + \rho(B)\rceil C\lceil \\ &= \rho(A\times^- C) + \rho(B\times^- C).\end{aligned}$$

С това теоремата е доказана. □

Теорема 1.22. Нека $A, B, C \in IR \setminus Z$ и $\sigma(A) = -\sigma(B)$. Тогава

$$(A+B)\times^- C = \begin{cases} A\times^- C + B\times C, & \sigma(A+B) = \sigma(A),\ \chi(C) \geq \chi(A); \\ A\times^- C +^- B\times C, & \sigma(A+B) = \sigma(A),\ \chi(C) \leq \chi(A); \\ A\times C + B\times^- C, & \sigma(A+B) = \sigma(B),\ \chi(C) \geq \chi(B); \\ A\times C +^- B\times^- C, & \sigma(A+B) = \sigma(B),\ \chi(C) \leq \chi(B). \end{cases}$$

Доказателство. Нека първо $\sigma(A+B) = \sigma(A) = -\sigma(B)$. Тогава

$$\begin{aligned}\mu((A+B)\times^- C) &= \mu(A+B)\mu(C) - \sigma(A+B)\sigma(C)\rho(A+B)\rho(C) \\ &= \mu(A)\mu(C) - \sigma(A)\sigma(C)\rho(A)\rho(C) + \mu(B)\mu(C) \\ &\quad + \sigma(B)\sigma(C)\rho(B)\rho(C) \\ &= \mu(A\times^- C) + \mu(B\times C).\end{aligned}$$

От (8) и Твърдение 1.14(a) получаваме

$$\begin{aligned}\rho((A+B)\times^- C) &= -\sigma(A+B)\mu(A+B)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(A+B) \\ &= -\sigma(A)\mu(A)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(A) + \sigma(B)\mu(B)\rho(C) \\ &\quad + \sigma(C)\mu(C)\rho(B) \\ &= \rho(A\times^- C) + \rho(B\times^- C).\end{aligned}$$

По-нататък от (8) и Твърдение 1.14(б) имаме

$$\begin{aligned}
\rho((A+B)\times^- C) &= \sigma(A+B)\mu(A+B)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A+B) \\
&= \sigma(A)\mu(A)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A) \\
&\quad - (\sigma(B)\mu(B)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(B)) \\
&= \rho(A\times^- C) - \rho(B\times^- C).
\end{aligned}$$

Случаят $\sigma(A+B) = \sigma(B)$ се доказва чрез субституцията $A := B$. □

Теорема 1.23. Имаме $(A +^- B) \times^- C = A \times^- C \;+^-\; B \times^- C$ тогава, когато е изпълнено едно от следните условия:

1. $A, B, C, A +^- B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$, $\sigma(A)\sigma(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0$, $(\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \geq 0$;
2. $A, B, A +^- B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$.

За $A, B, A +^- B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$ е изпълнено

$$(A +^- B) \times^- C = \begin{cases} A \times^- C + B \times^- C, & \sigma(A)\sigma(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0, \\ & (\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \leq 0; \\ A \times C +^- B \times C, & \sigma(A)\sigma(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \leq 0. \end{cases}$$

Доказателство. Да предположим първо, че $A, B, A +^- B, C \in IR \setminus Z$. Имаме

$$\begin{aligned}
&\mu((A +^- B) \times^- C) \\
&= \mu(A +^- B)\mu(C) - \sigma(A +^- B)\sigma(C)\rho(A +^- B)\rho(C) \\
&= (\mu(A) + \mu(B))\mu(C) - \sigma(A +^- B)\sigma(C)|\rho(A) - \rho(B)|\rho(C) \\
&= \begin{cases} \mu(A)\mu(C) - \sigma(A +^- B)\sigma(C)\rho(A)\rho(C) + \mu(B)\mu(C) \\ \qquad + \sigma(A +^- B)\sigma(C)\rho(B)\rho(C), \text{ ако } \rho(A) \geq \rho(B); \\ \mu(A)\mu(C) + \sigma(A +^- B)\sigma(C)\rho(A)\rho(C) + \mu(B)\mu(C) \\ \qquad - \sigma(A +^- B)\sigma(C)\rho(B)\rho(C), \text{ ако } \rho(A) \leq \rho(B). \end{cases}
\end{aligned}$$

В случая, когато $\sigma(A +^- B) = \sigma(A) = -\sigma(B)$, от горното представяне получаваме

$$\mu((A +^- B) \times^- C)$$

$$= \begin{cases} \mu(A)\mu(C) - \sigma(A)\sigma(C)\rho(A)\rho(C) + \mu(B)\mu(C) \\ \qquad - \sigma(B)\sigma(C)\rho(B)\rho(C), \text{ ако } \rho(A) \geq \rho(B), \\ \mu(A)\mu(C) + \sigma(A)\sigma(C)\rho(A)\rho(C) + \mu(B)\mu(C) \\ \qquad + \sigma(B)\sigma(C)\rho(B)\rho(C), \text{ ако } \rho(A) \leq \rho(B); \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mu(A \times^- C) + \mu(B \times^- C), & \text{ако } \rho(A) \geq \rho(B); \\ \mu(A \times C) + \mu(B \times C), & \text{ако } \rho(A) \leq \rho(B). \end{cases}$$

В случая $\sigma(A +^- B) = -\sigma(A) = \sigma(B)$ имаме

$$\mu((A +^- B) \times^- C)$$
$$= \begin{cases} \mu(A)\mu(C) + \sigma(A)\sigma(C)\rho(A)\rho(C) + \mu(B)\mu(C) \\ \qquad + \sigma(B)\sigma(C)\rho(B)\rho(C), \text{ ако } \rho(A) \geq \rho(B), \\ \mu(A)\mu(C) - \sigma(A)\sigma(C)\rho(A)\rho(C) + \mu(B)\mu(C) \\ \qquad - \sigma(B)\sigma(C)\rho(B)\rho(C), \text{ ако } \rho(A) \leq \rho(B); \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mu(A \times C) + \mu(B \times C), & \text{ако } \rho(A) \geq \rho(B); \\ \mu(A \times^- C) + \mu(B \times^- C), & \text{ако } \rho(A) \leq \rho(B). \end{cases}$$

Следователно

$$\mu((A +^- B) \times^- C) = \begin{cases} \mu(A \times^- C) + \mu(B \times^- C), \\ \qquad \text{ако } \sigma(A)\sigma(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0; \\ \mu(A \times C) + \mu(B \times C), \\ \qquad \text{ако } \sigma(A)\sigma(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \leq 0. \end{cases}$$

По-нататък имаме

$$\rho((A +^- B) \times^- C)$$
$$= \begin{cases} \sigma(A +^- B)\mu(A +^- B)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A +^- B), \\ \qquad \text{ако } \chi(A +^- B) \geq \chi(C); \\ -\sigma(A +^- B)\mu(A +^- B)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(A +^- B), \\ \qquad \text{ако } \chi(A +^- B) \leq \chi(C); \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sigma(A +^- B)\mu(A)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A) + \sigma(A +^- B)\mu(B)\rho(C) \\ \qquad + \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \text{ ако } \chi(A +^- B) \geq \chi(C),\ \rho(A) \geq \rho(B); \\ -\sigma(A +^- B)\mu(A)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(A) - \sigma(A +^- B)\mu(B)\rho(C) \\ \qquad - \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \text{ ако } \chi(A +^- B) \leq \chi(C),\ \rho(A) \geq \rho(B); \\ \sigma(A +^- B)\mu(A)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(A) + \sigma(A +^- B)\mu(B)\rho(C) \\ \qquad - \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \text{ ако } \chi(A +^- B) \geq \chi(C),\ \rho(A) \leq \rho(B); \\ -\sigma(A +^- B)\mu(A)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A) - \sigma(A +^- B)\mu(B)\rho(C) \\ \qquad + \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \text{ ако } \chi(A +^- B) \leq \chi(C),\ \rho(A) \leq \rho(B). \end{cases} \tag{12}$$

Да предположим, че $\sigma(A +^- B) = \sigma(A) = -\sigma(B)$. От (12) получаваме

$$\rho((A +^- B) \times^- C)$$
$$= \begin{cases} \sigma(A)\mu(A)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A) - \sigma(B)\mu(B)\rho(C) \\ \qquad + \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \text{ ако } \chi(A +^- B) \geq \chi(C),\ \rho(A) \geq \rho(B); \\ -\sigma(A)\mu(A)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(A) + \sigma(B)\mu(B)\rho(C) \\ \qquad - \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \text{ ако } \chi(A +^- B) \leq \chi(C),\ \rho(A) \geq \rho(B); \\ \sigma(A)\mu(A)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(A) - \sigma(B)\mu(B)\rho(C) \\ \qquad - \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \text{ ако } \chi(A +^- B) \geq \chi(C),\ \rho(A) \leq \rho(B); \\ -\sigma(A)\mu(A)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A) + \sigma(B)\mu(B)\rho(C) \\ \qquad + \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \text{ ако } \chi(A +^- B) \leq \chi(C),\ \rho(A) \leq \rho(B). \end{cases} \tag{13}$$

В случая $\sigma(A +^- B) = -\sigma(A) = \sigma(B)$ по аналогичен начин намираме

$$\rho((A +^- B) \times^- C)$$
$$= \begin{cases} -\sigma(A)\mu(A)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A) + \sigma(B)\mu(B)\rho(C) \\ \qquad + \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \text{ ако } \chi(A +^- B) \geq \chi(C),\ \rho(A) \geq \rho(B); \\ \sigma(A)\mu(A)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(A) - \sigma(B)\mu(B)\rho(C) \\ \qquad - \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \text{ ако } \chi(A +^- B) \leq \chi(C),\ \rho(A) \geq \rho(B); \\ -\sigma(A)\mu(A)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(A) + \sigma(B)\mu(B)\rho(C) \\ \qquad - \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \text{ ако } \chi(A +^- B) \geq \chi(C),\ \rho(A) \leq \rho(B); \\ \sigma(A)\mu(A)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A) - \sigma(B)\mu(B)\rho(C) \\ \qquad + \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \text{ ако } \chi(A +^- B) \leq \chi(C),\ \rho(A) \leq \rho(B). \end{cases} \tag{14}$$

Лесно се вижда, че ако $\sigma(A)\sigma(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \leq 0$, то

$$\rho((A +^- B) \times^- C) \;=\; |\rho(A \times C) - \rho(B \times C)|.$$

Следователно в този случай $(A +^- B) \times^- C = A \times C +^- B \times C$. По-нататък от (13) и (14) получаваме

$$\rho((A +^- B) \times^- C)$$
$$= \begin{cases} \sigma(A)\mu(A)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A) - \sigma(B)\mu(B)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \\ \quad \text{ако } \sigma(A +^- B) = \sigma(A) = -\sigma(B),\ \chi(A +^- B) \geq \chi(C),\ \rho(A) \geq \rho(B) \\ \quad \text{или } \sigma(A +^- B) = -\sigma(A) = \sigma(B),\ \chi(A +^- B) \leq \chi(C),\ \rho(A) \leq \rho(B); \\ -\sigma(A)\mu(A)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(A) + \sigma(B)\mu(B)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \\ \quad \text{ако } \sigma(A +^- B) = \sigma(A) = -\sigma(B),\ \chi(A +^- B) \leq \chi(C),\ \rho(A) \geq \rho(B) \\ \quad \text{или } \sigma(A +^- B) = -\sigma(A) = \sigma(B),\ \chi(A +^- B) \geq \chi(C),\ \rho(A) \leq \rho(B); \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |\rho(A \times^- C) - \rho(B \times^- C)|, \text{ ако } \sigma(A)\sigma(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0, \\ \hfill (\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \geq 0; \\ \rho(A \times^- C) + \rho(B \times^- C), \text{ ако } \sigma(A)\sigma(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0, \\ \hfill (\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \leq 0. \end{cases}$$

Остана да разгледаме случая $A, B, A +^- B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$. Тогава

$$\begin{aligned}
\mu((A +^- B) \times^- C) &= \mu(A +^- B)\rceil C\lceil = (\mu(A) + \mu(B))\rceil C\lceil \\
&= \mu(A)\rceil C\lceil + \mu(B)\rceil C\lceil; \\
\rho((A +^- B) \times^- C) &= \rho(A +^- B)\rceil C\lceil = |\rho(A) - \rho(B)|\rceil C\lceil \\
&= |\rho(A)\rceil C\lceil - \rho(B)\rceil C\lceil| \\
&= |\rho(A \times^- C) - \rho(B \times^- C)|,
\end{aligned}$$

с което теоремата е доказана. □

Теорема 1.24. Нека $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$. Тогава

$$(A +^- B) \times^- C = \begin{cases} A \times^- C +^- B \times C, & \rho(A) \geq \rho(B),\ \chi(C) \geq \chi(A); \\ A \times^- C + B \times C, & \rho(A) \geq \rho(B),\ \chi(C) \leq \chi(A); \\ A \times C +^- B \times^- C, & \rho(A) \leq \rho(B),\ \chi(C) \geq \chi(B); \\ A \times C + B \times^- C, & \rho(A) \leq \rho(B),\ \chi(C) \leq \chi(B). \end{cases}$$

Доказателство. По предположение $\sigma(A) = \sigma(B)$, следователно $\sigma(A +^- B) = \sigma(A) = \sigma(B)$. Имаме

$$\begin{aligned}
\mu((A +^- B) \times^- C) &= \mu(A +^- B)\mu(C) - \sigma(A +^- B)\sigma(C)\rho(A +^- B)\rho(C) \\
&= \begin{cases} \mu(A)\mu(C) - \sigma(A)\sigma(C)\rho(A)\rho(C) + \mu(B)\mu(C) + \sigma(B)\sigma(C)\rho(B)\rho(C), \\ \hfill \text{ако } \rho(A) \geq \rho(B); \\ \mu(A)\mu(C) + \sigma(A)\sigma(C)\rho(A)\rho(C) + \mu(B)\mu(C) - \sigma(B)\sigma(C)\rho(B)\rho(C), \\ \hfill \text{ако } \rho(A) \leq \rho(B); \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mu(A \times^- C) + \mu(B \times C), & \text{ако } \rho(A) \geq \rho(B); \\ \mu(A \times C) + \mu(B \times^- C), & \text{ако } \rho(A) \leq \rho(B). \end{cases}
\end{aligned}$$

От (12) за $\sigma(A) = \sigma(B) = \sigma(A +^- B)$ получаваме

$$\begin{aligned}
&\rho((A +^- B) \times^- C) \\
&= \begin{cases} \sigma(A)\mu(A)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A) + \sigma(B)\mu(B)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \\ \hfill \text{ако } \chi(A +^- B) \geq \chi(C),\ \rho(A) \geq \rho(B); \\ -\sigma(A)\mu(A)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(A) - \sigma(B)\mu(B)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \\ \hfill \text{ако } \chi(A +^- B) \leq \chi(C),\ \rho(A) \geq \rho(B); \\ \sigma(A)\mu(A)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(A) + \sigma(B)\mu(B)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \\ \hfill \text{ако } \chi(A +^- B) \geq \chi(C),\ \rho(A) \leq \rho(B); \\ -\sigma(A)\mu(A)\rho(C) - \sigma(C)\mu(C)\rho(A) - \sigma(B)\mu(B)\rho(C) + \sigma(C)\mu(C)\rho(B), \\ \hfill \text{ако } \chi(A +^- B) \leq \chi(C),\ \rho(A) \leq \rho(B). \end{cases}
\end{aligned}$$

По-нататък имаме

$$\rho((A +^- B) \times^- C)$$

$$= \begin{cases} \rho(A \times^- C) + \rho(B \times C), & \text{ако } \chi(A) \geq \chi(C),\ \chi(A +^- B) \geq \chi(C), \\ & \rho(A) \geq \rho(B); \\ \rho(A \times^- C) - \rho(B \times C), & \text{ако } \chi(A) \leq \chi(C),\ \chi(A +^- B) \leq \chi(C), \\ & \rho(A) \geq \rho(B); \\ \rho(A \times C) - \rho(B \times^- C), & \text{ако } \chi(B) \geq \chi(C),\ \chi(A +^- B) \geq \chi(C), \\ & \rho(A) \leq \rho(B); \\ -\rho(A \times C) + \rho(B \times^- C), & \text{ако } \chi(B) \leq \chi(C),\ \chi(A +^- B) \leq \chi(C), \\ & \rho(A) \leq \rho(B); \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \rho(A \times^- C) + \rho(B \times C), & \text{ако } \chi(A +^- B) \geq \chi(C), \chi(A) \geq \chi(C), \\ & \rho(A) \geq \rho(B); \\ -\rho(A \times^- C) + \rho(B \times C), & \text{ако } \chi(A +^- B) \geq \chi(C),\ \chi(A) \leq \chi(C), \\ & \rho(A) \geq \rho(B); \\ \rho(A \times^- C) - \rho(B \times C), & \text{ако } \chi(A +^- B) \leq \chi(C), \chi(A) \leq \chi(C), \\ & \rho(A) \geq \rho(B); \\ \rho(A \times C) + \rho(B \times^- C), & \text{ако } \chi(A +^- B) \geq \chi(C),\ \chi(A) \geq \chi(C), \\ & \rho(A) \leq \rho(B); \\ \rho(A \times C) - \rho(B \times^- C), & \text{ако } \chi(A +^- B) \geq \chi(C),\ \chi(B) \leq \chi(C), \\ & \rho(A) \leq \rho(B); \\ -\rho(A \times C) + \rho(B \times^- C), & \text{ако } \chi(A +^- B) \leq \chi(C),\ \chi(B) \leq \chi(C), \\ & \rho(A) \leq \rho(B); \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \rho(A \times^- C) + \rho(B \times C), & \text{ако } \chi(A) \geq \chi(C),\ \rho(A) \geq \rho(B), \\ & \chi(A +^- B) \geq \chi(C); \\ |\rho(A \times^- C) - \rho(B \times C)|, & \text{ако } \chi(A) \leq \chi(C),\ \rho(A) \geq \rho(B); \\ |\rho(A \times C) - \rho(B \times^- C)|, & \text{ако } \chi(B) \leq \chi(C),\ \rho(A) \leq \rho(B); \\ \rho(A \times C) + \rho(B \times^- C), & \text{ако } \chi(B) \geq \chi(C),\ \rho(A) \leq \rho(B), \\ & \chi(A +^- B) \geq \chi(C). \end{cases}$$

Прилагайки Твърдение 1.16 към последното равенство, получаваме окончателния резултат. □

Използувайки представянията (1), (2) на операциите $-$, $/$, $-^-$ и $/^-$, от Теореми 1.6 до 1.9 и 1.21 до 1.24 могат да се получат условно-дистрибутивни закони (правила за разкриване на скоби) за изразите $(A-B)/C$, $(A-^- B)/C$, $(A-B)/^-C$, $(A-^- B)/^-C$, както и за $(A+B)/C$, $(A+^- B)/C$, $(A-B) \times C$, $(A-^- B) \times C$, които ще представим по-долу.

Твърдение 1.25. Равенството $(A-B)/C = A/C - B/C$ е изпълнено тогава, когато е удовлетворено едно от следните две условия:

1. $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$;
2. $A, B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$.

За $A, B, C, A-B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$ е изпълнено

$$(A-B)/C = \begin{cases} A/C - B/^-C, & \sigma(A-B) = \sigma(A),\ \chi(C) \ge \chi(B); \\ A/C -^- B/^-C, & \sigma(A-B) = \sigma(A),\ \chi(C) \le \chi(B); \\ A/^-C - B/C, & \sigma(A-B) = -\sigma(A),\ \chi(C) \ge \chi(A); \\ A/^-C -^- B/C, & \sigma(A-B) = -\sigma(A),\ \chi(C) \le \chi(A). \end{cases}$$

Твърдение 1.26. Равенството $(A -^- B)/C = A/C -^- B/C$ е изпълнено тогава, когато е удовлетворено едно от следните условия:

1. $A, B, C, A -^- B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$, $\sigma(A)\sigma(A -^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \ge 0$;
2. $A, B, A -^- B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$.

За $A, B, C, A -^- B \in IR \setminus Z$, такива че $\sigma(A) = \sigma(B)$ и $\sigma(A)\sigma(A -^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \le 0$ е изпълнено

$$(A -^- B)/C = \begin{cases} A/^-C -^- B/^-C, & \text{ако } (\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \ge 0; \\ A/^-C - B/^-C & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

За $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$, е изпълнено

$$(A -^- B)/C = \begin{cases} A/C -^- B/^-C, & \rho(A) \ge \rho(B),\ \chi(C) \ge \chi(B); \\ A/C - B/^-C, & \rho(A) \ge \rho(B),\ \chi(C) \le \chi(B); \\ A/^-C -^- B/C, & \rho(A) \le \rho(B),\ \chi(C) \ge \chi(A); \\ A/^-C - B/C, & \rho(A) \le \rho(B),\ \chi(C) \le \chi(A). \end{cases}$$

Твърдение 1.27. Имаме $(A-B)/^-C = A/^-C - B/^-C$ тогава, когато е изпълнено едно от условията

1. $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$ и $(\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \ge 0$;

2. $A, B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$.

Ако $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$ и $(\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \leq 0$, то

$$(A - B)/^{-}C \ = \ A/^{-}C \ -^{-} B/^{-}C.$$

За $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$ е изпълнено

$$(A - B)/^{-}C \ = \begin{cases} A/^{-}C - B/C, & \sigma(A - B) = \sigma(A),\ \chi(C) \geq \chi(A); \\ A/^{-}C -^{-} B/C, & \sigma(A - B) = \sigma(A),\ \chi(C) \leq \chi(A); \\ A/C - B/^{-}C, & \sigma(A - B) = \sigma(B),\ \chi(C) \geq \chi(B); \\ A/C +^{-} B/^{-}C, & \sigma(A + B) = \sigma(B),\ \chi(C) \leq \chi(B). \end{cases}$$

Твърдение 1.28. Равенството $(A -^{-} B)/^{-}C = A/^{-}C \ -^{-} \ B/^{-}C$ е изпълнено тогава, когато е удовлетворено едно от следните условия:

1. $A, B, C, A -^{-} B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A)\sigma(A -^{-} B)(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0$ и $(\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \geq 0$;

2. $A, B, A -^{-} B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$.

Ако е изпълнено $A, B, C, A -^{-} B \in IR \setminus Z$ и $\sigma(A) = \sigma(B)$, то

$$(A -^{-} B)/^{-}C \ = \ \begin{cases} A/^{-}C - B/^{-}C, & \text{ако } \sigma(A)\sigma(A -^{-} B)(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0 \\ & \text{и } (\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \leq 0; \\ A/C -^{-} B/C, & \text{ако } \sigma(A)\sigma(A -^{-} B)(\rho(A) - \rho(B)) \leq 0. \end{cases}$$

За $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$ е изпълнено

$$(A -^{-} B)/^{-}C \ = \begin{cases} A/^{-}C -^{-} B/C, & \rho(A) \geq \rho(B),\ \chi(C) \geq \chi(A); \\ A/^{-}C - B/C, & \rho(A) \geq \rho(B),\ \chi(C) \leq \chi(A); \\ A/C -^{-} B/^{-}C, & \rho(A) \leq \rho(B),\ \chi(C) \geq \chi(B); \\ A/C - B/^{-}C, & \rho(A) \leq \rho(B),\ \chi(C) \leq \chi(B). \end{cases}$$

Твърдение 1.29. Имаме $(A + B)/C = A/C + B/C$ тогава, когато е изпълнено едно от следните условия:

1. $A, B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$;

2. $A, B \in Z,\ C \in IR \setminus Z$;

За $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$, е изпълнено:

$$(A+B)/C = \begin{cases} A/C + B/^{-}C, & \sigma(A+B) = \sigma(A),\ \chi(C) \geq \chi(B); \\ A/C +^{-} B/^{-}C, & \sigma(A+B) = \sigma(A),\ \chi(C) \leq \chi(B); \\ A/^{-}C + B/C, & \sigma(A+B) = \sigma(B),\ \chi(C) \geq \chi(A); \\ A/^{-}C +^{-} B/C, & \sigma(A+B) = \sigma(B),\ \chi(C) \leq \chi(A). \end{cases}$$

Твърдение 1.30. Равенството $(A +^{-} B)/C = A/C +^{-} B/C$ е изпълнено тогава, когато е удовлетворено едно от следните две условия:

1. $A, B, C, A +^{-} B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$, $\sigma(A)\sigma(A +^{-} B)(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0$;
2. $A, B, A +^{-} B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$.

Нека $A, B, C, A +^{-} B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$ и $\sigma(A)\sigma(A +^{-} B)(\rho(A) - \rho(B)) \leq 0$. Тогава

$$(A +^{-} B)/C = \begin{cases} A/^{-}C +^{-} B/^{-}C, & (\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \geq 0; \\ A/^{-}C + B/^{-}C, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

За $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$ е изпълнено

$$(A +^{-} B)/C = \begin{cases} A/C +^{-} B/^{-}C, & \rho(A) \geq \rho(B),\ \chi(C) \geq \chi(B); \\ A/C + B/^{-}C, & \rho(A) \geq \rho(B),\ \chi(C) \leq \chi(B); \\ A/^{-}C +^{-} B/C, & \rho(A) \leq \rho(B),\ \chi(C) \geq \chi(A); \\ A/^{-}C + B/C, & \rho(A) \leq \rho(B),\ \chi(C) \leq \chi(A). \end{cases}$$

Твърдение 1.31. Имаме $(A - B) \times C = A \times C - B \times C$ тогава, когато е изпълнено едно от следните условия:

1. $A, B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$;
2. $A, B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$;
3. $A, B, C \in Z$, $\chi(A) \leq \chi(C)$, $\chi(B) \leq \chi(C)$;
4. $A, B, C \in Z$, $\mu(A)\mu(B) \leq 0$, $\chi(A) \geq \chi(C)$, $\chi(B) \geq \chi(C)$.

За $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$, е изпълнено:

$$(A - B) \times C \ = \begin{cases} A \times C \ - \ B \times^- C, & \sigma(A+B) = \sigma(A),\ \chi(C) \ge \chi(B); \\ A \times C \ -^- \ B \times^- C, & \sigma(A+B) = \sigma(A),\ \chi(C) \le \chi(B); \\ A \times^- C \ - \ B \times C, & \sigma(A+B) = \sigma(B),\ \chi(C) \ge \chi(A); \\ A \times^- C \ -^- \ B \times C, & \sigma(A+B) = \sigma(B),\ \chi(C) \le \chi(A). \end{cases}$$

Твърдение 1.32. Имаме $(A -^- B) \times C = A \times C -^- B \times C$ тогава, когато е изпълнено едно от следните условия:

1. $A, B, A +^- B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$, $\sigma(A)\sigma(A +^- B))(\rho(A) - \rho(B)) \ge 0$;
2. $A, B, A +^- B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$;
3. $A, B, A +^- B, C \in Z$, $\max\{\chi(A), \chi(B), \chi(A +^- B)\} \le \chi(C)$;
4. $A, B, A +^- B, C \in Z$, $\min\{\chi(A), \chi(B), \chi(A +^- B)\} \ge \chi(C)$, $\mu(A)\mu(B) \ge 0$, $\mu(A)\mu(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \ge 0$.

За $A, B, C, A +^- B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$, $\sigma(A)\sigma(A +^- B))(\rho(A) - \rho(B)) \le 0$ е изпълнено

$$(A +^- B) \times C \ = \begin{cases} A \times^- C \ +^- \ B \times^- C, & (\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \ge 0, \\ A \times^- C \ + \ B \times^- C, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

За $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$, е изпълнено

$$(A -^- B) \times C \ = \begin{cases} A \times C \ -^- \ B \times^- C, & \rho(A) \ge \rho(B),\ \chi(C) \ge \chi(B); \\ A \times C \ - \ B \times^- C, & \rho(A) \ge \rho(B),\ \chi(C) \le \chi(B); \\ A \times^- C \ -^- \ B \times C, & \rho(A) \le \rho(B),\ \chi(C) \ge \chi(A); \\ A \times^- C \ - \ B \times C, & \rho(A) \le \rho(B),\ \chi(C) \le \chi(A). \end{cases}$$

Правила за изнасяне на множител извън скоби. От Теореми 1.8, 1.21, 1.23 получаваме следните правила за изнасяне на множител извън скоби:

Следствие 1.33. Имаме $A \times C +^- B \times C = (A +^- B) \times C$ тогава, когато е изпълнено едно от следните условия:

1. $A, B, A +^- B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$, $\sigma(A)\sigma(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0$;
2. $A, B, A +^- B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$;
3. $A, B, A +^- B, C \in Z$, $\max\{\chi(A),\ \chi(B),\ \chi(A -^- B)\} \leq \chi(C)$;
4. $A, B, A +^- B, C \in Z$, $\min\{\chi(A),\ \chi(B),\ \chi(A -^- B)\} \geq \chi(C)$, $\mu(A)\mu(B) \geq 0$, $\mu(A)\mu(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0$.

За $A, B, C, A +^- B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$, $\sigma(A)\sigma(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \leq 0$ е изпълнено

$$A \times C \ +^- \ B \times C = (A +^- B) \times^- C.$$

Следствие 1.34. Имаме $A \times^- C \ + \ B \times^- C = (A + B) \times^- C$ тогава, когато е изпълнено едно от следните условия:

1. $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$, $(\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \geq 0$;
2. $A, B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$;

Ако $A, B, C \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$ и $(\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \leq 0$, то

$$A \times^- C \ + \ B \times^- C \ = \ \begin{cases} (A +^- B) \times^- C, & \sigma(A)\sigma(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0; \\ (A +^- B) \times C, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Следствие 1.35. Имаме $A \times^- C \ +^- \ B \times^- C = (A +^- B) \times^- C$ тогава, когато е изпълнено едно от двете условия

1. $A, B, C, A +^- B \in IR \setminus Z$, $\sigma(A) = -\sigma(B)$, $\sigma(A)\sigma(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \geq 0$, $(\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \geq 0$;
2. $A, B, A +^- B \in Z$, $C \in IR \setminus Z$.

В случая, когато $A, B, C \in IR \setminus Z$ е изпълнено равенството

$$A \times^- C \ +^- \ B \times^- C \ = \ \begin{cases} (A +^- B) \times C, & A +^- B \in IR \setminus Z,\ \sigma(A) = -\sigma(B), \\ & (\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \geq 0, \\ & \sigma(A)\sigma(A +^- B)(\rho(A) - \rho(B)) \leq 0; \\ (A + B) \times^- C, & \sigma(A) = \sigma(B), \\ & (\chi(A) - \chi(C))(\chi(B) - \chi(C)) \leq 0. \end{cases}$$

От Теореми 1.7, 1.9, 1.22 и 1.24 получаваме следните правила за изнасяне на множител извън скоби в интервално-аритметичен израз.

Следствие 1.36. За $A, B, C \in IR \setminus Z$ е в сила равенството

$$A \times^- C + B \times C \;=\; \begin{cases} (A+B)\times C, & \sigma(A) = -\sigma(B) = -\sigma(A+B), \\ & \chi(C) \ge \chi(A); \\ (A+B)\times^- C, & \sigma(A) = -\sigma(B) = \sigma(A+B), \\ & \chi(C) \ge \chi(A); \\ (A+^- B)\times C, & \sigma(A) = \sigma(B),\ \rho(A) \le \rho(B), \\ & \chi(C) \le \chi(A); \\ (A+^- B)\times^- C, & \sigma(A) = \sigma(B),\ \rho(A) \ge \rho(B), \\ & \chi(C) \le \chi(A). \end{cases}$$

Следствие 1.37. За $A, B, C \in IR \setminus Z$ е в сила равенството

$$A \times C + B \times^- C = \begin{cases} (A+B)\times C, & \sigma(A) = -\sigma(B) = \sigma(A+B), \\ & \chi(C) \ge \chi(B); \\ (A+B)\times^- C, & \sigma(A) = -\sigma(B) = -\sigma(A+B), \\ & \chi(C) \ge \chi(B); \\ (A+^- B)\times C, & \sigma(A) = \sigma(B),\ \rho(A) \ge \rho(B), \\ & \chi(C) \le \chi(B); \\ (A+^- B)\times^- C, & \sigma(A) = \sigma(B),\ \rho(A) \le \rho(B), \\ & \chi(C) \le \chi(B). \end{cases}$$

Следствие 1.38. За $A, B, C \in IR \setminus Z$ е в сила равенството

$$A \times^- C +^- B \times C = \begin{cases} (A+B)\times C, & \sigma(A) = -\sigma(B) = -\sigma(A+B), \\ & \chi(C) \le \chi(A); \\ (A+B)\times^- C, & \sigma(A) = -\sigma(B) = \sigma(A+B), \\ & \chi(C) \le \chi(A); \\ (A+^- B)\times C, & \sigma(A) = \sigma(B),\ \rho(A) \le \rho(B), \\ & \chi(C) \ge \chi(A); \\ (A+^- B)\times^- C, & \sigma(A) = \sigma(B),\ \rho(A) \ge \rho(B), \\ & \chi(C) \ge \chi(A). \end{cases}$$

Следствие 1.39. За $A, B, C \in IR \setminus Z$ е в сила равенството

$$A \times C +^{-} B \times^{-} C = \begin{cases} (A+B)\times C, & \sigma(A) = -\sigma(B) = \sigma(A+B), \\ & \chi(C) \le \chi(B); \\ (A+B)\times^{-} C, & \sigma(A) = -\sigma(B) = -\sigma(A+B), \\ & \chi(C) \le \chi(B); \\ (A+^{-} B)\times C, & \sigma(A) = \sigma(B),\ \rho(A) \ge \rho(B), \\ & \chi(C) \ge \chi(B); \\ (A+^{-} B)\times^{-} C, & \sigma(A) = \sigma(B),\ \rho(A) \le \rho(B), \\ & \chi(C) \ge \chi(B). \end{cases}$$

1.3 Пресмятане на обхвати на функции

Първо ще формулираме едно твърдение за пресмятане на интервал, който се съдържа в обхвата на непрекъсната функция на една променлива. Такъв интервал ще наричаме вътрешно включване на обхвата.

Твърдение 1.40. Нека φ, $\psi : D \to R$, $D \subseteq R$, са непрекъснати функции и $ID = \{X \in IR : X \subseteq D\}$. Да означим с $\varphi(X) = \{\varphi(x) : x \in X\}$ и $\psi(X) = \{\psi(x) : x \in X\}$ съответно обхвата на φ и ψ в интервал $X \in ID$. Да предположим, че за $X \in ID$ е изпълнено $0 \in \varphi(X)$, $0 \notin \psi(X)$. Тогава е в сила следното включване:

$$\{\varphi(x) * \psi(x) : x \in X\} \supseteq \varphi(X) *^{-} \psi(X) \text{ за } * \in \{\times, /\}.$$

Доказателство. Тъй като функцията $\varphi * \psi$, $* \in \{\times, /\}$, е непрекъсната в компактното множество X, то съществуват точки $u_1, u_2 \in X$, такива че $\{\varphi(x) * \psi(x) : x \in X\} = [\varphi(u_1) * \psi(u_1), \varphi(u_2) * \psi(u_2)]$. По-нататък да означим $\varphi(X) = [\varphi(v_1), \varphi(v_2)]$ и $\psi(X) = [\psi^{+0}(X) \vee \psi^{-0}(X)]$. От това, че $0 \in \varphi(X)$ и че за $x \in X$ са изпълнени неравенствата $|\psi(X)| \ge |\psi(x)| \ge \rceil\psi(X)\lceil$, получаваме

$$\varphi(u_1)\psi(u_1) \le \begin{cases} \varphi(v_1)\psi(v_1) \le \varphi(v_1)\psi^{+0}(X), & \text{ако } \psi(X) > 0, \\ \varphi(v_2)\psi(v_2) \le \varphi(v_2)\psi^{+0}(X), & \text{ако } \psi(X) < 0; \end{cases}$$

$$\varphi(u_2)\psi(u_2) \ge \begin{cases} \varphi(v_2)\psi(v_2) \ge \varphi(v_2)\psi^{+0}(X), & \text{ако } \psi(X) > 0, \\ \varphi(v_1)\psi(v_1) \ge \varphi(v_1)\psi^{+0}(X), & \text{ако } \psi(X) < 0. \end{cases}$$

Последните неравенства и дефиницията на операцията $\times^-$ (вж. (5)) доказват твърдението в случая, когато $* = \times$; за $* = /$ доказателството е аналогично. $\square$

K-изотонни функции. Тук ще въведем класа на т. нар. K-изотонни функции на много променливи. За пресмятането на обхват на функции от този клас ще докажем твърдение, аналогично на Теорема 1.11.

Да разгледаме R^n и нека I, J са две подмножества от индекси на множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$, такива че $I \bigcup J = \{1, 2, \ldots, n\}$, $I \bigcap J = \emptyset$. Дефинираме

$$K_{(I,J)} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x_i \geq 0,\ i \in I;\ x_i < 0,\ i \in J\}. \tag{15}$$

$K_{(I,J)}$ е затворен и изпъкнал конус [107]. Всяка точка $x \in K_{(I,J)}$ може да бъде представена във вида $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i$, $\lambda_i \geq 0$, където $k_i = \{e_i, i \in I; -e_i, i \in J\}$, а e_i е i-тият единичен вектор. Следователно $K_{(I,J)}$ е многостенен конус, породен от векторите $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ (вж. [107]). Геометрически $K_{(I,J)}$ представлява един ортант в R^n. Да означим с $\mathcal{K}$ множеството от всички конуси от вида (15). Съществуват 2^n такива конуси в $\mathcal{K}$. За $K \in \mathcal{K}$ нека $-K = \{-x : x \in K\}$; очевидно $-K \in \mathcal{K}$.

Всеки конус $K \in \mathcal{K}$ поражда релация на частична наредба $\geq_K$ в R^n. За $x \in R^n$ казваме, че $x \geq_K 0$, ако е изпълнено $x \in K$; за $x, y \in R^n$ казваме, че $x \geq_K y$, ако $x - y \in K$.

Нека $X \in IR^n$, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $X_i = [X_i^-, X_i^+]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, е интервален вектор. Точките от множеството $\{w(X)\} = \{w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) : w_i \in \{X_i^-, X_i^+\}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ ще наричаме върхове на X. За $X, Y \in IR^n$ да означим с $X \vee Y = ((X \vee Y)_1, \ldots, (X \vee Y)_i, \ldots, (X \vee Y)_n)$ свързаното обединение на X и Y, където $(X \vee Y)_i = X_i \vee Y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (вж. т. 1.1).

За $x \in X$, $X \in IR^n$, да означим

$$con\,(X - x) = \{y \in R^n : y = \lambda(z - x),\ z \in X,\ \lambda > 0\}.$$

Твърдение 1.41. За $X \in IR^n$ и $K \in \mathcal{K}$ съществуват два върха $u = u(K; X)$, $v = v(K; X)$ на X такива, че е изпълнено $v \geq_K u$, $con\,(X - u) = K$ и $con\,(X - v) = -K$.

Доказателство. Построяваме точките $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

по следния начин:

$$u_i = \begin{cases} X_i^-, & i \in I, \\ X_i^+, & i \in J; \end{cases} \qquad v_i = \begin{cases} X_i^+, & i \in I, \\ X_i^-, & i \in J; \end{cases} \tag{16}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно $u, v \in X$ са върхове на X и е изпълнено $v - u \in K$. Нека $y \in con\,(X - u)$, т.е. $y = \lambda(x - u)$ за $x \in X$ и $\lambda > 0$. От (16) следва, че $x - u \in K$, т.е. $y = \lambda(x - u) \in K$. Следователно $con\,(X - u) \subseteq K$. Нека $y \in K + u$, т.е. $y = \lambda x + u$ за $x \in K$ и $\lambda > 0$. От (16) получаваме $\lambda x_i + X_i^- \geq X_i^-$ за $i \in I$, $\lambda x_i + X_i^+ \leq X_i^+$ за $i \in J$. Следователно $y \in X$ за достатъчно малки λ. Това означава, че $K + u \subseteq con\,X$, което е еквивалентно на $K \subseteq con\,(X - u)$. Равенството $con\,(X - v) = -K$ се доказва по подобен начин. □

Точките $u(K; X)$ и $v(K; X)$ ще наричаме K-върхове на X. Ще използваме означението

$$X = [u(K; X) \vee v(K; X)].$$

Да означим

$$\begin{aligned} X_K &= co\,\{u(K; X), v(K; X)\} \\ &= \{x \in X : \; x = u(K; X) + t(v(K; X) - u(K; X)), t \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

Очевидно $X_K = \{x \in X : u(K; X) \leq_K x \leq_K v(K; X)\}$. Ще използваме още означението $X_K = [u(K; X), v(K; X)]_K$.

Дефиниция 1.42. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R^n$. Ако съществува конус $K \in \mathcal{K}$, такъв че за всеки $x, y \in D$ от $x \geq_K y$ следва $f(x) \geq f(y)$, то f ще наричаме изотонна относно релацията на наредба, породена от K или накратко ще казваме, че f е K-изотонна в X. Конусът K ще наричаме конус на наредбата за f.

Твърдение 1.43. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R^n$, е K-изотонна и непрекъснато диференцируема в D. Да означим с $f'(x)$ градиента на f в точка $x \in D$. Тогава за всяко $x \in D$ е изпълнено $f'(x) \in K$.

Доказателство. За $K = K_{(I,J)} \in \mathcal{K}$ и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ имаме

$$\partial f(x)/\partial x_j = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)).$$

За $j \in I$ и $h > 0$ е изпълнено $x_j + h \geq x_j$ и следователно

$$(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) \geq_K (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n),$$

откъдето получаваме

$$f(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) \geq f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n),$$

т. е. $\partial f(x)/\partial x_j \geq 0$. Аналогично за $j \in I$ и $h < 0$ получаваме $\partial f(x)/\partial x_j \geq 0$. В случая, когато $j \in J$ неравенството $\partial f(x)/\partial x_j \leq 0$ се доказва по аналогичен начин. □

Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R^n$, е K-изотонна в $X \in ID$ и $u(K; X)$, $v(K; X)$ са K-върховете на X. Дефинираме функцията

$$\begin{aligned} &\varphi : [0,1] \to R, \\ &\varphi(t) = f(u(K; X) + t(v(K; X) - u(K; X))). \end{aligned} \tag{17}$$

Твърдение 1.44. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R^n$, е K-изотонна в $X \in ID$ и φ е дефинирана посредством (17). Тогава φ е изотонна (монотонно ненамаляваща) функция в $[0,1]$. Ако f е непрекъснато диференцируема в X, то $\varphi(t)$ е непрекъснато диференцируема в $[0,1]$ и $\varphi'(t) = (v(K; X) - u(K; X)) \cdot (f'(u(K; X) + t(v(K; X) - u(K; X))))$.

Доказателство. Нека $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 \geq t_2$. Означаваме $x_i = u(K; X) + t_i(v(K; X) - u(K; X))$, $i = 1, 2$; очевидно е изпълнено $x_1 \geq_K x_2$, откъдето следва $\varphi(t_1) = f(x_1) \geq f(x_2) = \varphi(t_2)$. По-нататък,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{d}{dt} f(u(K; X) + t(v(K; X) - u(K; X))) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u(K; X) + t(v(K; X) - u(K; X))) \cdot (v_j(K; X) - u_j(K; X)) \\ &= (v(K; X) - u(K; X)) \cdot (f'(u(K; X) + t(v(K; X) - u(K; X)))). \end{aligned}$$

□

Обхвати на K-изотонни функции. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъсната и K-изотонна за $K \in \mathcal{K}$. Да означим с $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ обхвата на f в $X \in ID$, а с $\varphi([0,1]) = \{\varphi(t) : t \in [0,1]\}$ обхвата на φ в $[0,1]$. В сила е представянето

$$f(X) = [f(u(K; X)), f(v(K; X))] = [\varphi(0), \varphi(1)] = \varphi([0,1]).$$

Ще разгледаме задачата за интервално-аритметично пресмятане на обхвата $f(X)$, когато f може да се представи като сума, разлика, произведение или частно на две функции. Нека $f = f_1 * f_2$, $f_1, f_2 : D \to R$, където $* \in \{+, -, \times, /\}$. Да означим с $u = u(K; X)$, $v = v(K; X)$ K-върховете на $X \in ID$. Нека $X_K = \{u + t(v - u) : t \in [0, 1]\} = [u, v]_K$. За функциите f_1, f_2 дефинираме интервалите

$$f_i(X_K) = [f_i(u) \vee f_i(v)], \quad i = 1, 2, \tag{18}$$

както и величините

$$\delta(f_i(X_K)) \;=\; f_i(u) - f_i(v), \tag{19}$$

$$\varrho(f_i(X_K)) \;=\; |f_i(u)| - |f_i(v)|, \quad i = 1, 2. \tag{20}$$

Следващата теорема може да се разглежда като обобщение на Теорема 1.11 за функции на повече променливи.

Теорема 1.45. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R^n$, е непрекъсната и K-изотонна в $X \in ID$; нека $f = f_1 * f_2$, $* \in \{+, -, \times, /\}$. Тогава е в сила следното представяне за обхвата $f(X)$:

(а) $f = f_1 + f_2$:

$$f(X) \;=\; \begin{cases} f_1(X_K) + f_2(X_K), & \text{ако } \delta(f_1(X_K)) \cdot \delta(f_2(X_K)) \geq 0, \\ f_1(X_K) +^- f_2(X_K) & \text{в противен случай;} \end{cases}$$

(б) $f = f_1 - f_2$:

$$f(X) \;=\; \begin{cases} f_1(X_K) -^- f_2(X_K), & \text{ако } \delta(f_1(X_K)) \cdot \delta(f_2(X_K)) \geq 0, \\ f_1(X_K) - f_2(X_K) & \text{в противен случай;} \end{cases}$$

(в) $f = f_1 \times f_2$:

$$f(X) \;=\; \begin{cases} f_1(X_K) \times f_2(X_K), & \text{ако } \varrho(f_1(X_K)) \cdot \varrho(f_2(X_K)) \geq 0, \\ f_1(X_K) \times^- f_2(X_K) & \text{в противен случай;} \end{cases}$$

(г) $f = f_1/f_2$, $f_2(x) \neq 0$ за всяко $x \in X$:

$$f(X) \;=\; \begin{cases} f_1(X_K)/^- f_2(X_K), & \text{ако } \varrho(f_1(X_K)) \cdot \varrho(f_2(X_K)) \geq 0, \\ f_1(X_K)/f_2(X_K) & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Доказателство. (а). Имаме

$$\begin{aligned} f(X) &= [f(u), f(v)] = [(f_1+f_2)(u), (f_1+f_2)(v)] \\ &= [f_1(u)+f_2(u), f_1(v)+f_2(v)]. \end{aligned}$$

От Твърдение 1.4 получаваме по-нататък

$$f(X) = \begin{cases} [f_1(u) \vee f_1(v)] + [f_2(u) \vee f_2(v)], \\ \qquad \text{ако } (f_1(u)-f_1(v))(f_2(u)-f_2(v)) \geq 0; \\ [f_1(u) \vee f_1(v)] +^- [f_2(u) \vee f_2(v)], \\ \qquad \text{ако } (f_1(u)-f_1(v))(f_2(u)-f_2(v)) < 0. \end{cases}$$

От (18) и (19) получаваме окончателния резултат

$$f(X) = \begin{cases} f_1(X_K) -^- f_2(X_K), & \text{ако } \delta(f_1(X_K)) \cdot \delta(f_2(X_K)) \geq 0, \\ f_1(X_K) - f_2(X_K), & \text{в противен случай;} \end{cases}$$

Доказателството на (б) е аналогично.

(в). Имаме

$$\begin{aligned} f(X) &= [f(u), f(v)] = [(f_1 \times f_2)(u), (f_1 \times f_2)(v)] \\ &= [f_1(u) \times f_2(u), f_1(v) \times f_2(v)]. \end{aligned}$$

От Твърдение 1.5 следва

$$f(X) = \begin{cases} [f_1(u) \vee f_1(v)] \times [f_2(u) \vee f_2(v)], \\ \qquad \text{ако } (|f_1(u)|-|f_1(v)|)(|f_2(u)|-|f_2(v)|) \geq 0; \\ [f_1(u) \vee f_1(v)] \times^- [f_2(u) \vee f_2(v)], \\ \qquad \text{ако } (|f_1(u)|-|f_1(v)|)(|f_2(u)|-|f_2(v)|) < 0. \end{cases}$$

От (18) и (20) получаваме крайния резултат

$$f(X) = \begin{cases} f_1(X_K) \times f_2(X_K), & \text{ако } \varrho(f_1(X_K)) \cdot \varrho(f_2(X_K)) \geq 0, \\ f_1(X_K) \times^- f_2(X_K), & \text{в противен случай;} \end{cases}$$

Случай (г) се доказва аналогично. □

Забележка 1.46. Интервалите $f_i(X_K) = [f_i(u) \vee f_i(v)]$, $i = 1, 2$, могат да се представят във вида

$$f_i(X_K) = [f_i(u + t(v-u))|_{t=0} \ \vee \ f_i(u + t(v-u))|_{t=1}],$$

т. е. краищата на интервала $f_i(X_K)$ съвпадат със стойностите на функцията $f_i(u+t(v-u))$ в краищата на интервала $[0,1]$. Върху X_K функциите f_i могат да се разглеждат като функции на променливата t в интервала $[0,1]$. Да означим

$$f_i(u+t(v-u)) = \varphi_i(t),\ t \in [0,1],\ \ i = 1,2.$$

Ако φ_i, $i = 1,2$, са монотонни относно t, получаваме

$$f_i(X_K) = \varphi_i([0,1]),\ \ i = 1,2,$$

т. е. интервалите $f_i(X_K)$ са равни на обхватите на функциите $\varphi_i(t)$ в интервала $[0,1]$. В случая, когато е възможно да представим $\varphi_i(t) = \varphi_{i1}(t) * \varphi_{i2}(t)$ за $* \in \{+,-,\times,/\}$, можем да получим интервално-аритметично представяне и за $f_i(X_K)$ с помощта на Теорема 1.11.

Пример 1.2. Да разгледаме следната функция на n променливи

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = (x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n),\ \ 1<k<n. \quad (21)$$

Да предположим, че са известни интервали $X_1,X_2,\dots,X_n$, такива че $X_i \bigcap X_j = \emptyset$ за $i \neq j$, $i,j = 1,2,\dots,n$, $X_1 < X_2 < \dots < X_n$ и $x_i \in X_i = [X_i^-, X_i^+]$ за $i = 1,2,\dots,n$. Да означим с $x = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ и $X = (X_1,X_2,\dots,X_n)$. Ще намерим интервално-аритметичен израз за обхвата $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ на функцията (21) при едно от следните предположения:

(а) $n-k$ нечетно и $\sum_{l=1,l\neq k}^{n}\prod_{j=1,j\neq l,j\neq k}^{n}(x_k-x_j) > 0$;

(б) $n-k$ четно и $\sum_{l=1,l\neq k}^{n}\prod_{j=1,j\neq l,j\neq k}^{n}(x_k-x_j) > 0$;

(в) $n-k$ нечетно и $\sum_{l=1,l\neq k}^{n}\prod_{j=1,j\neq l,j\neq k}^{n}(x_k-x_j) < 0$;

(г) $n-k$ четно и $\sum_{l=1,l\neq k}^{n}\prod_{j=1,j\neq l,j\neq k}^{n}(x_k-x_j) < 0$.

Ще разгледаме подробно случай (а); останалите случаи се разглеждат аналогично.

Да означим

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1}), \\ f_2(x) &= (x_k-x_{k+1})(x_k-x_{k+2})\dots(x_k-x_n). \end{aligned}$$

Тогава $f(x) = f_1(x) \times f_2(x)$. Лесно се вижда, че при предположенията (a) имаме

$$\partial f(x)/\partial x_i \begin{cases} > 0 & \text{за } i \leq k-1, \\ < 0 & \text{за } i \geq k+1; \end{cases}$$

$$\partial f(x)/\partial x_k > 0.$$

Следователно f е K-изотонна в X и K-върховете $u = u(K;X)$, $v = v(K;X)$ се определят по следния начин:

$$\begin{aligned} u &= (X_1^-, X_2^-, \dots, X_{k-1}^-, X_k^-, X_{k+1}^+, \dots, X_n^+), \\ v &= (X_1^+, X_2^+, \dots, X_{k-1}^+, X_k^+, X_{k+1}^-, \dots, X_n^-). \end{aligned}$$

Имаме

$$\begin{aligned} f_1(X_K) &= \{(\xi_k - \xi_1)(\xi_k - \xi_2)\dots(\xi_k - \xi_{k-1}), \\ &\quad \xi_1 = X_1^- + t(X_1^+ - X_1^-),\ \xi_2 = X_2^- + t(X_2^+ - X_2^-), \dots, \\ &\quad \xi_{k-1} = X_{k-1}^- + t(X_{k-1}^+ - X_{k-1}^-),\ \xi_k = X_k^- + t(X_k^+ - X_k^-) :\ t \in [0,1]\} \\ &= \{((X_k^- - X_1^-) + t(\omega(X_k) - \omega(X_1)) \times ((X_k^- - X_2^-) + t(\omega(X_k) - \omega(X_2))) \\ &\quad \times \dots \times ((X_k^- - X_{k-1}^-) + t(\omega(X_k) - \omega(X_{k-1}))) :\ t \in [0,1]\} \\ &= \{\varphi_1(t) : t \in [0,1]\} = \varphi_1([0,1]). \end{aligned}$$

Нека $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ е подмножество от индекси на множеството $\{1, 2, \dots, k-1\}$, такова че $\omega(X_{i_l}) \leq \omega(X_k)$, $l = 1, 2, \dots, p$, a $\{j_1, j_2, \dots, j_q\}$ е подмножеството, за което $\omega(X_{j_l}) > \omega(X_k)$, $l = 1, 2, \dots, q$. Да представим $\varphi_1(t) = \varphi_{1,1}(t) \times \varphi_{1,2}(t)$, където

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1}(t) &= \prod_{l=1}^{p} (t(\omega(X_k) - \omega(X_{i_l})) + (X_k^- - X_{i_l}^-)), \\ \varphi_{1,2}(t) &= \prod_{l=1}^{q} (t(\omega(X_k) - \omega(X_{j_l})) + (X_k^- - X_{j_l}^-)). \end{aligned}$$

За $t \in [0,1]$ функцията $|\varphi_{1,1}(t)| = \varphi_{1,1}(t)$ е изотонна, а функцията $|\varphi_{1,2}(t)| = \varphi_{1,2}(t)$ е антитонна. Съгласно Забележка 1.46 и от Теорема 1.11 получаваме следното представяне:

$$f_1(X_K) = \varphi_1([0,1]) = \varphi_{1,1}([0,1]) \times^- \varphi_{1,2}([0,1]).$$

Функцията $\varphi_{1,1}(t)$ е произведение от p на брой изотонни функции в интервала $[0,1]$, които не се анулират в $[0,1]$, откъдето следва (вж. Забележка 1.12), че

$$\varphi_{1,1}([0,1]) = (X_k -^- X_{i_1}) \times (X_k -^- X_{i_2}) \times \dots \times (X_k -^- X_{i_p}).$$

Функцията $\varphi_{1,2}(t)$ представлява произведение от q на брой антитонни и положителни в $[0,1]$ функции, следователно (вж. Забележка 1.12)

$$\varphi_{1,2}([0,1]) = (X_k -^- X_{j_1}) \times (X_k -^- X_{j_2}) \times \cdots \times (X_k -^- X_{j_q}).$$

Следователно

$$\begin{aligned} f_1(X_K) &= ((X_k -^- X_{i_1}) \times (X_k -^- X_{i_2}) \times \cdots \times (X_k -^- X_{i_p})) \\ &\quad \times^- ((X_k -^- X_{j_1}) \times (X_k -^- X_{j_2}) \times \cdots \times (X_k -^- X_{j_q})). \end{aligned}$$

По подобен начин ще получим и интервално-аритметично представяне за $f_2(X_K)$. Имаме

$$\begin{aligned} & f_2(X_K) \\ &= \{(\xi_k - \xi_{k+1})(\xi_k - \xi_{k+2}) \ldots (\xi_k - \xi_n), \\ &\quad \xi_k = X_k^- + t(X_k^+ - X_k^-), \xi_{k+1} = X_{k+1}^+ + t(X_{k+1}^- - X_{k+1}^+), \\ &\quad \xi_{k+2} = X_{k+2}^+ + t(X_{k+2}^- - X_{k+2}^+), \ldots, \xi_n = X_n^+ + t(X_n^- - X_n^+) : \ t \in [0,1]\} \\ &= \{((X_k^- - X_{k+1}^+) + t(\omega(X_k) - \omega(X_{k+1}))) \times ((X_k^- - X_{k+2}^+) + t(\omega(X_k) - \omega(X_{k+2}))) \\ &\quad \times \cdots \times ((X_k^- - X_n^+) + t(\omega(X_k) - \omega(X_n))) : \ t \in [0,1]\} \\ &= \{\varphi_2(t) : t \in [0,1]\} = \varphi_2([0,1]). \end{aligned}$$

Функцията $\varphi_2(t)$ е произведение от $n-k$ на брой функции, т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= \prod_{i=1}^{n-k} \varphi_{2,i}(t), \\ \varphi_{2,i}(t) &= t(-\omega(X_{k+i}) - \omega(X_k)) + (X_k^- - X_{k+i}^+), \ \ i = 1, 2, \ldots, n-k. \end{aligned}$$

Лесно се вижда, че $\varphi_{2,i}(t)$ са антитонни в $[0,1]$ функции и $\varphi_{2,i}(t) < 0$ за $t \in [0,1]$; тъй като по предположение $n-k$ е нечетно число, то $\varphi_2(t)$ е антитонна и положителна функция. Освен това $\varphi_{2,i}([0,1]) = X_k -^- X_{k+i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-k$. От Теорема 1.11 получаваме

$$\begin{aligned} f_2(X_K) &= \varphi_{2,1}([0,1]) \times \varphi_{2,2}([0,1]) \times \cdots \times \varphi_{2,n-k}([0,1]) \\ &= (X_k -^- X_{k+1}) \times (X_k -^- X_{k+2}) \times \cdots \times (X_k -^- X_n). \end{aligned}$$

Ще пресметнем $\varrho(f_1(X_K))$ и $\varrho(f_2(X_K))$. Имаме

$$\begin{aligned} \varrho(f_1(X_K)) &= |f_1(u)| - |f_1(v)| \\ &= |(X_k^- - X_1^-) \cdots (X_k^- - X_{k-1}^-)| - |(X_k^+ - X_1^+) \cdots (X_k^+ - X_{k-1}^+)| \end{aligned}$$

$$= \quad (X_k^- - X_1^-)\cdots(X_k^- - X_{k-1}^-) - (X_k^+ - X_1^+)\cdots(X_k^+ - X_{k-1}^+);$$

$$\begin{aligned}
\varrho(f_2(X_K)) &= |f_2(u)| - |f_2(v)| \\
&= |(X_k^- - X_{k+1}^+)\cdots(X_k^- - X_n^+)| - |(X_k^+ - X_{k+1}^-)\cdots(X_k^+ - X_n^-)| \\
&= (X_k^- - X_{k+1}^+)\cdots(X_k^- - X_n^+) - (X_k^+ - X_{k+1}^-)\cdots(X_k^+ - X_n^-).
\end{aligned}$$

Не е трудно да се види, че $\varrho(f_2(X_K)) > 0$. От Теорема 1.45(в) получаваме

$$f(X) = \begin{cases} f_1(X_K) \times f_2(X_K), & \text{ако } \varrho(f_1(X_K)) > 0; \\ f_1(X_K) \times^- f_2(X_K) & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

В горното представяне заместваме $f_1(X_K)$ и $f_2(X_K)$ с техните интервално-аритметични изрази и получаваме

$$\begin{aligned}
f(X) &= (((X_k -^- X_{i_1}) \times \cdots \times (X_k -^- X_{i_p})) \\
&\quad \times^-((X_k -^- X_{j_1}) \times \cdots \times (X_k -^- X_{j_q}))) \\
&\quad \times((X_k - X_{k+1}) \times \cdots \times (X_k - X_n)), \text{ ако } \varrho(f_1(X_K)) > 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(X) &= (((X_k -^- X_{i_1}) \times \cdots \times (X_k -^- X_{i_p})) \\
&\quad \times^-((X_k -^- X_{j_1}) \times \cdots \times (X_k -^- X_{j_q}))) \\
&\quad \times^-((X_k - X_{k+1}) \times \cdots \times (X_k - X_n)), \text{ ако } \varrho(f_1(X_K)) < 0.
\end{aligned}$$

Останалите три случая се извеждат аналогично. Тук ще дадем крайните резултати.

(б). Да означим с $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ подмножество на $\{1, 2, \ldots, n-k\}$, за което е изпълнено неравенството $\omega(X_{k+i_l}) \leq \omega(X_k)$, $l = 1, 2, \ldots, p$, а с $\{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$ това подмножество на $\{1, 2, \ldots, n-k\}$, за което $\omega(X_{k+j_l}) > \omega(X_k)$, $l = 1, 2, \ldots, q$; нека

$$\begin{aligned}
\varrho_2 = \varrho(f_2(X_K)) &= |(X_k^- - X_{k+1}^-)(X_k^- - X_{k+2}^-)\cdots(X_k^- - X_n^-)| \\
&\quad -|(X_k^+ - X_{k+1}^+)(X_k^+ - X_{k+2}^+)\cdots(X_k^+ - X_n^+)|.
\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}
f(X) &= ((X_k - X_1) \times (X_k - X_2) \times \cdots \times (X_k - X_{k-1})) \\
&\quad \times(((X_k -^- X_{k+i_1}) \times \cdots \times (X_k -^- X_{k+i_p})) \\
&\quad \times^-((X_k -^- X_{k+j_1}) \times \cdots \times (X_k -^- X_{k+j_q}))), \text{ ако } \varrho_2 < 0;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(X) &= ((X_k - X_1) \times (X_k - X_2) \times \cdots \times (X_k - X_{k-1})) \\
&\quad \times^{-}(((X_k -^{-} X_{k+i_1}) \times \cdots \times (X_k -^{-} X_{k+i_p})) \\
&\quad \times^{-}((X_k -^{-} X_{k+j_1}) \times \cdots \times (X_k -^{-} X_{k+j_q}))), \text{ ако } \varrho_2 > 0.
\end{aligned}
$$

(в). Да означим с $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ подмножество на $\{1, 2, \ldots, n-k\}$, за което е изпълнено неравенството $\omega(X_{k+i_l}) \geq \omega(X_k)$, $l = 1, 2, \ldots, p$, а с $\{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$ това подмножество на $\{1, 2, \ldots, n-k\}$, за което $\omega(X_{k+j_l}) < \omega(X_k)$, $l = 1, 2, \ldots, q$; нека

$$
\begin{aligned}
\varrho_2 = \varrho(f_2(X_K)) &= |(X_k^+ - X_{k+1}^+)(X_k^+ - X_{k+2}^+) \cdots (X_k^+ - X_n^+)| \\
&\quad -|(X_k^- - X_{k+1}^-)(X_k^- - X_{k+2}^-) \cdots (X_k^- - X_n^-)|.
\end{aligned}
$$

Тогава

$$
\begin{aligned}
f(X) &= ((X_k - X_1) \times (X_k - X_2) \times \cdots \times (X_k - X_{k-1})) \\
&\quad \times(((X_k -^{-} X_{k+i_1}) \times \cdots \times (X_k -^{-} X_{k+i_p})) \\
&\quad \times^{-}((X_k -^{-} X_{k+j_1}) \times \cdots \times (X_k -^{-} X_{k+j_q}))), \text{ ако } \varrho_2 > 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(X) &= ((X_k - X_1) \times (X_k - X_2) \times \cdots \times (X_k - X_{k-1})) \\
&\quad \times^{-}(((X_k -^{-} X_{k+i_1}) \times \cdots \times (X_k -^{-} X_{k+i_p})) \\
&\quad \times^{-}((X_k -^{-} X_{k+j_1}) \times \cdots \times (X_k -^{-} X_{k+j_q}))), \text{ ако } \varrho_2 < 0.
\end{aligned}
$$

(г). Да означим с $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ подмножество на $\{1, 2, \ldots, k-1\}$, за което е изпълнено неравенството $\omega(X_{i_l}) \geq \omega(X_k)$, $l = 1, 2, \ldots, p$, а с $\{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$ това подмножество на $\{1, 2, \ldots, k-1\}$, за което $\omega(X_{j_l}) < \omega(X_k)$, $l = 1, 2, \ldots, q$; нека

$$
\begin{aligned}
\varrho_1 = \varrho(f_1(X_K)) &= |(X_k^+ - X_1^+)(X_k^+ - X_2^+) \cdots (X_k^+ - X_{k-1}^+)| \\
&\quad - |(X_k^- - X_1^-)(X_k^- - X_2^-) \cdots (X_k^- - X_{k-1}^-)|.
\end{aligned}
$$

Тогава

$$
\begin{aligned}
f(X) &= (((X_k -^{-} X_{i_1}) \times \cdots \times (X_k -^{-} X_{i_p})) \\
&\quad \times^{-}((X_k -^{-} X_{j_1}) \times \cdots \times (X_k -^{-} X_{j_q}))) \\
&\quad \times((X_k - X_{k+1}) \times \cdots \times (X_k - X_n)), \text{ ако } \varrho_1 > 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(X) &= (((X_k -^{-} X_{i_1}) \times \cdots \times (X_k -^{-} X_{i_p})) \\
&\quad \times^{-}((X_k -^{-} X_{j_1}) \times \cdots \times (X_k -^{-} X_{j_q}))) \\
&\quad \times^{-}((X_k - X_{k+1}) \times \cdots \times (X_k - X_n)), \text{ ако } \varrho_1 < 0.
\end{aligned}
$$

ГЛАВА 2

ЧИСЛЕНИ АЛГОРИТМИ С ВЕРИФИКАЦИЯ НА РЕЗУЛТАТА ЗА НЕЛИНЕЙНИ АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

2.1 Предварителни бележки

Редици от интервали. Хаусдорфовото разтояние $q(A, B)$ между интервали $A = [A^-, A^+]$, $B = [B^-, B^+] \in IR$, разглеждани като точкови множества в R, се дефинира посредством

$$q(A, B) = \max\{\sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} |\alpha - \beta| \ , \ \sup_{\beta \in B} \inf_{\alpha \in A} |\alpha - \beta|\}.$$

То се изразява с краищата на интервалите по следния начин:

$$q(A, B) = \max\{|A^- - B^-|, |A^+ - B^+|\}.$$

От дефиницията на $|\cdot|$ и на операцията $-^-$ получаваме представянето

$$q(A, B) = |A -^- B|.$$

Дефиниция 2.1 [25]. Казваме, че редицата от интервали $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ е сходяща към интервала A и означаваме $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, ако е изпълнено $\lim_{n\to\infty} q(A_n, A) = 0$.

От Дефиниция 2.1 следва, че ако редицата $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} = \{[A_n^-, A_n^+]\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и има граница $A = [A^-, A^+]$, то числовите редици от краищата $\{A_n^-\}$, $\{A_n^+\}$, от центровете $\{\mu(A_n)\}$ и от радиусите $\{\rho(A_n)\}$ също са сходящи и $\lim_{n\to\infty} A_n^- = A^-$, $\lim_{n\to\infty} A_n^+ = A^+$, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$, $\lim_{n\to\infty} \rho(A_n) = \rho(A)$.

Метричното пространство (IR, q) с метрика q е затворено [25].

Дефиниция 2.2 [25]. Редицата от интервали $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича антитонна (монотонно нерастяща) по включване, ако $A_i \supseteq A_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Твърдение 2.3 [25]. Всяка антитонна по включване редица от интервали $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Дефиниция 2.4 [71]. Една антитонна по включване редица от интервали $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича точково сходяща, ако $\lim_{n\to\infty} \omega(A_n) = 0$.

Очевидно, ако една антитонна по включване редица от интервали $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ е точково сходяща и $a \in A_n$, $a \in R$, за всяко $n = 1, 2, \ldots$, то $\lim_{n\to\infty} A_n = a$.

Интервални функции. Нека IR^n множеството от n-мерни интервални вектори, т.е. $X \in IR^n$, ако $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $X_i = [X_i^-, X_i^+] \in IR$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. В IR^n релацията $\subseteq$ се дефинира покомпонентно: за $X, Y \in IR^n$ е изпълнено $X \subseteq Y \iff X_i \subseteq Y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Нека $D \subseteq R^n$. Да означим с $ID = \{Y \in IR^n : Y \subseteq D\}$.

Дефиниция 2.5. Една интервална функция $F : ID \to IR^n$ на n интервални аргументи се нарича изотонна по включване, ако за $X, Y \in IR^n$ от $X \subseteq Y$ следва $F(X) \subseteq F(Y)$.

Външните (стандартните) интервално-аритметични операции, разгледани като интервални функции на две интервални променливи $F(X, Y) = X * Y$, $* \in \{+, -, \times, /\}$, са изотонни по включване; вътрешните (нестандартните) операции между интервали, разгледани като интервални функции на две интервални променливи $F(X, Y) = X *^- Y$, не са изотонни по включване (вж. Твърдения 1.17 и 1.18).

Дефиниция 2.6 [112]. Функцията $F : ID \to IR$ се нарича непрекъсната в $X \in ID$, ако $\lim_{n\to\infty} F(X_n) = F(X)$ за всяка редица $\{X_n\} \in ID$, такава че $\lim_{n\to\infty} X_n = X$. Ако F е непрекъсната във всяко $X \in ID$, то F се нарича непрекъсната в ID.

Дефиниция 2.7 [98]. Функцията $F : ID \to IR$ се нарича липшицова, ако съществува число $L > 0$ (липшицова константа), така че да е изпълнено $\omega(F(X)) \leq L\omega(X)$ за всяко $X \in ID$.

За интервални функции свойствата непрекъснатост и липшицовост са независими.

Пример 2.1 (от липшицовост не следва непрекъснатост) [112]. Нека интервалната функция $F : IX \to IR$, $X = [0, 1]$, е дефинирана чрез $F(Y) = Y + \delta(\omega(Y))$, където $Y \in IX$, а $\delta(x) = \{1, \text{ако } x > 0;\ 0, \text{ако } x \leq 0\}$. Да вземем редицата от интервали $Y_n = [0, \frac{1}{n}]$. Очевидно $\lim_{n\to\infty} Y_n = [0,0]$, но $F(Y_n) = [0, \frac{1}{n}] + 1$ и $\lim_{n\to\infty} F(Y_n) = [1,1] \neq F([0,0]) = 0$.

Пример 2.2 (от непрекъснатост не следва липшицовост) [112]. Нека $X = [0,1]$ и функцията $F : IX \to IR$ е дефинирана посредством $F(Y) = [0, \sqrt{\omega(Y)}]$. Функцията F е непрекъсната и това следва от непрекъснатостта на функцията квадратен корен и на функцията ω; липшицова константа не съществува, тъй като редицата

$$\omega(F(Y))/\omega(Y) = \sqrt{\omega(Y)}/\omega(Y) = 1/\sqrt{\omega(Y)}, \ \omega(Y) \neq 0,$$

не е ограничена.

По-долу ще разгледаме интервални функции на един реален аргумент.

Дефиниция 2.8 [83]. Казваме, че интервалната функция $F : D \to IR$, $D \subseteq R$, е изотонна (антитонна) в D, ако за всеки две числа $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$, е изпълнено $F(x_1) \preceq F(x_2)$ $(F(x_2) \preceq F(x_1))$. В двата случая ще казваме, че F е монотонна функция.

Нека е дадена една интервална функция на реална променлива $F : D \to IR$, $D \subseteq R$. Реалнозначните функции $F^-, F^+ : D \to R$, дефинирани с равенството $F(x) = [F^-(x), F^+(x)]$, $x \in D$, ще наричаме гранични функции на F; F^- е лява или долна гранична функция на F, а F^+ — дясна или горна гранична функция на F.

Дефиниция 2.9 [83]. Казваме, че интервалната функция $F : D \to IR$, $D \subseteq R$, е диференцируема в точката $x \in D$, ако F е дефинирана в околност на x и съществува границата $\lim_{h\to 0}(F(x+h) -^- F(x))/h$. Тази граница ще наричаме производна на F в точката x и ще я означаваме с $F'(x)$.

Теорема 2.10 [83]. Ако $F : D \to IR$, $D \subseteq R$, е диференцируема в $x \in D$, то функциите $F + C$, $F -^- C$ и αF за $C \in IR$, $\alpha \in R$, също са диференцируеми в x и е изпълнено $(F + C)' = F'$, $(F -^- C)' = F'$, $(\alpha F)' = \alpha F'$.

Теорема 2.11 [83]. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е реалнозначна диференцируема функция и $A \in IR$. Тогава интервалната функция на реален аргумент $F(x) = A \times f(x)$ е диференцируема и $F'(x) = (A \times f(x))' = A \times f'(x)$.

Важна характеристика на интервалната функция на реална променлива $F = [F^-, F^+]$ е функцията $\omega(F)$, дефинирана посредством $\omega(F)(x) =$

$\omega(F(x)) = \omega([F^-(x), F^+(x)]) = F^+(x) - F^-(x)$. Казваме, че F е ω-монотонна в D, ако $\omega(F)(x)$ е монотонна в D. За краткост, ще казваме че F е ω-монотонна в точката $x \in D$, ако $\omega(F)$ е монотонна в околност на x.

Производната на интервалната функция $F(x) = [F^-(x), F^+(x)]$ може да бъде описана чрез производните на граничните функции F^- и F^+.

Теорема 2.12 [88]. Нека $F : D \to IR$, $D \subseteq R$, $F(x) = [F^-(x), F^+(x)]$, е интервална функция.
(а) Ако граничните функции F^- и F^+ са диференцируеми в $x \in D$, то F е диференцируема в x и $F'(x) = [F^{-\prime}(x) \vee F^{+\prime}(x)]$.
(б) Ако F е ω-монотонна и диференцируема в $x \in D$, то F^- и F^+ са диференцируеми в x и $F'(x) = [F^{-\prime}(x) \vee F^{+\prime}(x)]$.
(в) Ако съществуват едностранните производни на F^- и F^+ в x и $F^{-\prime}(x-0) = F^{+\prime}(x+0)$, $F^{-\prime}(x+0) = F^{+\prime}(x-0)$, то F е диференцируема в x и $F'(x) = [F^{-\prime}(x-0) \vee F^{+\prime}(x+0)] = [F^{+\prime}(x-0) \vee F^{-\prime}(x+0)]$.

Пример 2.3 [88]. Интервалният полином

$$\begin{aligned} P(x) &= A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \cdots + A_n(x-x_0)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} A_i(x-x_0)^i, \end{aligned}$$

където $A_i \in IR$, $i = 0, 1, \ldots n$, е ω-монотонен във всяко $x \neq x_0$; $P(x)$ е ω-антитонен в $(-\infty, x_0]$ и ω-изотонен в $[x_0, \infty)$. Граничните полиноми P^-, P^+, дефинирани посредством $P(x) = [P^-(x), P^+(x)]$, са диференцируеми в $(-\infty, x_0)$ и (x_0, ∞) и производната $P'(x)$ за $x \neq x_0$ може да бъде пресметната с помощта на Теорема 2.12(а); в точката x_0 производната $P'(x_0)$ може да се пресметне посредством Теорема 2.12(в). Получаваме

$$\begin{aligned} P'(x) &= A_1 + 2A_2(x-x_0) + \cdots + nA_n(x-x_0)^{n-1}; \\ P''(x) &= 2A_2 + 6A_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2}; \\ \ldots \\ P^{(n)}(x) &= n!A_n; \\ P^{(n+1)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

От диференцируемостта на F в x не следва диференцируемост на $\omega(F)$ в x. Но ако F е диференцируема и ω-монотонна в x, то тогава $\omega(F)$ също е диференцируема в x. В този случай вместо да казваме, че F е ω-монотонна, ще пишем $\omega'(F)(x) \geq 0$ (вж. [88]).

Теорема 2.13 [86], [88]. Нека интервалните функции F и G са диференцируеми и ω-монотонни в x, а реалната функция g е диференцируема в x. Тогава:

$$(F(x)+G(x))' = \begin{cases} F'(x)+G'(x), & \omega'(F)(x)\omega'(G)(x) \geq 0, \\ F'(x)+^{-} G'(x), & \omega'(F)(x)\omega'(G)(x) < 0; \end{cases}$$

$$(F(x)-^{-} G(x))' = \begin{cases} F'(x)-^{-} G'(x), & \omega'(F)(x)\omega'(G)(x) \geq 0, \\ F'(x)-G'(x), & \omega'(F)(x)\omega'(G)(x) < 0; \end{cases}$$

$$(F(x)g(x))' = \begin{cases} F'(x)g(x)+F(x)g'(x), & \omega'(F)(x)g(x)g'(x) \geq 0, \\ F'(x)g(x)+^{-} F(x)g'(x), & \omega'(F)(x)g(x)g'(x) < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема 2.14 (Теорема за крайните нараствания за интервални функции на реална променлива) [83], [86]. Нека F е непрекъсната в $X=[X^-,X^+]$ и диференцируема в (X^-,X^+). Тогава е изпълнено

$$F(X^+)-^{-} F(X^-) \subset \tilde{F'}(X)(X^+-X^-),$$

където $\tilde{F'}(X)=\bigvee_{x\in X} F'(x)$.

Теорема 2.15 [83]. Нека F е непрекъсната в $X=[X^-,X^+]$ и диференцируема в (X^-,X^+). За да бъде F изотонна (антитонна) в X е необходимо и достатъчно $F'(x)\geq 0$ ($F'(x)\leq 0$) за всяко $x\in X$.

Интервални разширения.

Дефиниция 2.16 [99]. Нека $f: D \to R$, $D \subseteq R^n$ и $ID=\{X\in IR^n : X\subseteq D\}$. Интервалната функция $F: ID \to IR$ се нарича интервално разширение на f, ако

$$F([x_1,x_1],[x_2,x_2],\ldots,[x_n,x_n]) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

за всяко $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$, т. е. ако аргументите на F са точкови интервали, то и стойността на F е точков интервал, равен на $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Очевидно функцията обхват f_R (вж. Дефиниция 1.10) е интервално разширение на f; при това f_R е изотонно по включване интервално разширение на f.

Теорема 2.17 [99]. Нека $F: ID \to IR$ е изотонно по включване интервално разширение на $f: D\to R$, а $f(X)$ е обхватът на f в $X\in ID$. Тогава $f(X)\subseteq F(X)$.

В интервалния анализ са положени значителни усилия за построяване на интервални разширения, чиито стойности да апроксимират достатъчно добре обхвата на дадена непрекъсната функция в даден интервал. Като критерий за апроксимация обикновено да се използува разликата $\omega(F(X)) - \omega(f(X)) = \omega(F(X) -^{-} f(X))$. От практическа гледна точка е важно тези интервални разширения да могат да се пресмятат на компютър.

Широк клас от изотонни по включване интервални разширения на реални непрекъснати функции може да се дефинира чрез интервално-аритметични изрази.

Ако $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е рационална функция (на една или повече променливи), един начин за намиране на интервално разширение F на f е всяка реална променлива x_i в аритметичния израз на f да се замести със съответната интервална променлива X_i от дефиниционната област на f и всички реално-аритметични операции $+, -, \times, /$ да се заместят със съответните външни (стандартни) интервално-аритметични операции $+, -, \times, /$. Ако полученият по този начин интервално-аритметичен израз $F = F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ е дефиниран (например няма деление на интервал, съдържащ нула), то той представлява интервално разширение на реалната функция f, при това изотонно по включване (тъй като външните интервално-аритметични операции са изотонни по включване) и съгласно Теорема 2.17 съдържа обхвата на f.

Така полученият интервално-аритметичен израз F се нарича стандартно (естествено) интервално разширение на f.

Пример 2.4 [112]. $f(x) = x - x^2$, $X = [-1, 2]$.

Лесно се вижда, че обхватът на f в интервала $X = [-1, 2]$ е $f(X) = f([-1, 2]) = [-2, 1/4]$. Да запишем f във вида $f(x) = x - x \cdot x$. Интервалната функция $F_1(X) = X - X \times X$ е интервално разширение на f и има стойност $F_1([-1, 2]) = [-5, 4]$. Друго интервално разширение на f можем да получим, като в израза $x - x^2$ заместим елементарната функция $\varphi(x) = x^2$ с нейния обхват $\varphi(X)$. Очевидно е изпълнено $\varphi([-1, 2]) = [\min\{x^2 : x \in [-1, 2]\}, \max\{x^2 : x \in [-1, 2]\}] = [0, 4]$. Тогава $F_2(X) = X - \varphi(X)$ е друго интервално разширение на f и $F_2([-1, 2]) = [-5, 2]$. Да запишем f във вида $f(x) = x(1 - x)$. Тогава интервалната функция $F_3(X) = X \times (1 - X)$ задава трето интервално разширение на f; имаме $F_3([-1, 2]) = [-2, 4]$. За $f(x) = 1/4 - (x - 1/2)^2$ намираме четвърта интервална функция $F_4(X) =$

$1/4-(X-1/2)\times(X-1/2)$, за която $F_4([-1,2]=[-2,2]$. Ако $\psi(x)=(x-1/2)^2$ и пресметнем обхвата $\psi(X)$ върху X, то тогава $F_5(X)=1/4-\psi(X)$ е пето интервално разширение на f; при това имаме $F_5([-1,2])=[-2,1/4]$, което съвпада с обхвата на f.

От примера става ясно, че качеството на включването $f(X)\subseteq F_i(X)$, $i=1,2,3,4,5$, зависи от използувания аритметичен израз за f. Следователно е необходимо да се прави разлика между функция и аритметичен израз, който я дефинира, както и да имаме по-точно определение за заместване на реалната променлива x със съответната интервална променлива X. По-долу ще дадем по-прецизни дефиниции за аритметичен израз и за стандартно интервално разширение. За детайлно разглеждане на този въпрос препоръчваме [101], както и [112] и цитираната там литература.

Елементарни функции ще наричаме елементите на предварително зададено множество Φ от реални функции, непрекъснати върху всеки затворен интервал, върху който са дефинирани. Най-често множеството Φ се състои от функциите [101]

> *abs* (абсолютна стойност), *sqr* (квадратна функция), *sqrt* (квадратен корен), *exp* (експонента), *ln* (натурален логаритъм), *sin* (синус), *cos* (косинус), *arctan* (аркус тангенс).

Аритметичен израз на (формалните) променливи $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ наричаме елемент на множеството $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, дефинирано рекурсивно посредством [101]

- (i) $R\subseteq\mathcal{A}$;
- (ii) $\xi_i\in\mathcal{A}$ за $i=1,2,\ldots,n$;
- (iii) $f,g\in\mathcal{A}\Longrightarrow f*g\in\mathcal{A}$ за $*\in\{+,-,\times,/\}$;
- (iv) $f\in\mathcal{A}\Longrightarrow\varphi(f)\in\mathcal{A}$;
- (v) Измежду всички множества $\mathcal{A}$, удовлетворяващи $(i)-(iv)$, $\mathcal{A}$ е минимално относно релацията включване.

Аритметичен израз, в който не участвуват функции от Φ, се нарича рационален.

За всяко $\varphi\in\Phi$ дефинираме обхват $\varphi(X)$ върху интервал $X\in IR$, върху който φ е дефинирана. Ще отбележим разликата между $\mathrm{abs}(X)$ и

$|X|$, $X \in IR$. Функцията $\mathrm{abs}(X)$ е дефинирана като обхват на реалната функция $|x|$ върху интервала X, т.е. $\mathrm{abs}(X) = [\inf\{|x| : x \in X\}, \sup\{|x| : x \in X\}]$. Лесно се вижда, че $\mathrm{abs}(X) = [\ \rceil X \lceil\ , |X|]$. За $\mathrm{sqr}(X)$ имаме $\mathrm{sqr}(X) = \{[(X^-)^2, (X^+)^2]$, ако $0 \notin X$; $[0, |X|^2]$, ако $0 \in X\}$. Обхватите на всички останали елементарни функции $\varphi \in \Phi$ могат да се изразят или чрез стойностите на функциите в краищата на интервала (ако са монотонни, като напр. sqrt, exp, ln) или чрез стойностите им в точките на локален минимум и максимум (като напр. sin, cos) [101].

Дефиниция 2.18 [101]. Нека $f(\xi) = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ е аритметичен израз, дефиниран в $D \subseteq IR^n$. Стандартно (естествено) интервално разширение $F(X)$ на $f(\xi)$ в $X \in ID$ се дефинира рекурсивно по следния начин:

$F(X) = c$	ако $f = c$ е реална константа;
$F(X) = X_i$	ако $f = \xi_i$ е променлива;
$F(X) = G(X) * H(X)$	ако $f = g * h$, $* \in \{+, -, \times, /\}$;
$F(X) = \varphi(G(X))$	ако $f = \varphi(g)$, $\varphi \in \Phi$.

Теорема 2.19 [112]. Нека $f \in \mathcal{A}$ и F е стандартното интервално разширение на f. Тогава интервалната функция F е липшицова.

С оптималното закръгляване $\Diamond$ (вж. т. 1.1) можем да дефинираме елементарни функции $\varphi^\Diamond$ със стойности от IS по следния начин:

$$\varphi^\Diamond(X) = \Diamond\varphi(X), \ \ \varphi \in \Phi, \ X \in IR.$$

Дефиниция 2.20 [101]. Закръглено (навън, с раздуване) стандартно интервално разширение $F^\Diamond(X)$ на аритметичен израз $f(\xi)$ в $X \in ID$ се дефинира посредством

$F^\Diamond(X) = \Diamond c$	ако $f = c$ е реална константа;
$F^\Diamond(X) = \Diamond X_i$	ако $f = \xi_i$ е променлива;
$F^\Diamond(X) = G^\Diamond(X)\langle * \rangle H^\Diamond(X)$	ако $f = g * h$, $* \in \{+, -, \times, /\}$;
$F^\Diamond(X) = \varphi^\Diamond(G^\Diamond(X))$	ако $f = \varphi(g)$, $\varphi \in \Phi$.

От горната дефиниция е ясно, че за $X \in ID$, $F^\Diamond(X)$ не е оптималният (най-малкият) машинен интервал, съдържащ $F(X)$, т.е. $\Diamond F(X) \neq F^\Diamond(X)$. Освен това закръгленото стандартно интервално разширение $F^\Diamond$ не е интервално разширение на f, тъй като $F^\Diamond([x,x]) \neq f(x)$ за $x \in D$, а е изпълнено $f(x) \in F^\Diamond([x,x])$.

Теорема 2.21 [99]. Интервалните функции F и $F^{\diamond}$, получени от аритметичния израз $f(\xi)$, са изотонни по включване и

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subseteq F(X) \subseteq F^{\diamond}(X).$$

Качеството на включването в Теорема 2.21 може да бъде добро или лошо. Това е свързано с т. нар. проблем за зависимостта (англ. dependency problem) [59].

Теорема 2.22 [98]. Нека $f = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ е рационелен израз, дефиниран в $D \subseteq R^n$, в който всяка променлива се появява само веднъж и то от първа степен. Нека F е стандартно интервално разширение на f. Тогава $f(X) = \{f(x) : x \in X\} = F(X)$.

Теорема 2.23 [98]. Нека f е аритметичен израз и F е стандартното му интервално разширение. Тогава $\omega(F(X) -^{-} f(X)) = O(\omega(X))$, т. е. съществува константа $c > 0$, така че е изпълнено неравенството $\omega(F(X)) \leq \omega(f(X)) + c\omega(X)$. В този случай казваме, че $F(X)$ апроксимира линейно обхвата $f(X)$ или че имаме линейна сходимост $F(X) \to f(X)$ при $\omega(X) \to 0$.

По-долу ще въведем клас от аритметични изрази f на една променлива, за които ще дефинираме интервални разширения F, така че да е изпълнено $\omega(F(X) -^{-} f(X)) = O(\omega^2(X))$.

Да предположим, че рационалната функция $f : D \to R$ може да се запише във вида $f_c(y) = f(x) + (y - x)h(y)$ за $x, y \in X \in ID$. Нека $H(X)$ е стандартно интервално разширение на h в X. Интервалната функция

$$F_c(X) = f(x) + (X - x) \times H(X), \;\; x \in X$$

се нарича центрирана (интервална) форма на f. Центрираните форми са въведени от Р. Мур [99]. Хансен доказва, че (при естествени предположения за h) е в сила квадратична апроксимация на обхвата на f:

$$\omega(F_c(X)) - \omega(f(X)) = O(\omega^2(X)).$$

За подробно изследване на свойствата на центрираните форми и за автоматизираното им пресмятане препоръчваме монографията на Рачек и Рокне [112].

Все още стои открит въпросът дали за дадена рационална функция съществува представяне f, така $\omega(F(X)) - \omega(f(X)) = O(\omega^m(X))$ при $m > 2$. При специални предположения за f такива представяния са намерени [23]. В [43] е въведена т. нар. остатъчна (интервална) форма, която дава възможност за апроксимация на обхвата на дадена функция от по-висок ред.

Ако може да се намери интервално разширение $\delta F(X, x)$ на диференчното частно $\delta f(y, x) = (f(y) - f(x))/(y - x)$ за фиксирано $x \in X$ и произволно $y \in X$, $y \neq x$, то

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \delta f(y, x)(y - x) \\ &\in f(x) + \delta F(X, x) := F_\delta(X) \end{aligned}$$

и $\omega(F_\delta(X)) - \omega(f(X)) = O(\omega^2(X))$. Интервални разширения от този вид са разглеждани в [20], [74], [124].

По-долу ще въведем т. нар. Тейлърови интервални форми за апроксимиране на обхвата на дадена функция. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е достатъчен брой пъти непрекъснато диференцируема в $X \in ID$. Да разгледаме Тейлъровото развитие на f в околност на $x \in X$:

$$f(y) = f(x) + (y - x)f'(x) + \cdots + (y - x)^{m-1} \frac{f^{(m-1)}(x)}{(m-1)!} + R_m(x, y, \xi), \;\; y \in X,$$

където $R_m(x, y, \xi) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{(m)!}(y - x)^m$ и $\xi = x + \theta(y - x)$, $\theta \in (0, 1)$. Тъй като $x, y \in X$, то и $\xi \in X$. Да означим с $F^{(m)}(X)$ едно интервално разширение на $f^{(m)}(x)$ в X. Тогава очевидно е изпълнено $R_m(x, y, \xi) \in (X - x)^m F^{(m)}(X)/m!$ за всяко $x \in X$, където $(X - x)^m = \underbrace{(X - x) \times (X - x) \times \cdots \times (X - x)}_{m \text{ пъти}}$.

Интервалната функция [112]

$$T_m(X) = f(x) + (X - x)f'(x) + \cdots + (X - x)^{m-1} \frac{f^{(m-1)}(x)}{(m-1)!} + \frac{F^{(m)}(X)}{m!}(X - x)^m$$

се нарича Тейлърова интервална форма от ред m на функцията f в X.

В частност при $m = 1$ получаваме

$$T_1(X) = f(x) + (X - x)F'(X), \;\; x \in X,$$

която се нарича още средностойностна интервална форма.

При $m = 2$ получаваме

$$T_2(X) = f(x) + (X - x)f'(x) + \frac{1}{2}F''(X)(X - x)^2, \ x \in X.$$

В сила е следната

Теорема 2.23 [112]. Нека f удовлетворява направените по-горе предположения. Тогава $f(X) \subseteq T_m(X)$ за $X \in ID$ и $m \geq 1$. Ако $F^{(m)}(X)$, $m > 1$, е ограничена, то $\omega(T_m(X) -^- f(X)) = O(\omega^2(X))$; ако $F'(X)$ е липшицова, то $\omega(T_1(X) -^- f(X)) = O(\omega^2(X))$.

Ще отбележим, че квадратичната апроксимация на обхвата чрез центрирани или Тейлърови интервални форми има смисъл само когато $\omega(X)$ е достатъчно малко. За големи $\omega(X)$ стандартното интервално разширение обикновено дава по-добри включвания за обхвата.

Числени алгоритми с верификация за нелинейни алгебрични уравнения. Тук ще представим някои известни от литературата интервални методи за решаване на нелинейни алгебрични уравнения. По-нататък в изложението ще бъде направено сравнение между тези методи и предложените от автора.

Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъснато диференцируема функция. Да означим с F' изотонно по включване интервално разширение на производната f' в $X \in ID$, $ID = \{X \in IR : X \subseteq D\}$. Р. Мур [98] предлага следния интервален Нютонов метод за намиране на единствен реален корен x^* на уравнението $f(x) = 0$ в даден начален интервал $X_0 \in ID$ при предположение, че $0 \notin F'(X_0)$:

$$\begin{cases} X_{n+1} = (x_n - f(x_n)/F'(X_n)) \bigcap X_n, \ x_n \in X_n, \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2}$$

Точката $x_n \in X_n$ може да бъде произволна, но най-често се избира да бъде център на интервала X_n [25]. Този метод и различни негови модификации са изследвани от много автори, вж. напр. [21], [22], [24]–[27], [71], [72], [101]; вж. също [31], [73], [82]. В сила е следната

Теорема 2.24 [27]. При направените по-горе предположения за f и F' са в сила следните твърдения:

(а) Уравнението $f(x) = 0$ няма решение в началния интервал X_0 тогава и само тогава, когато съществува индекс $k \geq 1$, така че $X_k = \emptyset$;
(б) Ако съществува индекс $k \geq 0$ такъв че $x_k - f(x_k)/F'(X_k) \subseteq X_k$, то уравнението $f(x) = 0$ има единствено решение в X_k;
(в) Ако $f(x) = 0$ има решение $x^* \in X_0$, то (2) произвежда редица от интервали $\{X_n\}$ със свойствата

$$x^* \in X_n \text{ за } n = 1, 2, \ldots;$$
$$X_i \supseteq X_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots;\ \lim_{n\to\infty} X_n = x^*.$$

Ако F' е липшицова в ID, то за R-реда на сходимост $Q_R((2), x^*)$ имаме $Q_R((2), x^*) \geq 2$.

В [87] е формулиран итерационен метод от Нютонов тип от вида

$$X_{n+1} = \mathbf{n}(X_n),\ \ n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

където $\mathbf{n}(X) = X -^- f(X)/^- f'(X)$, а $f(X)$ и $f'(X)$ са съответно обхватите на f и f' в $X \in ID$ и $0 \notin f'(X)$. Интервалната функция $\mathbf{n} : ID \to IR$ е получена като обхват на реалния Нютонов оператор $n(x) = x - f(x)/f'(x)$ с помощта на Теорема 1.11 при някои предположения за f, f' и f'':

$$n(X) = \begin{cases} X -^- f(X)/^- f'(X), & \text{ако } 1 - f(x)f''(x)/f'^2(x) \geq 0 \\ & \text{и } f(x)f''(x) \geq 0 \text{ за } x \in X; \\ X - f(X)/^- f'(X), & \text{ако } 1 - f(x)f''(x)/f'^2(x) < 0 \\ & \text{и } f(x)f''(x) \geq 0 \text{ за } x \in X; \\ X -^- f(X)/f'(X), & \text{ако } f(x)f''(x) < 0 \text{ за } x \in X, \end{cases}$$

В случая, когато f' и f'' имат постоянни знаци в началния интервал X_0 и коренът x^* на $f(x) = 0$ лежи в X_0, то (3) генерира редица от интервали, такава че $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq \ldots$, $x^* \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim_{n\to\infty} X_n = x^*$ и $Q_R((3), x^*) \geq 2$. Интересно е да се отбележи, че ако $x^* \notin X_0$, то (3) произвежда редица от интервали $\{X_n\}$, която не е монотонна по включване, $X_n \not\ni x^*$, но $\lim X_n = x^*$ и $|X_{n+1} - x^*| \leq \gamma |X_n - x^*|^2$, $0 < \gamma < 1$.

Нека X_0 е реален компактен интервал и $f \in C^1[X_0]$. Нека $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_p^*$ е множеството от всички реални нули на $f(x)$ в X_0, т. е. $x_i^* \in X_0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, и нека $X^* = \bigvee_{1\leq i\leq p} x_i^* \subset X_0$ е най-малкият интервал, съдържащ всички нули x_i^*, $i = 1, 2, \ldots, p$. Р. Кравчик [72] формулира следния метод за намиране на X^*:

$$\overline{x}_{k+1} = \overline{x}_k - f(\overline{x}_k)/\overline{y}_k, \ \ \overline{y}_k = \begin{cases} \sup_{x\in X_k}(f'(x)), & f(\overline{x}_k) \ge 0, \\ \inf_{x\in X_k}(f'(x)), & f(\overline{x}_k) < 0; \end{cases}$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k - f(\underline{x}_k)/\underline{y}_k, \ \ \underline{y}_k = \begin{cases} \inf_{x\in X_k}(f'(x)), & f(\underline{x}_k) \ge 0, \\ \sup_{x\in X_k}(f'(x)), & f(\underline{x}_k) < 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Итерационният процес спира, ако за някое $k = m$ е изпълнено едно от следните пет условия:

$$\begin{array}{lll} (i) & f(\overline{x}_m) > 0 & \text{и } \overline{y}_m \le 0; \\ (ii) & f(\overline{x}_m) < 0 & \text{и } \overline{y}_m \ge 0; \\ (iii) & f(\underline{x}_m) > 0 & \text{и } \underline{y}_m \ge 0; \\ (iv) & f(\underline{x}_m) < 0 & \text{и } \underline{y}_m \le 0; \\ (v) & \underline{x}_m \le \overline{x}_m & \text{и } \underline{x}_{m+1} > \overline{x}_{m+1}. \end{array} \tag{5}$$

Итерациите (4) генерират (крайна или безкрайна) редица от интервали $\{X_k = [\underline{x}_k, \overline{x}_k]\}$, която е антитонна по включване. Ако процесът прекъсне съгласно (5) след m на брой стъпки, то полученият интервал X_m (а следователно и X_0) не съдържа нула на f. В случая, когато (4) генерира безкрайна редица $\{X_n\}$, имаме $\lim X_n = X^*$. Кравчик отбелязва, че в случая на един прост корен $x^* \in X_0$ скоростта на сходимост към x^* е квадратична при предположение, че f'' съществува и е ограничена в X_0. В [72] за итерациите (4)–(5) е формулиран и алгоритъм с верификация на резултата. Лесно се вижда, че в случая на един корен операторът, дефиниран с (4), съвпада с $\mathbf{n}$.

Нека p е алгебричен полином от степен n на една (комплексна) променлива. Да предположим, че p има n прости (комплексни) нули $(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z$, така че $p = p(z; \zeta) = \prod_{i=1}^n (\zeta - z_i)$. Нека $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$ е вектор от начални приближения на корените. Итерационната процедура за едновременно пресмятане на $z_1, z_2, \ldots, z_n$

$$\begin{cases} z_k^{(\nu+1)} = z_k^{(\nu)} - p(z; z_k^{(\nu)}) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^n (z_k^{(\nu)} - z_j^{(\nu)}), \\ k = 1, 2, \ldots, n; \ \ \nu \ge 0. \end{cases} \tag{6}$$

е известна в литературата като метод на Дюран-Кернер, метод на Вайерщрас [138], метод на Вайерщрас-Дочев, метод на Дочев [44], [45]. (Виж историческите бележки в [139] и цитираната там литература.) Итерационната схема (6) е построена на базата на някои свойства на полиномите, разгледани в [138]. Доколкото ни е известно, първото коректно доказателство за квадратична сходимост на (6) е изложено в [129] и по-късно усъвършенствувано в [67].

В [67] е формулирана модификация на метода (6), която произвежда интервали за нулите на полинома в случая, когато всички нули са реални и прости. Итерационната процедура изисква начални интервали $[\underline{x}_k^{(0)}, \overline{x}_k^{(0)}]$, които съдържат корените z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, и са два по два непресичащи се. Формулировката е следната:

$$\begin{cases} \underline{x}_k^{(\nu+1)} = \underline{x}_k^{(\nu)} - p(z; \underline{x}_k^{(\nu)})/(\prod_{j=1}^{k-1}(\underline{x}_k^{(\nu)} - \underline{x}_j^{(\nu)}) \prod_{j=k+1}^{n}(\underline{x}_k^{(\nu)} - \overline{x}_j^{(\nu)})) \\ \overline{x}_k^{(\nu+1)} = \overline{x}_k^{(\nu)} - p(z; \overline{x}_k^{(\nu)})/(\prod_{j=1}^{k-1}(\overline{x}_k^{(\nu)} - \underline{x}_j^{(\nu)}) \prod_{j=k+1}^{n}(\overline{x}_k^{(\nu)} - \overline{x}_j^{(\nu)})), \\ k = 1, 2, \ldots, n; \ \nu \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Доказано е, че редиците $\{\underline{x}_k^{(\nu)}\}$, $\{\overline{x}_k^{(\nu)}\}$ са сходящи квадратично към съответния корен z_k, така че $\underline{x}_k^{(\nu)} \leq z_k \leq \overline{x}_k^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$; предложена е формулировка на (7) в термините на компютърна аритметика.

За същата задача в [25] е разгледан следния интервален итерационен метод за едновременно пресмятане на всички реални и прости нули z_i на полинома $p(z; \zeta)$. Ако $z_i \in Y_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $Y_i^{(0)} \bigcap Y_j^{(0)} = \emptyset$, $i \neq j$, то итерационната схема е (вж. [25], Гл. 8)

$$\begin{cases} Y_i^{(k+1)} = (y_i^{(k)} - p(z; y_i^{(k)})/Q_i^k) \bigcap Y_i^{(k)}, \\ Q_i^k = \prod_{j=1 (j \neq i)}^{n}(y_i^{(k)} - Y_j^{(k)})) \bigcap Y_i^{(k)}, \\ y_i^{(k)} \in Y_i^{(k)}, \\ i = 1, 2, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{8}$$

Итерационната схема (8) представлява едностъпков метод за намиране на нулите z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ако в израза $Q_i^k = \prod_{j=1, j\neq i}^{n}(y_i^{(k)} - Y_j^{(k)}))$ използваме последните намерени интервали, то замествайки Q_i^k в (8) с $R_i^k = \prod_{j=1}^{i-1}(y_i^{(k)} - Y_j^{(k+1)}) \prod_{j=i+1}^{n}(y_i^{(k)} - Y_j^{(k)})$, получаваме многостъпкови итерации

$$\begin{cases} Y_i^{(k+1)} = (y_i^{(k)} - p(z; y_i^{(k)})/R_i^k) \bigcap Y_i^{(k)}, \\ y_i^{(k)} \in Y_i^{(k)}, \\ i = 1, 2, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{9}$$

Доказано е, че при направените по-горе предположения итерациите (8) и (9) удовлетворяват условието $z_i \in Y_i^{(k)}$, $k \geq 0$, $Y_i^{(k)} \supseteq Y_i^{(k+1)}$, $\lim_{k\to\infty} Y_i^{(k)} = z_i$, и $Q_R((8), x_i) \geq 2$, $Q_R((9), x_i) \geq 2$.

2.2 Числени алгоритми с верификация на резултата от Нютонов тип за нелинейни уравнения

Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъснато диференцируема функция в D. Да означим с $ID = \{X \in IR : X \subseteq D\}$ и нека $X = [X^-, X^+] \in ID$. Да предположим, че $f'(x) \neq 0$ за всяко $x \in X$. Тъй като f е монотонна функция в X, то за обхвата на f върху X имаме представянето $f(X) = [f(X^-) \vee f(X^+)]$. Нека $F' : ID \to IR$ е изотонно по включване интервално разширение на производната f'. Да предположим, че $0 \notin F'(X)$.

Твърдение 2.25. При направените по-горе предположения за f и F' е в сила следното включване:

$$X - x \supseteq (f(X) - f(x))/^- F'(X), \ x \in X \in ID.$$

Доказателство. Да разгледаме средностойностната интервална форма

$$T_1(X) = f(x) + F'(X) \times (X - x), \ \ x \in X.$$

Съгласно Теорема 2.23 е изпълнено включването $f(X) \subseteq T_1(X)$, т. е.

$$f(X) \subseteq f(x) + F'(X) \times (X - x)$$

или еквивалентно

$$f(X) - f(x) \subseteq F'(X) \times (X - x).$$

Тъй като $f(x) \in f(X)$, то $0 \in f(X) - f(x)$. От дефиницията на $A/^- B$ при $0 \in A$ (виж (6) в т. 1.2) получаваме

$$\begin{aligned}(f(X) - f(x))/^- F'(X) &= ([f(X^-) \vee f(X^+)] - f(x))/^- F'(X)\\ &= [(f(X^-) - f(x))/F'^{-0}(X)\,,\, (f(X^+) - f(x))/F'^{-0}(X)].\end{aligned}$$

Към разликите $f(X^-)-f(x)$ и $f(X^+)-f(x)$ прилагаме теоремата за средните стойности. За $\xi \in (X^-,x)$, $\eta \in (x,X^+)$ от последното равенство получаваме

$$(f(X)-f(x))/^- F'(X) \;=\; [\frac{f'(\xi)}{F'^{-0}(X)}(X^- - x), \frac{f'(\eta)}{F'^{-0}(X)}(X^+ - x)].$$

Тъй като $f'(\xi), f'(\eta) \in F'(X)$, в сила са неравенствата $f'(\xi)/F'^{-0}(X) \le 1$, $f'(\eta)/F'^{-0}(X) \le 1$; от горното равенство получаваме

$$[\frac{f'(\xi)}{F'^{-0}(X)}(X^- - x), \frac{f'(\eta)}{F'^{-0}(X)}(X^+ - x)] \subseteq [X^- - x, X^+ - x] = X - x,$$

което трябваше да се докаже. □

Да разгледаме уравнението $f(x)=0$, $x \in X$. От направените предположения за функцията следва, че ако уравнението има корен x^* в интервала X, то той е единствен. Ще отбележим, че $x^* \in X$ е еквивалентно с $0 \in f(X)$.

Следствие 2.26. Ако $x^* \in X$ е корен на уравнението $f(x)=0$, то

$$X - x^* \supseteq f(X)/^- F'(X).$$

Следствие 2.27. Ако $0 \in f(X)$, то $\omega(X) \ge \omega(f(X)/^- F'(X))$.

Дефинираме интервална функция $\mathcal{N} : ID \to IR$ посредством

$$\mathcal{N}(X) = X -^- f(X)/^- F'(X).$$

$\mathcal{N}$ ще наричаме интервален оператор от Нютонов тип. Преди да разгледаме свойствата на $\mathcal{N}$, ще видим каква е връзката му с оператора $\mathbf{n}$, представен в т. 2.1.

Твърдение 2.28. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъснато диференцируема функция в D. Нека $f(X)$ и $f'(X)$ са съответно обхватите на f и f' в $X \in ID$, а F' е изотонно по включване интервално разширение на производната f', за което е изпълнено $0 \notin F'(X)$, $X \in ID$. Тогава за $X \in ID$ са в сила следните включвания:

(а) $\mathcal{N}(X) \supseteq \mathbf{n}(X)$,
ако $\chi(f(X)) \le \min\{\chi(f'(X)), \chi(F'(X))\}$, $\omega(X) \ge \omega(f(X) /^- f'(X))$
или $\chi(f(X)) \ge \max\{\chi(f'(X)), \chi(F'(X))\}$, $\omega(X) \le \omega(f(X) /^- f'(X))$;

(б) $\mathcal{N}(X) \subseteq \mathbf{n}(X)$,
ако $\chi(f(X)) \le \min\{\chi(f'(X)), \chi(F'(X))\}$, $\omega(X) \le \omega(f(X) /^- f'(X))$
или $\chi(f(X)) \ge \max\{\chi(f'(X)), \chi(F'(X))\}$, $\omega(X) \ge \omega(f(X) /^- f'(X))$.

Доказателство. От Твърдение 1.18 получаваме

$$f(X) /^- f'(X) \subseteq f(X) /^- F'(X) \quad \text{ако} \quad \chi(f(X)) \geq \max\{\chi(f'(X)), \chi(F'(X))\},$$
$$f(X) /^- f'(X) \supseteq f(X) /^- F'(X) \quad \text{ако} \quad \chi(f(X)) \leq \min\{\chi(f'(X)), \chi(F'(X))\}.$$

По-нататък доказателството следва от Твърдение 1.17. □

Когато $0 \in f(X)$ е изпълнено $\chi(f(X)) \leq 0 < \min\{\chi(f'(X)), \chi(F'(X))\}$, а от от Следствие 2.27 имаме $\omega(X) \geq \omega(f(X) /^- F'(X))$, така че в този случай е в сила включването $\mathbf{n}(X) \subseteq \mathcal{N}(X)$.

Теорема 2.29. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъснато диференцируема функция в D. Нека $f(X)$ е обхватът на f в $X \in ID$ и F' е изотонно по включване интервално разширение на производната f', за което е изпълнено $0 \notin F'(X)$, $X \in ID$. Тогава за всяко $X \in ID$ е в сила релацията $\mathcal{N}(X) \not\supset X$.

Доказателство. Нека интервалът $X \in ID$ е такъв, че е изпълнено $0 \in f(X)$. От дефинициите на операциите $-^-$, $/^-$ и Твърдение 2.25 получаваме следното представяне за $\mathcal{N}(X)$ чрез краищата му:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(X) &= X -^- f(X) /^- F'(X) \\ &= [X^-, X^+] -^- [f(X^-)/F'^{-0}(X)\,,\ f(X^+)/F'^{-0}(X)] \\ &= [X^- - f(X^-)/F'^{-0}(X)\,,\ X^+ - f(X^+)/F'^{-0}(X)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Тъй като $0 \in f(X)$, то $0 \in f(X) /^- F'(X)$, т. е. $f(X^-)/F'^{-0}(X) \leq 0$, $f(X^+)/F'^{-0}(X) \geq 0$, от където следва $\mathcal{N}(X) \subseteq X$.

Нека сега $X \in ID$ е такъв, че $0 \notin f(X)$. Прилагайки Твърдение 1.13(в) с $A = X$, $B = f(X)/^- F'(X)$ получаваме $\mathcal{N}(X) = X -^- f(X) /^- F'(X) \not\asymp X$ ($A \not\asymp B$ означава $A \not\subseteq B$ или $A \not\supseteq B$, виж т. 1.1). □

Теорема 2.30. Нека са изпълнени изискванията на Теорема 2.29. Тогава включването $\mathcal{N}(X) \subseteq X$ е необходимо и достатъчно условие за съществуване на единствено решение на $f(x) = 0$ в интервала X, т. е. $N(X) \subseteq X$ е еквивалентно с $0 \in f(X)$.

Доказателство. Ако $0 \in f(X)$, включването $\mathcal{N}(X) \subseteq X$ следва от доказателството на Теорема 2.29. Да предположим, че $\mathcal{N}(X) \subseteq X$, т. е. $X -^- f(X)/^- F'(X) \subseteq X$. От Твърдение 1.13(а) за $A := X$ и $B := f(X)/^- F'(X)$ получаваме $0 \in f(X)/^- F'(X)$, т.е. $0 \in f(X)$, с което теоремата е доказана. □

Следствие 2.31. При предположенията на Теорема 2.29, релацията $\mathcal{N}(X) \nsubseteq X$ е необходимо и достатъчно условие за несъществуване на решение на $f(x) = 0$ в интервала X, т. е. $\mathcal{N}(X) \nsubseteq X$ е еквивалентно с $0 \notin f(X)$.

Доказателство. От доказателството на Теорема 2.29 следва, че $0 \notin f(X)$ води до $\mathcal{N}(X) \nsubseteq X$.

Нека $\mathcal{N}(X) \nsubseteq X$ (или еквивалентно $0 \notin \mathcal{N}(X) -^- X = (X -^- f(X)/^- F'(X)) -^- X$). От Твърдение 1.13(г) за $A = X$, $B = f(X)/^- F'(X)$ получаваме, че или $0 \notin f(X)$ или ($0 \in f(X)$ и $\omega(X) < \omega(f(X)/^- F'(X))$). Ако допуснем, че $0 \in f(X)$, от Следствие 2.27 получаваме $\omega(X) \geq \omega(f(X)/^- F'(X))$. Полученото противоречие означава $0 \notin f(X)$. □

Теорема 2.32. Нека са изпълнени условията на Теорема 2.29.
(а) Ако $f(x^*) = 0$ и $x^* \in X$, то $x^* \in \mathcal{N}(X)$;
(б) Ако $f(x^*) = 0$ и $x^* \in X$, то $\mathcal{N}(\mathcal{N}(X)) \subseteq \mathcal{N}(X)$;
(в) $\mathcal{N}(X) = X \iff X = [x^*, x^*] = x^*$, $f(x^*) = 0$.

Доказателство. (а). Нека $f(x^*) = 0$ и $x^* \in X$, т. е. $0 \in f(X)$; от Следствие 2.27 получаваме $\omega(X) \geq \omega(f(X)/^- F'(X))$. По-нататък от (10) намираме

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(X) &= [\mathcal{N}^-(X), \mathcal{N}^+(X)] \\ &= [X^- - f(X^-)/F'^{-0}(X), X^+ - f(X^+)/F'^{-0}(X)]. \end{aligned}$$

Имаме

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^-(X) - x^* &= X^- - x^* - (f(X^-) - f(x^*))/F'^{-0}(X) \\ &= (X^- - x^*) - (X^- - x^*) f'(\xi)/F'^{-0}(X) \\ &= (X^- - x^*)(1 - f'(\xi)/F'^{-0}(X)), \end{aligned}$$

където $\xi \in (X^-, X^+)$. Неравенствата $X^- \leq x^*$ и $1 - f'(\xi)/F'^{-0}(X) \geq 0$ дават $\mathcal{N}^-(X) \leq x^*$. Аналогично се доказва неравенството $\mathcal{N}^+(X) \geq x^*$. Следователно $x^* \in \mathcal{N}(X)$.

(б). От Теорема 2.30 получаваме $\mathcal{N}(X) \subseteq X$. От подусловие (а) имаме $x^* \in \mathcal{N}(X)$, т.е. $0 \in f(\mathcal{N}(X))$. Отново от Теорема 2.30 получаваме $\mathcal{N}(\mathcal{N}(X)) \subseteq \mathcal{N}(X)$.

(в). Нека $X = [x^*, x^*] = x^*$. Имаме $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(x^*) = x^* - f(x^*)/f'(x^*) = x^* = X$. Да предположим, че $\mathcal{N}(X) = X$, т.е. $\mathcal{N}(X) -^- X = 0$. От Твърдение

1.3 получаваме $0 = \mathcal{N}(X) -^- X = -f(X) /^- F'(X)$, т. е. $f(X)/^-F'(X) = [0,0] = 0$, $\omega(f(X)/^-F'(X)) = 0$, което означава $\omega(X) = 0$ и следователно $X = [x^*, x^*] = x^*$. □

Посредством оператора $\mathcal{N}$ формулираме следната итерационна процедура, която ще наричаме интервален итерационен метод от Нютонов тип:

$$\begin{cases} X_0 \in ID, \\ X_{n+1} = \mathcal{N}(X_n), \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{11}$$

Теорема 2.33. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъснато диференцируема функция в D, чиято производна f' има изотонно по включване интервално разширение $F' : ID \to IR$, такова че $0 \notin F'(X_0)$, $X_0 \in ID$. Тогава:
(а) Ако $\mathcal{N}(X_0) \not\subseteq X_0$, итерациите (11) спират след първата стъпка;
(б) Ако $\mathcal{N}(X_0) \subseteq X_0$, итерационната схема (11) произвежда редица от интервали $\{X_n\}$ със следните свойства:
(б1) $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \ldots$, $x^* \in X_n$ за $n = 0, 1, 2, \ldots$;
(б2) $\lim_{n\to\infty} X_n = x^*$;
(б3) Ако F' е липшицова с константа $L > 0$, т. е. $\omega(F'(X)) \leq L\omega(X)$ за всяко $X \subseteq X_0$ и L не зависи от X, то $Q_R((11), x^*) \geq 2$.

Доказателство. (а). Ако $\mathcal{N}(X_0) \not\subseteq X_0$, от Следствие 2.31 получаваме, че $f(x) = 0$ няма решение в началния интервал X_0 и очевидно по-нататъшно итериране е безсмислено.

(б). Да предположим, че $\mathcal{N}(X_0) \subseteq X_0$, което е еквивалентно със съществуване на решение $x^* \in X_0$ на уравнението $f(x) = 0$. Следователно $X_1 = \mathcal{N}(X_0) \subseteq X_0$. От Теорема 2.32(а) следва, че $x^* \in \mathcal{N}(X_0) = X_1$.

Да допуснем, че $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \ldots \supseteq X_k$ и $x^* \in X_k$; ще покажем, че $X_k \supseteq X_{k+1}$ и $x^* \in X_{k+1}$. Наистина, от $X_{k+1} = \mathcal{N}(X_k)$ и $x^* \in X_k$ и от Теорема 2.32(а) следва, че $x^* \in X_{k+1}$. По предположение $X_{k-1} \supseteq X_k = \mathcal{N}(X_{k-1})$. От Теорема 2.32(б) получаваме $\mathcal{N}(\mathcal{N}(X_{k-1})) \subseteq \mathcal{N}(X_{k-1})$, което е еквивалентно с $X_{k+1} \subseteq X_k$.

От Следствие 2.27 и дефинициите на операциите $-^-$ и $/^-$ имаме (вж. т. 1.2)

$$\begin{aligned} \omega(X_{n+1}) &= \omega(X_n) - \omega(f(X_n)/^-F'(X_n)) \\ &= \omega(X_n) - |f(X_n^-) - f(X_n^+)|/|F'(X_n)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \omega(X_n) - (|f'(\xi)|/|F'(X_n)|)\omega(X_n) \\ &= \omega(X_n)(1 - |f'(\xi)|/|F'(X_n)|), \end{aligned} \tag{12}$$

където $X_0^- \le X_n^- < \xi < X_n^+ \le X_0^+$. Тъй като $X_n \subseteq X_0$, а по предположение F' е изотонна по включване, то $F'(X_n) \subseteq F'(X_0)$. Съгласно Твърдение 1.1(а),(г) е изпълнено $|F'(X_n)| \le |F'(X_0)|$ и $|f'(\xi)| \ge \rceil F'(X_0) \lceil$. От (12) понататък получаваме

$$\omega(X_{n+1}) \le (1 - \rceil F'(X_0) \lceil /|F'(X_0)|)\omega(X_n) = q\omega(X_n) \le q^n \omega(X_0),$$

където $q = 1 - \rceil F'(X_0) \lceil /|F'(X_0)|$, $0 < q < 1$. Следователно редицата $\{X_n\}$ е точково сходяща (вж. Дефиниция 2.4) и $\lim_{n\to\infty} X_n = x^*$. С това (б1) и (б2) са доказани.

(б3). Тъй като $|f'(\xi)| \ge \rceil F'(X_n) \lceil$, от (12) получаваме

$$\begin{aligned} \omega(X_{n+1}) &\le \omega(X_n)(1 - \rceil F'(X_n) \lceil /|F'(X_n)|) \\ &= \omega(X_n)(|F'(X_n)| - \rceil F'(X_n) \lceil)/|F'(X_n)|. \end{aligned}$$

По предположение $0 \notin F'(X_n)$; от Твърдение 1.1(б) имаме $\omega(F'(X_n)) = |F'(X_n)| - \rceil F'(X_n) \lceil$ и следователно $\omega(X_{n+1}) \le \omega(X_n)\omega(F'(X_n))/|F'(X_n)|$. По предположение съществува константа $L > 0$, не зависеща от n, така че $\omega(F'(X_n)) \le L\omega(X_n)$. Използувайки неравенството $|F'(X_n)| \ge \rceil F'(X_0) \lceil$, получаваме

$$\begin{aligned} \omega(X_{n+1}) &\le (L/|F'(X_n)|)\omega^2(X_n) \le (L/ \rceil F'(X_0) \lceil)\omega^2(X_n) \\ &= c\omega^2(X_n), \end{aligned}$$

където $c = L/ \rceil F'(X_0) \lceil > 0$. Следователно за R-реда на сходимост имаме $Q_R((11), x^*) \ge 2$. □

Ако приемем, че изчислителните разходи за пресмятането на $f(X)$ и $F'(X)$ са приблизително еднакви, за индекса на ефективност на (11) в смисъл на Островски [104] получаваме $\mathit{eff}\{(11)\} = \sqrt{2} \approx 1.42$.

Известно е, че методът на Нютон $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, за намиране на единствен прост корен x^* на уравнението $f(x) = 0$, когато f има трета непрекъсната производна и е изпълнено $f'(x^*) \ne 0$, $f''(x^*) = 0$, е кубично сходящ към x^* в смисъл $|x^{(n+1)} - x^*| \le c|x^{(n)} - x^*|^3$, $c =$const, $c > 0$ [103]. Доказаната по-долу теорема показва, че итерациите (11) притежават подобно свойство.

Теорема 2.34. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е двукратно гладка в D. Нека F' е изотонно по включване интервално разширение на f', такова че $0 \notin F'(X)$ и $\omega(F'(X)) = \omega(f'(X)) + O(\omega^2(X))$. Да означим с x^* корена на уравнението $f(x) = 0$ и да предположим, че $f'(x^*) \neq 0$, а $f''(x^*) = 0$. Нека F'' е изотонно по включване интервално разширение на f''.
(а) Ако $\mathcal{N}(X_0) \not\subseteq X_0$, то уравнението няма решение в X_0 и итерациите (11) спират след първата стъпка;
(б) Ако $\mathcal{N}(X_0) \subseteq X_0$, то итерационната схема (11) произвежда редица от интервали $\{X_n\}$ със следните свойства:
(б1) $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \ldots$, $x^* \in X_n$ за $n = 1, 2, \ldots$;
(б2) $\lim_{n\to\infty} X_n = x^*$;
(б3) Ако F'' е липшицова с константата $L > 0$, която не зависи от X, то $Q_R((11), x^*) \geq 3$.

Доказателство. Твърдения (а) и (б1), съответно (б2), на теоремата следват непосредствено от Теорема 2.32(а), (б1) съответно (б2). Ще докажем (б3). Имаме за $\xi \in (X_n^-, X_n^+)$:

$$
\begin{aligned}
\omega(X_{n+1}) &= \omega(X_n) - \omega(f(X_n) \,/^-\, F'(X_n)) \\
&= \omega(X_n) - \omega(f(X_n)) \,/\, |F'(X_n)| \\
&= \omega(X_n) - |f(X_n^-) - f(X_n^+)| \,/\, |F'(X_n)| \\
&= (1 - |f'(\xi)|/|F'(X_n)|)\omega(X_n) \\
&\leq (1 - \rceil F'(X_n) \lceil \,/\, |F'(X_n)|)\omega(X_n) \\
&= (1/|F'(X_n)|)(|F'(X_n)| - \rceil F'(X_n) \lceil\,)\omega(X_n) \\
&= (1/|F'(X_n)|)\omega(F'(X_n))\omega(X_n) \\
&= (1/|F'(X_n)|)(\omega(f'(X_n)) + O(\omega^2(X_n)))\omega(X_n) \\
&= (1/|F'(X_n)|)(\max\{|f'(X_n^+) - f'(x^*)|, |f'(X_n^-) - f'(x^*)|\}\omega(X_n) + O(\omega^3(X_n))) \\
&\leq (1/|F'(X_n)|)(|f''(\eta)|\omega^2(X_n) + c_1\omega^3(X_n)),
\end{aligned}
$$

където $X_0^- \leq X_n^- < \eta < X_n^+ \leq X_0^+$. От $0 \in F''(X_n)$ и $f''(\eta) \in F''(X_n)$ получаваме $|f''(\eta)| \leq \omega(F''(X_n))$ (вж. Твърдение 1.1(в)). По предположение $\omega(F''(X_n)) \leq L\omega(X_n)$; също така F'' е изотонна по включване, следователно е изпълнено $F''(X_n) \subseteq F''(X_0)$; получаваме

$$
\begin{aligned}
\omega(X_{n+1}) &\leq (1/|F'(X_n)|)(L + c_1)\omega^3(X_n) \\
&\leq (1/\rceil F'(X_0)\lceil\,)(L + c_1)\omega^3(X_n) \\
&= c\omega^3(X_n),
\end{aligned}
$$

където $c = (L + c_1)/\rceil F'(X_0)\lceil$. С това теоремата е доказана. □

Компютърна реализация. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъснато диференцируема в D. Да означим с $f(X)$ обхвата на f в $X = [X^-, X^+] \in ID$, а с $F'(X)$ едно изотонно по включване интервално разширение на производната f', такова че е изпълнено $0 \notin F'(X)$, $X \in ID$. Както вече отбелязахме, функцията f е монотонна и за обхвата й е в сила представянето $f(X) = [f(X^-) \vee f(X^+)]$.

Да означим с $ID_S = \{X \in IS : X \subseteq D\}$ множеството от всички машинни интервали, които се съдържат в D. Да разгледаме итерационната схема (11):

$$\begin{cases} X_0 \in ID, \\ X_{n+1} = X_n -^- f(X_n)/^- F'(X_n), \ n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Целта ни е така да реализираме тези итерации на компютър, че Теорема 2.33 да остане в сила.

Да предположим, че $X_0 \in ID_S$, т. е. че X_0 е машинен интервал. Следващата итерация искаме да пресметнем така, че точният интервал X_1 т. е. интервалът, пресметнат в аритметика с безкрайна точност, да се съдържа в съответния машинен интервал. Идеалната ситуация би била, ако

$$X_1 = \Diamond(X_0 -^- f(X_0)/^- F'(X_0)).$$

В общия случай оптималното закръгляване на израза в дясната страна не може да се реализира. На практика можем да пресметнем едно включване за $\Diamond(X_0 -^- f(X_0)/^- F'(X_0))$, използувайки Твърдение 1.19. Да положим

$$X_1 = X_0 \, \langle -^- \rangle \, \bigcirc f(X_0) \, \langle /^- \rangle \, \Diamond F'(X_0). \tag{13}$$

Тогава очевидно точният интервал X_1 се съдържа в машинния интервал, пресметнат съгласно (13).

В горното равенство участвуват изразите $\bigcirc f(X_0)$ и $\Diamond F'(X_0)$. В общия случай оптималното закръгляване $\Diamond F'(X_0)$ не може да се постигне на практика, но можем да пресметнем $F'^{\Diamond}(X_0) \supseteq \Diamond F'(X_0)$ (вж. т. 2.1). Ако в (13) заместим $\Diamond F'(X_0)$ с $F'^{\Diamond}(X_0)$, ще получим ново раздуване на машинния интервал X_1.

По предположение f е монотонна в X_0 и $f(X_0) = [f(X_0^-) \vee f(X_0^+)]$. Да предположим, че f е аритметичен израз, $f \in \mathcal{A}$. Тогава можем да пресметнем

$F^{\diamond}(X_0^-) = F^{\diamond}([X_0^-, X_0^-])$ и $F^{\diamond}(X_0^+) = F^{\diamond}([X_0^+, X_0^+])$ съгласно Дефиниция 2.18. Полагаме

$$F^{\bigcirc}(X_0) = F^{\diamond}(X_0^-) \sqcap F^{\diamond}(X_0^+). \tag{14}$$

Машинният интервал $F^{\bigcirc}(X_0)$ не е оптималното закръгляване със свиване на $f(X_0)$; очевидно е изпълнено $\bigcirc f(X_0) \subseteq F^{\bigcirc}(X_0)$. Както ще видим по-долу, $F^{\bigcirc}(X_0)$ може да се използува за допълнителен контрол върху изчисленията. Прилагайки Твърдение 1.19 към (13) получаваме

$$X_0 \langle -^- \rangle \bigcirc f(X_0) \, (/^-) \diamond F'(X_0) \subseteq X_0 \langle -^- \rangle F^{\bigcirc}(X_0) \, (/^-) \, F'^{\diamond}(X_0).$$

В крайна сметка полагаме

$$X_1 = X_0 \langle -^- \rangle F^{\bigcirc}(X_0) \, (/^-) \, F'^{\diamond}(X_0).$$

По-нататък всяка следваща итерация пресмятаме по правилото

$$X_{n+1} = X_n \langle -^- \rangle F^{\bigcirc}(X_n) \, (/^-) \, F'^{\diamond}(X_n).$$

По този начин на реалния оператор $\mathcal{N}$ съпоставяме компютърен (машинен) оператор $\mathcal{N}_S : ID_S \to IS$, дефиниран посредством

$$\mathcal{N}_S(X) = X \langle -^- \rangle F^{\bigcirc}(X) \, (/^-) \, F'^{\diamond}(X), \;\; X \in ID_S$$

при предположение, че $F'^{\diamond}(X) \not\ni 0$. За $X \in ID_S$ е в сила включването $\mathcal{N}(X) \subseteq \mathcal{N}_S(X)$. С помощта на $\mathcal{N}_S$ формулираме следната процедура, съответствуваща на (11)

$$\begin{cases} X_0 \in ID_S; \\ X_{n+1} = \mathcal{N}_S(X_n), \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{15}$$

В израза за $\mathcal{N}_S(X)$ участвува $F^{\bigcirc}(X)$, което е пресметнато посредством $F^{\diamond}(X^-)$ и $F^{\diamond}(X^+)$ за $X = [X^-, X^+] \in ID_S$ съгласно (14). С помощта на $F^{\diamond}(X^-)$ и $F^{\diamond}(X^+)$ можем да пресметнем и машинния интервал

$$F^{\diamond}(X) = F^{\diamond}(X^-) \vee F^{\diamond}(X^+).$$

В сила е включването

$$F^{\bigcirc}(X) \subseteq f(X) \subseteq F^{\diamond}(X), \;\; X \in ID_S. \tag{16}$$

От (16) се вижда, че ако $0 \notin F^{\diamond}(X)$, уравнението $f(x) = 0$ няма решение в интервала X; ако $0 \in F^{\bigcirc}(X)$, уравнението има решение в X. Следователно от $0 \in F^{\bigcirc}(X)$ следва $\mathcal{N}_S(X) \subseteq X$, т.е. ако $0 \in F^{\bigcirc}(X)$, итерациите

(15) генерират монотонно намаляваща по включване редица от машинни интервали $X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$. Както вече отбелязахме, $F^{\bigcirc}(X_n)$ не е оптимално закръгленият със свиване интервал за обхвата $f(X_n)$. Възможно е да се случи $0 \notin F^{\bigcirc}(X_n)$. Тъй като $F^{\diamond}(X_n)$ също не е оптимално закръглен навън машинен интервал, може да се случи $0 \in F^{\diamond}(X_n)$. Ако тези два случая възникнат върху началния интервал X_0, т. е. $0 \notin F^{\bigcirc}(X_0)$, $0 \in F^{\diamond}(X_0)$, тогава не може да се прецени дали уравнението има или няма решение в X_0. Един възможен изход от тази ситуация е да се вземе друг начален интервал $\tilde{X}_0 \in ID_S$, $\tilde{X}_0 \supset X_0$ или пресмятанията на $F^{\diamond}(X_0^-)$ и $F^{\diamond}(X_0^+)$ да се извършат с по-голяма точност. Ако същата ситуация възникне на някоя стъпка n, $n > 0$, т.е. $0 \in F^{\diamond}(X_n)$, $0 \notin F^{\bigcirc}(X_n)$, това означава, че уравнението има решение в началния интервал, но по-нататъшно итериране е безсмислено, тъй като интервалът X_n не може да се подобри. В този случай прекъсваме итерациите и извеждаме X_n като краен резултат. С това получихме един критерий за прекъсване на итерационния процес (15):

(I) $0 \notin F^{\bigcirc}(X_n)$ за някое $n \geq 0$.

Следващият критерий се получава от дефиницията на $\sqcap$ (вж. т. 1.2). Ако на някоя стъпка n получим $F^{\bigcirc}(X_n) = \emptyset$, прекъсваме итерирането и извеждаме X_n като краен резултат. Един възможен изход от тази ситуация е да се пресметне $F^{\bigcirc}(X_n)$ с по-голяма точност. Така формулираме втори критерий за спиране:

(II) $F^{\bigcirc}(X_n) = \emptyset$ за някое $n \geq 0$.

Ситуации, при които трябва да спрем итерирането съгласно един от критериите (I) и (II), сравнително рядко се случват на практика. Един естествен критерий за спиране на итерационния процес е т. нар.

(III) Принцип за крайната сходимост

въведен от Р. Мур [99], според който всяка антитонна по включване редица от машинни интервали (интервали с машинно представими краища) $\{X_n\}$ е сходяща за краен брой стъпки, т.е. съществува индекс l, така че $X_n = X_{n+l}$ за $l \geq 1$. Следователно итерациите (15) ще спрат, когато за някое $n \geq 0$ е изпълнено $X_{n+1} = X_n$; нещо повече, поради натрупване на грешки от закръгляване може да се случи дори $X_{n+1} \supset X_n$. Следователно итерационният процес спира, когато $X_{n+1} \not\subset X_n$; тогава машинният интервал X_n се извежда като краен резултат. От (15) получаваме

$$\begin{cases} X_0 \in ID_S; \\ \textbf{repeat} \\ \quad X_{n+1} = \mathcal{N}_S(X_n), \\ \textbf{until } X_{n+1} \not\subseteq X_n \textbf{ or } 0 \notin F^{\bigcirc}(X_n) \textbf{ or } F^{\bigcirc}(X_n) = \emptyset. \end{cases} \tag{17}$$

По-долу ще представим основните стъпки на алгоритъм с верификация на резултат, основаващ се на (17) при начален машинен интервал X и при предположение, че $0 \notin F'^{\diamond}(X)$. Стъпките се изпълняват последователно, освен ако не е указано препращане към конкретна стъпка.

Алгоритъм с верификация на резултата 2.1

(0) Input: initial interval $X = [X^-, X^+]$;
(1) compute $F^{\diamond}(X^-)$, $F^{\diamond}(X^+)$ and construct $F^{\diamond}(X)$, $F^{\bigcirc}(X)$;
(2) **if** $0 \notin F^{\diamond}(X)$ **then** print Message 1 and stop;
if $F^{\bigcirc}(X) = \emptyset$ **then** print Message 2 and stop;
if $0 \notin F^{\bigcirc}(X)$ **then** print Message 3 and stop;
(3) compute $F'^{\diamond}(X)$;
$Y := X \langle -^- \rangle F^{\bigcirc}(X) \langle /^- \rangle F'^{\diamond}(X)$;
if $Y \supseteq X$ **then** print X as final result and stop
else $X := Y$;
(4) compute $F^{\bigcirc}(X)$;
if $F^{\bigcirc}(X) = \emptyset$ **or** $0 \notin F^{\bigcirc}(X)$ **then**
print X, print Message 4 and stop
else goto (3).

Message 1 = 'The equation has no solution in the initial interval.'

Message 2 = '$F^{\bigcirc} = \emptyset$ in the initial interval.
The algorithm can not determine existence/nonexistence
of a solution in the initial interval.
Restart the algorithm with another initial interval.'

Message 3 = '$0 \notin F^{\bigcirc}$ and $0 \notin F^{\diamond}$ in the initial interval.
The algorithm can not determine existence/nonexistence
of a solution in the initial interval. Restart the

algorithm with another initial interval.'

Message 4 = 'The result can not be improved.'

По-долу ще представим по-опростен алгоритъм с верификация на резултата, който ще използуваме в Глава 3.

Алгоритъм с верификация на резултата 2.2

(0) Input: interval $X = [X^-, X^+]$;

(1) Compute $F^\diamond(X^-)$, $F^\diamond(X^+)$ and construct $F^\diamond(X)$, $F^\bigcirc(X)$;

(2) **if** $0 \notin F^\diamond(X)$ **then** stop;
{ the equation has no solution in X }

(3) **if** $F^\bigcirc(X) = \emptyset$ **or** $0 \notin F^\bigcirc(X)$ **then** stop;
{ X is the final result }

(4) compute $F'^\diamond(X)$;
$Y := X \langle -^- \rangle F^\bigcirc(X) \langle /^- \rangle F'^\diamond(X)$;
if $Y \supseteq X$ **then** stop
{ X is the final result }
else $X := Y$; compute $F^\bigcirc(X)$ and **goto** (3).

Алгоритъм 2.1 е реализиран програмно на езика за научни изчисления Pascal-SC [76]. Операциите на разширената интервална аритметика са реализирани като оператори и са включени в пакета *EXARI.PAK*. Пресмятането на интервални разширения на функцията и на производната й се осъществява чрез подпрограми за всеки конкретен пример. Проведени са числени експерименти с редица примери при различни начални интервали. Числените резултати ще изложим по-долу.

Пример 2.5 [25], [27]. $f(x) = x^2(\frac{1}{3}x^2 + \sqrt{2}\sin x) - \frac{\sqrt{3}}{19}$.

(a) $X_0 = [0.1\ ,\ 1]$;

Върху началния интервал имаме

$$F^{\bigcirc}(X_0) = [-8.97153777675E-02, 1.43219244356E+00],$$

което показва, че $f(x) = 0$ има решение в X_0. Последователно получаваме следните резултати:

$$\begin{aligned}
X_1 &= [1.17520751584E-01\ ,\ 7.20303378871E-01],\\
X_2 &= [1.52064870794E-01\ ,\ 5.32597677897E-01],\\
X_3 &= [2.15187624077E-01\ ,\ 4.30345925997E-01],\\
X_4 &= [3.03082397290E-01\ ,\ 3.96393057589E-01],\\
X_5 &= [3.71179468695E-01\ ,\ 3.92459492178E-01],\\
X_6 &= [3.91177285025E-01\ ,\ 3.92379718777E-01],\\
X_7 &= [3.92375589061E-01\ ,\ 3.92379507168E-01],\\
X_8 &= [3.92379507093E-01\ ,\ 3.92379507138E-01],\\
X_9 &= [3.92379507134E-01\ ,\ 3.92379507138E-01],\\
X_{10} &= [3.92379507134E-01\ ,\ 3.92379507138E-01].
\end{aligned}$$

Тъй като последните две итерации съвпадат, т.е. $X_9 = X_{10}$, то X_9 е крайният резултат.

(б) $X_0 = [0.4, 1]$;

За този начален интервал програмата извежда

$$\begin{aligned}
F^{\bigcirc}(X_0) &= [5.48807669574E-03, 1.43219244356E+00];\\
F^{\diamond}(X_0) &= [5.48807669414E-03, 1.43219244359E+00]
\end{aligned}$$

и съобщение, че уравнението няма решение в X_0.

(в) $X_0 = [0.3, 0.392379507137]$;

Получаваме

$$\begin{aligned}
F^{\bigcirc}(X_0) &= [-5.08469872391E-02, -2.24220028496E-14];\\
F^{\diamond}(X_0) &= [-5.08469872403E-02, 2.16583078929E-12].
\end{aligned}$$

Тъй като $0 \notin F^{\bigcirc}(X_0)$ и $0 \in F^{\diamond}(X_0)$ са изпълнени едновременно, алгоритъмът не може да прецени съществува или не решение на уравнениено. На потребителя се препоръчва да рестартира програмата с друг начален интервал. Наистина, за (г) $X_0 = [0.3, 0.392379507138]$

получаваме следните резултати:

$$\begin{aligned} F^{\bigcirc}(X_0) &= [-5.08469872391E-02, 1.64873008104E-13]; \\ X_6 &= [3.92379507134E-01, 3.92379507138E-01]. \end{aligned}$$

(д) $X_0 = [0.392379507135, 0.392379507137]$;

За този начален интервал получаваме съобщение, че $F^{\bigcirc}(X_0) = \emptyset$. На потребителя се препоръчва да рестартира програмата с друг начален интервал.

Следващият пример е предложен от Дж. Корлис, САЩ, в лична кореспонденция.

Пример 2.6. $f(x) = a - xe^x$,

където a е реален параметър. За $a < -1/e$ уравнението $f(x) = 0$ няма решение; при $a = -1/e$ уравнението има двоен корен $x^* = -1$; ако $-1/e < a < 0$, уравнението има две решения, а ако $a \geq 0$, то има единствено решение. Производната $f'(x) = -(x+1)e^x$ се анулира при $x = -1$ независимо от стойността на параметъра a. Следователно ще разглеждаме само начални интервали X_0, които не съдържат -1.

Тъй като изчисленията в Pascal-SC се представят с 12 десетични цифри, вземаме следния интервал за константата $-1/e$:

$$-1/e \in [-0.367879441172\ ,\ -0.367879441171].$$

(а) $a = -0.36$; $X_0 = [-0.9\ ,\ -0.6]$;

Програмата извежда

$$F^{\bigcirc}(X_0) = [-3.07130183430E-02\ ,\ 5.91269376600E-03]$$

и следния интервал за решението

$$X_{11} = [-8.06084315976E-01\ ,\ -8.06084315964E-01]$$

със съобщение, че той не може да бъде подобрен (стеснен) в разглежданата точност на пресмятанията.

(б) $a = -0.36$; $X_0 = [-2, -1.1]$.

За този начален интервал получаваме

$$F^{\bigcirc}(X_0) = [-8.93294335260E-02\,,\ 6.15819206760E-03]$$

и като краен резултат

$$X_6 = [-1.22277013398E+00\,,\ -1.22277013397E+00].$$

(в) $a = -0.36787944117$; $X_0 = [-1.5\,,\ -1.000001]$.

Програмата извежда

$$F^{\bigcirc}(X_0) = [-3.31842009465E-02\,,\ 1.07329200000E-12]$$

и

$$X_{19} = [-1.00000337661E+00\,,\ -1.00000234832E+00].$$

Резултатът не може да се подобри в дадената точност.

(г) $a = -0.36787944117$; $X_0 = [-0.999999\,,\ -0.2]$.

Получават се следните резултати:

$$F^{\bigcirc}(X_0) = [-2.04133290554E-01\,,\ 1.19094900000E-12],$$
$$X_{21} = [-9.99997774909E-01\,,\ -9.99997079728E-01].$$

Полученият интервал не може да се подобри в дадената точност.

(д) $a = -0.367879441171$.

Стойността на параметъра a съвпада с десния край на интервала, съдържащ $-1/e$, т. е. $-1/e < a < 0$.

С начален интервал $X_0 = [-1.5\,,\ -1.000001]$ получаваме

$$\begin{aligned} F^{\bigcirc}(X_0) &= [-3.31842009475E-02\,,\ 7.32920000000E-14], \\ X_7 &= [-1.00276538404E+00\,,\ -1.00000100001E+00] \end{aligned}$$

и резултатът не може да бъде подобрен.

За начален интервал $X_0 = [-1.5\ ,\ -1.0000001]$ програмата извежда

$$\begin{aligned} F^{\bigcirc}(X_0) &= [\,-3.31842009475E-02\ ,\ -5.95617000000E-14], \\ F^{\diamond}(X_0) &= [\,-3.31842009490E-02\ ,\ 9.40438400000E-13] \end{aligned}$$

и съобщение, че алгоритъмът не може да определи съществуване/несъществуване на решение в началния интервал.

(е) $a = -0.367879441172$.

Стойността на параметъра a съвпада с левия край на интервала, съдържащ $-1/e$, т.е. $a < -1/e$. За произволен начален интервал X_0, за който $F'^{\diamond}(X_0) \not\ni 0$, програмата издава съобщение, че уравнението няма решение. Например за $X_0 = [0.2, 0.9]$ получаваме

$$F^{\diamond}(X_0) = [\,-2.58152224122E+00\ ,\ -6.12159992804E-01],$$

което означава, че уравнението няма решение в избрания начален интервал.

(ж) $a = 3$; $X_0 = [1, 2]$. Получаваме

$$F^{\bigcirc}(X_0) = [\,-1.17781121978E+01\ ,\ 2.81718171540E-01].$$

и интервал за решението

$$X_6 = [1.04990889496E+00\ ,\ 1.04990889497E+00].$$

Пример 2.7 [106]. $f(x) = 2xe^{-n} - 2e^{-nx} + 1$, n – цяло число.

При начален интервал $X_0 = [0, 1]$ и за различни стойности на n се получават следните резултати:

n	X_k
1	$X_5 = [4.22477709637E-01\ ,\ 4.22477709643E-01]$
5	$X_{10} = [1.38257155056E-01\ ,\ 1.38257155058E-01]$
20	$X_{25} = [3.46573590206E-02\ ,\ 3.46573590210E-02]$
100	$X_{105} = [6.93147180552E-03\ ,\ 6.93147180561E-03]$

При $n = 100$ резултатът X_{105} е придружен със съобщение, че интервалът не може да се подобри при разглежданата точност на пресмятанията. Ще отбележим, че при същата стойност на $n = 100$ са в сила равенствата

$$X_5^- = X_6^- = \cdots = X_{105}^- = 6.93147180552E - 03.$$

Пример 2.8 [106]. $f(x) = e^{-nx}(x-1) + x^n$, n – цяло число.

С начален интервал $X_0 = [0, 1]$ и при различни стойности на n се получават следните резултати:

n	X_k
1	$X_5 = [4.01058137541E - 01 \ , \ 4.01058137542E - 01]$
5	$X_{33} = [5.16153518757E - 01 \ , \ 5.16153518759E - 01]$
10	$X_{45} = [5.39522226907E - 01 \ , \ 5.39522226910E - 01]$
15	$X_{56} = [5.48182294339E - 01 \ , \ 5.48182294342E - 01]$
20	$X_{68} = [5.52704666678E - 01 \ , \ 5.52704666680E - 01]$

Пример 2.9 [21]. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{6}$.

Уравнението $f(x) = 0$ има корен $x^* = 1$. Функцията f удовлетворява изискванията на Теорема 2.34, т. е. $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) = 0$. За пресмятането на $F'^{\diamond}$ е използувана средностойностната форма $T_1^{\diamond}(X)$ (вж. т. 2.1).

(а) $X_0 = [0.9 \ , \ 1.4]$.

Резултатът за решението е

$$X_5 = [9.99999999999E - 01 \ , \ 1.00000000002E + 00].$$

(б) $X_0 = [0.9 \ , \ 0.99]$.

Програмата издава съобщение, че уравнението няма решение в този начален интервал.

Този резултат е получен без всякакви итерации, а само след пресмятане на $F^{\bigcirc}$ и $F^{\diamond}$ върху началния интервал.

(в) $X_0 = [0.99\ ,\ 1.0]$.

За този начален интервал получаваме

$$\begin{aligned} F^{\bigcirc}(X_0) &= [-1.00001666000E-02\ ,\ -1.00000000000E-11], \\ F^{\diamond}(X_0) &= [-1.00166666570E-01\ ,\ 0.00000000000E+00] \end{aligned}$$

и съобщение, че алгоритъмът не може да определи съществуване/несъществуване на решение в началния интервал. На потребителя се препоръчва да рестартира програмата с друг начален интервал, което е направено по-долу.

(г) $X_0 = [0.99\ ,\ 1.00000000001]$.

След три итерации получаваме

$$X_3 = [9.99999999997E-01\ ,\ 1.00000000001E+00]$$

и съобщение, че $F^{\bigcirc}(X_3) = \emptyset$; прекъсваме итерациите, тъй като полученият резултат не може да бъде подобрен.

Модифицирани интервални итерационни методи от Нютонов тип. Тук ще изведем някои модификации на итерациите (11) при различни предположения за функцията f.

Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъсната функция. Да предположим, че са известни граници M^- и M^+ за диференчните частни, удовлетворяващи едно от следните две условия върху $X \in ID$:

$$0 < M^- \le \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \le M^+ < +\infty,\ \ x, y \in X,\ \ x \ne y; \tag{18}$$

$$-\infty < M^- \le \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \le M^+ < 0,\ \ x, y \in X,\ \ x \ne y. \tag{19}$$

Да означим с $f(X)$ обхвата на f върху $X = [X^-, X^+] \in ID$. Съгласно (18) и (19) фунцията f е монотонна и следователно $f(X) = [f(X^-) \vee f(X^+)]$.

Границите M^- и M^+ определят интервала $M = [M^-, M^+]$. Дефинираме итерационна процедура

$$\begin{cases} X_0 \in ID; \\ X_{n+1} = X_n -^- f(X_n)/^- M, \ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{20}$$

Теорема 2.35. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъсната функция с обхват $f(X)$ за $X \in ID$. Да предположим, че е изпълнено едно от условията (18)–(19). Тогава:

(а) Включването $X_1 \subseteq X_0$ е необходимо и достатъчно условие уравнението $f(x) = 0$ да има (единствено) решение $x^* \in X_0$;

(б) Релацията $X_1 \nsubseteq X_0$ е необходимо и достатъчно условие уравнението $f(x) = 0$ да няма решение в началния интервал X_0;

(в) Ако $X_1 \nsubseteq X_0$, итерациите (20) спират;

(г) Ако $X_1 \subseteq X_0$, итерационната схема (20) произвежда редица от интервали $\{X_n\}$ със следните свойства:

(г1) $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq \ldots$, $x^* \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$;

(г2) $\lim_{n\to\infty} X_n = x^*$;

(г3) $Q_R((20), x^*) \geq 1$.

Доказателство. Твърдения (а), (б), (в), (г1) и (г2) се доказват аналогично на Теорема 2.30, Следствие 2.31 и Теорема 2.33(б1), (б2). Ще докажем (г3). Да предположим, че границите M^- и M^+ удовлетворяват (18), т. е. че $M = [M^-, M^+] > 0$. Случаят, когато е изпълнено (19) се доказва по подобен начин. Имаме

$$\begin{aligned} \omega(X_{n+1}) &= \omega(X_n) - \omega(f(X_n)/^- M) \\ &= \omega(X_n) - \omega(f(X_n))/M^+ \\ &= \omega(X_n) - |f(X_n^-) - f(X_n^+)|/M^+ \\ &\leq (1 - \frac{M^-}{M^+})\omega(X_n) \\ &= c\omega(X_n), \end{aligned}$$

където $c = 1 - M^-/M^+$, $0 < c < 1$, следователно $Q_R((20), x^*) \geq 1$. □

Ако f е непрекъснато диференцируема в X_0 и $f'(x) \neq 0$ за $x \in X_0$, можем да изберем $M = F'(X_0)$, където F' е интервално разширение на f' в интервала X_0 с $0 \notin F'(X_0)$. В сила е аналогично твърдение на Теорема 2.35.

По-долу ще разгледаме модифицирани интервални итерационни методи от Нютонов тип с по-висок ред на сходимост. Преди това ще докажем следното

Твърдение 2.36. Нека $f: D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъснато диференцируема функция. Да означим с $f(X)$ обхвата на f в $X \in ID$, а с $F': ID \to IR$ едно изотонно по включване интервално разширение на f'. Нека $X, Y \in ID$ и $X \subseteq Y$. Да предположим, че $0 \in f(X)$ и $0 \notin F'(Y)$. Тогава

$$X -^{-} f(X) /^{-} F'(X) \subseteq X -^{-} f(X) /^{-} F'(Y).$$

Доказателство. Тъй като F' е изотонна по включване, то от $X \subseteq Y$ следва $F'(X) \subseteq F'(Y)$; тогава от $0 \notin F'(Y)$ получаваме $0 \notin F'(X)$. Понататък доказателството следва от свойството условна монотонност по включване на операциите $-^{-}$ и $/^{-}$ (вж. Твърдения 1.17 и 1.18). □

Нека $f: D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъснато диференцируема в D. Да предположим, че производната f' има постоянен знак в D, т. е. $f'(x) \neq 0$ за $x \in D$. Нека $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ е обхватът на f в интервал $X \in ID$. Да означим с F' изотонно по включване интервално разширение на f', което удовлетворява $0 \notin F'(X_0)$, $X_0 \in ID$.

Дефинираме следната итерационна процедура

$$\begin{cases} X_0 \in ID; \\ X_{k,0} = X_k; \\ X_{k,m} = X_{k,m-1} -^{-} f(X_{k,m-1}) /^{-} F'(X_k), \\ m = 1, 2, \ldots, p; \\ X_{k+1} = X_{k,p}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{21}$$

Очевидно (21) се свежда до (11) за $p = 1$.

Теорема 2.37. Нека $f: D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъснато диференцируема функция. Нека $f(X)$ е обхватът на f върху X и F' е изотонно по включване интервално разширение на производната f', удовлетворяващо $0 \notin F'(X_0)$, $X_0 \in ID$. Тогава:

(а) Включването $X_{0,1} \subseteq X_0$ е необходимо и достатъчно условие уравнението $f(x) = 0$ да има (единствено) решение $x^* \in X_0$;

(б) Релацията $X_{0,1} \not\subseteq X_0$ е необходимо и достатъчно условие уравнението $f(x) = 0$ да няма решение в началния интервал X_0;

(в) Ако $X_{0,1} \not\subseteq X_0$, итерациите (21) спират;

(г) Ако $X_{0,1} \subseteq X_0$, итерационната схема (21) произвежда редица от интервали $\{X_n\}$ със следните свойства:

(г1) $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \ldots \supseteq X_k \supseteq X_{k+1} \supseteq \ldots$, $x^* \in X_k$ за $k = 1, 2, \ldots$;

(г2) $\lim_{k\to\infty} X_k = x^*$;

(г3) Ако F' е липшицова с константа L, то $Q_R((21), x^*) \geq p + 1$.

Доказателство. Твърдения (а), (б) и (в) следват непосредствено от Теорема 2.30, Следствие 2.31 и Теорема 2.33(а). От Твърдение 2.36 получаваме следната верига от включвания

$$X_k = X_{k,0} \supseteq X_{k,1} \supseteq \cdots \supseteq X_{k,p} = X_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Доказателството на (г1), съответно (г2), следва от Теорема 2.33(б1), съответно (б2).

Ще докажем $(p+1)$-ви ред на сходимост на редицата $\{X_k\}$. От Теорема 2.33(б3) следва, че съществува константа $c_1 > 0$, не зависеща от k, така че да е изпълнено неравенството

$$\omega(X_{k,1}) \leq c_1 \omega^2(X_{k,0}) = c_1 \omega^2(X_k). \tag{22}$$

Нека $2 \leq m \leq p$. Тогава

$$\begin{aligned}
\omega(X_{k,m}) &= \omega(X_{k,m-1}) - \omega(f(X_{k,m-1}) \,/^-\, F'(X_k)) \\
&= \omega(X_{k,m-1}) - (1/|F'(X_k)|)\omega(f(X_{k,m-1})) \\
&= (1 - |f'(\xi)|/|F'(X_k)|)\omega(X_{k,m-1}),
\end{aligned}$$

където $\xi \in (X^-_{k,m-1}, X^+_{k,m-1}) \subseteq X_k$. Тъй като $f'(\xi) \in F'(X_k)$ и $0 \notin F'(X_k)$, то $|f'(\xi)| \geq \rceil F'(X_k) \lceil$. Така че по-нататък получаваме

$$\begin{aligned}
\omega(X_{k,m}) &\leq (1 - \rceil F'(X_k) \lceil \,/|F'(X_k)|)\omega(X_{k,m-1}) \\
&= (1/|F'(X_k)|)(|F'(X_k)| - \rceil F'(X_k) \lceil)\omega(X_{k,m-1}) \\
&= (1/|F'(X_k)|)\omega(F'(X_k))\omega(X_{k,m-1}).
\end{aligned}$$

От свойството изотонност по включване на F' получаваме, че от $X_k \subseteq X_0$ следва $F'(X_k) \subseteq F'(X_0)$ и следователно $|F'(X_k)| \geq \rceil F'(X_0) \lceil$ (вж. Твърдение 1.1). От това, че F' е липшицова с константа L имаме

$$\begin{aligned}
\omega(X_{k,m}) &\leq (L/\,\rceil F'(X_0) \lceil\,)\omega(X_k)\omega(X_{k,m-1}) \\
&= c_m \omega(X_k)\omega(X_{k,m-1})
\end{aligned}$$

за $c_m = (L/\ ]F'(X_0)[\ )$; c_m не зависи от k. Прилагайки последователно горното неравенство за $m = p, p-1, \ldots, 2$, получаваме

$$\begin{aligned}\omega(X_{k+1}) &= \omega(X_{k,p}) \le c_p \omega(X_k)\omega(X_{k,p-1})\\ &\le c_p c_{p-1}(\omega(X_k))^2 \omega(X_{k,p-2})\\ &\le \ldots\\ &\le c_p c_{p-1}\ldots c_2(\omega(X_k))^{p-1}\omega(X_{k,1}),\end{aligned}$$

където константите c_i, $2 \le i \le p$, не зависят от k. От (22) получаваме

$$\omega(X_{k+1}) \le c_p c_{p-1} \ldots c_2 c_1 (\omega(X_k))^{p+1} = c(\omega(X_k))^{p+1},$$

където $c = c_p c_{p-1} \ldots c_2 c_1$. Следователно $Q_R((21), x^*) \ge p+1$. □

Методът (21) изисква p на брой пресмятания на обхвата $f(X)$ и едно пресмятане на $F'(X)$ за една итерационна стъпка. Ако приемем, че изчислителните разходи за $f(X)$ и $F'(X)$ са приблизително еднакви, за индекса на ефективност на (21) в смисъл на Островски [104] *eff*$\{(21)\} = (p+1)^{\frac{1}{p+1}}$. Най-висок индекс на ефективност се получава за $p = 2$ (вж. [27]).

Прилагайки критериите (I)–(III) за спиране (прекъсване) на итерациите, на (21) съпоставяме следната итерационна процедура, формулирана в термините на компютърно-аритметични операции:

$$\left\{\begin{array}{l} X_0 \in ID_S;\\ X_{k,0} = X_{(k)};\\ X_{k,m} = X_{k,m-1}\ \langle -^{-}\rangle\ F^{\bigcirc}(X_{k,m-1})\ \ (/^{-})\ \ F'^{\diamond}(X_k),\\ m = 1, 2, \ldots \textbf{ until } m = p \textbf{ or } F^{\bigcirc}(X_{k,m-1}) = \emptyset \textbf{ or } X_{k,m} \not\subset X_{k,m-1};\\ X_{k+1} = X_{k,p};\\ k = 0, 1, 2, \ldots \textbf{ until } X_{k+1} \not\subset X_k. \end{array}\right. \qquad (23)$$

По-долу са представени основните стъпки на алгоритъм с верификация на резултата при начален машинен интервал X и при предположение, че $0 \notin F'^{\diamond}(X)$. Стъпките се изпълняват последователно, освен ако няма препращане към конкретна стъпка.

Алгоритъм с верификация на резултата 2.3

(0) Input: initial interval $X = [X^-, X^+]$;

(1) compute $F^{\diamond}(X^-)$, $F^{\diamond}(X^+)$ and construct $F^{\diamond}(X)$, $F^{\bigcirc}(X)$;
(2) **if** $0 \notin F^{\diamond}(X)$ **then** print Message 1 and stop;
if $F^{\bigcirc}(X) = \emptyset$ **then** print Message 2 and stop;
if $0 \notin F^{\bigcirc}(X)$ **then** print Message 3 and stop;
(3) compute $F'^{\diamond}(X)$;
$Y := X \langle -^- \rangle F^{\bigcirc}(X) \, (/^-) \, F'^{\diamond}(X)$;
if $Y \supseteq X$ **then** print X as final result and stop
else $m := 1$; $X := Y$;
(4) **repeat**
    $X := Y$; $m := m + 1$;
    compute $F^{\bigcirc}(X)$;
    if $F^{\bigcirc}(X) = \emptyset$ **or** $0 \notin F^{\bigcirc}(X)$ **then**
        print X, print Message 4 and stop
    else
        $Y := X \langle -^- \rangle F^{\bigcirc}(X) \, (/^-) \, F'^{\diamond}(X)$;
        if $Y \supseteq X$ **then** print X as final result and stop
until $m = p$;
(5) $X := Y$;
compute $F^{\bigcirc}(X)$;
if $F^{\bigcirc}(X) = \emptyset$ **or** $0 \notin F^{\bigcirc}(X)$ **then**
    print X, print Message 4 and stop
else goto (3).

Message 1 = 'The equation has no solution in the initial interval.'

Message 2 = '$F^{\bigcirc} = \emptyset$ in the initial interval.
The algorithm can not determine existence/nonexistence
of a solution in the initial interval.
Restart the algorithm with another initial interval.'

Message 3 = '$0 \notin F^{\bigcirc}$ and $0 \notin F^{\diamond}$ in the initial interval.
The algorithm can not determine existence/nonexistence
of a solution in the initial interval. Restart the
algorithm with another initial interval.'

Message 4 = 'The result can not be improved.'

Алгоритъм 2.3 е реализиран програмно на Pascal–SC.

Пример 2.10 [25], [27]. $f(x) = x^2(\frac{1}{3}x^2 + \sqrt{2}\sin x) - \frac{\sqrt{3}}{19}$

За уравнението $f(x) = 0$ за всяко $p = 1 \div 10$ с начален интервал $X_0 = [0.1, 1]$ резултатът е

$$X_{k,m} = [0.392379507134\ ,\ 0.392379507138].$$

Стойностите на k и m $(1 \leq m \leq p)$ зависят от параметъра p по следния начин:

$$\begin{array}{ll}
p = 1 \implies m = 1,\ k = 9; & p = 6 \implies m = 4,\ k = 2; \\
p = 2 \implies m = 2,\ k = 4; & p = 7 \implies m = 3,\ k = 2; \\
p = 3 \implies m = 3,\ k = 3; & p = 8 \implies m = 3,\ k = 2; \\
p = 4 \implies m = 1,\ k = 3; & p = 9 \implies m = 3,\ k = 2; \\
p = 5 \implies m = 1,\ k = 3; & p = 10 \implies m = 1,\ k = 2.
\end{array}$$

Ще отбележим, че за $p \geq 4$ съответните стойности за m не достигат горните си граници p. От горната таблица се вижда например, че за $p = 4$ пресметнатият интервал за решението е $X_{3,1}$ вместо $X_{3,4} = X_4$. В този случай програмата спира съгласно критерия $X_{k,m+1} \not\subset X_{k,m}$.

Заключителни бележки.

1. В Твърдение 2.28 показахме каква е връзката между интервалните оператори от Нютонов тип $\mathcal{N}$ и $\mathbf{n}$ (вж. т. 2.1). В интервално-аритметичния израз за $\mathbf{n}$ участвува обхватът на първата производна f' в даден интервал X; в израза за $\mathcal{N}$ участвува произволно интервално разширение на f' (което в частност може да бъде и обхватът на f'). Следователно $\mathcal{N}$ може да се разглежда като обобщение на $\mathbf{n}$. Всички свойства на $\mathcal{N}$ остават в сила и за $\mathbf{n}$.

2. Формулираният чрез оператора $\mathcal{N}$ (или $\mathbf{n}$) интервален итерационен метод (11) (или (3)) не съдържа сечение за разлика от интервалния метод (2) на Мур. Причината за това е, че релацията $\mathcal{N}(X) \subseteq X$ дава необходимо и достатъчно условие за съществуване на решение на $f(x) = 0$ в интервала X (вж. Теорема 2.30), докато при метода (2) включването $x - f(x)/F'(X) \subseteq X$, $x \in X$, е само достатъчно условие за съществуване на решение в X (вж. Теорема 2.24(б)), т. е. уравнението може да има решение в X и въпреки това последното включване да не е изпълнено; но тогава интервалът $x - f(x)/F'(X) \bigcap X$ със сигурност съдържа решението.

3. На практика при установяване на несъществуване на решение в даден интервал X в алгоритъм 2.1 не е необходимо да се пресмята $\mathcal{N}(X)$;

това става чрез подходящо пресмятане на обхвата на функцията $f(X)$ в компютърна аритметика. По този начин се спестяват както пресмятане на интервално разширение на производната, така и интервално-аритметичните операции за намиране на $\mathcal{N}(X)$. При интервалния метод на Мур (вж. Теорема 2.24(а)) трябва да се направят $k > 0$ на брой итерации, за да се установи несъществуване на решение в началния интервал X_0. Във връзка с това, колко голямо може да бъде k, в [22] е въведено понятието "ред на разходимост" на (2) и е показано, че редът на разходимост е равен на R-реда на сходимост на (2). Това на практика означава, че за да се стигне до извода, че уравнението няма корен в началния интервал, трябва да се направят толкова итерации, колкото са необходими за намиране на корена в случая, когато съществува.

4. Както методът на Мур (2), така и интервалният итерационен метод (11) имат квадратична асимптотична сходимост. При метода на Мур, ако съществува решение в началния интервал и $x_n = \mu(X_n)$, то $\omega(X_{n+1}) \leq 0.5\omega(X_n)$ за $n \geq N$ (вж. [25], [59]), т. е. поне половината от интервала X_n се елиминира на всяка следваща итерация. Числените експерименти потвърждават, че за намиране на решението методът на Мур изисква по-мълък брой итерации (вж. Пример 2.5 и съответния пример в [25], Гл. 7).

2.3 Числен алгоритъм с верификация на резултата от тип Хели за нелинейни уравнения

Методът на Хели за намиране на единствен реален корен x^* на нелинейното уравнение $f(x) = 0$ може да бъде изведен по следния начин [48]. Да разгледаме Тейлъровото развитие на f в околност на корена x^* и да прекъснем реда след третия член. Получаваме формално

$$f(x) + f'(x)(x^* - x) + \frac{1}{2}f''(x)(x^* - x)^2 = f(x^*) = 0.$$

Последното равенство представлява квадратно уравнение относно неизвестния член $(x^* - x)$. Използвайки формалното равенството $f(x) + f'(x)(x^* - x) = 0$ (от което може да се изведе методът на Нютон за намиране на x^*), можем да изразим $x^* - x = -f(x)/f'(x)$ и да заместим единия от множителите в $(x^*-x)^2$ с $(-f(x)/f'(x))$. Получаваме линейно уравнение относно $x^* - x$:

$$f(x) + f'(x)(x^* - x) - \frac{1}{2}f''(x)(f(x)/f'(x))(x^* - x) = 0,$$

от което следва

$$x^* - x = \frac{f(x)}{f'(x) - \frac{1}{2}f''(x)(f(x)/f'(x))}. \tag{24}$$

Започвайки с начално приближение x_0 за корена x^*, намираме

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{1}{2}f''(x_n)(f(x_n)/f'(x_n))}, \ n = 0, 1, 2 \ldots. \tag{25}$$

Итерационната схема (25) представя метода на Хели. Известно е, че при определени предположения за f, f', f'' и за началното приближение x_0 методът (25) е кубично сходящ в смисъл $|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^3$, $c = \text{const} > 0$ (виж [19], [48]).

По-долу ще изведем алгоритъм с верификация на резултата от типа на Хели за намиране на реалния корен x^* на нелинейното уравнение $f(x) = 0$. Преди това ще отбележим, че Твърдение 1.40 остава в сила, ако заместим обхвата $\psi(X)$ с интервално разширение $\Psi(X)$ на ψ. Това следва от свойството условна монотонност по включване на нестандартните операции (Твърдения 1.17 и 1.18).

Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е двукратно гладка функция. Да означим с $f(X)$ обхвата на f в $X \in ID$, $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$. Нека $F' : ID \to IR$ е изотонно по включване интервално разширение на f', а $F'' : ID \to IR$ е изотонно по включване интервално разширение на f''. Нека $x^* \in X \in ID$ е решението на $f(x) = 0$. Отново ще отбележим, че $x^* \in X$ е еквивалентно с $0 \in f(X)$. Да предположим, че $0 \notin F'(X)$. Равенство (24) може да бъде записано във вида

$$x - x^* = \frac{f(x)}{f'(x)}/(1 - \frac{1}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)}\frac{f(x)}{f'(x)}).$$

От Твърдение 1.40 и Твърдение 1.18(б) получаваме

$$\begin{aligned} X - x^* \ &\supseteq \ \{\frac{f(x)}{f'(x)} : x \in X\}/^-\{1 - \frac{1}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)}\frac{f(x)}{f'(x)} : x \in X\} \\ &\supseteq \ (f(X)/^- F'(X))/^-\{1 - \frac{1}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)}\frac{f(x)}{f'(x)} : x \in X\}. \end{aligned}$$

Да предположим, че $0 \notin F''(X)$. Отново от Твърдение 1.40 получаваме

$$\{\frac{f''(x)}{f'(x)}\frac{f(x)}{f'(x)} : x \in X\} \supseteq \{\frac{f''(x)}{f'(x)} : x \in X\} \times^- \{\frac{f(x)}{f'(x)} : x \in X\}.$$

Свойството изотонност по включване на стандартната интервално-аритметична операция / и Твърдение 1.18(б) водят до включването

$$\{1 - \frac{1}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)}\frac{f(x)}{f'(x)} : x \in X\} \supseteq 1 - \frac{1}{2}(F''(X)/F'(X)) \times^- (f(X)/^- F'(X)).$$

Да означим с $U(X) = f(X)/^- F'(X)$. Ако $0 \in f(X)$, то $U(X)$ има следното представяне чрез краищата си (вж. доказателството на Теорема 2.29):

$$U(X) = [f(X^-)/F'^{-0}(X), f(X^+)/F'^{-0}(X)]. \tag{26}$$

Твърдение 2.38. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е двукратно гладка функция. Да означим с $f(X)$ обхвата на f в $X \in ID$, а с F' и F'' изотонни по включване интервални разширения съответно на f' и f'' в ID. Нека $x^* \in X$, $0 \notin F'(X)$ и $0 \notin 1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- (F''(X)/F'(X))$. В сила е следното включване:

$$X - x^* \supseteq U(X)/^-(1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- (F''(X)/F'(X))).$$

Доказателство. Тъй като $x^* \in X$, то $0 \in f(X)$, т. е. $0 \in U(X)$ и следователно $1 \in 1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- (F''(X)/F'(X))$. Това означава, че $(1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- (F''(X)/F'(X)))^{-0} \geq 1$. От дефиницията на операцията $/^-$ и от (26) получаваме

$$\begin{aligned} & U(X)/^-(1 - \frac{1}{2}(U(X) \times^- (F''(X)/F'(X))) \\ = \ & [f(X^-)/F'^{-0}(X), f(X^+)/F'^{-0}(X)]/(1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- (F''(X)/F'(X)))^{-0}. \end{aligned}$$

За левия край на горния интервал получаваме при $\xi \in (X^-, x^*)$

$$\begin{aligned} & (U(X)/^-(1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- (F''(X)/F'(X)))^- \\ = \ & (f(X^-)/F'^{-0}(X))/(1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- (F''(X)/F'(X)))^{-0} \\ = \ & ((f(X^-) - f(x^*))/F'^{-0}(X))/(1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- (F''(X)/F'(X)))^{-0} \\ = \ & ((f'(\xi)/F'^{-0}(X))/(1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- (F''(X)/F'(X)))^{-0})(X^- - x^*) \\ \geq \ & (X^- - x^*), \end{aligned}$$

като сме използували факта, че $f'(\xi)/F'^{-0}(X) \leq 1$. Аналогично може да се покаже, че

$$(U(X)/^{-}(1-\frac{1}{2}U(X)\times^{-}(F''(X)/F'(X)))^{+} \leq X^{+}-x^{*}.$$

Последните две неравенства доказват твърдението. $\square$

Забележка 2.39. Условието $0 \notin 1-\frac{1}{2}U(X)\times^{-}(F''(X)/F'(X))$ е удовлетворено за интервали X с достатъчно малка ширина. Наистина, тъй като от $x^{*} \in X$ следва $1 \in 1-\frac{1}{2}U(X)\times^{-}(F''(X)/F'(X))$, за десния край на последния интервал е изпълнено $(1-\frac{1}{2}U(X)\times^{-}(F''X)/F'(X)))^{+} > 1$. Тогава за интервали X с достатъчно малка ширина е в сила $(1-\frac{1}{2}U(X)\times^{-}(F''(X)/F'(X)))^{-} > 0$.

Следствие 2.40. При предположенията на Твърдение 2.38 са изпълнени:
(а) $\omega(X) \geq \omega(U(X)/^{-}(1-\frac{1}{2}U(X)\times^{-}(F''(X)/F'(X)))$;
(б) $x^{*} \in X -^{-} U(X)/^{-}(1-\frac{1}{2}U(X)\times^{-}(F''(X)/F'(X)))$.

Доказателство. Условие (б) следва от Твърдение 1.13(б) и от (а). $\square$

Дефинираме интервална функция $\mathcal{H} : ID \to IR$ посредством израза

$$\mathcal{H}(X) = X -^{-} U(X)/^{-}(1-\frac{1}{2}U(X)\times^{-}(F''(X)/F'(X))).$$

$\mathcal{H}$ ще наричаме интервален оператор от тип Хели. Операторът $\mathcal{H}$ притежава свойства, подобни на $\mathcal{N}$.

Теорема 2.41. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е двукратно гладка функция. Нека $f(X)$ е обхвата на f върху $X \in ID$ и F' е изотонно по включване интервално разширение на f', за което $0 \notin F'(X)$. Нека F'' е изотонно по включване интервално разширение на f''. Тогава
(а) $\mathcal{H}(X) \subseteq X$ е необходимо и достатъчно условие за съществуване на единствено решение на $f(x) = 0$ в интервала X, т. е. $\mathcal{H}(X) \subseteq X$ е еквивалентно на $0 \in f(X)$.
(б) Необходимото и достатъчно условие за несъществуване на решение на уравнението $f(x) = 0$ в интервала X е $\mathcal{H}(X) \nsubseteq X$, т. е. $\mathcal{H}(X) \nsubseteq X$ е еквивалентно на $0 \notin f(X)$;
(в) Ако $f(x^{*}) = 0$ и $x^{*} \in X$, то $x^{*} \in \mathcal{H}(X)$.
(г) Ако $f(x^{*}) = 0$ и $x^{*} \in X$, то $\mathcal{H}(\mathcal{H}(X)) \subseteq \mathcal{H}(X)$.
(д) $\mathcal{H}(X) = X$ тогава и само тогава, когато $X = [x^{*}, x^{*}] = x^{*}$ и $f(x^{*}) = 0$.

Доказателство. (а) и (б) следват от Твърдение 1.13(б) и Следствие 2.40(а); (в) се получава от Следствие 2.40(б).

(г). От (в) следва, че $x^* \in \mathcal{H}(X)$, т. е. $0 \in f(\mathcal{H}(X))$; от (а) получаваме $\mathcal{H}(\mathcal{H}(X)) \subseteq \mathcal{H}(X)$.

(д). Равенството $\mathcal{H}(X) = X$ означава $X -^- \mathcal{H}(X) = 0$. Прилагайки Твърдение 1.3 получаваме

$$\begin{aligned} 0 &= X -^- (X -^- U(X)/^-(1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- (F''(X)/F'(X))) \\ &= -U(X)/^-(1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- (F''(X)/F'(X))), \end{aligned}$$

което означава $U(X) = 0$, т. е. $f(X) = 0$ или еквивалентно $X = x^*$. Обратно, ако $f(x^*) = 0$ и $X = x^*$, то $\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}(x^*) = x^*$. □

С помощта на оператора $\mathcal{H}$ дефинираме следната итерационна процедура за намиране на реален прост корен x^* на уравнението $f(x) = 0$, която ще наричаме интервален итерационен метод от тип Хели:

$$\begin{cases} X_0 \in ID, \\ X_{n+1} = \mathcal{H}(X_n), \quad n = 0, 1, \ldots . \end{cases} \tag{27}$$

Теорема 2.42. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е двукратно гладка функция и $X_0 \in ID$. Нека $f(X)$ и $f'(X)$ са съответно обхватите на f и f' в $X \subseteq X_0$, а F' е изотонно по включване интервално разширение на f', за което $0 \notin F'(X_0)$. Нека F'' е изотонно по включване интервално разширение на втората производна f''.

(а) Ако $\mathcal{H}(X_0) \nsubseteq X_0$, то итерациите (27) спират след първата стъпка.

(б) Ако $\mathcal{H}(X_0) \subseteq X_0$, то (27) произвежда редица от интервали $\{X_n\}$ със следните свойства:

(б1) $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \ldots$, $x^* \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$;

(б2) $\lim_{n\to\infty} X_n = x^*$;

(б3) Ако $\omega(F'(X)) \leq \omega(f'(X)) + L_1\omega^2(X)$ и $|F''(X)| \leq L_2\omega(X)$ за $X \in ID$ с константи $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, които не зависят от X, тогава $Q_R((27), x^*) \geq 3$.

Доказателство. (а) следва непосредствено от Теорема 2.41(б).

(б). Нека $\mathcal{H}(X_0) \subseteq X_0$. От Теорема 2.41(в), съответно (г), получаваме $x^* \in X_1$, съответно $X_1 \subseteq X_0$. По-нататък (б1) и (б2) се доказват по индукция.

(б3). Имаме

$$\begin{aligned}
\omega(X_{n+1}) &= \omega(X_n) - \omega(U(X_n)/^-(1 - \frac{1}{2}U(X_n) \times^- (F''(X_n)/F'(X_n)))) \\
&= \omega(X_n) - \omega(U(X_n))/|1 - \frac{1}{2}U(X_n) \times^- (F''(X_n)/F'(X_n))| \\
&= \omega(X_n) - \frac{\omega(f(X_n))/|F'(X_n)|}{|1 - \frac{1}{2}U(X_n) \times^- (F''(X_n)/F'(X_n))|} \\
&= (1 - \frac{|f'(\xi)|}{|F'(X_n)||1 - \frac{1}{2}U(X_n) \times^- (F''(X_n)/F'(X_n))|})\omega(X_n), \qquad (28)
\end{aligned}$$

където $X_n^- < \xi < X_n^+$. Тъй като F' и F'' са изотонни по включване, в сила са неравенствата

$$|f'(\xi)| \geq \rceil F'(X_0)\lceil, \;\; |F'(X_n)| \leq |F'(X_0)|, \;\; |F''(X_n)| \leq |F''(X_0)|.$$

Следователно

$$\begin{aligned}
&|1 - \frac{1}{2}U(X_n) \times^- (F''(X_n)/F'(X_n))| \\
&\leq \; 1 + \frac{1}{2}|U(X_n) \times^- (F''(X_n)/F'(X_n))| \\
&\leq \; 1 + \frac{1}{2}(|f(X_n)|/|F'(X_n)|)(|F''(X_n)|/ \rceil F'(X_n)\lceil\,) \\
&\leq \; 1 + \frac{1}{2}(|f(X_0)|/ \rceil F'(X_0)\lceil\,)(|F''(X_0)|/ \rceil F'(X_0)\lceil\,).
\end{aligned}$$

От (28) получаваме

$$\begin{aligned}
\omega(X_{n+1}) &\leq (1 - \frac{\rceil F'(X_0)\lceil}{|F'(X_0)|(1 + \frac{1}{2}|f(X_0)||F''(X_0)|/ \rceil F'(X_0)\lceil^{\,2})})\omega(X_n) \\
&= \frac{(\omega(F'(X_0))/|F'(X_0)|) + \frac{1}{2}|f(X_0)||F''(X_0)|/(\rceil F'(X_0)\lceil\,)^2}{1 + \frac{1}{2}|f(X_0)||F''(X_0)|/(\rceil F'(X_0)\lceil\,)^2}\omega(X_n).
\end{aligned}$$

От $0 \notin F'(X_0)$ следва неравенството $\omega(F'(X_0))/|F'(X_0)| < 1$. За

$$\gamma = \frac{(\omega(F'(X_0))/|F'(X_0)|) + \frac{1}{2}|f(X_0)||F''(X_0)|/(\rceil F'(X_0)\lceil\,)^2}{1 + \frac{1}{2}|f(X_0)||F''(X_0)|/(\rceil F'(X_0)\lceil\,)^2}$$

$0 < \gamma < 1$, получаваме $\omega(X_{n+1}) \leq \gamma\omega(X_n)$, което означава $\lim_{n\to\infty} X_n = x^*$.

(б3). От (28) получаваме

$$
\begin{aligned}
&\omega(X_{n+1})\\
&\leq (1 - \frac{|f'(\xi)|}{|F'(X_n)|(1+\frac{1}{2}|U(X_n)||F''(X_n)|/\rceil F'(X_n)\lceil\,)})\omega(X_n)\\
&= \frac{|F'(X_n)| - |f'(\xi)| + \frac{1}{2}|F'(X_n)|(|F''(X_n)|/\rceil F'(X_n)\lceil\,)|U(X_n)|}{|F'(X_n)|(1+\frac{1}{2}|U(X_n)||F''(X_n)|/\rceil F'(X_n)\lceil\,)}\omega(X_n)\\
&\leq \frac{\omega(F'(X_n)) + \frac{1}{2}|F'(X_n)|(|F''(X_n)|/\rceil F'(X_n)\lceil\,)|U(X_n)|}{|F'(X_n)|(1+\frac{1}{2}|U(X_n)||F''(X_n)|/\rceil F'(X_n)\lceil\,)}\omega(X_n).
\end{aligned}
$$

По предположение имаме $\omega(F'(X_n)) \leq \omega(f'(X_n)) + L_1\omega^2(X_n)$, $|F''(X_n)| \leq L_2\omega(X_n)$. Използувайки неравенствата $|U(X_n)| \leq \omega(X_n)$, $\rceil F'(X_0)\lceil \leq \rceil F'(X_n)\lceil$, $\rceil F'(X_0)\lceil \leq |F'(X_n)| \leq |F'(X_0)|$ и $1 + \frac{1}{2}|U(X_n)||F''(X_n)|/\rceil F'(X_n)\lceil \geq 1$ за всяко n, получаваме

$$
\begin{aligned}
&\omega(X_{n+1})\\
&\leq \frac{\omega(f'(X_n)) + L_1\omega^2(X_n) + \frac{1}{2}L_2\omega^2(X_n)|F'(X_n)|/\rceil F'(X_n)\lceil}{|F'(X_n)|(1+\frac{1}{2}|U(X_n)||F''(X_n)|/\rceil F'(X_n)\lceil\,)}\omega(X_n)\\
&\leq \frac{|F''(X_n)|\omega(X_n) + L_1\omega^2(X_n) + \frac{1}{2}L_2\omega^2(X_n)(|F'(X_n)|/\rceil F'(X_n)\lceil\,)}{|F'(X_n)|}\\
&\leq \frac{L_1 + L_2(1+\frac{1}{2}|F'(X_0)|/\rceil F'(X_0)\lceil\,)}{\rceil F'(X_0)\lceil}\omega^3(X_n).
\end{aligned}
$$

За

$$c = \frac{L_1 + L_2(1+\frac{1}{2}|F'(X_0)|/\rceil F'(X_0)\lceil\,)}{\rceil F'(X_0)\lceil}$$

получаваме окончателно $\omega(X_{n+1}) \leq c\omega^3(X_n)$, т. е. $Q_R((27), x^*) \geq 3$. □

На оператора $\mathcal{H}$ съпоставяме следния компютърно-аритметичен оператор $\mathcal{H}_S : ID_S \to IS$:

$$\mathcal{H}_S(X) = X \;\langle -^- \rangle\; U^{\bigcirc}(X) \;(/^-)\; (1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- (F''(X)/F'(X)))^{\bigcirc},$$

където

$$
\begin{aligned}
&U^{\bigcirc}(X) = F^{\bigcirc}(X) \;(/^-)\; F'^{\diamond}(X),\\
&(1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- (F''(X)/F'(X)))^{\bigcirc}\\
&\quad = 1 \;(-)\; 0.5 \;(\times)\; U^{\bigcirc}(X) \;(\times^-)\; (F''^{\diamond}(X) \;\langle/\rangle\; F'^{\diamond}(X)).
\end{aligned}
$$

От дефинициите на насочените закръглявания $\bigcirc$, $\Diamond$, Твърдение 1.19 и Твърдение 2.38 следва, че

$$\mathcal{H}_S(X) \supseteq \mathcal{H}(X) \text{ за } X \in ID_S.$$

Посредством $\mathcal{H}_S$ формулираме в термините на компютърна аритметика следната итерационна процедура:

$$\left\{\begin{array}{l} X_0 \in ID_S; \\ \textbf{repeat} \\ \quad X_{n+1} := \mathcal{H}_S(X_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \\ \textbf{until } X_{n+1} \not\subseteq X_n. \end{array}\right. \tag{29}$$

Забележка 2.43. Предположенията в Теорема 2.42(б3) са необходими за кубичната сходимост на редицата $\{X_n\}$. Клас от функции, удовлетворяващи второто условие $|F''(X_n)| \leq L_2\omega(X_n)$, е разгледан например в [23]. Интервално разширение на F', удовлетворяващо изискването $\omega(F'(X)) \leq \omega(f'(X)) + L_1\omega^2(X)$ може да се намери чрез Тейлъровата интервална форма $T_2(X)$ (вж. Теорема 2.23).

Алгоритъмът с верификация на резултата за (29) е подобен на Алгоритъм 2.1 и няма да се спираме на него.

Модифициран интервален итерационен метод от тип Хели.
Теорема 2.44. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е двукратно гладка функция и $X_0 \in ID$. Нека $f(X)$ и $f'(X)$ са съответно обхватите на f и f' в $X \subseteq X_0$, а F' е изотонно по включване интервално разширение на f', за което $0 \notin F'(X_0)$. Нека $\{f''(x) : x \in X_0\} \subseteq F''$. Дефинираме следния модифициран интервален итерационен метод от тип Хели:

$$\left\{\begin{array}{l} X_0 \in ID, \\ X_{n+1} = X_n -^- U(X_n)/^-(1 - \frac{1}{2}U(X_n) \times^- (F''/F'(X_n))), \\ n = 0, 1, 2 \ldots. \end{array}\right. \tag{30}$$

(а) Ако $X_1 \not\subseteq X_0$, то итерациите (30) спират след първата стъпка.

(б) Ако $X_1 \subseteq X_0$, то (30) произвежда редица от интервали $\{X_n\}$ със следните свойства:

(б1) $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \ldots$, $x^* \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$;

(б2) $\lim_{n\to\infty} X_n = x^*$;

(б3) Ако $\omega(F'(X)) \le L\omega(X)$ с константа $L > 0$, която не зависи от X, тогава $Q_R((30),\, x^*) \ge 2$.

Доказателство. (а), (б) следват непосредствено от Теорема 2.42(а), (б) тъй като X_1, пресметнато съгласно (30), съвпада с $\mathcal{H}(X_0)$. По-нататък (б1) и (б2) се доказват по индукция.

(б3). Имаме

$$\begin{aligned}
\omega(X_{n+1}) &= \omega(X_n) - \omega(U(X_n)/^-(1 - \frac{1}{2}U(X_n) \times^- (F''/F'(X_n)))) \\
&= \omega(X_n) - \omega(U(X_n))/|1 - \frac{1}{2}U(X_n) \times^- (F''/F'(X_n))| \\
&= \omega(X_n) - \frac{\omega(f(X_n))/|F'(X_n)|}{|1 - \frac{1}{2}U(X_n) \times^- (F''/F'(X_n))|} \\
&= (1 - \frac{|f'(\xi)|}{|F'(X_n)||1 - \frac{1}{2}U(X_n) \times^- (F''/F'(X_n))|})\omega(X_n), \qquad (31)
\end{aligned}$$

където $X_n^- < \xi < X_n^+$. Тъй като F' е изотонно по включване, в сила са неравенствата

$$|f'(\xi)| \ge \rceil F'(X_0) \lceil,\ \ |F'(X_n)| \le |F'(X_0)|.$$

Следователно

$$\begin{aligned}
&|1 - \frac{1}{2}U(X_n) \times^- (F''/F'(X_n))| \\
&\le\ 1 + \frac{1}{2}|U(X_n) \times^- (F''/F'(X_n))| \\
&\le\ 1 + \frac{1}{2}(|f(X_n)|/|F'(X_n)|)(|F''|/ \rceil F'(X_n) \lceil\,) \\
&\le\ 1 + \frac{1}{2}(|f(X_0)|/ \rceil F'(X_0) \lceil\,)(|F''|/ \rceil F'(X_0) \lceil\,).
\end{aligned}$$

От (31) получаваме

$$\begin{aligned}
\omega(X_{n+1}) &\le (1 - \frac{\rceil F'(X_0) \lceil}{|F'(X_0)|(1 + \frac{1}{2}|f(X_0)||F''|/ \rceil F'(X_0) \lceil^{\,2})})\omega(X_n) \\
&= \frac{(\omega(F'(X_0))/|F'(X_0)|) + \frac{1}{2}|f(X_0)||F''|/(\rceil F'(X_0) \lceil\,)^2}{1 + \frac{1}{2}|f(X_0)||F''|/(\rceil F'(X_0) \lceil\,)^2}\omega(X_n).
\end{aligned}$$

От $0 \notin F'(X_0)$ следва неравенството $\omega(F'(X_0))/|F'(X_0)| < 1$. За

$$\gamma = \frac{(\omega(F'(X_0))/|F'(X_0)|) + \frac{1}{2}|f(X_0)||F''|/(\rceil F'(X_0)\lceil)^2}{1 + \frac{1}{2}|f(X_0)||F''|/(\rceil F'(X_0)\lceil)^2}$$

$0 < \gamma < 1$, получаваме $\omega(X_{n+1}) \leq \gamma\omega(X_n)$, което означава $\lim_{n\to\infty} X_n = x^*$.

(б3). От (31) получаваме

$$\begin{aligned}
&\omega(X_{n+1}) \\
&\quad\leq \ (1 - \frac{|f'(\xi)|}{|F'(X_n)|(1 + \frac{1}{2}|U(X_n)||F''|/\rceil F'(X_n)\lceil)})\omega(X_n) \\
&\quad= \ \frac{|F'(X_n)| - |f'(\xi)| + \frac{1}{2}|F'(X_n)|(|F''|/\rceil F'(X_n)\lceil)|U(X_n)|}{|F'(X_n)|(1 + \frac{1}{2}|U(X_n)||F''|/\rceil F'(X_n)\lceil)}\omega(X_n) \\
&\quad\leq \ \frac{\omega(F'(X_n)) + \frac{1}{2}|F'(X_n)|(|F''|/\rceil F'(X_n)\lceil)|U(X_n)|}{|F'(X_n)|(1 + \frac{1}{2}|U(X_n)||F''|/\rceil F'(X_n)\lceil)}\omega(X_n).
\end{aligned}$$

По предположение имаме $\omega(F'(X_n)) \leq L\omega(X_n)$. Използувайки неравенствата $|U(X_n)| \leq \omega(X_n)$, $\rceil F'(X_0)\lceil \leq \rceil F'(X_n)\lceil$, $\rceil F'(X_0)\lceil \leq |F'(X_n)| \leq |F'(X_0)|$ и $1 + \frac{1}{2}|U(X_n)||F''|/\rceil F'(X_n)\lceil \geq 1$ за всяко n, получаваме по-нататък

$$\begin{aligned}
&\omega(X_{n+1}) \\
&\quad\leq \ \frac{L\omega(X_n) + \frac{1}{2}|F'(X_n)|(|F''|/\rceil F'(X_n)\lceil)\omega(X_n)}{|F'(X_n)|}\omega(X_n) \\
&\quad\leq \ \frac{L + \frac{1}{2}|F'(X_0)|(|F''|/\rceil F'(X_0)\lceil)}{\rceil F'(X_0)\lceil}\omega^2(X_n).
\end{aligned}$$

За

$$c = \frac{L + \frac{1}{2}|F'(X_0)|(|F''|/\rceil F'(X_0)\lceil)}{\rceil F'(X_0)\lceil}$$

получаваме $\omega(X_{n+1}) \leq c\omega^2(X_n)$, т. е. $Q_R((30), x^*) \geq 2$. □

Пример 2.11 [25], [27]. $f(x) = x^2(\frac{1}{3}x^2 + \sqrt{2}\sin x) - \frac{\sqrt{3}}{19}$.

Използувана е итерационната схема, дадена в Теорема 2.44. С начален интервал $X_0 = [0.1\,,\,1]$ получаваме

$$X_{11} = [3.92379507134E-01\,,\,3.92379507138E-01].$$

Пример 2.12 [21]. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{6}$.

Уравнението $f(x) = 0$ има корен $x^* = 1$. Функцията f удовлетворява изискванията на Теорема 2.43. За пресмятането на $F'^{\diamond}$ е използвана средностойностната форма $T_1^{\diamond}(X)$ (вж. т. 2.1).

(а) $X_0 = [0.9\ ,\ 1.4]$.

Резултатът за решението е

$$X_6 = [1.00000000000E+00\ ,\ 1.00000000001E+00].$$

(б) $X_0 = [0.99\ ,\ 1.00000000001]$.

След три итерации получаваме

$$X_3 = [1.00000000000E+00\ ,\ 1.00000000001E+00].$$

Заключителни бележки.
1. Нека са в сила предположенията на Теорема 2.41. При тези предположения са дефинирани и двата оператора $\mathcal{N}$ и $\mathcal{H}$. Нека $X \in ID$ е такъв, че $0 \in f(X)$, $0 \notin 1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- F''(X)/F'(X)$. Тогава (вж. Забележка 2.39)) следва

$$1 \in 1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- F''(X)/F'(X).$$

От Твърдение 1.18(б) получаваме

$$U(X) \supseteq U(X)/^-(1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- F''(X)/F'(X)),$$

а от Твърдение 1.17(а) следва

$$X -^- U(X) \subseteq X -^- U(X)/^-(1 - \frac{1}{2}U(X) \times^- F''(X)/F'(X))$$

т. е. $\mathcal{N}(X) \subseteq \mathcal{H}(X)$. Следователно не бихме могли да очакваме по-висок ред на сходимост от интервалния итерационен метод на Хели. Предположенията в Теорема 2.42(б3), при които е изведена кубична сходимост за (27) по същество съвпадат с предположенията на Теорема 2.34, при които е доказана кубична сходимост на итерационната процедура (11). Нещо повече, изчислителните разходи при (27) са значително повече — на всяка стъпка имаме по-голям брой интервално-аритметични операции и пресмятане на интервално разширение на втората производна. Числените резултати потвърждават това – да сравним резултатите от Пример 2.5 с Пример 2.11, както и тези от Пример 2.9 с Пример 2.12.

2. Интервалният оператор $\mathcal{N}$ изведохме от средностойностната интервална форма T_1 (вж. т. 2.1). По същество интервалният оператор $\mathcal{H}$ е изведен от Тейлъровата интервална форма T_2. Съгласно Теорема 2.23 и двете интервални форми дават квадратична апроксимация на обхвата на дадена функция. Това е още една причина, поради която при по-общите предположения на Теорема 2.44 не можем да очакваме кубична сходимост на итерациите (30).

2.4 Числени алгоритми с верификация на резултата за намиране на всички реални корени на нелинейно уравнение в даден интервал

Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъснато диференцируема функция в D. Да означим с $f(X)$ обхвата на f в $X \in ID$, а с $F' : ID \to IR$ едно изотонно по включване интервално разширение на производната f'. При предположение, че $0 \in f(X_0)$ и $0 \notin F'(X_0)$ за $X_0 \in ID$, итерационната процедура (11) може да бъде записана чрез краищата на интервалите по следния начин:

$$\begin{cases} X_0 = [X_0^-, X_0^+] \in ID; \\ X_{n+1}^- = X_n^- - f(X_n^-)/F'^{-0}(X_n), \\ X_{n+1}^+ = X_n^+ - f(X_n^+)/F'^{-0}(X_n); \\ n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

или по еквивалентен начин (тъй като $f(X_n^-)f(X_n^+) \leq 0$)

$$\begin{cases} X_0 = [X_0^-, X_0^+] \in ID; \\ X_{n+1}^- = X_n^- + |f(X_n^-)|/|F'(X_n)|, \\ X_{n+1}^+ = X_n^+ - |f(X_n^+)|/|F'(X_n)|; \\ n = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{32}$$

Формули (32) са дефинирани независимо от знака на произведението $f(X_n^-)f(X_n^+)$; те са дефинирани дори и ако условието $0 \notin F'(X_0)$ не е изпълнено. Процесът (32) не е дефиниран само тогава, когато $F'(X_0) = [0,0]$. Очевидно (32) винаги генерира редица от интервали $\{X_n\}$, която е антитонна по включване, т. е. $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$.

2.4.1. Да означим с $X^* = \bigvee\{x^* \in X_0 : f(x^*) = 0\}$, т. е. X^* е интервалът с най-малка ширина, съдържащ всички нули на f в дадения интервал X_0. В частност X^* може да бъде точков (изроден) интервал. Ако f няма нули в X_0, ще пишем $X^* = \emptyset$, а в противен случай — $X^* \neq \emptyset$. По дефиниция, ако $X^* \neq \emptyset$, то $X^* \subseteq X_0$.

Теорема 2.45. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъснато диференцируема в D и $F' : ID \to IR$ е изотонно по включване интервално разширение на f', $F'(X) \neq [0,0]$ за всяко $X \in ID$. Нека $X_0 \in ID$.
(а) Ако $X^* \neq \emptyset$, то итерационната процедура (32) генерира безкрайна редица от интервали $\{X_n\}$, такава че $X_n \supseteq X_{n+1}$ за всяко $n \geq 0$, $X^* \subseteq X_n$ за всяко $n \geq 0$ и $\lim_{n\to\infty} X_n = X^*$.
(б) Ако (32) генерира безкрайна редица от интервали $\{X_n\}$, такава че $X_n \supseteq X_{n+1}$ за $n \geq 0$, то $X^* \neq \emptyset$, $X^* \subseteq X_n$ за всяко $n \geq 0$ и $\lim_{n\to\infty} X_n = X^*$.
(в) $X^* = \emptyset$ точно тогава, когато съществува индекс m, такъв че $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_m$, $X_m^- \leq X_m^+$, но $X_{m+1}^- > X_{m+1}^+$.

Доказателство. (а). Нека $X^* \neq \emptyset$; по предположение $X^* \subseteq X_0$. Нека $x^* \in X^*$ е произволна точка. От теоремата за средните стойност при $\xi \in (X_0^-, x^*)$ получаваме

$$\begin{aligned} X_1^- &= X_0^- + |f(X_0^-)|/|F'(X_0)| \\ &= X_0^- + |f(X_0^-) - f(x^*)|/|F'(X_0)| \\ &= X_0^- + (|f'(\xi)|/|F'(X_0)|)|X_0^- - x^*| \\ &\leq X_0^- + |X_0^- - x^*| \\ &= X_0^- - X_0^- + x^* = x^*. \end{aligned}$$

По аналогичен начин се доказва, че $X_1^+ \geq x^*$. Тай като $x^* \in X^*$ е произволна точка, с това показахме, че $X^* \subseteq X_1 \subseteq X_0$. По индукция се доказва, че $X^* \subseteq X_{n+1} \subseteq X_n$ за всяко $n \geq 1$. Съгласно Твърдение 2.1 редицата от интервали $\{X_n\}$ е сходяща към интервал $X \supseteq X^*$. Ще покажем, че $X = X^*$. Наистина, да извършим граничен преход $n \to \infty$ в (32). Получаваме

$$X^- = X^- + |f(X^-)|/|F'(X)|, \tag{33}$$

$$X^+ = X^+ - |f(X^+)|/|F'(X)|, \tag{34}$$

т. е. $f(X^-) = f(X^+) = 0$, откъдето получаваме $X \subseteq X^*$. Следователно $X = X^*$.

(б). Нека (32) произвежда редица от интервали $\{X_n\}$, такава че $X_n \subseteq X_{n+1}$ за всяко $n \geq 0$. Съгласно Твърдение 2.1 съществува $\lim_{n\to\infty} X_n = X$, $X \subseteq X_n$ за всяко $n \geq 0$. От (33) получаваме $f(X^-) = f(X^+) = 0$, откъдето следва $X^* \neq \emptyset$. По-нататък твърдението следва от (а).

(б). Да допуснем, че съществува индекс m, такъв че $X_m^- \leq X_m^+$, но $X_{m+1}^- > X_{m+1}^+$. От (32) за $n = m$ получаваме

$$0 < X_{m+1}^- - X_{m+1}^+ = -\omega(X_m) + (|f(X_m^-)| + |f(X_m^+)|)/|F'(X_m)|$$

или еквивалентно

$$\omega(X_m) < (|f(X_m^-)| + |f(X_m^+)|)/|F'(X_m)|.$$

Да допуснем, че $X^* \neq \emptyset$, т. е. съществува $x^* \in X^* \subseteq X_0$; тогава $x^* \in X_m$ и

$$\begin{array}{rcl}\omega(X_m) & < & (|f(X_m^-) - f(x^*)| + |f(X_m^+) - f(x^*)|)/|F'(X_m)| \\ & = & (|f'(\xi_1)|(x^* - X_m^-) + |f'(\xi_2)|(X_m^+ - x^*))/|F'(X_m)| \\ & \leq & (\max\{|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)|\}/|F'(X_m)|)\omega(X_m) \\ & \leq & \omega(X_m),\end{array}$$

където $\xi_1 \in (X_m^-, x^*)$, $\xi_2 \in (x^*, X_m^+)$. Полученото противоречие доказва твърдението. Обратното твърдение отново се доказва чрез допускане на противното. $\square$

Забележка 2.46. В случая на единствен корен $X^* = x^* \in X_0$ итерационната процедура (32) може да се разглежда като обощение на (11), тъй като при (32) се допуска интервалът $F'(X_n)$ да съдържа нула и като вътрешна точка, и като гранична точка (като край).

Нека D_S е множеството от машинни числа, съдържащи се в дефиниционната област D на f, а $ID_S = \{X \in IS : X \subseteq D\}$ е множеството от машинни интервали, съдържащи се в D. За $x \in D_S$ нека $F^\diamond(x) = F^\diamond([x, x])$ е машинният интервал, получен при пресмятането на $f(x)$ със закръгляване навън; очевидно $f(x) \in F^\diamond(x)$. За краткост краищата на интервала $F^\diamond(x)$ да означим с $F^{+0}(x)$ и $F^{-0}(x)$, т. е. $F^\diamond(x) = [F^{+0}(x) \vee F^{-0}(x)]$. За $X \in ID_S$

нека $F'^{\diamond}(X)$ е машинния интервал за $F'(X)$, получен чрез закръгляване навън.

Използувайки Теорема 2.45(в) и принципа за крайната сходимост като критерии за спиране (прекъсване) на итерациите, на (32) съпоставяме следната итерационна процедура:

$$\begin{cases} X_0 = [X_0^-, X_0^+] \in ID_S; \\ X_{n+1}^- = X_n^- \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\!-}(|F^{+0}(X_n^-)| \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!/} |F'^{\diamond}(X_n)|), \\ X_{n+1}^+ = X_n^+ \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\!-}(|F^{+0}(X_n^+)| \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!/} |F'^{\diamond}(X_n)|); \\ n = 0, 1, 2, \ldots \ \textbf{until} \ X_{n+1}^- > X_{n+1}^+ \ \textbf{or} \ X_{n+1} \supseteq X_n. \end{cases} \tag{35}$$

В процеса на пресмятанията трябва да направим някои допълнителни проверки. Може да се случи $0 \in F^{\diamond}(X_n^-)$ и $0 \in F^{\diamond}(X_n^+)$ за някое $n \geq 0$. Прекъсваме итерациите, тъй като по-нататъшно свиване на X_n не може да се очаква. Извеждаме X_n като краен резултат, но това всъщност означава, че в този случай алгоритъмът не може да определи дали $X^* = \emptyset$ или $X^* \neq \emptyset$. Може да се случи f да няма нула в X_n, а следователно и в X_0. Ако на някоя стъпка n е изпълнена едната от двете релации, например $0 \in F^{\diamond}(X_n^-)$, а другата не, т. е. $0 \notin F^{\diamond}(X_n^+)$, тогава можем да очакваме подобрение само в десния край X_n^+ на интервала X_n или евентуално след краен брой стъпки m да получим $X_{n+m}^- > X_{n+m}^+$, което означава, че уравнението няма решение в началния интервал X_0.

Алгоритъмът се прилага успешно, когато е известно, че $X^* \neq \emptyset$ и се търси възможно най-малкия интервал X_n, съдържащ X^*. Например a priori зададените граници за множеството от всички реални нули на полином по правило са много широки и алгоритъмът е приложим за намиране на интервал с възможно ной-малка ширина, съдържащ всички реални нули на полинома.

По-долу са представени основните стъпки на алгоритъм с верификация на резултата за начален интервал X. Стъпките се изпълняват последователно, освен ако няма препращане към съответна стъпка.

Алгоритъм с верификация на резултата 2.4

(0) Input: initial interval $X = [X^-, X^+]$;

(1) compute $F^{\diamond}(X^-)$, $F^{\diamond}(X^+)$ and $F'^{\diamond}(X)$;
if $0 \notin F'^{\diamond}(X)$ **then goto** (2)
else goto (3);
(2) Apply Algorithm 2.1 and stop;
(3) **if** $0 \in F^{\diamond}(X^-)$ and $0 \in F^{\diamond}(X^+)$ **then**
print X, print Message 2 and stop;
if $0 \in F^{\diamond}(X^-)$ and $0 \notin F^{\diamond}(X^+)$ **then**
$Y^- := X^-$;
$Y^+ := X^+ \triangle(|F^{+0}(X^+)| \triangledown |F'^{\diamond}(X)|)$;
if $0 \notin F^{\diamond}(X^-)$ and $0 \in F^{\diamond}(X^+)$ **then**
$Y^- := X^- \triangledown(|F^{+0}(X^-)| \triangledown |F'^{\diamond}(X)|)$;
$Y^+ := X^+$;
if $0 \notin F^{\diamond}(X^-)$ and $0 \notin F^{\diamond}(X^+)$ **then**
$Y^- := X^- \triangledown(|F^{+0}(X^-)| \triangledown |F'^{\diamond}(X)|)$;
$Y^+ = X^+ \triangle(|F^{+0}(X^+)| \triangledown |F'^{\diamond}(X)|)$;
if $Y^- > Y^+$ **then** print Message 1 and stop;
if $Y \subseteq X$ **then**
$X := Y$; **goto** (1);
else print X as final result and stop.

Message 1 = 'The equation has no solution in the initial interval.'

Message 2 = 'The interval can not be improved.'

Алгоритъм 2.4 е реализиран програмно на Pascal-SC.

Пример 2.13. $f(x) = a - xe^x$, $a \in R$.

За $a < -1/e$ уравнението $f(x) = 0$ няма решение; за $a = -1/e$ то има двоен корен $x^* = -1$; ако $-1/e < a < 0$, уравнението има две решения и има единствено решение при $a \geq 0$.

За константата $-1/e$ е пресметнат интервала

$$-1/e \in [-0.367879441172\ ,\ -0.367879441171].$$

(a) $a = -0.36$; $X_0 = [-2\ , -0.6]$.

От Пример 2.6 знаем, че в X_0 уравнението има два корена. Програмата извежда

$$\begin{aligned}
F'^{\diamond}(X_0) &= [-2.19524654438E-01\,,\ 5.48811636095E-01],\\
F^{\diamond}(X_0^-) &= [-8.93294335280E-02\,,\ -8.93294335260E-02],\\
F^{\diamond}(X_0^+) &= [-3.07130183436E-02\,,\ -3.07130183430E-02]
\end{aligned}$$

и по-нататък

$$\begin{aligned}
X_1 &= [-1.83723115975E+00\,,\ -6.55962768139E-01],\\
&\ \vdots\\
X_{18} &= [-1.22277035031E+00\,,\ -8.06084315968E-01].
\end{aligned}$$

На тази итерация получаваме

$$\begin{aligned}
F^{\diamond}(X_{18}^-) &= [-1.41888687880E-08\,,\ -1.41876460176E-08],\\
F^{\diamond}(X_{18}^+) &= [-5.23274694912E-13\,,\ 2.82809621056E-13].
\end{aligned}$$

Тъй като $0 \in F^{\diamond}(X_{18}^+)$, на следващата итерация можем да очакваме подобрения евентуално в левия край на интервала. Действително,

$$X_{19} = [-1.22277020771E+00\,,\ -8.06084315968E-01].$$

Крайният резултат е

$$X_{28} = [-1.22277013399E+00\,,\ -8.06084315968E-01].$$

(б) $a = -0.36$; $X_0 = [-0.9\,,\ -0.6]$.

За този начален интервал получаваме

$$F'^{\diamond}(X_0) = [-2.19524654438E-01\,,\ -4.0656969740E-02],$$

и можем да приложим Алгоритъм 2.1 (вж. Пример 2.6 (а)).

(в) $a = -0.4$; $X_0 = [-2, 0]$.

За този начален интервал получаваме

$$\begin{aligned}
F'^{\diamond}(X_0) &= [-1.00000000000E+00\,,\ 1.00000000000E+00],\\
&\ \vdots\\
X_4 &= [-1.14077776185E+00\,,\ -1.00935558364E+00],\\
F'^{\diamond}(X_4) &= [3.40967767091E-03\,,\ 4.49884022148E-02],\\
F^{\diamond}(X_4) &= [-3.54412222973E-02\,,\ -3.21365584470E-02],
\end{aligned}$$

което означава, че уравнението няма решение в началния интервал.

(г) $a = -0.36787944117$; $X_0 = [-1.1\ ,\ -0.9]$.

Имаме

$$F'^{\diamond}(X_0) = [-4.06569659741E-02\ ,\ 4.06569659741E-02]$$

и по-нататък

$$X_{17} = [-1.00000299962E+00\ ,\ -9.99996688607E-01].$$

За тази итерация получаваме

$$\begin{aligned} F^{\diamond}(X_{17}^{-}) &= [-7.80746316120E-13\ ,\ 2.19256683500E-13], \\ F^{\diamond}(X_{17}^{+}) &= [-1.440259955684E-12\ ,\ -4.40263268231E-13]. \end{aligned}$$

Тъй като $0 \in F^{\diamond}(X_{17}^{-})$, след две итерационни стъпки получаваме

$$X_{19} = [-1.00000299962\ ,\ -9.99997175387E-01],$$

$$\begin{aligned} F^{\diamond}(X_{19}^{-}) &= [-7.80746316120E-13\ ,\ 2.19256683500E-13], \\ F^{\diamond}(X_{19}^{+}) &= [-9.87070553157E-13\ ,\ 1.29262223000E-13], \end{aligned}$$

т. е. $0 \in F^{\diamond}(X_{19}^{-})$, $0 \in F^{\diamond}(X_{19}^{+})$ и крайният резултат е X_{19}.

(д) $a = -0.367879441171$; $X_0 = [-1.1\ ,\ -1.0000000001]$.

За този начален интервал получаваме

$$\begin{aligned} F'^{\diamond}(X_0) &= [3.67879441135E-11\ ,\ 3.32871083698E-02]; \\ F^{\bigcirc}(X_0) &= [-1.72124910210E-03\ ,\ -2.12055886600E-13]; \\ F^{\diamond}(X_0) &= [-1.72124910320E-03\ ,\ 7.87944113500E-13] \end{aligned}$$

и съобщение, че Алгоритъм 2.1 не може да определи съществуване/несъществуване на решение в началния интервал. На потребителя се препоръчва да рестартира програмата с друг начален интервал.

(е) $a = -0.367879441172$, $X_0 = [-2, 2]$.

Получаваме

$$\begin{aligned} X_{28} &= [-1.00000111092E+00\ ,\ -9.99999105122E-01], \\ F^{\diamond}(X_{28}^{-}) &= [-8.25229541960E-13\ ,\ 1.74771568960E-13] \ni 0, \end{aligned}$$

$$X_{29} = [-1.00000111092E+00\ ,\ -1.00000036075+00],$$

но $X^+_{30} = -1.00000168077E+00$, $X^-_{30} = -1.00000111092E+00$, т.е. $X^-_{30} > X^+_{30}$, и уравнението няма решение в началния интервал.

(ж) $a = 3$; $X_0 = [-2, 2]$.

Получаваме

$$F'^{\diamond}(X_0) = [-2.21671682969E+01\ ,\ 7.38905609894E+00].$$

и по-нататък

$$\begin{aligned} X_4 &= [-4.89264623342E-01\ ,\ 1.04995072006E+00], \\ F'^{\diamond}(X_4) &= [-5.85775529022E+00\ ,\ -3.13120148789E-01], \\ F^{\bigcirc}(X_4) &= [-2.44993546531E-04\ ,\ 3.29995692223E+00]. \end{aligned}$$

Тази информация е достатъчна, за да преценим, че уравнението има един прост корен в началния интервал. Крайният резултат е

$$X_{11} = [1.04990889496E+00\ ,\ 1.04990889497E+00].$$

Пример 2.14.

$$p(x) = 12x^8 + 32x^7 - 1137x^6 + 3945x^5 + 1134x^4 - 123x^3 + 3033x^2 - 2066x + 360.$$

Системата за компютърна алгебра *Maple* [40] дава интервал $X_0 = [-16, 16]$ за нулите на полинома $p(x)$. Програмата извежда следния интервал, включващ всички реални нули на полинома

$$X_{62} = [-9.00000000027E+00, 1.00000000006E+01].$$

Пример 2.15. $f(x) = e^{-x^2 \sin \frac{1}{x}} - 1,\ \ x \neq 0.$

За различни начални интервали получаваме следните резултати:

$X_0 = [1,5]$	$X_5 = [1.85027219098E+00, 3.77134921897E+00]$;
	$0 \notin F'^{\diamond}(X_5)$, $0 \notin F^{\diamond}(X_5)$,
	$\Longrightarrow$ $f(x) = 0$ няма решение;
$X_0 = [0.1, 1]$	$X_{39} = [1.06103295386E-01, 3.18309886185E-01]$;
$X_0 = [0.3, 0.4]$	$X_5 = [3.18309886173E-01, 3.18309886185E-01]$;
$X_0 = [0.2, 0.3]$	уравнението няма решение;
$X_0 = [0.1, 0.2]$	$X_{17} = [1.06103295387E-01, 1.59154943096E-01]$;
$X_0 = [0.01, 0.1]$	$X_{15} = [1.02680608379E-02, 7.95774715477E-02]$;
$X_0 = [0.001, 0.1]$	$X_{17} = [1.00097448436E-03, 7.95774715477E-02]$;
$X_0 = [0.0005, 0.001]$	$X_5 = [5.00487241531E-04, 9.9783663397E-04]$;
$X_0 = [0.0004, 0.0005]$	$X_5 = [4.00389790259E-04, 4.99701548496E-04]$;
$X_0 = [0.0003, 0.0004]$	$X_3 = [3.00009312548E-04, 3.99886800577E-04]$;
$X_0 = [0.0002, 0.0003]$	$X_8 = [2.00069058557E-04, 2.99726823876E-04]$.

2.4.2. Нека $F : D \to IR$, $D \subseteq R$, е непрекъсната интервална функция на реална променлива. Нека $F^-, F^+ : D \to R$ са граничните функции на F, т. е. $F(x) = [F^-(x), F^+(x)]$ за всяко $x \in D$. За $X \in ID$ да означим

$$X^* = \{x \in X : F^-(x) \le 0 \le F^+(x)\} = \{x \in X : 0 \in F(x)\}.$$

Ако за всяко $x \in X$ е изпълнено $0 \notin F(x)$, ще пишем $X^* = \emptyset$, а в противен случай – $X^* \neq \emptyset$. Да означим

$$F(X) = \bigvee_{x \in X} F(x).$$

Очевидно релацията $0 \in F(X)$ е еквивалентна с $X^* \neq \emptyset$, а релацията $0 \notin F(X)$ – с $X^* = \emptyset$.

Да предположим, че $F = [F^-, F^+]$ удовлетворява в $X \in ID$ едно от следните условия:

(1) Граничните функции F^- и F^+ са диференцируеми в X.

(2) Ако съществува точка $x \in X$, в която граничните функции F^- и F^+ не са диференцируеми, то съществуват едностранните производни на F^- и F^+ в x и $F^-(x-0) = F^+(x+0)$, $F^-(x+0) = F^+(x-0)$.

Съгласно Теорема 2.12 функцията F е диференцируема в $X \in ID$. Да означим

$$F'(X) = \bigvee_{x \in X} F'(x).$$

Казваме, че $F \in \mathcal{F}_X$, ако F удовлетворява в $X \in ID$ (1) или (2), F' е непрекъсната и $0 \notin F'(X)$.

Очевидно ако $F \in \mathcal{F}_X$ и $Y \subseteq X$, то $F \in \mathcal{F}_Y$.

Нека $F \in \mathcal{F}_X$. Съгласно теорема 2.15 F е монотонна функция в X (вж. Дефиниция 2.8). Тогава граничните функции F^- и F^+ също са монотонни. За $F(X)$ е в сила представянето

$$\begin{aligned} F(X) &= \bigvee_{x\in X} [F^-(x), F^+(x)] = (\bigvee_{x\in X} F^-(x)) \vee (\bigvee_{x\in X} F^+(x)) \\ &= [F^-(X^-) \vee F^-(X^+)] \vee [F^+(X^-) \vee F^+(X^+)] = [F(X^-) \vee F(X^+)] \qquad (36) \\ &= \begin{cases} [F^-(X^-), F^+(X^+)], & F'(X) > 0, \\ [F^-(X^+), F^+(X^-)], & F'(X) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

В частност (36) е вярно за всеки подинтервал на X.

Теорема 2.47. Нека $X \in ID$ и $F = [F^-, F^+] \in \mathcal{F}_X$. Нека интервалите X_1 и X_2 са такива, че $X_2 \subseteq X_1 \subseteq X$. Тогава

$$F'(X) \times^- (X_1 -^- X_2) \subseteq F(X_1) -^- F(X_2) \subseteq F'(X) \times (X_1 -^- X_2),$$

където $F(X_i) = \bigvee_{x\in X_i} F(x)$, $i = 1, 2$.

Доказателство. За определеност да предположим, че $F'(X) > 0$. Да разгледаме първо случая, когато граничните функции F^- и F^+ са диференцируеми. От (36) имаме

$$F(X_1) = [F^-(X_1{}^-), F^+(X_1{}^+)], \quad F(X_2) = [F^-(X_2{}^-), F^+(X_2{}^+)].$$

Тогава от теоремата за крайните нараствания, приложена към F^- при $\xi \in (X_1^-, X_2^-)$ и F^+ при $\eta \in (X_2^+, X_1^+)$ получаваме

$$\begin{aligned} F(X_1) -^- F(X_2) &= [F^-(X_1{}^-) - F^-(X_2{}^-), F^+(X_1{}^+) - F^+(X_2{}^+)] \\ &= [F^{-\prime}(\xi)(X_1{}^- - X_2{}^-), F^{+\prime}(\eta)(X_1{}^+ - X_2{}^+)] \\ &\subseteq \max\{F^{-\prime}(\xi), F^{+\prime}(\eta)\} \times (X_1 -^- X_2) \\ &\subseteq F'(X) \times (X_1 -^- X^2). \end{aligned}$$

Последното включване следва от факта, че $0 \in X_1 -^- X_2$ и от дефиницията на операцията $\times$. От дефиницията на операцията $\times^-$ получаваме

$$\begin{aligned} &[F^{-\prime}(\xi)(X_1{}^- - X_2{}^-), F^{+\prime}(\eta)(X_1{}^+ - X_2{}^+)] \\ &\supseteq \min\{F^{-\prime}(\xi), F^{+\prime}(\eta)\} \times (X_1 -^- X_2) \\ &\supseteq F'(X) \times^- (X_1 -^- X_2). \end{aligned}$$

Да предположим, че съществува точка $x_0 \in X_2 \subseteq X_1$, в която граничните функции F^- и F^+ не са диференцируеми, но са в сила условията в (2). Тогава имаме

$$\begin{aligned}
F(X_1) -^- F(X_2) &= [F^-(X_1^-) - F^-(X_2^-), F^+(X_1^+) - F^+(X_2^+)] \\
&= [F^-(X_1^-) - F^-(X_2^-) + F^-(x_0) - F^-(x_0), \\
&\qquad F^+(X_1^+) - F^+(X_2^+) + F^+(x_0) - F^+(x_0)] \\
&= [(F^-(X_1^-) - F^-(x_0)) - (F^-(X_2^-) - F^-(x_0)), \\
&\qquad (F^+(X_1^+) - F^+(x_0)) - (F^+(X_2^+) - F^+(x_0))] \\
&= [F^{-\prime}(\xi_1)(X_1^- - x_0) - F^{-\prime}(\xi_2)(X_2^- - x_0), \\
&\qquad F^{+\prime}(\eta_1)(X_1^+ - x_0) - F^{+\prime}(\eta_2)(X_2^+ - x_0)] \\
&\subseteq [\max\{F^{-\prime}(\xi_1), F^{-\prime}(\xi_2)\}(X_1^- - x_0 - X_2^- + x_0), \\
&\qquad \max\{F^{+\prime}(\eta_1), F^{+\prime}(\eta_2)\}(X_1^+ - x_0 - X_2^+ + x_0)] \\
&\subseteq F'(X) \times (X_1 -^- X_2).
\end{aligned}$$

От друга страна

$$\begin{aligned}
F(X_1) -^- F(X_2) &\supseteq [\min\{F^{-\prime}(\xi_1), F^{-\prime}(\xi_2)\}(X_1^- - x_0 - X_2^- + x_0), \\
&\qquad \min\{F^{+\prime}(\eta_1), F^{+\prime}(\eta_2)\}(X_1^+ - x_0 - X_2^+ + x_0)] \\
&\supseteq F'(X) \times^- (X_1 -^- X_2).
\end{aligned}$$

Да предположим, че точката x_0, в която граничините функции не са диференцируеми, удовлетворява $x_0 \in X_1$, $x_0 \notin X_2$. Тогава

$$\begin{aligned}
&F(X_1) -^- F(X_2) = [F^-(X_1^-) - F^-(X_2^-), F^+(X_1^+) - F^+(X_2^+)] \\
&= [F^-(X_1^-) - F^-(X_2^-) + F^-(x_0) - F^-(x_0), F^+(X_1^+) - F^+(X_2^+)] \\
&= [(F^-(X_1^-) - F^-(x_0)) - (F^-(X_2^-) - F^-(x_0)), F^+(X_1^+) - F^+(X_2^+)] \\
&= [F^{-\prime}(\xi_1)(X_1^- - x_0) - F^{-\prime}(\xi_2)(X_2^- - x_0), F^{+\prime}(\eta)(X_1^+ - X_2^+)] \\
&\subseteq \max\{F^{-\prime}(\xi_1), F^{-\prime}(\xi_2), F^{+\prime}(\eta)\}[X_1^- - X_2^-, X_1^+ - X_2^+] \\
&\subseteq F'(X) \times (X_1 -^- X_2).
\end{aligned}$$

По-нататък

$$\begin{aligned}
F(X_1) -^- F(X_2) &\supseteq \min\{F^{-\prime}(\xi_1), F^{-\prime}(\xi_2), F^{+\prime}(\eta)\}[X_1^- - X_2^-, X_1^+ - X_2^+] \\
&\supseteq F'(X) \times^- (X_1 -^- X_2).
\end{aligned}$$

С това доказателството е завършено. □

Следствие 2.48. При предположенията на Теорема 2.47 са в сила неравенствата

$$\rceil F'(X)\lceil \leq \omega(F(X_1) -^{-} F(X_2)) \leq |F'(X)|\omega(X_1 -^{-} X_2).$$

Нека $F \in \mathcal{F}_X$. Дефинираме

$$\hat{F}(X) = F(X^-) \sqcap F(X^+).$$

Съгласно дефиницията на $\sqcap$ (вж. т. 1.2) и от (36) получаваме

$$\hat{F}(X) \;=\; \begin{cases} [\min\{F^+(X^-), F^+(X^+)\}, \max\{F^-(X^-), F^-(X^+)\}], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ако } F(X^-) \bigcap F(X^+) = \emptyset, \\ \emptyset \qquad\qquad\qquad\qquad \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Ако $\hat{F}(X) \neq \emptyset$, то очевидно $\hat{F}(X) \subseteq F(X)$ и е изпълнено

$$\hat{F}(X) \;=\; \begin{cases} [F^+(X^-), F^-(X^+)], & F'(X) > 0; \\ [F^+(X^+), F^-(X^-)], & F'(X) < 0. \end{cases} \tag{37}$$

Твърдение 2.49. Нека $F = [F^-, F^+] \in \mathcal{F}_X$. Тогава граничните функции F^- и F^+ имат най-много по една нула в X. Ако $0 \in \hat{F}(X)$, то F^- и F^+ имат точно по една нула в X.

Доказателство. Да допуснем, че F^- има две различни нули $x_1, x_2 \in X$, т. е. $F^-(x_1) = F^-(x_2) = 0$. За определеност да предположим, че $x_1 > x_2$. От Теорема 2.14 и дефиницията на операцията $-^{-}$ получаваме

$$\begin{aligned} F(x_1) -^{-} F(x_2) &= [(F^-(x_1) - F^-(x_2)) \vee (F^+(x_1) - F^+(x_2))] \\ &= [0 \vee (F^+(x_1) - F^+(x_2))] \subset F'([x_1, x_2])(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

От последното включване следва $0 \in F'([x_1, x_2])(x_1 - x_2)$, което не е възможно, тъй като по предположение $0 \notin F'(X)$, а по допускане $x_1 \neq x_2$. Полученото противоречие доказва твърдението за лявата гранична функция F^-. За F^+ доказателството е аналогично.

За определеност да предположим, че $F'(X) > 0$. От (37) получаваме

$$0 \in \hat{F}(X) \Longleftrightarrow F^+(X^-) \leq 0 \leq F^-(X^+).$$

Тъй като в този случай F, а следователно и F^- и F^+ са изотонни, имаме

$$F^-(X^-) \le F^+(X^-) \le 0 \le F^-(X^+) \le F^+(X^+),$$

откъдето следва $0 \in F^-(X)$ и $0 \in F^+(X)$. Последното означава, че граничните функции имат точно по една нула в X. Аналогично се разглежда случая $F'(X) < 0$. □

Следствие 2.50. Нека $F \in \mathcal{F}_X$ и $0 \in \hat{F}(X)$. Тогава $\hat{F}(X^*) = [0, 0] = 0$.

Теорема 2.51. Нека $F \in \mathcal{F}_X$ и $0 \in F(X)$. Ако $0 \notin \hat{F}(X)$ или $\hat{F}(X) = \emptyset$, то налице е една от следните възможности:
(а) $0 \in F(X^-)$ и $0 \in F(X^+)$; тогава $X = X^*$.
(б) $0 \in F(X^-)$ и $0 \notin F(X^+)$; тогава точно една от граничните функции има единствена нула $x^* \in X$ и $X^* = [X^-, x^*]$.
(в) $0 \notin F(X^-)$ и $0 \in F(X^+)$; тогава точно една от граничните функции има единствена нула $x^* \in X$ и $X^* = [x^*, X^+]$.

Доказателство. (а). От $0 \in F(X^-)$ и $0 \in F(X^+)$ следва $X^-, X^+ \in X^*$. По-нататък от (36) имаме

$$F^-(X^-) \le 0 \le F^+(X^-), \; F^-(X^+) \le 0 \le F^+(X^+),$$

което означава $F^-(X) \le 0 \le F^+(X)$, т. е. обхватите на граничните функции могат да съдържат нулата най-много като гранична точка; следователно $X^* = X$.

(б). Нека $0 \in F(X^-)$. За определеност да предположим, че $F(X^+) > 0$. Както по-горе лесно се вижда, че $0 \in F^-(X), 0 \notin F^+(X)$, т. е. долната гранична функция F^- има единствена нула $x^* \in X$. Тъй като и $X^- \in X^*$, то тогава $X^* = [X^-, x^*]$.

(в). Доказва се както (б). □

Следствие 2.52. Нека $F \in \mathcal{F}_X$ и $0 \in F(X)$, $0 \notin F(X^-)$, $0 \notin F(X^+)$. Тогава $0 \in \hat{F}(X)$.

За $x \in X$ за удобство да означим $F(x) = [F^{+0}(x) \vee F^{-0}(x)]$.

Нека $X_0 \in ID$ и $F \in \mathcal{F}_{X_0}$. В съответствие с Теорема 2.49 и 2.51 формулираме итерационни процедури за намиране на X^*.

$$(i)\quad 0 \in F(X_0^-),\ 0 \in F(X_0^+):$$
$$X^* := X_0;$$

$$(ii)\quad 0 \in F(X_0^-),\ 0 \notin F(X_0^+):$$
$$\begin{cases} X^{*-} := X_0^-, \\ X_{n+1}^+ := X_n^+ - |F^{+0}(X_n^+)|/|F'(X_n)|, \\ n = 0, 1, \dots ; \end{cases}$$

$$(iii)\quad 0 \notin F(X_0^-),\ 0 \in F(X_0^+):$$
$$\begin{cases} X_{n+1}^- := X_n^- + |F^{+0}(X_n^-)|/|F'(X_n)|, \\ X^{*+} := X_0^+, \\ n = 0, 1, \dots ; \end{cases}$$

$$(iv)\quad 0 \notin F(X_0^-),\ 0 \notin F(X_0^+):$$
$$\begin{cases} X_{n+1} := X_n -^- \hat{F}(X_n)/^- F'(X_n), \\ n = 0, 1, \dots . \end{cases}$$

Теорема 2.53. Нека $F : D \to IR$, $X_0 \in ID$ и $F \in \mathcal{F}_{X_0}$. За $X = [X^-, X^+] \in IX_0$ да означим $F(X) = \bigvee_{x \in X} F(x)$, $F'(X) = \bigvee_{x \in X} F'(x)$, $\hat{F}(X) = F(X^-) \sqcap F(X^+)$. За $x \in X$ нека $F(x) = [F^{+0}(x) \vee F^{-0}(x)]$. Тогава:

(а) Итерационната процедура (ii) произвежда редица $\{X_n^+\}$ със свойството $X_n^+ \geq X_{n+1}^+$ за всяко $n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} X_n^+ = X^{*+}$. Ако $X^{*-} = X^{*+}$, то $Q_R(\,(ii), X^*) \geq 2$.

(б) Итерационната процедура (iii) произвежда редица $\{X_n^-\}$, такава че $X_{n+1}^- \geq X_n^-$ за всяко $n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} X_n^- = X^{*-}$. Ако $X^{*-} = X^{*+}$, то $Q_R(\,(iii), X^*) \geq 2$.

(в) Нека $0 \notin F(X_0^-)$, $0 \notin F(X_0^+)$.

(в1) Ако $\hat{F}(X_0) = \emptyset$, то $X^* = \emptyset$.

(в2) Релацията $0 \in \hat{F}(X_0)$ е еквивалентна с $X_1 \subseteq X_0$; алтернативно, $0 \notin \hat{F}(X_0)$ е еквивалентно с $X_1 \nsubseteq X_0$.

(в3) Нека $0 \in \hat{F}(X_0)$. Тогава итерационната процедура (iv) произвежда редица от интервали $\{X_n\}$, която е антитонна по включване, т. е. $X_n \supseteq X_{n+1}$ за всяко $n \geq 0$, $X_n \supset X^*$, $\lim_{n\to\infty} X_n = X^*$ и $Q_R(\,(iv), X^*) \geq 1$.

Доказателство. (а). Очевидно $X^* \neq \emptyset$, тъй като $X_0^- \in X^*$. Освен това е изпълнено $X_0^+ \geq \ldots \geq X_n^+ \geq X_{n+1}^+ \geq \ldots$, т. е. $\{X_n^+\}$ е антитонна редица, ограничена и следователно сходяща. Да означим $\lim X_n^+ = X^{*+}$; очевидно

$F^{+0}(X^{*+}) = 0$, откъдето следва $X^{*+} \in X^*$ и $X^{*+} \geq X^{*-}$. В частност ако $X^{*+} = X^{*-}$, то от Теорема 2.33 получаваме $Q_R((ii), X^*) \geq 2$.

(б). Доказва се аналогично на (а).

(в1). Нека $\hat{F}(X_0) = \emptyset$. От дефиницията на $\sqcap$ следва $F(X_0^-) \bigcap F(X_0^+) \neq \emptyset$. Но тъй като $0 \notin F(X_0^-)$, $0 \notin F(X_0^+)$, то е изпълнено $F(X_0) > 0$ или $F(X_0) < 0$, т. е. $0 \notin F(x)$ за всяко $x \in X$, следователно $X^* = \emptyset$.

(в2). От Твърдение 1.3 получаваме

$$\begin{aligned} X_1 -^- X_0 &= (X_0 -^- \hat{F}(X_0)/^- F'(X_0)) -^- X_0 \\ &= \begin{cases} -\hat{F}(X_0)/^- F'(X_0), & \text{ако } \omega(X_0) \geq \omega(\hat{F}(X_0)/^- F'(X_0)), \\ [-\omega(X_0), \omega(X_0)] -^- \hat{F}(X_0)/^- F'(X_0), & \text{в противен случай}. \end{cases} \end{aligned}$$

В случая, когато $\omega(X_0) \geq \omega(\hat{F}(X_0)/^- F'(X_0))$, очевидно $0 \notin X_1 -^- X_0$ е еквивалентно с $0 \notin \hat{F}(X_0)$, а $0 \in \hat{F}(X_0)$ е равносилно на $0 \in X_1 -^- X_0$, което означава $X_1 \subseteq X_0$. Нека $\omega(X_0) < \omega(\hat{F}(X_0)/^- F'(X_0))$. Тогава

$$\begin{aligned} &0 \notin X_1 -^- X_0 \iff 0 \notin [-\omega(X_0), \omega(X_0)] -^- \hat{F}(X_0)/^- F'(X_0) \\ &\iff [-\omega(X_0), \omega(X_0)] \not\supseteq \hat{F}(X_0)/^- F'(X_0) \iff 0 \notin \hat{F}(X_0). \end{aligned}$$

(в3). Нека $0 \in \hat{F}(X_0)$. Тогава $X^* \neq \emptyset$, $X^* \subseteq X_0$, $X_1 \subseteq X_0$. Имаме

$$\begin{aligned} X_1 -^- X^* &= (X_0 -^- \hat{F}(X_0)/^- F'(X_0)) -^- X^* \\ &= (X_0 -^- X^*) -^- \hat{F}(X_0)/^- F'(X_0), \end{aligned}$$

следователно $0 \in X_1 -^- X^*$, т. е. $X^* \subseteq X_1$. По-нататък по индукция се доказва, че $X_n \supseteq X_{n+1}$ и $X^* \subseteq X_n$ за всяко $n > 1$. Тъй като редицата $\{X_n\}$ е антитонна по включване, то съществува $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ и $X \supseteq X^*$ (вж. Твърдение 2.1). От Следствие 2.48 получаваме

$$\begin{aligned} \omega(X_{n+1}) - \omega(X^*) &= \omega(X_n) - \omega(X^*) - \omega(\hat{F}(X_n)/^- F'(X_n)) \\ &= \omega(X_n) - \omega(X^*) - \omega(\hat{F}(X_n))/|F'(X_n)| \\ &= \omega(X_n) - \omega(X^*) - \omega(\hat{F}(X_n) -^- \hat{F}(X^*))/|F'(X_n)| \\ &\leq \omega(X_n) - \omega(X^*) - (\rceil F'(X_n) \lceil /|F'(X_n)|)(\omega(X_n) - \omega(X^*)) \\ &\leq (1 - (\rceil F'(X_0) \lceil /|F'(X_0)|))(\omega(X_n) - \omega(X^*)) \\ &= \gamma(\omega(X_n) - \omega(X^*)), \end{aligned}$$

където $\gamma = 1 - (\,\rceil F'(X_0) \lceil\,/|F'(X_0)|)$, $0 < \gamma < 1$. Следователно $\lim_{n\to\infty} X_n = X^*$ и $Q_R((iv), X^*) \geq 1$. □

За $x \in ID_S$ да означим

$$F^{\diamond}(x) = [F^{-\diamond}(x) \vee F^{+\diamond}(x)] = [F^{+0}(x) \vee F^{-0}(x)],$$

а за $X \subseteq X_0 \in ID_S$ нека

$$\begin{aligned} F^{\diamond}(X) &= F^{\diamond}(X^-) \vee F^{\diamond}(X^+) = F^{-\diamond}(X) \vee F^{+\diamond}(X), \\ \hat{F}^{\bigcirc}(X) &= F^{\diamond}(X^-) \sqcap F^{\diamond}(X^+), \\ F'^{\diamond}(X) &= \bigvee_{x \in X} F'^{\diamond}(x) = (F^{-\prime})^{\diamond}(X) \vee (F^{+\prime})^{\diamond}(X) \end{aligned}$$

На (i)–(iv) съпоставяме следните итерационни процедури, записани в термините на компютърна аритметика:

$$\begin{aligned}
&(i) \quad 0 \in F^{\diamond}(X_0^-),\ 0 \in F^{\diamond}(X_0^+):\\
&\qquad X^* := X_0;\\[1ex]
&(ii) \quad 0 \in F^{\diamond}(X_0^-),\ 0 \notin F^{\diamond}(X_0^+):\\
&\qquad \begin{cases} X^{*-} := X_0^-, \\ X_{n+1}^+ := X_n^+ \triangle |F^{+0}(X_n^+)| \triangledown |F'^{\diamond}(X_n)|, \\ n = 0, 1, \ldots \ \textbf{until}\ X_{n+1}^+ \geq X_n^+ \ \textbf{or}\ 0 \in F^{\diamond}(X_n^+); \end{cases}\\[1ex]
&(iii) \quad 0 \notin F^{\diamond}(X_0^-),\ 0 \in F^{\diamond}(X_0^+):\\
&\qquad \begin{cases} X_{n+1}^- := X_n^- \triangledown |F^{+0}(X_n^-)| \triangledown |F'^{\diamond}(X_n)|, \\ X^{*+} := X_0^+, \\ n = 0, 1, \ldots \ \textbf{until}\ X_{n+1}^- \leq X_n^- \ \textbf{or}\ 0 \in F^{\diamond}(X_n^-); \end{cases}\\[1ex]
&(iv) \quad 0 \notin F^{\diamond}(X_0^-),\ 0 \notin F^{\diamond}(X_0^+):\\
&\qquad \begin{cases} X_{n+1} := X_n \langle -^- \rangle \hat{F}^{\bigcirc}(X_n)\, (/^-)\, F'^{\diamond}(X_n), \\ n = 0, 1, \ldots \ \textbf{until}\ \hat{F}^{\bigcirc}(X_{n+1}) = \emptyset \ \textbf{or}\ X_{n+1} \not\subseteq X_n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Използувайки критерии за спиране (прекъсване) на итерациите аналогични на (I)–(III), по-долу ще представим стъпките на алгоритъм с верификация на резултата за начален интервал X и при условие $0 \notin F'^{\diamond}(X)$.

Алгоритъм с верификация на резултата 2.5

(0) Input: initial interval $X = [X^-, X^+]$;
(1) compute $F^{\diamond}(X^-)$, $F^{\diamond}(X^+)$;
    if $0 \in F^{\diamond}(X^-)$ **and** $0 \in F^{\diamond}(X^+)$ **then**
        print X as final result and stop;
    if $0 \notin F^{\diamond}(X^-)$ **and** $0 \notin F^{\diamond}(X^+)$ **then goto** (2);
    if $0 \in F^{\diamond}(X^-)$ **and** $0 \notin F^{\diamond}(X^+)$ **then goto** (3);
    if $0 \notin F^{\diamond}(X^-)$ **and** $0 \in F^{\diamond}(X^+)$ **then goto** (4);
(2) compute $F^{\diamond}(X)$;
    if $0 \notin F^{\diamond}(X)$ **then** print Message 1 and stop;
    else compute $\hat{F}^{\bigcirc}(X)$, $F'^{\diamond}(X)$;
        $Y := X \langle -^- \rangle \hat{F}^{\bigcirc} (/^-) F'^{\diamond}(X)$;
        if $Y \subset X$ **then** set $X := Y$ and **goto** (1)
        else print X as final result and stop;
(3) $Y^- := X^-$; compute $F'^{\diamond}(X)$;
    $Y^+ := X^+ \triangle(|F^{+0}(X^+)| \triangledown | F'^{\diamond}(X)|)$;
    if $Y^+ \geq X^+$ **then** print X as final result and stop
    else repeat
        $X^+ := Y^+$; compute $F^{\diamond}(X^+)$;
        if $0 \in F^{\diamond}(X^+)$ **then** print X as final result and stop
        else compute $F'^{\diamond}(X)$;
        $Y^+ := X^+ \triangle(|F^{+0}(X^+)| \triangledown | F'^{\diamond}(X)|)$
    until $Y^+ \geq X^+$; print X as final result and stop;
(4) $Y^+ := X^+$; compute $F'^{\diamond}(X)$;
    $Y^- := X^- \triangledown(|F^{+0}(X^-)| \triangledown | F'^{\diamond}(X)|)$;
    if $Y^- \leq X^-$ **then** print X as final result and stop
    else repeat
        $X^- := Y^-$; compute $F^{\diamond}(X^-)$;
        if $0 \in F^{\diamond}(X^-)$ **then** print X as final result and stop
        else compute $F'^{\diamond}(X)$;
        $Y^- := X^- \triangledown(|F^{+0}(X^-)| \triangledown | F'^{\diamond}(X)|)$
    until $Y^- \leq X^-$; print X as final result and stop.

Message 1 = '`The solution set is empty.`'

Алгоритъм 2.5 е реализиран програмно на Pascal-SC и е приложен при изследване на статичната характеристика на процеса на метанова ферментация в условия на неопределеност (вж. Приложението).

2.4.3. Описаният по-горе подход може да се използва за намиране на всички корени на нелинейно уравнение в предварително зададен интервал. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R$, е непрекъснато диференцируема функция в D. Да означим с $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_p^*$ реалните изолирани нули на f в интервала $X_0 \in ID$. Целта ни е да разделим интервала X_0 на подинтервали $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_l^*$, $l \leq p$, такива че $X_1^* \bigcup X_2^* \bigcup \ldots \bigcup X_l^* \subseteq X_0$ и всеки подинтервал X_i^* да съдържа корен, като кратен корен е включен в един подинтервал.

Нека $F' : ID \to IR$ е изотонно по включване интервално разширение на първата производна. Нека $x \in X_0$ е произволна вътрешна точка, например x може да бъде центъра на интервала X_0, $x = \mu(X_0) = (X_0^- + X_0^+)/2$. Да разгледаме подинтервалите $X_{1,0} = [X_0^-, x]$, $X_{2,0} = [x, X_0^+]$ и да направим една стъпка съгласно (32) с всеки от $X_{1,0}$ и $X_{2,0}$, използувайки $F'(X_0)$:

$$\begin{cases} X_{1,1}^- = X_0^- + |f(X_0^-)|/|F'(X_0)|, \\ X_{1,1}^+ = x - |f(x)|/|F'(X_0)|; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{2,1}^- = x + |f(x)|/|F'(X_0)|; \\ X_{2,1}^+ = X_0^+ - |f(X_0^+)|/|F'(X_0)|. \end{cases}$$

Ако $X_{1,1}^- > X_{1,1}^+$ и $X_{2,1}^- > X_{2,1}^+$, тогава уравнението $f(x) = 0$ няма решение в X_0. В този случай ще казваме, че интервалите $X_{1,1}$ и $X_{2,1}$ са празни и ще пишем $X_{1,1} = \emptyset$, $X_{2,1} = \emptyset$.

Ако $X_{1,1}^- > X_{1,1}^+$, но $X_{2,1}^- \leq X_{2,1}^+$, тогава всички корени на уравнението са разположени в интервала $X_{2,1} = [X_{2,1}^-, X_{2,1}^+]$, а $X_{1,1} = \emptyset$.

Ако $X_{1,1}^- \leq X_{1,1}^+$, $X_{2,1}^- > X_{2,1}^+$, тогава всички корени на уравнението се намират в интервала $X_{1,1} = [X_{1,1}^-, X_{1,1}^+]$, а $X_{2,1} = \emptyset$.

Ако $X_{1,1}^- < X_{1,1}^+$ и $X_{2,1}^- < X_{2,1}^+$, тогава $x_1^*, x_2^*, \ldots x_p^* \in X_{1,1} \bigcup X_{2,1}$. Имаме

$$\begin{aligned} & \omega(X_{1,1} \textstyle\bigcup X_{2,1}) \\ = \;& \omega(X_{1,1}) + \omega(X_{2,1}) = \omega(X_0) - (|f(X_0^-)| + |f(X_0^+)| + 2|f(x)|)/|F'(X_0)| \\ < \;& \omega(X_0), \end{aligned}$$

т. е. горната процедура води до намаляване на дължината на началния интервал; при това $X_{1,1} \bigcap X_{2,1} = \emptyset$.

На следващата стъпка прилагаме същата процедура към един или два интервала. В случая на два интервала всеки един от тях се обработва отделно и независимо от другия. По този начин началният интервал X_0 се разделя на няколко, може би много, но краен брой подинтервали. Да означим с L списъка от подинтервали, получени след краен брой стъпки. Нека $X \in L$ е текущ интервал, който подлежи на обработка. Трябва да пресметнем първо $F'(X)$. Ако $0 \notin F'(X)$, то $f(x) = 0$ има най-много един корен в X и това можем да проверим чрез пресмятане на обхвата $f(X) = [f(X^-) \vee f(X^+)]$. В случая, когато $0 \notin f(X)$, интервалът X се изтрива от списъка L; ако $0 \in f(X)$, тогава $f(x)$ има единствена нула в X. Можем да я намерим, използвайки описан в т. 2.2 метод.

По предположение F' е изотонно по включване интервално разширение; това означава, че от $0 \notin F'(X)$ следва $0 \notin F'(Y)$ за всяко $Y \subseteq X$; така че не е необходимо да проверяваме дали $0 \notin F'(Y)$ на всяка следваща стъпка. Но ако $0 \in F'(X)$, тогава е възможно $0 \notin F'(Y)$ или $0 \in F'(Y)$ за $Y \subseteq X$. Следователно, когато $0 \in F'(X)$ на някоя стъпка и на следващата стъпка получим от X някакъв подинтервал $Y \subseteq X$, трябва да проверим дали $F'(Y)$ съдържа или не нула.

За $x \in D_S$ да означим с $F^{\diamond}(x)$ получения чрез закръгляване навън машинен интервал за $f(x)$; $f(x) \in F^{\diamond}(x)$. За $X \in ID_S$ нека $F'^{\diamond}(X)$ е машинния интервал за $F'(X)$; $F'(X) \subseteq F'^{\diamond}(X)$. За простота отново ще използваме означенията $F^{\diamond}(x) = [F^{+0}(x) \vee F^{-0}(x)]$.

Да разгледаме следната итерационна процедура, формулирана в термините на компютърна аритметика:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{1,1}^- = X^- \mathbin{\nabla\!\!\!\!-}\, |F^{+0}(X^-)| \mathbin{\nabla\!\!\!\!/}\, |F'^{\diamond}(X)|, \\ X_{1,1}^+ = x \mathbin{\triangle\!\!\!\!/}\, |F^{+0}(x)| \mathbin{\nabla\!\!\!\!/}\, |F'^{\diamond}(X)|; \end{array} \right. \tag{38}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{2,1}^- = x \mathbin{\nabla\!\!\!\!-}\, |F^{+0}(x)| \mathbin{\nabla\!\!\!\!/}\, |F'^{\diamond}(X)|; \\ X_{2,1}^+ = X_0^+ \mathbin{\triangle\!\!\!\!/}\, |F^{+0}(X^+)| \mathbin{\nabla\!\!\!\!/}\, |F'^{\diamond}(X)|. \end{array} \right. \tag{39}$$

Основен критерий за спиране е принципът за крайната сходимост. Други критерии за прекъсване ще получам от факта, че $F^{\diamond}(x)$ и $F'^{\diamond}(X)$ не са оптимални закръглявания. Това води до някои допълнителни проверки при практическа реализация на алгоритъма. Например, ако за някое

$x \in D_S$ получим $0 \in F^{\diamond}(x)$, това означава, че x е нула на f или лежи "близо" до нула на f. Има две (на практика рядко срещани) ситуации, които ще разгледаме по-долу. Нека $X = [X^-, X^+]$ е интервал, към който ще прилагаме процедурата (38)–(39). Имаме следните възможности:

(а) $0 \notin F'^{\diamond}(X)$, $0 \in F^{\diamond}(X^-)$ и/или $0 \in F^{\diamond}(X^+)$.

Това е случай на пресмятане на прост корен в X и той е разгледан подробно в т. 2.2.

(б) $0 \in F'^{\diamond}(X)$, $0 \in F^{\diamond}(X^-)$ и/или $0 \in F^{\diamond}(X^+)$.

Тази ситуация може да се появи, когато се търси кратен корен на $f(x) = 0$ в X и тогава интервалът X е малък (с малка ширина); възможно е интервалът X да е широк и в него f има повече от една нула (проста и/или кратна) или въобще да няма нули. В този случай построяваме мрежа от точки (машинни числа) $\{x_i\} \in (X^-, X^+)$, като разстоянието между две съседни точки от мрежата е не по-малко от 1 ulp. Ако за всяко машинно число x_i имаме $0 \in F^{\diamond}(x_i)$, тогава алгоритъмът не може да определи съществуване/несъществуване на решение в X. Ако съществува x_i от мрежата, за което $0 \notin F^{\diamond}(x_i)$, можем да очакваме евентуални подобрения на подинтервалите $X_1 = [X^-, x_i]$ и $X_2 = [x_i, X^+]$ само в тези краища, в които $F^{\diamond}$ не съдържа нула; останалите краища не се обработват.

По-долу ще опишем основните стъпки на алгоритъма с верификация. Стъпките се изпълняват последователно, освен ако не е указано противното. Ще използваме следните означения: нека L е списъкът от интервали за обработка; добавянето на нов интервал X в L ще означаваме с $L := L + X$; изтриване на интервал X от L ще означаваме с $L := L - X$. Процедурата за избиране на вътрешно за интервала X машинно число x ще наричаме условно **Choose**$(x, X, flag)$, където $flag$ е булева променлива със стойност *true* ако съществува x с $0 \notin F^{\diamond}(x)$ и стойност $false$ в противен случай.

Алгоритъм с верификация на резултата 2.6

(0) Input: initial interval X_0;
(1) $L := L + X_0$;
(2) **if** $L = \emptyset$ **then** stop

else read X from L; $L := L - X$;

(3) Compute $F'^{\diamond}(X)$;
if $0 \notin F'^{\diamond}(X)$ **then goto** (4)
else goto (5);

(4) Apply Algorithm 2.1 to X; **goto** (2);

(5) Compute $F^{\diamond}(X^-)$, $F^{\diamond}(X^+)$;
if $0 \notin F^{\diamond}(X^-)$ and $0 \notin F^{\diamond}(X^+)$ **then**
  Choose$(x, X, flag)$;
  if $flag = false$ **then** apply Algorithm 2.4 to X
  else
    compute $X_{1,1}$ according (38);
    compute $X_{2,1}$ according (39);
    goto (6);
if $0 \in F^{\diamond}(X^-)$ and $0 \in F^{\diamond}(X^+)$ **then**
  Choose$(x, X, flag)$;
  if $flag = false$ **then** print X, print Message 1; **goto** (2)
  else
    $X_{1,1}^- := X^-$;
    compute $X_{1,1}^+$ according (38);
    compute $X_{2,1}^-$ according (39);
    $X_{2,1}^+ := X^+$; **goto** (6);
if $0 \in F^{\diamond}(X^-)$ and $0 \notin F^{\diamond}(X^+)$ **then**
  Choose$(x, X, flag)$;
  if $flag = false$ **then** print X, print Message 1; **goto** (2)
  else
    $X_{1,1}^- := X^-$;
    compute $X_{1,1}^+$ according (38);
    compute $X_{2,1}$ according (39);
    goto (6);
if $0 \notin F^{\diamond}(X^-)$ and $0 \in F^{\diamond}(X^+)$ **then**
  Choose$(x, X, flag)$;
  if $flag = false$ **then**
    print X, print Message 1; **goto** (2)
  else
    compute $X_{1,1}$ according (38);
    compute $X_{2,1}^-$ according (39);
    $X_{2,1}^+ := X^+$;
    goto (6);

(6) **if** $X_{1,1} \neq \emptyset$ **and** $X_{2,1} \neq \emptyset$ **then**

$L := L + X_{2,1}$;
$X := X_{1,1}$; **goto** (3);
if $X_{1,1} = \emptyset$ **and** $X_{2,1} = \emptyset$ **then goto** (2)
else if $X_{1,1} \neq \emptyset$ **then**
if $X_{1,1} \subset [X^-, x]$ **then**;
$X := X_{1,1}$; **goto** (3);
else print $X_{1,1}$ as final result; **goto** (2);
else if $X_{2,1} \subset [x, X^+]$ **then**;
$X := X_{2,1}$; **goto** (3);
else print $X_{2,1}$ as final result;
goto (2).

Message 1 = 'The algorithm can not determine existence/nonexistence of a solution in this interval.'

Когато алгоритъмът спре, на стъпки (4), (5) или (6) ще бъдат отпечатани всички интервали, съдържащи нулите на f в X_0. Възможно е да имаме допълнителни интервали (с необходимата за това информация), в които алгоритъмът не може да прецени съществува или не решение на уравнението. В такъв случай на потребителя се препоръчва да проиграе алгоритъма с всеки един от тези критични интервали с по-голяма точност или по-точно да извърши пресмятанията на $F^{\diamond}$ и $F'^{\diamond}$.

Алгоритъмът с верификация 2.5 е реализиран програмно на Pascal-SC.

Пример 2.16 [59]. $\sum_{i=1}^{5} i\cos((i+1)x+1) = 0$

Разглеждаме начален интервал $X_0 = [-5, 5]$. След първото прилагане на алгоритъма се получават два подинтервала, след второто – четири и т. н., след четвъртото – 16 подинтервала на началния интервал. От тях получаваме интервалите X_1^*, X_2^*, X_3^*, съдържащи три прости корена на уравнението:

$$\begin{aligned} X_1^* &= [-1.77168562737\ ,\ -1.77168562736], \\ X_2^* &= [-1.12223867211\ ,\ -1.12223867210], \\ X_3^* &= [-0.456449788485\ ,\ -0.456449788482]. \end{aligned}$$

В списъка L имаме за обработка 25 интервала. От тях получаваме още 9 подинтервала, съдържащи прости корени на уравнението:

$$X_4^* = [-2.75096764724\ ,\ -2.75096764723],$$

$$
\begin{aligned}
X_5^* &= [-2.292933734169\ ,\ -2.292933734168],\\
X_6^* &= [0.573340114656\ ,\ 0.573340114661],\\
X_7^* &= [1.08652152304\ ,\ 1.08652152305],\\
X_8^* &= [1.56625249374\ ,\ 1.6625249378],\\
X_9^* &= [2.04669717149\ ,\ 2.04669717156],\\
X_{10}^* &= [2.55189213463\ ,\ 2.55189213466],\\
X_{11}^* &= [3.99024796547\ ,\ 3.99024796551],\\
X_{12}^* &= [4.51149967981\ ,\ 4.51149967983].
\end{aligned}
$$

За обработка остават 11 интервала. От тях намираме още 7 подинтервала, съдържащи прости корени на уравнението:

$$
\begin{aligned}
X_{13}^* &= [-4.71693281343\ ,\ -4.71693281338],\\
X_{14}^* &= [-4.23648813571\ ,\ -4.23648813563],\\
X_{15}^* &= [-3.73129317256\ ,\ -3.73129317253],\\
X_{16}^* &= [-3.27157202278\ ,\ -3.27157202277],\\
X_{17}^* &= [0.124332969195\ ,\ 0.124332969199],\\
X_{18}^* &= [3.01161328439\ ,\ 3.01161328442],\\
X_{19}^* &= [3.53221765992\ ,\ 3.53221765996].
\end{aligned}
$$

Тъй като списъкът от интервали L е изчерпан, интервалите $X_1^*, \ldots, X_{19}^*$ включват всички корени на уравнението в дадения начален интервал.

Пример 2.17.

$$p(x) = 12x^8 + 32x^7 - 1137x^6 + 3945x^5 + 1134x^4 - 123x^3 + 3033x^2 - 2066x + 360.$$

Системата за компютърна алгебра *Maple* [40] дава интервал $X_0 = [-16, 16]$ за нулите на полинома $p(x)$. Програмата извежда следните резултати

$$
\begin{aligned}
X_1^* &= [9.99999999999E+00, 1.00000000001E+01];\\
X_2^* &= [-9.00000000001E+00, -8.99999999999E+00];\\
X_3^* &= [-4.00000000001E+00, -3.99999999999E+00];\\
X_4^* &= [3.33333333333E-01, 3.33333333334E-01];\\
X_5^* &= [4.99999999998E-01, 5.00000000001E-01],
\end{aligned}
$$

като последният интервал X_5^* съдържа кратен корен.

Наистина, с помощта на *Maple* получаваме следното представяне на полинома:

$$p(x) = (x - \frac{1}{2})^2(x - \frac{1}{3})(x + 4)(x^2 + x + 1)(x + 9)(x - 10).$$

Пример 2.18. $f(x) = e^{-x^2 \sin \frac{1}{x}} - 1, \ \ x \neq 0.$

От началния интервал $X_0 = [0.01, 0.1]$ програмата произвежда 28 непресичащи се интервала, като в един от тях алгоритъмът не може да определи съществуване/несъществуване на решение – това е интервалът $Y = [1.15247332786E - 02, 1.51576136283E - 02]$. Стартираме отново програмата с (леко променен) начален интервал $Y_0 = [1.1524733278E-02, 1.5157613629-02]$ и в резултат получаваме $Y_1 = [1.51574293942E - 02, 1.51576136281 - 02]$, който съдържа единствен прост корен на $f(x) = 0$. Точният брой нули на уравнението в началния интервал X_0 е 28.

В интервала $X_0 = [0.01, 0.02]$ програмата произвежда 16 непресичащи се интервала за корените на уравнението, като отново в един от тях – $Y = [1.97331911023E - 02, 1.98943678914E - 02]$ алгоритъмът не може да определи съществува или не решение на уравнението. Стартирайки програмата с $Y_0 = [1.9733191102E - 02, 1.9894367892E - 02]$ получаваме същият резултат, т. е. алгоритъмът не може да определи дали съществува или не решение в Y_0. Вземаме друг начален интервал $Y_1 = [1.9733191101E - 02, 1.9894367893E-02]$. Получаваме $Y_2 = [1.98885964503E-02, 1.98943678901E-02]$ със съобщение, че резултатът не може да се подобри в разглежданата точност. Точният брой нули на функцията в X_0 е 16.

В начален интервал $X_0 = [0.001, 0.01]$ програмата произвежда 315 непресичащи се интервала за корените на уравнението, като в 107 от тях алгоритъмът не може да определи съществуване/несъществуване на решение. Както по-горе рестартираме програмата с всеки един от "подозрителните" интервали, като малко ги разширяваме; от тях се отхвърлят 29 интервала, които не съдържат нула на f, а 78 интервала се запазват, съдържайки единствена проста нула на f. Точният брой корени на уравнението в X_0 е 286.

Заключителни бележки. 1. Алгоритъм 2.4 е предназначен за пресмятане на интервал X^* с възможно най-малка ширина, съдържащ множеството от всички реални корени на нелинейно уравнение $f(x) = 0$ в предварително зададен интервал X_0. Ако X^* е точков интервал, т. е. $f(x) = 0$ има единствено решение, то Алгоритъм 2.4 е обощение на Алгоритъм 2.1; при това отпада ограничението $0 \notin F'^{\diamond}(X_0)$, което може да се дължи на факта, че $F'^{\diamond}(X_0)$ не е оптимално пресметнатото със закръгляване интервално разширение на производната f'. Методът, от който е изведен Алгоритъм 2.4, теоретически е приложим за всяка функция f, за която $F'(X_0) \neq [0,0]$ и това го отличава от метода (4)–(5) (вж. т. 2.1). При последния се допуска $F'(X)$, $X \subseteq X_0$, да съдържа нула само като вътрешна точка; в противен случай итерациите (4)–(5) прекъсват. При практически пресмятания Алгоритъм 2.4 не работи ефективно, когато $|F'^{\diamond}(X)|$ е голямо; тогава броят на итерациите нараства значително.

2. Алгоритъм, подобен на Алгоритъм 2.5, е разгледан например в [55], [73], но без използуване на производна на интервална функция.

3. Алгоритъм 2.6 е предназначен за пресмятане на всички изолирани реални корени на нелинейно уравнение в предварително зададен интервал X_0. Известни са други алгоритми с такова предназначение (вж. напр. [56], [59]). При последните от началния интервал $X_0 = [X_0^-, X_0^+]$ се запазват подинтервали от вида $[X_0^-, x_1]$ и/или $[x_2, X_0^+]$, $x_1 < x_2$, т. е. краищата на X_0 се запазват. При Алгоритъм 2.6 запазваните подинтервали в общия случай не съдържат краищата на обработвания интервал. Това прави алгоритъма практически по-ефективен. Едно от важните приложения на Алгоритъм 2.6 е при намиране на всички реални нули на полином при предположение, че са известни граници за тях. Алгоритъм за намиране на граници на положителните (и отрицателните) нули на полином е представен напр. в [70]. При работа с полиноми е необходимо да имаме ефективен метод за пресмятане на стойността на полином в дадена точка (интервал) (вж. напр. [56]).

2.5 Числен алгоритъм с верификация на резултата за едновременно пресмятане на всички реални нули на полином

Да разгледаме полином p от степен n с n на брой прости реални нули $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Да запишем p във вида $p(x;t) = \prod_{i=1}^{n}(t - x_i)$, където $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Да предположим, че са известни интервали $X_1, X_2, \ldots, X_n$, съдържащи нулите, т. е. $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; нека интервалите X_i са два по два непресичащи се, $X_i \bigcap X_j = \emptyset$ за $i \neq j$. Да означим $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Да пресметнем обхвата $p(X;t)$ на полинома $p(x;t)$, когато x се изменя в X. Съгласно Теорема 2.22 е в сила представянето

$$P(X;t) = \prod_{i=1}^{n}(t - X_i),$$

където символът $\prod$ е използуван в смисъла на стандартната интервално-аритметична операция $\times$, т. е.

$$\prod_{i=1}^{n}(t - X_i) = (t - X_1) \times (t - X_2) \times \cdots \times (t - X_n).$$

Очевидно $P(X;t)$ е интервална функция на реалната променлива t; $P(X;t)$ е интервален полином. За всяко $t \in R$ ще намерим граничните полиноми $P^-(X;t)$ и $P^+(X;t)$ на $P(X;t) = [P^-(X;t), P^+(X;t)]$. За целта ще използуваме формули (4) и (7) от т. 1.2. В сила е представянето

(а) $t \notin X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$P(X;t) = [\prod_{i=1}^{n}(t - X_i^{+t}) \vee \prod_{i=1}^{n}(t - X_i^{-t})].$$

(б) $t \in X_k$, $1 \leq k \leq n$; тъй като в този случай $0 \in t - X_k$, имаме:

$$\begin{aligned}
P(X;t) &= (\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (t - X_i^{-t})) \times (t - X_k) \\
&= [(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (t - X_i^{-t}))(t - X_k^-) \vee (\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (t - X_i^{-t}))(t - X_k^+)] \\
&= [(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (t - X_i^{-X_k}))(t - X_k^-) \vee (\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (t - X_i^{-X_k}))(t - X_k^+)] \\
&= (\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (t - X_i^{-X_k})) \times (t - X_k).
\end{aligned}$$

В случая, когато $t \in X_k$, $1 \leq k \leq n$, ще пресметнем производната $\frac{d}{dt}P(X;t) = P'(X;t)$ на интервалния полином $P(X;t)$ (вж. т. 2.1). Прилагайки правило (1) от Теорема 2.13 за пресмятане на производна на произведение от интервална и реална функция, получаваме

$$\begin{aligned}
P'(X;t) &= \Big(\Big(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (t - X_i^{-X_k})\Big) \times (t - X_k)\Big)' \\
&= \Big(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (t - X_i^{-X_k})\Big)' \times (t - X_k) + \Big(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (t - X_i^{-X_k})\Big) \times (t - X_k)' \\
&= \Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k\\ i\neq j}}^{n} (t - X_i^{-X_k})\Big) \times (t - X_k) + \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (t - X_i^{-X_k}).
\end{aligned}$$

Да предположим, че $P'(X;t)$ е монотонна интервална функция за $t \in X_k$ (вж. Дефиниция 2.8). Тогава за $P'(X;X_k) = \bigvee_{t\in X_k} P'(X;t)$ е в сила представянето

$$\begin{aligned}
&P'(X;X_k) = P'(X;X_k^-) \vee P'(X;X_k^+) \\
&= \Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k\\ i\neq j}}^{n} (X_k^- - X_i^{-X_k})\Big)(X_k^- - X_k) + \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (X_k^- - X_i^{-X_k}) \vee \\
&\quad \Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k\\ i\neq j}}^{n} (X_k^+ - X_i^{-X_k})\Big)(X_k^+ - X_k) + \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (X_k^+ - X_i^{-X_k}).
\end{aligned}$$

Да означим

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k\\ i\neq j}}^{n} (X_k^- - X_i^{-X_k}), \\
\beta_k &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k\\ i\neq j}}^{n} (X_k^+ - X_i^{-X_k}).
\end{aligned}$$

Получаваме

$$
\begin{aligned}
&P'(X;X_k)\\
&= \Big(\alpha_k(X_k^- - X_k) + \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X_k^- - X_i^{-X_k})\Big) \vee \Big(\beta_k(X_k^+ - X_k) + \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X_k^+ - X_i^{-X_k})\Big)\\
&= \Big(\alpha_k[-\omega(X_k),0] + \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X_k^- - X_i^{-X_k})\Big) \vee \Big(\beta_k[0,\omega(X_k)] + \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X_k^+ - X_i^{-X_k})\Big)\\
&\subseteq \big(\alpha_k[-\omega(X_k),0] \vee \beta_k[0,\omega(X_k)]\big)\\
&\quad + \Big(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X_k^- - X_i^{-X_k})\Big) \vee \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X_k^+ - X_i^{-X_k})\Big)\\
&= [-\alpha_k \vee \beta_k \vee 0]\omega(X_k) + \Big(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X_k^- - X_i^{-X_k})\Big) \vee \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X_k^+ - X_i^{-X_k})\Big), \qquad (40)
\end{aligned}
$$

като горното включване може да се замени с равенство, ако $\sigma(\alpha_k) = \sigma(\beta_k)$.

Да означим

$$
\begin{aligned}
&d_k((X_1^{-X_k},\dots,X_{k-1}^{-X_k},X_{k+1}^{-X_k},\dots,X_n^{-X_k});X_k^-) = d_k(X^{-X_k};X_k^-)\\
&\quad= \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X_k^- - X_i^{-X_k}) = \prod_{i=1}^{k-1}(X_k^- - X_i^-)\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^- - X_i^+);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&d_k((X_1^{-X_k},\dots,X_{k-1}^{-X_k},X_{k+1}^{-X_k},\dots,X_n^{-X_k});X_k^+) = d_k(X^{-X_k};X_k^+)\\
&\quad= \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X_k^+ - X_i^{-X_k}) = \prod_{i=1}^{k-1}(X_k^+ - X_i^-)\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^+ - X_i^+);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_k((X_1^{-X_k},\dots,X_{k-1}^{-X_k},X_{k+1}^{-X_k},\dots,X_n^{-X_k});X_k)\\
&\quad= D_k(X^{-X_k};X_k) = [d_k(X^{-X_k};X_k^-) \vee d_k(X^{-X_k};X_k^+)].
\end{aligned}
$$

Тъй като по предположение $X_i \bigcap X_j = \emptyset$ за $i \neq j$, то $0 \notin D_k(X^{-X_k};X_k)$. От (40) получаваме

$$P'(X;X_k) \subseteq [-\alpha_k \vee \beta_k \vee 0]\omega(X_k) + D_k(X^{-X_k};X_k).$$

Очевидно е изпълнено $0 \in [-\alpha_k \vee \beta_k \vee 0]$, следователно
$$D_k(X^{-X_k}; X_k) \subseteq P'(X; X_k).$$

Използувайки отново Теорема 2.13, можем да пресметнем втората производна $P''(X;t) = \frac{d}{dt}P'(X;t)$. Имаме

$$P''(X;t) \;=\; \Big(\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k \\ j\neq l}}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k \\ i\neq j \\ i\neq l}}^{n} (t - X_i^{-X_k})\Big)\Big) \times (t - X_k)$$
$$+\; 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k \\ i\neq j}}^{n} (t - X_i^{-X_k}).$$

От израза $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k \\ i\neq j}}^{n} (t - X_i^{-X_k})$ за $t = X_k^-$ получаваме α_k, а за $t = X_k^+$ получаваме β_k. Да предположим, че $P''(X,t)$ е монотонна за $t \in X_k$. Тогава за $P''(X;X_k) = \bigvee_{t\in X_k} P''(X;t)$ имаме

$$\begin{aligned}
P''(X;X_k) \;&=\; P''(X;X_k^-) \vee P''(X;X_k^+)\\
&=\; \Big(\Big(\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k \\ j\neq l}}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k \\ i\neq j \\ i\neq l}}^{n} (X_k^- - X_i^{-X_k})\Big)\Big) \times [-\omega(X_k), 0] + 2\alpha_k\Big)\\
&\quad \vee \Big(\Big(\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k \\ j\neq l}}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k \\ i\neq j \\ i\neq l}}^{n} (X_k^+ - X_i^{-X_k})\Big)\Big) \times [0, \omega(X_k)] + 2\beta_k\Big)\\
&\subseteq\; \Big(\Big(\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k \\ j\neq l}}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k \\ i\neq j \\ i\neq l}}^{n} (X_k^- - X_i^{-X_k})\Big)\Big) \times [-\omega(X_k), 0]\Big)\\
&\quad\quad \vee \Big(\Big(\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k \\ j\neq l}}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k \\ i\neq j \\ i\neq l}}^{n} (X_k^+ - X_i^{-X_k})\Big)\Big) \times [0, \omega(X_k)]\Big)\Big) + 2[\alpha_k \vee \beta_k].
\end{aligned}$$

Следователно
$$[\alpha_k \vee \beta_k] \subseteq \frac{1}{2}P''(X;X_k). \tag{41}$$
Ако $0 \notin P''(X;X_k)$, то $\sigma(\alpha_k) = \sigma(\beta_k)$ и от (40) получаваме представянето
$$P'(X;X_k) = \omega(X_k)[-\alpha_k \vee \beta_k] + D_k(X^{-X_k};X_k). \tag{42}$$

Ще формулираме интервален итерационен метод от Нютонов тип за едновременно пресмятане на всички реални нули на полинома $p(x;t)$.

Теорема 2.54. Нека $p(x;t)$ е полином с реални коефициенти от степен n с n на брой (неизвестни) реални прости нули $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Нека са дадени интервали $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots, X_n^{(0)}$, такива че $x_i \in X_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $X_i^{(0)} \bigcap X_j^{(0)} = \emptyset$ за $i \neq j$. Да предположим, че $0 \notin P'(X^{(0)}, X_k^{(0)})$ и $0 \notin P''(X^{(0)}, X_k^{(0)})$, $1 \leq k \leq n$, където $X^{(0)} = (X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots, X_n^{(0)})$. Да означим с $p(x;X_k)$ обхвата на полинома $p(x;t)$ в $X_k \subseteq X_k^{(0)}$. Тогава итерационната схема
$$\begin{cases} X_k^{(\nu+1)} = X_k^{(\nu)} -^- p(x;X_k^{(\nu)}) /^- P'(X^{(\nu)};X_k^{(\nu)}), \\ k = 1, 2, \ldots, n; \ \nu \geq 0. \end{cases} \tag{43}$$
произвежда редици от интервали $\{X_k^{(\nu)}\}_{\nu=0}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, със следните свойства:
(а) $X_k^{(\nu)} \supseteq X_k^{(\nu+1)}$, $\nu \geq 0$ и $x_k \in X_k^{(\nu)}$ за всяко $\nu \geq 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$;
(б) $\lim_{\nu\to\infty} X_k^{(\nu)} = x_k$ и $Q_R((43), x_k) \geq 2$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Доказателство. (а). По предположение $0 \notin P'(X^{(0)}, X_k^{(0)})$. Следователно за обхвата на $p(x;t)$ в $X_k^{(0)}$ е в сила представянето
$$p(x;X_k^{(0)}) = [p(x;X_k^{(0)-}) \vee p(x;X_k^{(0)+})].$$
Тъй като $x_k \in X_k^{(0)}$, то $0 \in p(x;X_k^{(0)})$. Тогава
$$\begin{aligned} \omega(p(x;X_k^{(0)}) /^- P'(X^{(0)};X_k^{(0)})) &= \omega(p(x;X_k^{(0)}))/|P'(X^{(0)};X_k^{(0)})| \\ &= |p(x;X_k^{(0)+}) - p(x;X_k^{(0)-})|/|P'(X^{(0)};X_k^{(0)})| \\ &= (1 - \frac{|p'(x;\xi_k)|}{|P'(X^{(0)};X_k^{(0)})|})\omega(X_k^{(0)}) \ < \ \omega(X_k^{(0)}), \end{aligned}$$

тъй като $\xi_k \in (X_k^{(0)^-}, X_k^{(0)^+})$ и $p'(x;\xi_k) \in P'(X^{(0)}; X_k^{(0)})$. Тогава, съгласно дефинициите на операциите $-^-$ и $/^-$, от (43) за $\nu = 1$ получаваме

$$\begin{aligned} X_k^{(1)^-} &= X_k^{(0)^-} - p(x; X_k^{(0)^-})/(P'(X^{(0)}; X_k^{(0)}))^{-0}, \\ X_k^{(1)^+} &= X_k^{(0)^+} - p(x; X_k^{(0)^+})/(P'(X^{(0)}; X_k^{(0)}))^{-0} \end{aligned} \tag{44}$$

или

$$\begin{aligned} X_k^{(1)^-} - X_k^{(0)^-} &= -p(x; X_k^{(0)^-})/(P'(X^{(0)}; X_k^{(0)}))^{-0} \geq 0, \\ X_k^{(1)^+} - X_k^{(0)^+} &= -p(x; X_k^{(0)^+})/(P'(X^{(0)}; X_k^{(0)}))^{-0} \leq 0, \end{aligned}$$

следователно е в сила включването $X_k^{(1)} \subseteq X_k^{(0)}$. От (44) по-нататък получаваме

$$\begin{aligned} X_k^{(1)^-} - x_k &= (X_k^{(0)^-} - x_k) - (p(x; X_k^{(0)^-}) - p(x; x_k))/(P'(X^{(0)}; X_k^{(0)}))^{-0} \\ &= (X_k^{(0)^-} - x_k)(1 - p'(x; \eta_k)/(P'(X^{(0)}; X_k^{(0)}))^{-0} < 0, \end{aligned}$$

където $\eta_k \in (X_k^{(0)^-}, x_k)$. Аналогично се показва, че $X_k^{(1)^+} - x_k > 0$; следователно $x_k \in X_k^{(1)}$. По индукция по-нататък се доказва, че $X_k^{(\nu)} \supseteq X_k^{(\nu+1)}$ и $x_k \in X_k^{(\nu)}$ за всяко $\nu \geq 1$ и $k = 1, 2, \ldots, n$.

(б). Редиците $\{X_k^{(\nu)}\}_{\nu=0}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, са антитонни по включване, следователно са сходящи и границите им съдържат съответния корен x_k. Ще покажем, че всяка една от редиците $\{X_k^{(\nu)}\}_{\nu=0}^{\infty}$ е точково сходяща (вж. Дефиниция 2.4). Имаме

$$\begin{aligned} \omega(X_k^{(\nu+1)}) &= \omega(X_k^{(\nu)}) - \omega(p(x; X_k^{(\nu)}))/|P'(X^{(\nu)}; X_k^{(\nu)})| \\ &= \omega(X_k^{(\nu)})(1 - |p'(x; \xi_k^{(\nu)})|/|P'(X^{(\nu)}; X_k^{(\nu)})|) \\ &\leq \omega(X_k^{(\nu)})(1 - \rceil P'(X^{(0)}; X_k^{(0)})\lceil\, /|P'(X^{(0)}; X_k^{(0)})|) \\ &= \gamma_k \omega(X_k^{(\nu)}), \end{aligned}$$

където $\gamma_k = 1 - \rceil P'(X^{(0)}; X_k^{(0)})\lceil\, /|P'(X^{(0)}; X_k^{(0)})|$, $0 < \gamma_k < 1$ и γ_k не зависи от ν. С това доказахме, че $\lim_{\nu\to\infty} X_k^{(\nu)} = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

По-нататък имаме

$$\omega(X_k^{(\nu+1)}) = \omega(X_k^{(\nu)}) - \omega(p(x; X_k^{(\nu)}))/|P'(X^{(\nu)}; X_k^{(\nu)})|$$

$$= (1 - \frac{p'(x;\xi_k^{(\nu)})}{|P'(X^{(\nu)};X_k^{(\nu)}|})\omega(X_k^{(\nu)})$$

$$\leq \frac{|P'(X^{(\nu)};X_k^{(\nu)})| - \rceil P'(X^{(\nu)};X_k^{(\nu)})\lceil}{|P'(X^{(\nu)};X_k^{(\nu)})|}\omega(X_k^{(\nu)})$$

$$= \frac{\omega(P'(X^{(\nu)};X_k^{(\nu)}))}{|P'(X^{(\nu)};X_k^{(\nu)})|}\omega(X_k^{(\nu)}) \tag{45}$$

Да означим

$$\alpha_k^{(\nu)} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k\\ i\neq j}}^{n} (X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)^{-X_k^{(\nu)}}}),$$

$$\beta_k^{(\nu)} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k\\ i\neq j}}^{n} (X_k^{(\nu)^+} - X_i^{(\nu)^{-X_k^{(\nu)}}}).$$

От (42) за $X = X^{(\nu)}$ имаме

$$\begin{aligned} \omega(P'(X^{(\nu)};X_k^{(\nu)})) &\leq \omega([-\alpha_k^{(\nu)} \vee \beta_k^{\nu)}])\omega(X_k^{(\nu)}) + \omega(D_k(X^{(\nu)^{-X_k^{(\nu)}}};X_k^{(\nu)})) \\ &\leq \max\{|\alpha_k^{(\nu)}|, |\beta_k^{(\nu)}\}\omega(X_k^{(\nu)}) + \omega(D_k(X^{(\nu)^{-X_k^{(\nu)}}};X_k^{(\nu)})). \end{aligned} \tag{46}$$

Ще покажем, че съществува константа $L_k > 0$, така че е изпълнено $\omega(D_k(X^{(\nu)^{-X_k^{(\nu)}}};X_k^{(\nu)})) \leq L_k\omega(X_k^{(\nu)})$. За определеност да предположим, че $P'(X^{(\nu)};X_k^{(\nu)}) > 0$ и $P''(X^{(\nu)};X_k^{(\nu)}) > 0$. Останалите случаи се разглеждат аналогично. Тогава и $D_k(X^{(\nu)^{-X_k^{(\nu)}}};X_k^{(\nu)}) > 0$, което означава, че $n-k$ е четно число. Имаме

$$\omega(D_k(X^{(\nu)^{-X_k^{(\nu)}}};X_k^{(\nu)})) = \prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(\nu)^+} - X_i^{(\nu)^-}) \prod_{i=k+1}^{n} (X_k^{(\nu)^+} - X_i^{(\nu)^+})$$

$$- \prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)^-}) \prod_{i=k+1}^{n} (X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)^+})$$

$$= \prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)^-} + \omega(X_k^{(\nu)})) \prod_{i=k+1}^{n} (X_i^{(\nu)^+} - X_k^{(\nu)^+})$$

$$
\begin{aligned}
&- \prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)^-}) \prod_{i=k+1}^{n}(X_i^{(\nu)^+} - X_k^{(\nu)^+} + \omega(X_k^{(\nu)}))\\
&= \; q_r(\omega(X_k^{(\nu)}))\omega(X_k^{(\nu)}),
\end{aligned}
$$

където $q_r(\omega(X_k^{(\nu)}))$ е полином на $\omega(X_k^{(\nu)})$ от степен $r = \max\{k-1, n-k\} - 1$, т. е.

$$
q_r(\omega(X_k^{(\nu)})) = c_{k,0}^{(\nu)} + c_{k,1}^{(\nu)}\omega(X_k^{(\nu)}) + \cdots + c_{k,r}^{(\nu)}\omega^r(X_k^{(\nu)})
$$

За коефициентите $c_{k,i}^{(\nu)}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, имаме

$$
\begin{aligned}
c_{k,0}^{(\nu)} \;=\;& \prod_{i=k+1}^{n}(X_i^{(\nu)^+} - X_k^{(\nu)^+}) \sum_{j=1}^{k-1} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k-1}(X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)^-})\\
&- \prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)^-}) \sum_{j=k+1}^{n} \prod_{\substack{i=k+1\\ i\neq j}}^{n}(X_i^{(\nu)^+} - X_k^{(\nu)^+});\\
c_{k,1}^{(\nu)} \;=\;& \prod_{i=k+1}^{n}(X_i^{(\nu)^+} - X_k^{(\nu)^+}) \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{k-1} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j\\ i\neq l}}^{k-1}(X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)^-})\\
&- \prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)^-}) \sum_{l=k+1}^{n} \sum_{\substack{j=k+1\\ j\neq l}}^{n} \prod_{\substack{i=k+1\\ i\neq j\\ i\neq l}}^{n}(X_i^{(\nu)^+} - X_k^{(\nu)^+});\\
&\vdots\\
c_{k,r}^{(\nu)} \;=\;& \begin{cases}
\prod_{i=k+1}^{n}(X_i^{(\nu)^+} - X_k^{(\nu)^+}) - \prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)^-}), & \text{ако } n = 2k-1,\\
\prod_{i=k+1}^{n}(X_i^{(\nu)^+} - X_k^{(\nu)^+}), & \text{ако } n < 2k-1,\\
-\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)^-}), & \text{ако } n > 2k-1.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

С помощта на неравенствата

$$
\begin{aligned}
X_i^{(\nu)^+} - X_k^{(\nu)^+} &\leq X_i^{(0)^+} - X_k^{(0)^-}, \quad k+1 \leq i \leq n;\\
X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)^-} &\leq X_k^{(0)^+} - X_i^{(0)^-}, \quad 1 \leq i \leq k-1;\\
X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)^-} &\geq X_k^{(0)^-} - X_i^{(0)^+}, \quad 1 \leq i \leq k-1;\\
X_i^{(\nu)^+} - X_k^{(\nu)^+} &\geq X_i^{(0)^-} - X_k^{(0)^+}, \quad k+1 \leq i \leq n
\end{aligned}
$$

и от това, че $\omega(X_k^{(\nu)}) \le \omega(X_k^{(0)})$ получаваме

$$\begin{aligned} q_r(\omega(X_k^{(\nu)})) &\le |c_{k,0}^{(\nu)}| + |c_{k,1}^{(\nu)}|\omega(X_k^{(\nu)}) + \cdots + |c_{k,r}^{(\nu)}|\omega^r(X_k^{(\nu)}) \\ &\le |c_{k,0}^{(0)}| + |c_{k,1}^{(0)}|\omega(X_k^{(0)}) + \cdots + |c_{k,r}^{(0)}|\omega^r(X_k^{(0)}), \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} c_{k,0}^{(0)} &= \prod_{i=k+1}^{n} (X_i^{(0)^+} - X_k^{(0)^-}) \sum_{j=1}^{k-1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{k-1} (X_k^{(0)^+} - X_i^{(0)^-}) \\ &\quad - \prod_{i=1}^{k-1} (X_k^{(0)^-} - X_i^{(0)^+}) \sum_{j=k+1}^{n} \prod_{\substack{i=k+1 \\ i \ne j}}^{n} (X_i^{(0)^-} - X_k^{(0)^+}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{k,1}^{(0)} &= \prod_{i=k+1}^{n} (X_i^{(0)^+} - X_k^{(0)^-}) \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne l}}^{k-1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne j \\ i \ne l}}^{k-1} (X_k^{(0)^+} - X_i^{(0)^-}) \\ &\quad - \prod_{i=1}^{k-1} (X_k^{(0)^-} - X_i^{(0)^+}) \sum_{l=k+1}^{n} \sum_{\substack{j=k+1 \\ j \ne l}}^{n} \prod_{\substack{i=k+1 \\ i \ne j \\ i \ne l}}^{n} (X_i^{(0)^-} - X_k^{(0)^+}); \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$c_{k,r}^{(0)} = \begin{cases} \prod_{i=k+1}^{n} (X_i^{(0)^+} - X_k^{(0)^-}) - \prod_{i=1}^{k-1} (X_k^{(0)^-} - X_i^{(0)^+}), & \text{ако } n = 2k-1, \\ \prod_{i=k+1}^{n} (X_i^{(0)^+} - X_k^{(0)^-}), & \text{ако } n < 2k-1, \\ \prod_{i=1}^{k-1} (X_k^{(0)^+} - X_i^{(0)^-}), & \text{ако } n > 2k-1. \end{cases}$$

Да означим

$$L_k = |c_{k,0}^{(0)}| + |c_{k,1}^{(0)}|\omega(X_k^{(0)}) + \cdots + |c_{k,r}^{(0)}|\omega^r(X_k^{(0)}).$$

Очевидно $L_k > 0$ и не зависи от ν. Тогава от (41), (45) и (46) получаваме

$$\begin{aligned} \omega(X_k^{(\nu)}) &\le \frac{\max\{|\alpha_k^{(\nu)}|, |\beta_k^{(\nu)}|\} + \omega(D_k(X^{(\nu)^{-X_k^{(\nu)}}}; X_k^{(\nu)}))}{|P'(X^{(\nu)}; X_k^{(\nu)})|} \omega(X_k^{(\nu)}) \\ &\le \frac{\frac{1}{2}|P''(X^{(0)}; X_k^{(0)})| + L_k}{\rceil P'(X^{(0)}; X_k^{(0)}) \lceil} \omega^2(X_k^{(\nu)}), \end{aligned}$$

което означава, че $Q_R((43), x_k) \geq 2$ за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Теорема 2.55. Нека са изпълнени предположенията на Теорема 2.54. Тогава итерационната процедура

$$\begin{cases} X_k^{(\nu+1)} = X_k^{(\nu)} \;-^-\; p(x; X_k^{(\nu)}) \,/^-\, D_k(X^{(\nu)-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)}), \\ k = 1, 2, \ldots, n; \;\; \nu \geq 0 \end{cases} \tag{47}$$

произвежда редици от интервали $\{X_k^{(\nu)}\}_{\nu=0}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, със следните свойства:
(а) $X_k^{(\nu)} \supseteq X_k^{(\nu+1)}$, $\nu \geq 0$, $x_k \in X_k^{(\nu)}$ за всяко $\nu \geq 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$;
(б) $\lim_{\nu\to\infty} X_k^{(\nu)} = x_k$ и $Q_R((47), x_k) \geq 2$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Доказателство. (а). Нека $1 \leq k \leq n$. Съгласно предположенията на теоремата имаме

$$\begin{aligned} 0 &\in p(x; X_k^{(0)}) = [p(x; X_k^{(0)^-}) \vee p(x; X_k^{(0)^+})], \\ 0 &\notin D_k(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)}) = [d_k(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)^-}) \vee d_k(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)^+})]. \end{aligned}$$

За $D_k(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)}) > 0$ е в сила представянето

$$\begin{aligned} & p(x; X_k^{(0)}) /^- D_k(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)}) \\ &= \left[\frac{p(x; X_k^{(0)^-})}{d_k(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)^+})}, \frac{p(x; X_k^{(0)^+})}{d_k(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)^+})} \right] \\ &= \left[\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^-} - x_i) \prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^-} - x_i)}{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^+} - X_i^{(0)^-}) \prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^+} - X_i^{(0)^+})} (X_k^{(0)^-} - x_k), \right. \\ & \qquad \left. \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^+} - x_i) \prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^+} - x_i)}{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^+} - X_i^{(0)^-}) \prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^+} - X_i^{(0)^+})} (X_k^{(0)^+} - x_k) \right], \end{aligned}$$

а ако $D_k(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)}) < 0$, то

$$p(x; X_k^{(0)}) /^- D_k(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)}) = \left[\frac{p(x; X_k^{(0)^-})}{d_k(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)^-})}, \frac{p(x; X_k^{(0)^+})}{d_k(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)^-})} \right].$$

За определеност да предположим, че $P'(X^{(0)}; X_k^{(0)}) > 0$, а следователно и $D_k(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)}) > 0$. Случаят $P'(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)}) < 0$ се разглежда аналогично. Ще отбележим, че $D_k(X^{(0)-X_k^{(0)}}; X_k^{(0)}) > 0$ означава, че $n-k$ е четно число. Имаме

$$
\begin{aligned}
&\omega(p(x;X_k^{(0)})/^{-}D_k(X^{(0)-X_k^{(0)}};X_k^{(0)}))\\
&\quad= \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^+}-x_i)\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^+}-x_i)}{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^+}-X_i^{(0)^-})\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^+}-X_i^{(0)^+})}(X_k^{(0)^+}-x_k)\\
&\quad\quad- \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^-}-x_i)\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^-}-x_i)}{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^+}-X_i^{(0)^-})\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^+}-X_i^{(0)^+})}(X_k^{(0)^-}-x_k)\\
&\quad< \ (X_k^{(0)^+}-x_k)-(X_k^{(0)^-}-x_k)=\omega(X_k^{(0)}),
\end{aligned}
\tag{48}
$$

тъй като са изпълнени неравенствата

$$
\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^+}-x_i)\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^+}-x_i)}{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^+}-X_i^{(0)^-})\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^+}-X_i^{(0)^+})} < 1; \tag{49}
$$

$$
\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^-}-x_i)\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^-}-x_i)}{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^+}-X_i^{(0)^-})\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^+}-X_i^{(0)^+})} < 1. \tag{50}
$$

Първото неравенство (49) е очевидно. Ще докажем (50). Имаме

$$
\begin{aligned}
&\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^-}-x_i)\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^-}-x_i)}{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^+}-X_i^{(0)^-})\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^+}-X_i^{(0)^+})}\\
&\quad= \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^-}-x_i)\prod_{i=k+1}^{n}(x_i-X_k^{(0)^-})}{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^-}-X_i^{(0)^-}+\omega(X_k^{(0)}))\prod_{i=k+1}^{n}(X_i^{(0)^+}-X_k^{(0)^-}+\omega(X_k^{(0)}))}\\
&\quad\le \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^-}-x_i)\prod_{i=k+1}^{n}(x_i-X_k^{(0)^-})}{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^-}-X_i^{(0)^-})\prod_{i=k+1}^{n}(X_i^{(0)^+}-X_k^{(0)^-})} < 1.
\end{aligned}
$$

Тогава от (47) за $\nu=0$ получаваме

$$
\begin{aligned}
X_k^{(1)^-} &= X_k^{(0)^-}-p(x;X_k^{(0)^-})/d_k(X^{(0)-X_k^{(0)}};X_k^{(0)^+}),\\
X_k^{(1)^+} &= X_k^{(0)^+}-p(x;X_k^{(0)^+})/d_k(X^{(0)-X_k^{(0)}};X_k^{(0)^+}).
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Тъй като $p(x;X_k^{(0)^-})\le 0\le p(x;X_k^{(0)^+})$, от горните равенства се вижда, че $X_k^{(1)^-}\le X_k^{(0)^-}$ и $X_k^{(1)^+}\ge X_k^{(0)^+}$, следователно $X_k^{(1)}\subseteq X_k^{(0)}$. По-нататък от

(51) получаваме

$$X_k^{(1)^-} - x_k = X_k^{(0)^-} - x_k - p(x; X_k^{(0)^-})/d_k(X^{(0)^- X_k^{(0)}}; X_k^{(0)^+})$$
$$= (X_k^{(1)^-} - x_k)\left(1 - \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^-} - x_i)\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^-} - x_i)}{\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(0)^+} - X_i^{(0)^-})\prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(0)^+} - X_i^{(0)^+})}\right) \le 0,$$

следователно $X_k^{(1)^-} - x_k \le 0$; по подобен начин се вижда, че $X_k^{(1)^-} - x_k \ge 0$, т. е. $x_k \in X_k^{(1)}$. Тъй като (49) и (50) са в сила за произволно $\nu > 0$, по-нататък по индукция се доказва, че $X_k^{(\nu)} \supseteq X_k^{(\nu+1)}$ и $x_k \in X_k^{(\nu)}$ за всяко $\nu \ge 1$.

(б). Антитонните по включване редици $\{X_k^{(\nu)}\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, са точково сходящи. Това следва от факта, че (49) и (50) са в сила за произволно $\nu > 0$. Тогава съществуват константи γ_1, γ_2 $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$, така че

$$\begin{aligned} \omega(X_k^{(\nu+1)}) &= \omega(X_k^{(\nu)}) - \frac{p(x; X_k^{(\nu)^+}) - p(x; X_k^{(\nu)^-})}{d_k(X^{(\nu)^- X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)^+})} \\ &\le \gamma_1(X_k^{(\nu)^+} - x_k) + \gamma_2(x_k - X_k^{(\nu)^-}) \\ &\le \max\{\gamma_1, \gamma_2\}\omega(X_k^{(\nu)}). \end{aligned} \tag{52}$$

По-нататък от (52) получаваме за $\xi_k^{(\nu)} \in (X_k^{(\nu)^-}, X_k^{(\nu)^+})$

$$\begin{aligned} \omega(X_k^{(\nu+1)}) &= \left(1 - \frac{p'(x; \xi_k^{(\nu)})}{d_k(X^{(\nu)^- X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)^+})}\right)\omega(X_k^{(\nu)}) \\ &\le \frac{d_k(X^{(\nu)^- X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)^+}) - p'(x; \xi_k^{(\nu)})}{d_k(X^{(\nu)^- X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)^+})}\omega(X_k^{(\nu)}). \end{aligned} \tag{53}$$

Тъй като $p'(x; \xi_k^{(\nu)})$, $d_k(X^{(\nu)^- X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)^+}) \in P'(X^{(\nu)}; X_k^{(\nu)})$, от (53) имаме

$$\omega(X_k^{(\nu+1)}) \le \frac{\omega(P'(X^{(\nu)}; X_k^{(\nu)}))}{]P'(X^{(0)}; X_k^{(0)})[}\omega(X_k^{(\nu)}).$$

По-нататък доказателството е същото както в Теорема 2.54. □

Забележка 2.56. Скоростта на сходимост може да бъде подобрена, ако пресметнатите вече интервали за нулите на полинома се използуват веднага при следващите изчисления. Да означим

$$X^{(\nu+1,\nu)^-X_k^{(\nu)}} = (X_1^{(\nu+1)^-X_k^{(\nu)}}, \ldots, X_{k-1}^{(\nu+1)^-X_k^{(\nu)}}, X_{k+1}^{(\nu)\ -X_k^{(\nu)}}, \ldots, X_n^{(\nu)^-X_k^{(\nu)}}),$$

$$\begin{aligned} D_k(X^{(\nu+1,\nu)^-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)}) \ = \ & \Bigg[\prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(\nu)+} - X_i^{(\nu+1)^-}) \prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(\nu)+} - X_i^{(\nu)+}) \\ & \prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu+1)^-}) \prod_{i=k+1}^{n}(X_k^{(\nu)^-} - X_i^{(\nu)+})\Bigg]. \end{aligned}$$

получаваме следната итерационна процедура

$$\begin{cases} X_k^{(\nu+1)} = X_k^{(\nu)} \ -^- \ p(x; X_k^{(\nu)}) \ /^- \ D_k(X^{(\nu+1,\nu)^-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)}), \\ k = 1, 2, \ldots, n; \ \ \nu \geq 0. \end{cases}$$

От дефиницията на операцията $/^-$ следва, че итерациите (47) могат да се запишат във вида

$$\begin{cases} X_k^{(\nu+1)} = X_k^{(\nu)} -^- p(x; X_k^{(\nu)}) \ / \ D_k^{-0}(X^{(\nu)^-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)}), \\ k = 1, 2, \ldots, n; \ \ \nu \geq 0. \end{cases} \tag{54}$$

Лесно се вижда, че

$$\begin{aligned} & D_k^{-0}(X^{(\nu)^-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)}) = (-1)^{n-k}|D_k(X^{(\nu)^-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)})| \\ & \quad = \ (-1)^{n-k}\max\{|d_k(X^{(\nu)^-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)^-})|, |d_k(X^{(\nu)^-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)^+})|\}. \end{aligned}$$

Нека $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots, X_n^{(0)}$ са машинни интервали. Да означим с $P^\diamond(x; X_k^{(\nu)^-})$ и $P^\diamond(x; X_k^{(\nu)^+})$ пресметнатите машинни интервали за стойностите на полинома съответно в точките $X_k^{(\nu)^-}$ и $X_k^{(\nu)^+}$, а $P^{\bigcirc}(x; X_k^{(\nu)}) = P^\diamond(x; X_k^{(\nu)^-}) \sqcap P^\diamond(x; X_k^{(\nu)^+})$; нека $D_k{}^\diamond(X^{(\nu)^-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)})$ е машинният интервал, съдържащ $D_k(X^{(\nu)^-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)})$. Използувайки критериите (I)–(III) за спиране (прекъсване) на итерациите, на итерационната схема (47) съпоставяме следната процедура, формулирана в термините на компютърна аритметика:

$$\left\{\begin{array}{l}\textbf{repeat}\\ \quad X_k^{(\nu+1)} = X_k^{(\nu)} \langle -^- \rangle P^{\bigcirc}(x; X_k^{(\nu)})\,(/^-)\, D_k{}^{\diamond}\,(X^{(\nu)-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)}),\\ \quad k = 1, 2, \ldots, n;\ \ \nu = 0, 1, \ldots\\ \textbf{until } X_k^{(\nu+1)} \not\subseteq X_k^{(\nu)} \textbf{ or } P^{\bigcirc}(x; X_k^{(\nu)}) = \emptyset \textbf{ or } 0 \notin P^{\bigcirc}(x; X_k^{(\nu)}).\end{array}\right. \tag{55}$$

Да означим

$$D_k{}^{\diamond}\,(X^{(\nu)-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)}) = [(D_k{}^{\diamond}\,(X^{(\nu)-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)}))^{-0} \vee (D_k{}^{\diamond}\,(X^{(\nu)-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)}))^{+0}]$$

и да запишем в явен вид машинното число $(D_k{}^{\diamond}\,(X^{(\nu)-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)}))^{-0}$. Означаваме

$$\begin{aligned}\Delta_k^{(\nu)-} &= (X_k^{(\nu)-} \triangle X_1^{(\nu)-}) ⩓ (X_k^{(\nu)-} \triangle X_2^{(\nu)-}) ⩓ \ldots ⩓ (X_k^{(\nu)-} \triangle X_{k-1}^{(\nu)\,-})\\ &⩓\ (X_{k+1}^{(\nu)\,+} \triangle X_k^{(\nu)-}) ⩓ (X_{k+2}^{(\nu)\,+} \triangle X_k^{(\nu)-}) ⩓ \ldots ⩓ (X_n^{(\nu)+} \triangle X_k^{(\nu)-});\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}\Delta_k^{(\nu)+} &= (X_k^{(\nu)+} \triangle X_1^{(\nu)-}) ⩓ (X_k^{(\nu)+} \triangle X_2^{(\nu)-}) ⩓ \ldots ⩓ (X_k^{(\nu)+} \triangle X_{k-1}^{(\nu)\,-})\\ &⩓\ (X_{k+1}^{(\nu)\,+} \triangle X_k^{(\nu)+}) ⩓ (X_{k+2}^{(\nu)\,+} \triangle X_k^{(\nu)+}) ⩓ \ldots ⩓ (X_n^{(\nu)+} \triangle X_k^{(\nu)+}).\end{aligned} \tag{57}$$

Тогава

$$(D_k{}^{\diamond}\,(X^{(\nu)-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)}))^{-0} = \begin{cases}(-1)^{n-k}\Delta_k^{(\nu)+}, & \text{ако } (-1)^{n-k}(\Delta_k^{(\nu)+} - \Delta_k^{(\nu)-}) > 0;\\ (-1)^{n-k}\Delta_k^{(\nu)-}, & \text{ако } (-1)^{n-k}(\Delta_k^{(\nu)+} - \Delta_k^{(\nu)-}) < 0.\end{cases}$$

При пресмятането на $(D_k{}^{\diamond}\,(X^{(\nu)-X_k^{(\nu)}}; X_k^{(\nu)}))^{-0}$ не е необходимо да сравняваме $\Delta_k^{(\nu)-}$ и $\Delta_k^{(\nu)+}$ за всяко $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. Достатъчно е да направим сравнението само за $\nu = 0$, тъй като връзката между двете величини остава една и съща при $\nu > 0$.

По-долу ще представим основните стъпки на алгоритъм с верификация на резултата при начални интервали $X_1, X_2, \ldots, X_n$. С Δ_k^- и Δ_k^+ са означени величините, пресметнати съгласно (56) и (57), като е изпуснат горния индекс ν. В алгоритъма е включен критерий за несъществуване на нула на полинома в даден начален интервал, а именно

$$0 \notin P^{\diamond}\,(x; X_k) \implies x_k \notin X_k.$$

Алгоритъм с верификация на резултата 2.7

(0) Input: initial intervals $X_1, X_2, \ldots, X_n$;
(1) **for** $k := 1$ **to** n **do** $s_k := +$;
(2) $k := 1$;
repeat
  compute $P^{\diamond}(x; X_k^-)$, $P^{\diamond}(x; X_k^+)$,
  $P^{\diamond}(x; X_k) = P^{\diamond}(x; X_k^-) \vee P^{\diamond}(x; X_k^+)$;
  if $0 \notin P^{\diamond}(x; X_k)$ **then**
    print X_k, print Message 1 and stop
  else
    compute $P^{\bigcirc}(x; X_k)$;
    if $0 \notin P^{\bigcirc}(x; X_k)$ **or** $P^{\bigcirc}(x; X_k) = \emptyset$ **then** $Y_k := X_k$
    else compute Δ_k^-, Δ_k^+;
      if $(-1)^{n-k}(\Delta_k^+ - \Delta_k^-) < 0$ **then** $s_k := -$; $\Delta_k := \Delta_k^-$
      else $\Delta_k := \Delta_k^+$;
      $Y_k := X_k \langle -^- \rangle P^{\bigcirc}(x; X_k)(/^-)[\Delta_k, \Delta_k]$;
  end;
  $k := k + 1$;
until $k > n$;
(3) **repeat**
  $X := Y$; $k := 1$;
  repeat
    compute $P^{\bigcirc}(x; X_k)$;
    if $0 \in P^{\bigcirc}(x; X_k)$ **then**
      compute Δ_k;
      $Y_k := X_k \langle -^- \rangle P^{\bigcirc}(x; X_k)(/^-)[\Delta_k, \Delta_k]$;
    else $Y_k := X_k$;
    $k := k + 1$;
  until $k > n$;
until $Y \not\subseteq X$.

Message 1 = 'The polynomial has no zero.'

Итерационната процедура (47) може да се обобщи, като отпадне ограничението началните интервали за нулите да са непресичащи се.

Да означим

$$
\begin{aligned}
d_k(X^{(\nu)}; X_k^{(\nu)+}) &= \prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(\nu)+} - X_i^{(\nu)-}) \prod_{i=k+1}^{n} (X_k^{(\nu)+} - X_i^{(\nu)+}),\\
d_k(X^{(\nu)}; X_k^{(\nu)-}) &= \prod_{i=1}^{k-1}(X_k^{(\nu)-} - X_i^{(\nu)-}) \prod_{i=k+1}^{n} (X_k^{(\nu)-} - X_i^{(\nu)+}),\\
D_k(X^{(\nu)}; X_k^{(\nu)}) &= d_k(X^{(\nu)}; X_k^{(\nu)+}) \vee d_k(X^{(\nu)}; X_k^{(\nu)-}).
\end{aligned}
$$

Теорема 2.57. Нека $p(x;t)$ е полином с реални коефициенти от степен n с n на брой реални прости нули $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Нека са дадени интервали $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots, X_n^{(0)}, X_k^{(0)} = [X_k^{(0)-}, X_k^{(0)+}]$, такива че $X_1^{(0)} \preceq X_2^{(0)} \preceq \ldots \preceq X_n^{(0)}$. Тогава итерационната процедура

$$
\left\{
\begin{array}{l}
X_k^{(\nu+1)-} = X_k^{(\nu)-} + |p(x; X_k^{(\nu)-})|/|D_k(X^{(\nu)}; X_k^{(\nu)})| \\
X_k^{(\nu+1)+} = X_k^{(\nu)+} - |p(x; X_k^{(\nu)+})|/|D_k(X^{(\nu)}; X_k^{(\nu)})| \\
k = 1, 2, \ldots, n; \nu \geq 0
\end{array}
\right. \tag{58}
$$

произвежда антитонни по включване редици от интервали $\{X_k^{(\nu)}\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и са в сила следните твърдения:
(а) Интервалът $X_k^{(0)}$, $1 \leq k \leq n$, не съдържа нула на полинома точно тогава, когато съществува индекс $\nu_0 \geq 0$, така че е изпълнено $X_k^{(0)} \supseteq X_k^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq X_k^{(\nu_0)}$ и $X_k^{(\nu_0)-} \leq X_k^{(\nu_0)+}$, но $X_k^{(\nu_0+1)-} > X_k^{(\nu_0+1)+}$.
(б) Ако $X_k^{(0)} = [X_k^{(0)-}, X_k^{(0)+}]$ съдържа точно една нула x_k, то (58) произвежда безкрайна редица от интервали $\{X_k^{(\nu)}\}$, $x_k \in X_k^{(\nu)}$ за всяко $\nu > 0$ и $\lim_{\nu\to\infty} X_k^{(\nu)} = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
(в) Ако (58) произвежда безкрайна редица от интервали $\{X_k^{(\nu)}\}$, то полиномът има нула $x_k \in X_k^{(0)}$; освен това $x_k \in X_k^{(\nu)}$ за всяко $\nu > 0$ и $\lim_{\nu\to\infty} X_k^{(\nu)} = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Доказателство. Нека $1 \leq k \leq n$. От (58) непосредствено се вижда, че $X_k^{(0)} \supseteq X_k^{(1)} \supseteq X_k^{(2)} \supseteq \cdots$, т. е. $\{X_k^{(\nu)}\}$ е антитонна по включване (крайна или безкрайна) редица.

(б). Нека $x_k \in X_k^{(0)}$. От (58) при $\nu = 0$ получаваме

$$
X_k^{(1)-} = X_k^{(0)-} + \frac{|p(x; X_k^{(0)-})|}{|D_k(X^{(0)}; X_k^{(0)})|}
$$

$$
\begin{aligned}
&= X_k^{(0)^-} + \frac{|\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (X_k^{(0)^-} - x_i)|}{|D_k(X^{(0)}; X_k^{(0)})|}(x_k - X_k^{(0)^-}) \\
&< x_k.
\end{aligned}
$$

Последното неравенство следва от факта, че

$$
|D_k(X^{(0)}; X_k^{(0)})| = \max\{|d_k(X^{(0)}; X_k^{(0)^-}|, |d_k(X^{(0)}; X_k^{(0)^+})|\}
$$

и от неравенства (49) и (50). Аналогично се доказва, че $X_k^{(1)^+} > x_k$, следователно $x_k \in X_k^{(1)} \subseteq X_k^{(0)}$. По-нататък по индукция се доказва, че $x_k \in X_k^{(\nu+1)} \subseteq X_k^{(\nu)}$ за $\nu > 0$. Съгласно Твърдение 2.1 редицата $\{X_k^{(\nu)}\}$ е сходяща; нека $\lim_{\nu\to\infty} X_k^{(\nu)} = X_k$. Чрез граничен преход в (58) получаваме за $X = (X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_n)$

$$
\begin{aligned}
X_k{}^- &= X_k{}^- + |p(x; X_k{}^-)|/|D_k(X; X_k)| \\
X_k{}^+ &= X_k{}^+ - |p(x; X_k{}^+)|/|D_k(X; X_k)|,
\end{aligned}
\tag{59}
$$

следователно $p(x; X_k{}^-) = p(x; X_k{}^+) = 0$, т. е. $x_k = X_k$.

(в). Нека $X_k^{(\nu+1)} \subseteq X_k^{(\nu)}$ за всяко $\nu \geq 0$. Тогава редицата $\{X_k^{(\nu)}\}$ е сходяща; нека $\lim_{\nu\to\infty} X_k^{(\nu)} = X_k$, $X_k \subseteq X_k^{(\nu)}$ за $\nu \geq 0$. От (59) получаваме $p(x; X_k{}^-) = p(x; X_k{}^+) = 0$, т. е. съществува нула на полинома $x_k = X_k^- = X_k^+$ и $x_k \in X_k^{(\nu)}$ за всяко $\nu \geq 0$. По-нататък твърдението следва от (б).

(а). Да предположим, че съществува индекс ν_0, такъв че $X_k^{(\nu_0)^-} \leq X_k^{(\nu_0)^+}$, но $X_k^{(\nu_0+1)^-} > X_k^{(\nu_0+1)^+}$. От (58) за $\nu = \nu_o$ получаваме

$$
\begin{aligned}
0 &< X_k^{(\nu_0+1)^-} - X_k^{(\nu_0+1)^+} \\
&= -\omega(X_k^{(\nu_0)}) + (|p(x; X_k^{(\nu_0)^-})| + |p(x; X_k^{(\nu_0)^+})|)/|D_k(X^{(\nu_0)}; X_k^{(\nu_0)})|,
\end{aligned}
$$

или

$$
\omega(X_k^{(\nu_0)}) < (|p(x; X_k^{(\nu_0)^-})| + |p(x; X_k^{(\nu_0)^+})|)/|D_k(X^{(\nu_0)}; X_k^{(\nu_0)})|.
$$

Да допуснем, че съществува нула на полинома $x_k \in X_k^{(\nu_0)} \subseteq X_k^{(0)}$. Имаме

$$
\begin{aligned}
\omega(X_k^{(\nu_0)}) &< \frac{|\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (X_k^{(\nu_0)^-} - x_i)|}{|D_k(X^{(\nu_0)}; X_k^{(\nu_0)})|}(x_k - X_k^{(\nu_0)^-}) \\
&+ \frac{|\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (X_k^{(\nu_0)^+} - x_i)|}{|D_k(X^{(\nu_0)}; X_k^{(\nu_0)})|}(X_k^{(\nu_0)^+} - x_k) \leq \omega(X_k^{(\nu_0)}).
\end{aligned}
$$

Полученото противоречие доказва твърдението. Обратното твърдение се доказва чрез допускане на противното. $\square$

Нека $\Delta_k^{(\nu)^-}$ и $\Delta_k^{(\nu)^+}$ са дефинирани съгласно (56) и (57). Да означим $\Delta_k^{(\nu)} = \max\{\Delta_k^{(\nu)^-}, \Delta_k^{(\nu)^+}\}$. Нека за краткост

$$\begin{aligned} P^{\diamond}(x; X_k^{(\nu)^-}) &= [P^{+0}(x; X_k^{(\nu)^-}) \vee P^{-0}(x; X_k^{(\nu)^-})], \\ P^{\diamond}(x; X_k^{(\nu)^+}) &= [P^{+0}(x; X_k^{(\nu)^+}) \vee P^{-0}(x; X_k^{(\nu)^+})]. \end{aligned}$$

На итерационната процедура (58) съпоставяме следните итерации, записани в термините на компютърна аритметика:

$$\begin{cases} X_k^{(\nu+1)^-} = X_k^{(\nu)^-} \mathbin{\forall\!\!\!\!\!-} |P^{+0}(x; X_k^{(\nu)^-})| \mathbin{\nabla\!\!\!\!/} \Delta_k^{(\nu)} \\ X_k^{(\nu+1)^+} = X_k^{(\nu)^+} \mathbin{\triangle\!\!\!\!/} |P^{+0}(x; X_k^{(\nu)^+})| \mathbin{\nabla\!\!\!\!/} \Delta_k^{(\nu)} \\ k = 1, 2, \ldots, n; \nu = 0, 1, \ldots \ \textbf{until}\ X_k^{(\nu+1)^-} > X_k^{(\nu+1)^+} \ \textbf{or}\ X_k^{(\nu+1)} \not\subset X_k^{(\nu)}. \end{cases} \tag{60}$$

По-долу ще представим основните стъпки на алгоритъм с верификация на резултата при начални интервали $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. С Δ_k^- и Δ_k^+ са означени величините, пресметнати съгласно (56) и (57), като е изпуснат горният индекс ν.

Алгоритъм с верификация на резултата 2.8

(0) Input: initial intervals $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$;
(1) **repeat**
  for $k := 1$ **to** n **do** $X_k := Y_k$;
  $k := 1$;
  repeat
    compute $P^{\diamond}(x; X_k^-)$, $P^{\diamond}(x; X_k^+)$,
    compute Δ_k^-, Δ_k^+ and $\Delta_k = \max\{\Delta_k^-, \Delta_k^+\}$;
    if $0 \notin P^{\diamond}(x; X_k^-)$ **and** $0 \notin P^{\diamond}(x; X_k^+)$ **then**
      $Y_k^- := X_k^- \mathbin{\forall\!\!\!\!\!-} |P^{+0}(x; X_k^-)| \mathbin{\nabla\!\!\!\!/} \Delta_k$;
      $Y_k^+ := X_k^+ \mathbin{\triangle\!\!\!\!/} |P^{+0}(x; X_k^+)| \mathbin{\nabla\!\!\!\!/} \Delta_k$;
    if $0 \in P^{\diamond}(x; X_k^-)$ **and** $0 \notin P^{\diamond}(x; X_k^+)$ **then**
      $Y_k^- := X_k^-$;
      $Y_k^+ := X_k^+ \mathbin{\triangle\!\!\!\!/} |P^{+0}(x; X_k^+)| \mathbin{\nabla\!\!\!\!/} \Delta_k$;
    if $0 \notin P^{\diamond}(x; X_k^-)$ **and** $0 \in P^{\diamond}(x; X_k^+)$ **then**

$Y_k^- := X_k^- \triangledown |P^{+0}(x; X_k^-)| \triangledown \Delta_k;$
$Y_k^+ := X_k^+;$
if $Y_k^- > Y_k^+$ **then** print X_k, print Message 1 and stop;
$k := k+1;$
until $k > n$;
$\{Y := (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n),\ X := (X_1, X_2, \ldots, X_n)\}$
until $Y \not\subseteq X$.

Message 1 = 'The polynomial has no zero.'

Алгоритъм 2.8 е реализиран програмно на Pascal-SC.

Алгоритъмът може да бъде използуван за намиране на собствени стойности на реални симетрични матрици.

Пример 2.19 [25], [67]. Да се намерят собствените стойности на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристичният полином, получен от *Maple*, е

$$p(t) = det(A - tI) = t^5 - 30t^4 + 311t^3 - 1278t^2 + 1551t + 630.$$

От Теоремата на Гершгорин (вж. [105], стр. 97) получаваме следните начални интервали за нулите $x_1, x_2, \ldots, x_5$ на $p(t)$:

$$X_1^{(0)} = [-1, 1],\ X_2^{(0)} = [1, 5],\ X_3^{(0)} = [4, 8],\ X_4^{(0)} = [7, 11],\ X_5^{(0)} = [11, 13].$$

Ще отбележим, че началните интервали се пресичат. Получаваме следните резултати:

$$\begin{aligned}
X_1^{(7)} &= [-3.16875952617E-01, -3.16875952616E-01]; \\
X_2^{(6)} = X_2^{(7)} &= [2.98386369683E+00, 2.98386369684E+00]; \\
X_3^{(6)} = X_3^{(7)} &= [5.99999999999E+00, 6.00000000001E+00]; \\
X_4^{(6)} = X_4^{(7)} &= [9.01613630316E+00, 9.01613630317E+00]; \\
X_5^{(6)} = X_5^{(7)} &= [1.23168759526E+01, 1.23168759527E+01].
\end{aligned}$$

Пример 2.20 [25]. Да се намерят собствените стойности на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -15 \end{pmatrix}$$

Характеристичният полином, получен с помощта на *Maple*, е

$$p(t) = det(A - tI) = t^9 - 398t^7 + 45944t^5 - 1778055t^3 + 17863791t.$$

Отново от теоремата на Гершгорин получаваме следните начални интервали за нулите $x_1, x_2, \ldots, x_9$ на $p(t)$:

$$\begin{array}{lll} X_1^{(0)} = [-17, -13], & X_2^{(0)} = [-12, -8], & X_3^{(0)} = [-9, -5], \\ X_4^{(0)} = [-6, -2], & X_5^{(0)} = [-2, 2], & X_6^{(0)} = [2, 6], \\ X_7^{(0)} = [5, 9], & X_8^{(0)} = [8, 12], & X_9^{(0)} = [14, 16]. \end{array}$$

Ще отбележим, че началните интервали се пресичат.

Получаваме следните резултати:

$$\begin{array}{rcl} X_1^{(17)} = X_1^{(18)} & = & [-1.51970930088E+01, -1.51970930087E+01] \\ X_2^{(13)} = \ldots = X_2^{(18)} & = & [-1.01317451547E+01, -1.01317451546E+01] \\ X_3^{(11)} = \ldots = X_3^{(18)} & = & [-7.00192758093E+00, -7.00192758092E+00] \\ X_4^{(10)} = \ldots = X_4^{(18)} & = & [-3.92034620370E+00, -3.92034620369E+00] \\ X_5^{(18)} & = & [-3.00000000000E-88, 3.00000000000E-88] \\ X_6^{(10)} = \ldots = X_6^{(18)} & = & [3.92034620369E+00, 3.92034620370E+00] \\ X_7^{(11)} = \ldots = X_7^{(18)} & = & [7.00192758092E+00, 7.00192758093E+00] \\ X_8^{(13)} = \ldots = X_8^{(18)} & = & [1.01317451546E+01, 1.01317451547E+01] \\ X_9^{(13)} = \ldots = X_9^{(18)} & = & [1.51970930087E+01, 1.51970930088E+01]. \end{array}$$

Заключителни бележки. Интервалните итерационни методи (43) и (47) са изведени въз основа на някои свойства на производната на интервален полином. Лесно се вижда, че интервалът $D_k(X^{-X_k}; X_k)$ съвпада с обхвата на функцията, разгледана в Пример 1.2. В сравнение с метода (7) (вж. т. 2.1) предложеният Алгоритъм с верификация 2.7 е по-ефективен от гледна точка на изчисленията – както отбелязахме по-горе, не е необходимо на всяка итерационна стъпка $\nu \geq 0$ да пресмятаме и двете величини $\Delta_k^{(\nu)-}$ и $\Delta_k^{(\nu)+}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, както това се прави в (7). В Алгоритъм 2.7 и двете величини се пресмятат само за $\nu = 0$, сравняват се и на всяка следваща стъпка $\nu > 0$ се изчислява само едната от тях. Итерационната схема (8) (вж. т. 2.1) и (47) имат един и същи R-ред на сходимост; числените експерименти показват, че за намиране на нулите на полином (8) изискват по-малък брой итерации (вж. примери 2.19 и 2.20 и съответните примери в [25], Глава 8). За пръв път е формулиран итерационен метод за намиране на нули на полином в случай на пресичащи се начални интервали (Теорема 2.57).

ГЛАВА 3

ЧИСЛЕНИ АЛГОРИТМИ С ВЕРИФИКАЦИЯ НА РЕЗУЛТАТА ЗА СИСТЕМИ АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

3.1 Предварителни бележки

Да разгледаме системата линейни уравнения

$$\check{A}x = b \tag{1}$$

с реална квадратна $(n \times n)$-матрица $\check{A} = (a_{ij})$ и реален n-мерен вектор $b = (b_j)$. В много приложения елементите на матрицата $\check{A}$ и/или елементите на вектора b не са известни точно. Да предположим, че са известни интервали $A_{ij} \ni a_{ij}$, $B_j \ni b_j$. Образуваме матрица A с компоненти A_{ij} и вектор B с компоненти B_j. A ще наричаме интервална матрица (B е интервален вектор). Заместваме формално в (1) реалната матрица $\check{A}$ с A, а реалния вектор b с B и получаваме

$$Ax = B. \tag{2}$$

Дефиниция 3.1 [59]. Множеството $\Sigma(A, B) = \{x | \exists \check{A} \in A, \exists b \in B : \check{A}x = b\}$ се нарича множество от решения на интервалната линейна система (2).

В общия случай $\Sigma(A, B)$ не е интервален вектор. Много често $\Sigma(A, B)$ има сложна форма – може да не е изпъкнало, дори да не е ограничено (вж. [59], [101]), което го прави практически неизползваемо. За да гарантираме ограничеността на $\Sigma(A, B)$, искаме интервалната матрица A да бъде неособена, т. е. всяка реална матрица $\check{A} \in A$ да бъде неособена. В този случай известни теореми от линейната алгебра гарантират, че за всяко $\check{A} \in A$, $b \in B$ линейната система $\check{A}x = b$ има точно едно решение $\tilde{x}$. Тъй като компонентите на $\check{A}$ и b варират в компактни множества, а решението $\tilde{x}$ зависи непрекъснато от $\check{A}$ и b, то в този случай множеството от решения $\Sigma(A, B)$ е ограничено. Тогава съществува интервален вектор $[\Sigma(A, B)]$,

$$[\Sigma(A, B)] = [\inf \Sigma(A, B), \sup \Sigma(A, B)],$$

който се нарича обвивка на множеството от решения $\Sigma(A, B)$ [101]; очевидно $[\Sigma(A, B)]$ е най-малкият интервален вектор, съдържащ $\Sigma(A, B)$.

Да означим с $IR^{n\times n}$ множеството от всички квадратни $n \times n$ интервални матрици, а IR^n е множеството от n-мерните интервални вектори. Всяка интервална матрица $A = (A_{ij}) = ([A^-_{ij}, A^+_{ij}])$ може да се представи като матричен интервал $A = [A^-, A^+]$, където A^-, A^+ са реални матрици, $A^- = (A^-_{ij})$, $A^+ = (A^+_{ij})$. A^- и A^+ ще наричаме гранични матрици на A. Реалната матрица $\mu(A) = (\mu(A_{ij}))$ ще наричаме център на интервалната матрица A. Реалната матрица $\omega(A) = (\omega(A_{ij}))$ ще наричаме ширина на A. Дефинираме още реална матрица $|A| = (|A_{ij}|)$. Очевидно $\omega(A) \geq 0$, $|A| \geq 0$, като релацията $\geq$ е дефинирана покомпонентно. Стандартни (външни) интервално-аритметични операции $+, -, \times$ между интервални матрици се дефинират, като в обичайните правила всички реално-аритметични операции се заместват със стандартните (външните) интервално-аритметични операции (вж. напр. [25]).

Дефиниция 3.2 [101]. Нека $A \in IR^{n\times n}$ е неособена интервална матрица. Интервалната матрица $A^{-1} = [\inf\{\check{A}^{-1} : \check{A} \in A\}, \sup\{\check{A}^{-1} : \check{A} \in A\}]$ се нарича обратна интервална матрица на A.

Твърдение 3.3 [101]. Нека $[\Sigma(A, B)]$ е обвивка на множеството от решения на (2) за неособена интервална матрица A. Тогава $[\Sigma(A, B)] \subseteq A^{-1} \times B$.

Дефиниция 3.4 [101]. Интервалната матрица $A = (A_{ij}) \in IR^{n\times n}$ се нарича M-матрица, ако $A_{ij} \leq 0$ за всяко $i \neq j$ и съществува положителен вектор $u \in R^n$, така че $Au > 0$.

Ако $A \in IR^{n\times n}$ е M-матрица, то всяка реална матрица $\check{A} \in A$ е M-матрица.

Твърдение 3.5 [101]. Нека $A = (A_{ij}) \in IR^{n\times n}$ е интервална матрица, такава че $A_{ij} \leq 0$ за всяко $i \neq j$. Тогава са еквивалентни следните твърдения:
(а) A е M-матрица;
(б) $A^{-1} \geq 0$;
(в) $u \geq 0,\ Au \leq 0 \implies u = 0$.

Твърдение 3.6 [101]. (а) $A = [A^-, A^+] \in IR^{n\times n}$ е интервална M-матрица точно тогава, когато граничните матрици A^- и A^+ са M-матрици.

(б) Всяка интервална M-матрица $A = [A^-, A^+] \in IR^{n\times n}$ е неособена и $A^{-1} = [(A^+)^{-1}, (A^-)^{-1}]$.
(в) Ако $A = (A_{ij})$ е интервална M-матрица, то $A_{ii} > 0$ за всяко i.

Интервалната матрица A се нарича обратно положителна, ако A е неособена и $A^{-1} \geq 0$. Всяка M-матрица е обратно положителна. Ако в интервалната система (2) матрицата A е обратно положителна, то обвивката $[\Sigma(A, B)]$ на множеството от решения може да се получи чрез решаване най-много на $2n$ реални линейни системи.

Дефиниция 3.7 [101]. Нека $A = (A_{ij}) \in IR^{n\times n}$. Дефинираме реална матрица $\langle A\rangle = (\langle A\rangle_{ij})$, $\langle A\rangle_{ii} =]A_{ii}[$, $\langle A\rangle_{ij} = -|A_{ij}|$ за $i \neq j$. Ако $\langle A\rangle$ е M-матрица, то A се нарича H-матрица.

В частност всяка M-матрица е H-матрица. Може да се докаже [101], че A е H-матрица точно тогава, когато съществува вектор $u > 0$, такъв че $\langle A\rangle u > 0$; от това следва, че $0 \notin A_{ii}$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. В частност за $u = (1, 1, \ldots, 1)$ условието $\langle A\rangle u > 0$ може да се запише във вида

$$]A_{ii}[> \sum_{j\neq i} |A_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Интервална матрица A, удовлетворяваща (3), се нарича матрица със строго доминиращ главен диагонал. Ако в (3) строгото неравенство се замени с нестрого, A се нарича матрица с доминиращ главен диагонал. Всяка матрица със строго доминиращ главен е H-матрица. Всяка H-матрица е неособена [101].

На практика намирането на обвивката $[\Sigma(A, B)]$ не винаги е възможно или ако е възможно, то е много трудоемко. В много приложения е достатъчно намирането на интервален вектор X, съдържащ обвивката $[\Sigma(A, B)]$, т. е. $X \supseteq [\Sigma(A, B)]$. В някои случаи това включване може да бъде много грубо.

Дефиниция 3.8. Нека $A \in IR^{n\times n}$ е неособена и $B \in IR^n$. Интервалният вектор $[\Sigma(A, B)]$ ще наричаме оптимално решение на (2). Всеки интервален вектор $X \supseteq [\Sigma(A, B)]$ ще наричаме решение на (2).

В числения анализ са известни редица интервални методи – директни и итерационни – за решаване на линейни системи от вида (2). В резултат се получава интервален вектор X, който съдържа множеството от решения $\Sigma(A, B)$ на интервалната линейна система. Интервален метод на Гаус е представен и изследван напр. в [25], [29], [115], [116]. Интервален итерационен метод на Гаус-Зайдел е разгледан в [59]. Интервалнен метод на Краут за триъгълно разлагане на интервална матрица A и решаване на интервалната линейна система (2) чрез права и обратна субституция е разгледан в [101]. Докато в случая на реални матрици $\check{A}$ е достатъчно $\check{A}$ да е неособена, за да е осъществим методът на Гаус или Краут, то в случая на интервални матрици това не е така: матрицата A може да е неособена и въпреки това да няма триъгълно разлагане, тъй като на някоя стъпка може да се стигне до деление с интервал, съдържащ нула. Може да се докаже (вж. [101], стр. 158), че ако A е интервална H-матрица, то тя има триъгълна декомпозиция. За интервални H-матрици е осъществим и интервалният метод на Гаус без избор на главен елемент (вж. [25], Теорема 15.3). В случая на интервални M-матрици пресметнатият по метода на Гаус интервален вектор X съвпада с оптималното решение (вж. [101], стр. 159, Теорема на Барт–Нудинг–Бек). Но в общия случай векторът X може да бъде и много раздут. Дори за H-матрици, които не са скалирани M-матрици, включването $X \supseteq \Sigma(A, B)$ може да бъде много грубо.

Пример 3.1 [101]. Нека A е долна триъгълна матрица с компоненти $A_{ij} = [1, 1]$ за $i \geq j$, а $B = ([-\varepsilon, \varepsilon], 0, \ldots, 0)^T$, $\varepsilon > 0$. Тогава

$$\Sigma(A, B) = A^{-1} \times B = ([-\varepsilon, \varepsilon], [-\varepsilon, \varepsilon], 0, \ldots, 0)^T,$$

докато

$$X = ([-\varepsilon, \varepsilon], [-\varepsilon, \varepsilon], [-2\varepsilon, 2\varepsilon], \ldots, [-2^{n-2}\varepsilon, 2^{n-2}\varepsilon])^T.$$

В случая, когато интервалната матрица A не е със строго доминиращ главен диагонал, в [57], [60] е въведен т. нар. метод на преобуславяне: интервалната матрица A предварително се умножава с обратната реална матрица $(\mu(A))^{-1}$. Ако $(\mu(A))^{-1} \times A$ е неособена интервална матрица, то тя е H-матрица. При практическа реализация методът на преобуславянето изисква допълнителни изчисления.

В [120]–[122] са предложени алгоритми с верификация на резултата за линейни системи, в които най-общо идеята е като първа стъпка (наречена апроксимационна) да се намери приближение u за точното решение $x = \check{A}^{-1}b$ на реална система $\check{A}x = b$ за $\check{A} \in A$, $b \in B$, като се използват известните числени методи; на втора стъпка, наречена верификационна фаза, се пресмята симетричен интервален вектор $[-z, z]$, $z \in R^n$, $z > 0$, така че да е изпълнено $\Sigma(A,B) \subseteq u + [-z,z]$. Предложеният подход едновременно с намиране на решение $X \supseteq \Sigma(A,B)$ доказва и неособеност на интервалната матрица A.

Дефиниция 3.9. Нека $L = (l_{ij}) \in R^{n\times n}$ е неособена долна триъгълна матрица. За $b = (b_i) \in R^n$, $b \geq 0$, дефинираме вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$,

$$y_i = (b_i + \sum_{j=1}^{i-1} |l_{ij}|y_j)/|l_{ii}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

и казваме, че y е получен чрез права субституция от системата $\langle L\rangle y = b$; означаваме го с $y = \langle L\rangle^{-1}b$; $y \geq 0$. Аналогично се дефинира $y = \langle U\rangle^{-1}b$ за неособена горна триъгълна матрица $U \in R^{n\times n}$.

Теорема 3.10 [122]. Нека $A \in IR^{n\times n}$, $B \in IR^n$ и $b \in B$. Нека $L, U \in R^{n\times n}$ са неособени съответно долна и горна триъгълни матрици, а $u \in R^n$. Да означим $|A - LU| = \Delta$, $|B - Au| = \varrho$ с матрица $\Delta \geq 0$ и вектор $\varrho \geq 0$. Дефинираме

$$h = \langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}\varrho, \quad v = \langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}\Delta h. \tag{5}$$

Нека $h > v$ и $\delta > \max\{\frac{v_i}{h_i - v_i},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, $z = (1+\delta)h$. Тогава всяка матрица $\check{A} \in A$ е неособена и $\Sigma(A,B) \subseteq u + [-z,z]$.

В Теорема 3.10 няма ограничения за избора на матриците L, U и вектора u. Ако съществува индекс i, за който $h_i \leq v_i$, вероятно A съдържа особена числова матрица или близка до особена (с голямо число на обусловеност) или се появява ефектът на раздуването при права и обратна субституция, който зависи повече от размерността на матрицата, а не от обусловеността ѝ (вж. Пример 3.1).

При практическо прилагане на Теорема 3.10 се избира матрица $\check{A} \in A$. Да предположим, че $\check{A}$ е неособена. Прилагайки метода на Краут [56] за триъгълно разлагане, получаваме $\check{A} = LU$ с долна триъгълна матрица $L = (l_{ij})$, $l_{ij} = 0$ за $i > j$, $l_{ii} = 1$, и горна триъгълна матрица $U = (u_{ij})$, $u_{ij} = 0$ за $i < j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Векторът u се избира като решение на $\check{A}x = b$ за $b \in B$. Извършвайки декомпозицията в аритметика с плаваща точка, получаваме приближено разлагане $\check{A} \approx \tilde{L}\tilde{U}$, като при това може да се използува частичен избор на главен елемент. Чрез права/обратна субституция $\tilde{L}y = Pb$, $\tilde{U}u = y$ се пресмята приближеното решение u (P означава пермутационната матрица, т. е. единичната матрица, чиито редове са разместени в зависимост от първия индекс на избрания главен елемент; тогава $P\check{A} \approx \tilde{L}\tilde{U}$). Матрицата Δ и векторът ϱ не се пресмятат явно, а за тях се намират покомпонентни граници (оценки). За конкретно избрани $\check{A} \in A$ и $b \in B$ са в сила следните оценки:

$$\begin{aligned} |B - Au| &\leq \omega(B) + \omega(A)|u| + |b - \check{A}u|, && (6) \\ |A - \tilde{L}\tilde{U}| &\leq \omega(A) + |\check{A} - \tilde{L}\tilde{U}|. && (7) \end{aligned}$$

Оценките (6), (7) остават в сила за точкови матрици A при $\omega(A) = 0$. Границите за $|\check{A} - \tilde{L}\tilde{U}|$ и $|b - \check{A}u|$ зависят от конкретната реализация (в аритметика с плаваща точка) на LU-разлагането и от пресмятането на приближеното решение u.

В [120], [121] описаният по-горе подход е използван за решаване на системи от вида $\check{A}x = B$ с лентова M-матрица $\check{A}$. Приближеното решение u е пресметнато посредством LDL^T-декомпозиция на $\check{A}$. В случая на симетрична и положително-определена матрица $\check{A}$ е използвано LL^T-разлагане (по Холески) на $\check{A}$. В последния случай методът на Холески е модифициран за използване на точно скаларно произведение и са получени съотвени оценки за $|\check{A} - \tilde{L}\tilde{L}^T|$ и $|b - \check{A}u|$.

В [49]–[52] разглежданията също са концентрирани върху числови (точкови) матрици и интервална дясна част. Новата идея в тези работи е използването на съществуващи и добре известни програмни библиотеки като например LINPACK [47] за осъществяване на апроксимационната фаза, които след това са допълнени с нови програми, реализиращи верификационната фаза. Използвани са следните оценки:

$$\begin{aligned} |\check{A} - \tilde{L}\tilde{U}| &\leq \frac{\varepsilon}{1 - n\varepsilon}((|\tilde{L}|D - I)|\tilde{U}| + (|\tilde{L}| - I)diag(|\tilde{U}|)), && (8) \\ |b - \check{A}u| &\leq \frac{\varepsilon}{1 - n\varepsilon}(\gamma|\tilde{L}||\tilde{U}| + (|\tilde{L}| - I)diag(|\tilde{U}|))|u|. && (9) \end{aligned}$$

Множителят γ е дефиниран чрез равенството

$$\gamma = \begin{cases} 3n + 1, & \text{ако } n\varepsilon < 1, \\ 2n + 2, & \text{ако } n^2\varepsilon < 1; \end{cases}$$

ε е относителната (машинна) точност 1 ulp , I е единичната матрица, $diag(|\tilde{U}|)$ е диагоналната част на матрицата $|\tilde{U}|$, а $D = diag(1, 2, \ldots, n)$ е диагонална матрица, чиято i-та компонента е равна на i. Границите (8), (9) са валидни, ако $n\varepsilon < 1$ и не са настъпили изключения по време на пресмятанията на $\tilde{L}$, $\tilde{U}$ и u.

Оценките (8), (9) са получени чрез класическия анализ на грешката от закръгляване в зависимост от конкретната реализация в LINPACK на декомпозицията и пресмятането на приближено решение. В литературата могат да се намерят и други покомпонентни граници за $|\check{A}-\tilde{L}\tilde{U}|$ и $|b-\check{A}u|$ (вж. напр. [132], стр. 171):

$$|P\check{A}-\tilde{L}\tilde{U}| \leq \frac{\varepsilon}{1-n\varepsilon}(|\tilde{L}|D-I)|\tilde{U}|; \tag{10}$$

$$|Pb-P\check{A}u| \leq \frac{2(n+1)\varepsilon}{1-n\varepsilon}|\tilde{L}||\tilde{U}||u|. \tag{11}$$

Оценката (10) е в сила, ако $n\varepsilon<1$, а (11) – при $n\varepsilon \leq \frac{1}{2}$.

В [49] е предложена още една оценка за $|b-\check{A}u|$:

$$|b-\check{A}u| \leq |b-\tilde{L}\tilde{U}u| + |\check{A}-\tilde{L}\tilde{U}||u|. \tag{12}$$

В дясната страна на (12) векторът $|b-\tilde{L}\tilde{U}u|$ се пресмята директно, а за $|\check{A}-\tilde{L}\tilde{U}|$ се използува (8). Разликата между оценките (12) и (9) е в точността и времето за пресмятането им: (9) е по-малко точна, но по-бърза за изчисляване от оценката (12) [49]. Всички величини в горните оценки са известни или получени в процеса на изчисленията и следователно тяхното пресмятане не изисква допълнителни изчислителни ресурси.

При програмна реализация на декомпозицията $\check{A} \approx \tilde{L}\tilde{U}$ обикновено триъгълните матрици $\tilde{L}$ и $\tilde{U}$ се записват в $\check{A}$ от съображения за пестене на памет. Когато се решава системата $\check{A}x=B$ с точкова матрица $\check{A}$ и интервална дясна страна B не е необходимо да се съхранява втора матрица в паметта, тъй като оценките (6) и (7) са в сила при $\omega(A)=0$. Поради интервалния вектор в дясната страна освен $b \in B$ ни трябва и векторът $\omega(B)$. За да се избегне съхраняването на втори точков (числов) вектор, в [49] е предложен следния подход: за $b \in B$ определяме число (в плаваща точка) $m_B \geq 0$, така че да е изпълнено

$$\omega(B) \leq m_B|b|. \tag{13}$$

В случая на интервална матрица (т. е. $\omega(A) \neq 0$) в [49] е предложен (но не е използуван) същия подход: за $\check{A} \in A$ намираме число $m_A \geq 0$, така че $\omega(A) \leq m_A|\check{A}|$. Това обаче не спестява съхраняването на втора матрица в паметта. Този подход има съществен недостатък, когато интервалната матрица A съдържа както точкови, така и интервални компоненти с различна ширина; тогава оценката $\omega(A) \leq m_A|\check{A}|$ е твърде груба.

Нека $f : D \to R^n$, $D \subseteq R^n$ има непрекъснати частни производни в D, $X \subseteq D$ е интервален вектор и $x \in X$ е фиксирана точка. Тогава

$$f(y) - f(x) = J(y)(y - x), \; y \in X, \tag{14}$$

където матрицата $J(y)$ е дефинирана посредством

$$J(y) = \int_0^1 f'(x + t(y - x))dt. \tag{15}$$

Ще отбележим, че $J(y)$ е непрекъснато изображение на y за фиксирано x [24], [26], [103]. Тъй като $t \in [0, 1]$, то $x + t(y - x) \in X$ и следователно

$$J(y) \in F'(X),$$

където $F'(X)$ е интервално разширение на якобиана (матрицата на Якоби) на f. За фиксирано $x \in X$ да разгледаме интервалната линейна система

$$F'(X)z = f(x) \tag{16}$$

и да означим със

$$\Sigma(F'(X), f(x)) = \{z \in R^n | \exists \check{A} \in F'(X) : \check{A}z = f(x)\}$$

множеството от решения на (16). Тогава задачата за решаване на нелинейната система $f(x) = 0$ се свежда до решаване на интервалната линейна система (16). В зависимост от използуваните методи за решаване на (16) са получени и различни методи за решаване на нелинейни системи [24]–[26], [59], [98], [99], [101].

3.2 Числен алгоритъм с верификация на резултата за линейни системи, реализиран в *Maple*

Да разгледаме интервалната линейна система (2) с матрица $A = (A_{ij}) \in IR^{n \times n}$ и вектор $B = (B_j) \in IR^n$. Въз основа на Теорема 3.10 ще формулираме числен алгоритъм с верификация на резултата за решаване на (2), т. е. за намиране на интервален вектор $Z \supseteq \Sigma(A, B)$.

Нека $\check{A} = \mu(A) \in A$ и $b = \mu(B) \in B$. В аритметика с плаваща точка пресмятаме триъгълната декомпозиция $P\check{A} \approx \tilde{L}\tilde{U}$ по метода на Краут с частичен избор на главен елемент по редове (P е пермутационната матрица); нека u е приближено решение (пресметнато в аритметика с плаваща точка) на числовата система $\check{A}x = b$, т. е. $u \approx \check{A}^{-1}b$, пресметнато чрез права/обратна субституция $\tilde{L}y = Pb$, $\tilde{U}u = y$. При програмната реализация в *Maple* пресмятанията са осъществени така, че да са в сила покомпонентните оценки (10) и (11). Тогава от (6), (7), (12), (13) и (10), (11) получаваме

$$|PA - \tilde{L}\tilde{U}| \;\leq\; P\omega(A) + \frac{\varepsilon}{1-n\varepsilon}(|\tilde{L}|D - I)|\tilde{U}| =: \Delta;$$

$$|PB - PAu| \;\leq\; \check{m}_B|PB| + P\omega(A)|u| + \frac{2(n+1)\varepsilon}{1-n\varepsilon}|\tilde{L}||\tilde{U}||u| =: \varrho_1.$$

$$\begin{aligned} |PB - PAu| &\leq P\omega(A) + |PA - \tilde{L}\tilde{U}||u||Pb - \tilde{L}\tilde{U}u| \\ &\leq m_B|PB| + (P\omega(A) + \frac{\varepsilon}{1-n\varepsilon}(|\tilde{L}|D - I)|\tilde{U}|)|u| + |Pb - \tilde{L}\tilde{U}u| =: \varrho \end{aligned}$$

Да означим с $\Delta^{\triangle}$, $\varrho_1^{\triangle}$ и $\varrho_2^{\triangle}$ съответните на Δ, ϱ_1 и ϱ_2 матрица и вектори, пресметнати с подходящи насочени закръглявания, така че да са в сила неравенствата

$$\Delta \leq \Delta^{\triangle}, \quad \varrho_1 \leq \varrho_1^{\triangle}, \quad \varrho_2 \leq \varrho_2^{\triangle}.$$

Нека векторите h и v са дефинирани съгласно (5):

$$h \;=\; \langle\tilde{U}\rangle^{-1}\langle\tilde{L}\rangle^{-1}\varrho, \quad \varrho \in \{\varrho_1, \varrho_2\} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} v &= \langle\tilde{U}\rangle^{-1}\langle\tilde{L}\rangle^{-1}\Delta h \\ &= \langle\tilde{U}\rangle^{-1}\langle\tilde{L}\rangle^{-1}(P\omega(A)h + \frac{\varepsilon}{1-n\varepsilon}(|\tilde{L}|D - I)|\tilde{U}|h). \end{aligned} \tag{18}$$

Да означим с $h^{\triangle} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ и $v^{\triangle} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ съответните на h и v машинни вектори, пресметнати с подходящи насочени закръглявания от (17) и (18), така че да са в сила неравенствата $h \leq h^{\triangle}$, $v \leq v^{\triangle}$; при това в (17) вместо $\varrho \in \{\varrho_1, \varrho_2\}$ стои $\varrho \in \{\varrho_1^{\triangle}, \varrho_2^{\triangle}\}$, а в (18) вместо h е използвано $h^{\triangle}$.

Алгоритъм с верификация на резултата 3.1

(0) Input: interval matrix A, interval vector B;

(1) compute (in floating-point arithmetic) $\tilde{A} \approx \mu(A)$, $\tilde{b} \approx \mu(B)$;
(2) compute (in floating-point arithmetic) the factorization $P\tilde{A} \approx \tilde{L}\tilde{U}$;
(3) compute an approximate solution u by $\tilde{L}y = P\tilde{b}, \tilde{U}u = y$.
(4) compute the bound $\varrho_1^{\triangle}$ or $\varrho_2^{\triangle}$;
(5) compute the vectors $h^{\triangle}$, $v^{\triangle}$;
if $h^{\triangle} > v^{\triangle}$ **then** goto (6)
else print a failure message and stop;
{ the algorithm can not compute an inclusion for the solution set }
(6) $\delta := \max\{v_i \triangle\!\!\!/ (h_i \triangle v_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$;
$z := (1 \triangle\!\!\!/ \delta) \triangle\!\!\!/ h^{\triangle}$; $Z := [u \triangledown z, u \triangle z]$.

Стъпки (1), (2) и (3) реализират апроксимационната фаза на алгоритъма, а стъпки (4), (5) и (6) – верификационната фаза.

Алгоритъмът с верификация на резултата 3.1 е реализиран програмно в системата за компютърна алгебра *Maple V Release 3* [39]–[41]. Системата за компютърна алгебра *Maple* използува точна целочислена и рационална аритметика. Целите числа могат да бъдат много дълги – дължината им зависи от възможностите на компютъра, но в общия случай "те са много по-големи, отколкото потребителят може да си представи" [39]. В много приложения за представяне на точния резултат от изчисленията се използуват толкова цифри, колкото е необходимо. Това е за сметка на памет и време на изпълнение. Бързият начин за представяне на изчисления в изчислителната математика е използуването на аритметика с плаваща точка. *Maple* предлага ефикасни възможности и за работа с числа в плаваща точка. Глобалната променлива `Digits`, която по премълчаване има стойност 10, определя броя на десетичните цифри в мантисата. Както е споменато в [42], всяка отделна операция между числа в плаваща точка има точност 0.6 ulp (англ. unit in the last place), но в *Maple* както се разпространява в момента, няма възможности за контролиране на ефекта от грешката от закръгляване или от неточности в данните.

По-долу ще дадем кратко описание на програмите, реализирани в *Maple*, за решаване на $Ax = B$ и включени в пакета `Velisy`.

`LUdecomp(A,prm)`: пресмята триъгълно разлагане на реалната квадратна $(n \times n)$-матрица `A` по метода на Краут с частичен избор на главен елемент по редове. Компонентите на `A` трябва да бъдат от тип `'numeric'`, в противен случай програмата връща съобщение за грешка и прекъсва изпълнението. Ако матрицата A е неособена, тя се препокрива с пресметнатото разлагане: в горната триъгълна част на A, влючително и главния диагонал, се записват елементите на $\tilde{U}$, а долната строго триъгълна част на A съдържа компонентите на $\tilde{L}$; диагоналните елементи на $\tilde{L}$ са равни на единица. Параметърът prm е n-мерен вектор, първоначално инициализиран с prm= $(1, 2, \ldots, n)$, чиито компоненти съответстват на индексите на разместените редове в матрицата при избора на главен елемент (пермутационен вектор). Параметърът prm е избираем. Процедурата може да се извика като LUdecomp(A,'prm') или просто като LUdecomp(A). Като изход се връща матрицата A с компоненти числа в плаваща точка, такива че PA$\approx \tilde{L}\tilde{U}$; P е единичната $(n \times n)$-матрица, чиито редове са разместени в зависимост от компонентите на пермутационния вектор. Когато процедурата е извикана чрез LUdecomp(A), тогава се полага P=I. Ако матрицата A е особена, за някой индекс i ще получим $\tilde{U}_{ii} = 0.0$. В този случай програмата връща съобщение за грешка и изпълнението се прекъсва. Всички изчисления се извършват в обичайната аритметика с плаваща точка на *Maple*.

LUsolve(ALU,b,p): пресмята чрез права и обратна субституция приближено решение u (в обичайната аритметика с плаваща точка на *Maple*) на линейната система ALUx = Pb , където ALU е квадратната декомпозирана матрица, върната от подпрограмата LUdecomp, b е векторът в дясната страна на системата, а p е пермутационният вектор; пермутационната матрица P не се пресмята явно. Параметърът p е избираем, т. е. обръщението LUsolve(ALU,b) също е възможно и тогава се решава системата ALUx = b. На изход се извежда едномерен масив, който се изобразява като n-мерен вектор-ред.

Следващите програми използват INTPAK – експериментален пакет за интервална аритметика [42], който е включен в потребителската библиотека *Share library* на *Maple V Release 3*. От пакета INTPAK са използвани програмите type/interval, construct, Interval_midpoint, Interval_width, is_in, Interval_intersect, както и Interval_Round_Up, Interval_Round_Down, реализиращи насочени закръглявания.

IntBounds(B): пресмята приближение (число с плаваща точка) b за центъра на интервала B и число в плаваща точка mB≥ 0, такива че mB = width(B) $\triangle$ abs(b). При изчисленията се използват насочени закръглявания. На изход се извежда двумерен масив във вида [b,mB].

`AbsDefect(ALU,u,b,mB,wA,p)`: пресмята оценката $\varrho_1^{\triangle}$. `ALU` съдържа декомпозираната матрица, `u` е приближеното решение, върнато от `LUsolve`, `b` е векторът в дясната страна на системата, `mB`≥ 0 е число в плаваща точка, `wA` е ширината на интервалната матрица A, а `p` е пермутационният вектор. Параметрите `wA` и `p` са избираеми – обръщенията `AbsDefect(ALU,u,b,mB)` или `AbsDefect(ALU,u,b,mB,p)` означават, че решаваме линейна система с числова матрица $\check{A} = A$. Всички пресмятания се извършват с подходящи насочени закръглявания. На изход се извежда едномерен масив, който се изобразява като n-мерен вектор-ред.

`AbsExDefect(ALU,u,b,mB,wA,p)`: пресмята оценката $\varrho_2^{\triangle}$. Значението на параметрите е същото, както в `AbsDefect`. Всички пресмятания се извършват с подходящи насочени закръглявания. На изход се извежда едномерен масив, който се изобразява като n-мерен вектор-ред.

`VerifSol(ALU,u,dfct,wA,p)`: последователно извършва всички пресмятания (с подходящи насочени закръглявания), представени в стъпки (5) и (6) на Алгоритъм 3.1. `ALU` е LU-факторизираната матрица, `u` е приближеното решение, `dfct` е вектор, върнат от `AbsExDefect` или от `AbsDefect`, `wA` е ширината на интервалната матрица A и `p` е пермутационният вектор. Обръщението `VerifSol(ALU,u,dfct)` или `VerifSol(ALU,u,dfct,p)` означава, че матрицата A е точкова. Всички пресмятания се извършват с подходящи насочени закръглявания. Ако верификацията е успешна, на изход се извежда интервален вектор; в противен случай се извежда съобщение за грешка и изпълнението се прекъсва.

Числени експерименти. При конструирането на числови примери с `Velisy` е използван следния подход. Дадена е реална матрица $\check{A}$ с точно представими компоненти, т. е. компоненти, в които няма грешки от закръгляване или от конверсия. Тъй като в *Maple* рационалната аритметика е точна, всяка матрица с рационални елементи е точно представима. Нека x е точно решение на линейна система с матрица $\check{A}$. Чрез (точно) умножаване на $\check{A}$ и x получаваме точната дясна страна $\check{b} = \check{A}x$ на линейната система, $\check{b} = (\check{b}_1, \check{b}_2, \ldots, \check{b}_n)$. Прилагайки програмата `construct(·,'rounded')` от пакета `INTPAK`, която превръща всяка компонента $\check{b}_i$ в закръглен с раздуване интервал B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, получаваме интервалната дясна страна B и от тук нататък разглеждаме интервалната линейна система $\check{A}x = B$. За всяка компонента B_i извикваме програмата `IntBounds` и получаваме масива (b_i, mB_i) с $b_i \in B_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Намираме числото $mB = \max\{mB_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, което участвува във входните параметри на `AbsExDefect` и `AbsDefect`. След извикване на програмата `LUdecomp(A,'prm')` за декомпозиране на матрицата $\check{A}$, $P\check{A} \approx \tilde{L}\tilde{U}$, използваме вектора b в следващата програма `LUsolve`, за да намерим приближеното решение u на системата $\tilde{L}\tilde{U}u = Pb$. По-нататък извикваме `AbsExDefect` или `AbsDefect` за пресмятане на оценка за $|PB - P\check{A}u|$. Потребителят определя в диалогов режим коя от двете програми ще използва. Накрая `VerifSol` пресмята търсения интервален вектор Z или връща съобщение, че такъв не може да бъде пресметнат. Описаният подход е реализиран в (главна) програма `VelisyTest(A,x)`.

Пример 3.2 [51]. Да разгледаме матрицата $\check{A} = (a_{ij})$, чиито компоненти са дефинирани с равенството

$$a_{ij} = \begin{cases} n, & \text{ако } i = j, \\ \frac{i-j}{i+j-1}, & \text{ако } i \neq j. \end{cases}$$

Матрицата $\check{A}$ е пълна H-матрица. В рационалната аритметика на *Maple* компонентите ѝ са представими точно, т. е. не съдържат грешки от закръгляване при въвеждането им. Въвеждането на матрицата $\check{A}$ се осъществява с програмата `Construct_matrix(n)`. Разглеждаме решение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с компоненти $x_i = 1/i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. За въвеждането му е използвана програма `Construct_sol(n)`. След зареждането на пакетите `INTPAK` и `Velisy` въвеждаме командите

```
> Digits:=15:
> n:=10:
> A:=Construct_matrix(n):
> x:=Construct_sol(n);
> VelisyTest(A,x);
```

и изпълняваме работната страница (англ. *Maple worksheet*). В диалогов режим избираме програмата `AbsDefect` за пресмятане на оценката $\varrho_1^{\triangle}$. Изобразява се следният интервален вектор Z:

$$\begin{aligned}
&[[.999999999999644, 1.00000000000036] \\
&\quad [.499999999999792, .500000000000206] \\
&\quad [.333333333333176, .333333333333488] \\
&\quad [.249999999999866, .250000000000132] \\
&\quad [.199999999999877, .200000000000121]
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{l}
[.166666666666545, .166666666666785] \\
[.142857142857020, .142857142857266] \\
[.124999999999871, .125000000000129] \\
[.111111111110974, .111111111111244] \\
[.0999999999998604, .100000000000140]]
\end{array}
$$

Следващата Таблица 1 сравнява времената за изпълнение на двете фази на алгоритъма – апроксимационна и верификационна – за същата матрица A и решение x с различни размерности n при стойност на глобалната променлива `Digits:=10` и с граница за $|PB - PAu|$, пресметната с програмата `AbsDefect`. Експериментите са проведени на персонален компютър 486 DX4/120 Mhz с 4 MB RAM.

n	Апроксимационна фаза	Верификационна фаза
10	1 sec	1 sec
15	1 sec	2 sec
20	1 sec	5 sec
25	3 sec	8 sec
30	5 sec	10 sec
31	6 sec	14 sec
32	6 sec	16 sec
33	6 sec	17 sec
34	7 sec	18 sec
35	8 sec	20 sec
40	12 sec	38 sec
45	20 sec	80 sec
50	41 sec	296 sec

Таблица 1

Резултатите са твърде песимистични. Причината за това е, че за всяка операция между числа в плаваща точка се извиква програма от пакета `INTPAK`, реализираща подходящо насочено закръгляване на резултата. А както е споменато в [42], "интервалният пакет не е създаден от съображение за ефективност"; той е "написан с изследователска, а не с производствена цел". Резултатите биха били много по-ефектни, ако можехме да използуваме бърза аритметика с насочени закръглявания.

Таблица 2 съдържа данни за размерността на системата, времето за решаването й чрез програмата `linsolve`, включена в пакета за линейна алгебра `linalg` на *Maple*, и времето за решаването й чрез пакета `Velisy`. Стойността на глобалната променлива `Digits:=10`, а границата за $|PB - PAu|$ е пресметната с програмата `AbsDefect`. Експериментите са проведени на персонален компютър 486 DX4/120 Mhz с 4 MB RAM. Въпросителните знаци в таблицата означават, че програмата `lisolve` не може да реши линейната система в рационална аритметика.

n	`Velisy`	`linalg[linsolve]`
10	2 sec	0 sec
15	2 sec	1 sec
20	5 sec	3 sec
25	11 sec	8 sec
30	15 sec	30 sec
32	22 sec	52 sec
35	28 sec	127 sec
40	60 sec	?
45	100 sec	?
50	337 sec	?

Таблица 2

От Таблица 2 става ясно, че при размерности $n \geq 30$ времето за точно решаване на линейната система чрез `linalg[linsolve]` значително надвишава времето за решаване на същата чрез пакета `Velisy`; при това за $n \geq 40$ `linalg[linsolve]` не е в състояние да пресметне точното решение.

Таблица 3 съдържа същите данни като Таблица 2, но експерименти са проведени в Института по информатика на Университет Базел, Швейцария, на Macintosh IIcx, 8 MB RAM.

n	Velisy	linalg[linsolve]
20	25 sec	15 sec
30	52 sec	95 sec
40	100 sec	?
50	160 sec	1124 sec
100	975 sec	?

Таблица 3

Пример 3.3 [51]. Да разгледаме тридиагонална матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

и точно решение x с компоненти $x_i = 1/i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. След зареждане на пакета Velisy въвеждаме командите

```
> Digits:=20:
> n:=15:
> A:=linalg[band]([-1,2,-1],n):
> x:=Construct_sol(n);
> VelisyTest(A,x);
```

След изпълнение на работната страница получаваме следния интервален вектор Z, включващ точното решение:

[[.99999999999999999403, 1.0000000000000000059]
[.49999999999999999014, .50000000000000000968]
[.33333333333333332096, .33333333333333334556]
[.24999999999999998574, .25000000000000001412]
[.19999999999999998448, .20000000000000001538]
[.16666666666666665039, .16666666666666668279]
[.14285714285714284057, .14285714285714287357]

[.12499999999999998358,.12500000000000001630]
[.11111111111111109528,.11111111111111112684]
[.09999999999999985206,.10000000000000001469]
[.09090909090908895782,.09090909090909090922310]
[.08333333333333321919,.08333333333333344675]
[.07692307692307691394 5,.07692307692307693214 7]
[.07142857142857142211 8,.07142857142857143498 2]
[.06666666666666663284,.06666666666666670028]]

Следващата Таблица 4 сравнява времената за изпълнение на апроксимационната и верификационната фаза на `Velisy` при различни размерности n на тридиагоналната матрица със същото точно решение x. При това глобалната променлива `Digits` има стойност по премълчаване 10, а за пресмятане на границата за $|PB - PAu|$ е използувана програмата `AbsDefect`. Експериментите са проведени на персонален компютър 486 DX4/120 Mhz с 4 MB RAM.

n	Апроксимационна фаза	Верификационна фаза
10	0 sec	1 sec
15	1 sec	1 sec
20	1 sec	3 sec
25	2 sec	4 sec
30	3 sec	6 sec
35	4 sec	7 sec
40	6 sec	11 sec
45	8 sec	15 sec
50	10 sec	17 sec
55	13 sec	21 sec
60	17 sec	25 sec
70	27 sec	36 sec
80	38 sec	65 sec
90	54 sec	106 sec
99	92 sec	314 sec

Таблица 4

В сравнение с Таблица 1 резултатите са значително по-добри. Причината е в това, че матрицата $\check{A}$ е тридиагонална и във верификационната фаза по-малък брой аритметични операции се извършват с насочени закръглявания.

Пример 3.4. Да разгледаме Хилбертова матрица $\check{A} = (a_{ij})$, дефинирана посредством $a_{ij} = 1/(i+j-1)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, и решение x с компоненти $x_i = 1$. Известно е, че Хилбертовите матрици не са H-матрици, а решенията на линейни системи с Хилбертови матрици са чувствителни относно изменения в данните. За тези матрици триъгълното разлагане се извършва с частичен избор на главен елемент, т. е. пермутационната матрица P е различна от единичната матрици. Да сравним резултатите от програмата `linsolve`, работеща не в рационална, а в аритметика с плаваща точка, и `Velisy`. За размерност $n = 10$ на $\check{A}$ и различни стойности на глобалната променлива `Digits` получаваме следните резултати:

(a) `Digits:=10`:
Програмата `linalg[linsolve]` извежда следния резултат s за точното решение x:

$$s := [1.000125309\ .993269074\ 1.066366880\ .992524270\ -1.374494199\\ 13.17498454\ -26.93555894\ 34.66042059\ -19.72680448\\ 6.149413769]$$

Компонентите на s се различават не само по порядък, но дори по знак от точното решение $x = (1, 1, \ldots, 1)$; при това програмата `linsolve` не предлага никаква оценка за точността на резултата – s се изобразява като "решение" на линейната система.

Изпълняваме `VelisyTest.ms`. Пермутационният вектор, изведен от програмата `LUdecomp` има стойност $p =$[1 2 6 10 3 4 8 5 9 7]. Програмата `LUsolve` връща следното приближено решение u:

$$u := [.9999832680\ 1.000252462\ 1.001928969\ .9886257268\ .8665367989\\ 2.076233376\ -2.050480676\ 5.209866514\ -1.857585137\\ 1.764705882].$$

По-нататък получаваме

$$\begin{aligned} v[1] &= 0.4045073414 \times 10^{15}, \\ h[1] &= 0.8632068806 \times 10^{8}, \end{aligned}$$

т. е. $v_1 > h_1$ и верификацията не е успешна. Този резултат означава, че (вероятно) матрицата е лошо обусловена и налага по-нататъшно изследване. Увеличаваме стойността на променливата `Digits` и получаваме

(б) `Digits:=22:`
Програмата `VelisyTest` произвежда следния интервален вектор:

$$\begin{aligned} Z := [&[.9767943946001520731212, 1.023205605399847201074]\\ &[.9714183313000535822175, 1.028581668700003025457]\\ &[.9810511042389702006432, 1.018948895759892529023]\\ &[.9919877662766749236478, 1.008012233733324975655]\\ &[.9976299816244036055242, 1.002370018328776381321]\\ &[.9994044692374718026568, 1.000595530889996558668]\\ &[.9998697522800768415444, 1.000130247511669772349]\\ &[.9999757806604523604710, 1.000024219540627001608]\\ &[.9999960839892390334695, 1.000003915905066072999]\\ &[.9999991411705663065951, 1.000000858852736228662]] \end{aligned}$$

Изходът от `linalg[linsolve]` е

$$\begin{aligned} s := [&.9999999999999997664981\ 1.000000000000192971471\\ &.9999999999960244172868\ 1.000000000035215294358\\ &.9999999998355014906125\ 1.000000000444499678911\\ &.9999999992811448330985\ 1.000000000686222469587\\ &.9999999996435273108157\ 1.000000000077675051410] \end{aligned}$$

и $s \in Z$.

(в) `Digits:=25:`
След изпълнение на `VelisyTest.ms` се изобразява интервалният вектор

$$\begin{aligned} Z := [&[.9999768029350044284186080, 1.000023197064995586125095]\\ &[.9999714288502667568954620, 1.000028571149732020631815]\\ &[.9999810580780514026300825, 1.000018941921974108791236]\\ &[.9999919907149155624620637, 1.000008009284856163590428]\\ &[.9999976308544278230242157, 1.000002369146647231656961]\\ &[.9999994046868858304504910, 1.000000595310189609450970] \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{l}
[.99999986980269769318114 35, 1.0000001302020587173616 65] \\
[.9999999757871922796073782, 1.0000000242082453985920 15] \\
[.9999999960866731851550724, 1.0000000039157066169191 78] \\
[.9999999991412147843568051, 1.0000000008582647923558 12]]
\end{array}
$$

Програмата `linalg[linsolve]` дава следния резултат

$$
\begin{aligned}
s := [&.99999999999999999977084 10 \; 1.00000000000000000195261784 \\
&.9999999999999995889045432 \; 1.0000000000000037014210546 \\
&.9999999999999982486822 4019 \; 1.0000000000000478157321334 \\
&.9999999999999922006907925 54 \; 1.0000000000000749903562631 \\
&.9999999999999960804574316 07 \; 1.0000000000000085861251741]
\end{aligned}
$$

и отново $s \in Z$.

3.3 Числен алгоритъм с верификация на резултата от Нютонов тип за системи нелинейни алгебрични уравнения

Теорема 3.11. Нека $f : D \to R^n$, $D \subseteq R^n$, е непрекъснато диференцируема функция. Да предположим, че съществува изотонно по включване интервално разширение $F' : ID \to IR^n$ на якобиана на f. Нека за $X \in ID$ интервалната матрица $F'(X)$ е неособена. За фиксирано $x \in X$ да означим с Z едно решение на интервалната линейна система

$$F'(X)z = f(x), \tag{19}$$

т. е. $Z \supseteq \Sigma(F'(X), f(x))$.
(а) Ако $f(y) = 0$ има (по необходимост единствено) решение $x^* \in X$, то $x^* \in x - Z$.
(б) Ако $X \bigcap (x - Z) = \emptyset$, то $f(y) = 0$ няма решение в X, а следователно и в $x - Z$.
(в) Ако $x - Z \subseteq X$, то $f(y) = 0$ има единствено решение $x^* \in X$.

Доказателство. (а). Да допуснем, че x_1^*, $x_2^* \in X$ са две различни нули на f. От (14) получаваме

$$0 = f(x_1^*) - f(x_2^*) = J(x_1^*)(x_1^* - x_2^*),$$

където $J(x_1^*)$ е дефинирана съгласно (15). По предположение интервалната матрица $F'(X)$ не съдържа особена точкова матрица. Тъй като $J(x_1^*) \in F'(X)$, то $J(x_1^*)$ е неособена матрица. Следователно $x_1^* = x_2^*$. От (14) получаваме

$$f(x^*) - f(x) = -f(x) = J(x^*)(x^* - x).$$

Тъй като $J(x^*)$ е неособена матрица, то $x^* = x - J(x^*)^{-1}f(x)$. От $J(x^*)^{-1}f(x) \in \Sigma(F'(X), f(x)) \subseteq Z$ следва $x^* \in x - Z$, което трябваше да се докаже.

(б). Доказателството следва непосредствено от (а).

(в). По предположение интервалната матрица $F'(X)$ е неособена, т. е. всички точкови матрици в $F'(X)$ са неособени. В частност това е вярно за $J(y)$ за произволно $y \in X$. Дефинираме изображение $g : X \to R^n$,

$$g(y) = y - J(y)^{-1}f(y).$$

За фиксирано $x \in X$ съгласно (14) и (15) имаме

$$\begin{aligned} g(y) &= y - J(y)^{-1}f(y) = y - J(y)^{-1}f(x) + J(y)^{-1}(f(x) - f(y)) \\ &= y - J(y)^{-1}f(x) + y - J(y)^{-1}(J(y)(x-y)) = x - J(y)^{-1}f(x) \\ &\in x - \Sigma(F'(X), f(x)) \subseteq x - Z \subseteq X. \end{aligned}$$

Следователно непрекъснатото изображение g изобразява непразното и компактно множество X в себе си. Съгласно теоремата на Брауер за неподвижната точка g има неподвижна точка $x^* \in X$, т. е. $g(x^*) = x^*$, откъдето следва $f(x^*) = 0$. Аналогично на доказателството на (а) се вижда, че x^* е единствена нула на f в X. □

За намиране на интервалния вектор Z, т. е. за решаване на интервалната линейна система (19) ще използваме Алгоритъм 3.1.

Теорема 3.12. Нека $f : D \to R^n$, $D \subseteq R^n$, е непрекъснато диференцируема в D. Нека $F' : ID \to IR^{n\times n}$ е изотонно по включване интервално разширение на производната на f. Нека $X^{(0)} = (X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots, X_n^{(0)}) \in ID$.

Да предположим, че за интервалната линейна система (19) са изпълнени предположенията на Теорема 3.10 за $X = X^{(0)}$. Дефинираме интервален итерационен метод от Нютонов тип

$$
\begin{aligned}
x^{(k)} &= \mu(X^{(k)});\ \ A^{(k)} = \mu(F'(X^{(k)}));\\
A^{(k)} &= L^{(k)}U^{(k)};\\
u^{(k)} &= U^{(k)^{-1}}L^{(k)^{-1}}f(x^{(k)});\\
\Delta^{(k)} &= |F'(X^{(k)}) - L^{(k)}U^{(k)}|;\\
\varrho^{(k)} &= |f(x^{(k)}) - F'(X^{(k)})u^{(k)}|;\\
h^{(k)} &= \langle U^{(k)}\rangle^{-1}\langle L^{(k)}\rangle^{-1}\varrho^{(k)};\\
v^{(k)} &= \langle U^{(k)}\rangle^{-1}\langle L^{(k)}\rangle^{-1}\Delta^{(k)}h^{(k)};\\
\delta^{(k)} &> \max\{\frac{v_i^{(k)}}{h_i^{(k)} - v_i^{(k)}},\ i = 1,\dots,n\};\\
z^{(k)} &= (1+\delta^{(k)})h^{(k)};\\
Z^{(k)} &= u^{(k)} + [-z^{(k)}, z^{(k)}];\\
X^{(k+1)} &= (x^{(k)} - Z^{(k)})\bigcap X^{(k)},\ \ k = 0,1,2,\dots.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

корект

модц

(а) Нека $x^* \in X^{(0)}$ е единствен корен на $f(x) = 0$ и $\delta^{(k)} \le \delta^0$ за всяко $k = 0,1,\dots$. Тогава итерационният метод (20) произвежда антитонна по включване редица от интервални вектори $\{X^{(k)}\}$, т. е. $X^{(k)} \supseteq X^{(k+1)}$, $k \ge 0$, $x^* \in X^{(k)}$ за $k = 1,2,\dots$ и $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = x^*$. Ако $F'(X^{(0)})$ е H-матрица и съществува константа $L > 0$, така че $\|\omega(F'(X))\|_\infty \le L\|\omega(X)\|_\infty$ за произволно $X \subseteq X^{(0)}$, то

$$\|\omega(X^{(k+1)})\|_\infty \le c\|\omega(X^{(k)})\|_\infty^2,\ \ c = const > 0.$$

(б) Ако съществува индекс l, такъв че $(x^{(l)} - Z^{(l)})\bigcap X^{(l)} = \emptyset$, то $f(x) = 0$ няма решение в началния интервален вектор $X^{(0)}$.

Доказателство. (а). Съгласно Теорема 3.10 интервалната матрица $F'(X^{(0)})$ е неособена, следователно съществува интервален вектор $Z^{(0)}$, включващ множеството от решения $\Sigma(F'(X^{(0)}), f(x^{(0)}))$. Да означим $X^{(1)} = (x^{(0)} - Z^{(0)})\bigcap X^{(0)}$. От Теорема 3.11(а) следва, че $x^* \in X^{(1)}$; очевидно $X^{(1)} \supseteq X^{(0)}$. По-нататък доказателството се извършва по индукция.

Редицата от интервални вектори $\{X^{(k)}\}$ е антитонна по включване, следователно е сходяща, т. е. съществува интервален вектор X, такъв че

$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X$. Но тогава очевидно съществуват и границите $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x = \mu(X)$, $\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x)$, $\lim_{k\to\infty} F'(X^{(k)}) = F'(X)$. Тъй като $Z^{(k)}$ зависи непрекъснато от $F'(X^{(k)})$ и $f(x^{(k)})$, то съществува и $\lim_{k\to\infty} Z^{(k)} = Z$, а така също и

$$\lim_{k\to\infty}((x^{(k)} - Z^{(k)})\bigcap X^{(k)}) = (x - Z)\bigcap X = X.$$

Последното равенство е възможно точно тогава, когато $x - Z \supseteq X$ или $Z \supseteq x - X$, т. е. $\omega(Z) \geq \omega(X)$ и $0 \in Z$. Да означим по-нататък

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} L^{(k)} = L, \quad \lim_{k\to\infty} U^{(k)} = U, \quad \lim_{k\to\infty} u^{(k)} = u,\\
&\lim_{k\to\infty} \Delta^{(k)} = \Delta, \quad \lim_{k\to\infty} \varrho^{(k)} = \varrho, \quad \lim_{k\to\infty} h^{(k)} = h,\\
&\lim_{k\to\infty} v^{(k)} = v, \quad \lim_{k\to\infty} \delta^{(k)} = \delta;
\end{aligned}$$

при това сигурно е изпълнено $h > v$, $\delta > \max\{v_i/(h_i - v_i),\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, $z = (1+\delta)h$. Интервалният вектор Z е от вида $Z = [u - z, u + z]$. От $0 \in Z$ следва, че $|u| \leq z$. По-нататък имаме

$$\begin{aligned}
|u| \leq z &= (1+\delta)h = (1+\delta)\langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}|f(x) - F'(X)u|\\
&= (1+\delta)\langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}|f(x) - LUu + LUu - F'(X)u|\\
&\leq (1+\delta)\langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}|LU - F'(X)||u|\\
&= (1+\delta)\langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}\Delta|u|,
\end{aligned}$$

откъдето получаваме

$$(I - (1+\delta)\langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}\Delta)|u| \leq 0.$$

Последното неравенство е еквивалентно с

$$\langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}(\langle L\rangle\langle U\rangle - (1+\delta)\Delta)|u| \leq 0.$$

От очевидното неравенство $1/(1+\delta) < (1+\delta)/\delta$ за $\delta > 0$ получаваме

$$\langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}(\langle L\rangle\langle U\rangle - \frac{1+\delta}{\delta}\Delta)|u| \leq \langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}(\langle L\rangle\langle U\rangle - (1+\delta)\Delta)|u| \leq 0$$

или еквивалентно

$$\frac{1}{\delta}\langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}(\delta\langle L\rangle\langle U\rangle - (1+\delta)\Delta)|u| \leq 0. \tag{21}$$

Тъй като $\delta h > (1+\delta)v$, последователно получаваме следните неравенства:

$$\begin{aligned}
&\delta h > (1+\delta)\langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}\Delta h,\\
&(\delta I - (1+\delta)\langle L\rangle\langle U\rangle\Delta)h > 0,\\
&\langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}(\delta\langle L\rangle\langle U\rangle - (1+\delta)\Delta)h > 0.
\end{aligned}$$

Тогава от (21) получаваме $|u| = 0$, следователно $Z = [-z, z]$. Но u е решение на линейна система от вида $Ju = f(x)$ за някое $J \in F'(X)$ и тъй като J е неособена матрица, то $f(x) = 0$; следователно $x = x^* \in X$. По-нататък

$$\begin{aligned}
\omega(X) &= \omega(Z) = 2z = 2(1+\delta)h\\
&= 2(1+\delta)\langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}|f(x) - F'(X)u|\\
&= (1+\delta)\langle U\rangle^{-1}\langle L\rangle^{-1}|f(x^*) - F'(X)\cdot 0| = 0.
\end{aligned}$$

Следователно $\omega(X) = 0$, т. е. $X = x^*$.

Имаме

$$\begin{aligned}
&\omega(X^{(k+1)}) \le \omega(Z^{(k)}) = 2z^{(k)} = 2(1+\delta^{(k)})h^{(k)}\\
&= 2(1+\delta^{(k)})\langle U^{(k)}\rangle^{-1}\langle L^{(k)}\rangle^{-1}|f(x^{(k)}) - F'(X^{(k)})u^{(k)}|\\
&= 2(1+\delta^{(k)})\langle U^{(k)}\rangle^{-1}\langle L^{(k)}\rangle^{-1}|f(x^{(k)}) - F'(X^{(k)}){U^{(k)}}^{-1}{L^{(k)}}^{-1}f(x^{(k)})|\\
&\le 2(1+\delta^{(k)})\langle U^{(k)}\rangle^{-1}\langle L^{(k)}\rangle^{-1}|{U^{(k)}}^{-1}{L^{(k)}}^{-1}||L^{(k)}U^{(k)} - F'(X^{(k)})||f(x^{(k)})|.
\end{aligned}$$

Но тъй като $L^{(k)}U^{(k)} \in F'(X^{(k)})$, то е изпълнено

$$|L^{(k)}U^{(k)} - F'(X^{(k)})| = \Delta^{(k)} \le \omega(F'(X^{(k)})).$$

Освен това

$$|f(x^{(k)})| = |f(x^{(k)}) - f(x^*)| \le |J(x^{(k)})|\omega(X^{(k)}),\ \ J(x^{(k)}) \in F'(X^{(k)}).$$

Следователно

$$\begin{aligned}
\omega(X^{k+1}) &\le 2(1+\delta^{(k)})\langle U^{(k)}\rangle^{-1}\langle L^{(k)}\rangle^{-1}|{U^{(k)}}^{-1}{L^{(k)}}^{-1}|\omega(F'(X^{(k)}))|J(x^{(k)})|\omega(X^{(k)})\\
&\le 2(1+\delta^{(k)})\langle U^{(k)}\rangle^{-1}\langle L^{(k)}\rangle^{-1}\langle U^{(k)}\rangle^{-1}\langle L^{(k)}\rangle^{-1}\omega(F'(X^{(k)}))|J(x^{(k)})|\omega(X^{(k)}).
\end{aligned}$$

От $X^{(0)} \supseteq X^{(k)}$ и от изотонността по включване на F' имаме $L^{(k)}U^{(k)} \in F'(X^{(k)}) \subseteq F'(X^{(0)})$ и

$$\langle L^{(k)}\rangle\langle U^{(k)}\rangle \ge \langle F'(X^{(0)})\rangle,\ \ \langle U^{(k)}\rangle^{-1}\langle L^{(k)}\rangle^{-1} \le \langle F'(X^{(0)})\rangle^{-1}.$$

Тогава за $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ получаваме

$$\begin{aligned}\|\omega(X^{(k+1)})\| &\leq 2(1+\delta^0)L\,\|\langle F'(X^{(0)})\rangle^{-1}\|\,\|\,|F'(X^{(0)})|\,\|\,\|\omega(X^{(k)})\|^2 \\ &= c\|\omega(X^{(k)})\|^2\end{aligned}$$

и константата $c > 0$ не зависи от k.

(б). Да допуснем, че съществува индекс $l \geq 0$, такъв че $X^{(0} \supseteq X^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(l)}$, но $X^{(l+1)} = \emptyset$. Тогава от Теорема 3.11(б) следва, че $f(x) = 0$ няма решение в $X^{(l)}$; чрез допускане на противното получаваме, че системата няма решение и в $X^{(0)}$. □

При работа в компютърна аритметика стойностите на функцията $f(x)$ се пресмятат като $f([x,x])$ със закръгляване навън (с раздуване), т. е. ще намираме $f^{\diamond}([x,x]) = B$. Следователно вместо (19) решаваме интервална линейна система с интервален вектор в дясната страна.

По-долу ще представим основните стъпки на алгоритъма при начален интервален вектор Y. Стъпките се изпълняват последователно, освен ако не е указано препращане към конкретна стъпка.

Алгоритъм с верификация на резултата 3.2

(0) Input: f, initial interval vector Y;
(1) compute the jacobian $f'(y)$ and an interval extension $F'(Y)$;
(2) $k := 0$;
(3) **repeat**
    $X := Y$;
    compute $A := F'^{\diamond}(X)$, $x \approx \mu(X)$, $B := f^{\diamond}(x)$;
    apply Algorithm 3.1 to $Az = B$;
    if the algorithm fails, **then** print a failure message and stop
    else { the algorithm returns an interval vector Z }
        $X_1 := (x - Z) \bigcap X$;
        if $X_1 = \emptyset$ **then** stop { the system does not possess solution in Y }
        else if $X_1 = X$ **and** $k = 0$ **then** stop;
        { the algorithm can not determine existence/nonexistence
        of a solution in Y }
    $k := k + 1$; $Y := X_1$;
  until $X = Y$.

Ако на стъпка (3) от алгоритъма получим, че верификацията не е успешна, това най-често означава, че началният интервален вектор е много широк. В такъв случай на потребителя се препоръчва да стартира алгоритъма с по-тесен интервален вектор.

Алгоритъм 3.2 е реализиран програмно в системата *Maple* и е оформен като работна страница (англ. *Maple worksheet*) `Venolisy.ms`. Използувайки възможностите за символна обработка в *Maple*, пресмятането на якобиана $f'(x)$ се извършва лесно, а изотонни по включване интервални разширения на якобиана и на функцията се пресмятат символно чрез програмите `IntExtJacobian` и `IntExtFnc`. Използувани са процедури от пакета `INTPAK`. Преди изпълнение на `Venolisy.ms` се зарежда пакетът `Velisy`.

Всички примери по-долу са изпълнени при стойност на глобалната променлива `Digits:=10` и с програмата `AbsExDefect` от пакета `Velisy` (вж. т. 3.2).

Пример 3.5 [108].

$$\left|\begin{array}{l} x_1^2 - 1.2x_2 - 1.6x_3 + 1.66 = 0 \\ 1.2x_1 + x_2^2 - 1.2x_3 - 0.97 = 0 \\ 0.9x_1 + 1.2x_2 + x_3^2 - 2.18 = 0 \end{array}\right.$$

(а) Разглеждаме начален интервален вектор

$$X[0] := ([0.3, 1.3],\ [0.3, 1.3],\ [0.3, 1.3]).$$

След изпълнение на работната страница `Venolisy.ms` получаваме

$$\begin{aligned} v[1] &= 11.12492532 \\ h[1] &= 1.545000031, \end{aligned}$$

т. е. $v_1 > h_1$ – верификационната стъпка при решаването на интервалната линейна система върху началния интервален вектор не е успешна.

(б) Разглеждаме по-тесен начален интервален вектор

$$X[0] := ([0.65, 0.8],\ [0.9, 1.0],\ [0.5, 0.7]).$$

Получаваме следните резултати, изобразени в стандартния изход на *Maple*:

$$X[1] = [\,[.65, .8\,]\,[.9315027549, .9568531773\,]\,[.5823289236, .7\,]\,]$$

$$X[2] = [[.6863259185, .7267717682][.9401253672, .9482752537]$$
$$[.6340760427, .6482120207]]$$

$$X[3] = [[.7022193182, .7105866978][.9434594755, .9451389474]$$
$$[.6397162382, .6425914296]]$$

$$X[4] = [[.7064020671, .7064039309][.9442989789, .9442994499]$$
$$[.6411534983, .6411541764]]$$

$$X[5] = [[.7064029602, .7064030388][.9442992052, .9442992235]$$
$$[.6411538128, .6411538630]]$$

$$X[6] = [[.7064029824, .7064030163][.9442992108, .9442992177]$$
$$[.6411538286, .6411538468]]$$

$$X[7] = [[.7064029824, .7064030163][.9442992111, .9442992175]$$
$$[.6411538286, .6411538468]]$$

$$X[8] = [[.7064029824, .7064030163][.9442992111, .9442992175]$$
$$[.6411538286, .6411538468]]$$

Тъй като $X[7] = X[8]$, то $X[7]$ е крайният резултат.

(в) С начален интервален вектор

$$X[0] := ([0.7063, 0.7064], [0.9442, 0.9443], [0.6411, 0.6412])$$

получаваме на изход

$$X[1] = [[\,][.9442991688, .9442992599][.6411537599, .6411539137]]$$

The system has no solution

В следващия пример ще направим сравнение между `Venolisy` и вградената в *Maple* програма `fsolve` за решаване на нелинейни уравнения [40].

Пример 3.6 ([56], стр. 278).

$$f_i(x) = 0.6x_i - 2 + 0.49x_i \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Функцията се въвежда с процедурата `Construct_f(x,n)`. Разгледаните по-долу примери са за различни стойности на n.

(a) $n = 4$:

Въвеждаме командите

```
>n:=4:
>x:=array(1..n):
>f4:=convert(Construct_f(x,n),set):
>fsolve(f4,{x[1],x[2],x[3],x[4]});
```

и изпълняваме работната страница. Получаваме

Error, (in fsolve/gensys) did not converge

Въвеждаме граници за променливата x:

```
>fsolve(f4,{x[1],x[2],x[3],x[4]},{x[1]=0.9..0.95,
>x[2]=0.9..0.95, x[3]=0.9..0.95, x[4]=0.8..0.9});
```

На изход получаваме

Error, (in fsolve/genroot) cannot converge to a solution

За същия начален интервален вектор да изпълним следната работна страница

```
>n:=4:
>x:=array(1..n):
>f:=Construct_f(x,n):
>X:=array(1..n,[[.9,.95],[.9,.95],[.9,.95],[.8,.9]]):
>Venolisy(f,x,X);
```

Получаваме

$$X[1] = [[.9, .9410152789] [.9, .9342404480] [.9, .9318307977] \\ [.8716689786, .9]]$$

$$X[2] = [[.9, .9123912702] [.9008170715, .9110008959] \\ [.9012804198, .9105203048] [\,]]$$

The system has no solution

С начален интервален вектор

$$X = ([.9, .95], [.9, .95], [.9, .95], [.9, .95]])$$

`Venolisy` връща следния резултат

$$X[4] = [[.9057773825, .9057773962] [.9057773838, .9057773951] \\ [.9057773841, .9057773946] [.9057773841, .9057773950]]$$

а в резултат от изпълнението на `fsolve` получаваме следното решение s:

$$s := \{x_1 = .9057773895, \\ x_2 = .9057773895, x_3 = .9057773896, x_4 = .9057773895\}$$

Изпълнено е $s \in X[4]$.

(б) $n = 10$.

За началния интервален вектор

$$X[0] := ([0.65, 0.7], [0.65, 0.7], [0.65, 0.7], [0.65, 0.7], [0.65, 0.7], [0.65, 0.7], \\ [0.65, 0.7], [0.65, 0.7], [0.65, 0.7], [0.65, 0.7]).$$

получаваме с `Venolisy`

$$v[1] = .01775366248,$$

$$h[1] = .01744621114.$$

Следователно верификационната стъпка при решаване на линейната интервална система не е успешна и програмата прекъсва изпълнението.

Разглеждаме по-тесен интервален вектор

$$X[0] := ([0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69])$$

и получаваме краен резултат:

$$X[6] = [[.6868687287, .6868687544] [.6868687310, .6868687526] [.6868687318, .6868687517] [.6868687330, .6868687501] [.6868687336, .6868687494] [.6868687343, .6868687493] [.6868687343, .6868687488] [.6868687341, .6868687494] [.6868687345, .6868687486] [.6868687345, .6868687486]]$$

Разглеждаме начален интервален вектор

$$X[0] := ([0.69, 0.7], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69], [0.66, 0.69]).$$

и получаваме

$$X[3] = [[\ ] [.6861916348, .6875569904] [.6862876084, .6874595312] [.6863526589, .6873934700] [.6863966964, .6873487462] [.6864259632, .6873190231] [.6864445428, .6873001534] [.6864551954, .6872893346] [.6864598388, .6872846188] [.6864598388, .6872846188]]$$

The system has no solution

3.4 Оптимално решение на тридиагонална система линейни уравнения с интервална дясна страна

Да разгледаме система линейни алгебрични уравнения

$$Ax = d \tag{22}$$

с неособена матрица A от вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{n-1} & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & b_n & 1 \end{pmatrix}$$

и дясна страна $d = (d_0, d_1, \dots, d_n)$. Да предположим, че е известен интервален вектор $D \in IR^{n+1}$, $D = (D_i)_{i=0}^n = ([D_i^-, D_i^+])_{i=0}^n$, такъв че $d \in D$. Да разгледаме интервалната тридиагонална система

$$Ax = D \tag{23}$$

и да означим със $\Sigma(A, D)$ множеството от решения на (23) (вж. т. 3.1). Ще отбележим, че за (23) $\Sigma(A, D)$ е изпъкнало и ограничено множество. Ще намерим оптималното решение $X = [\inf \Sigma(A, D), \sup \Sigma(A, D)]$.

От числения анализ [129] е известен методът на прогонката за решаване на (22): решението $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ се търси във вида

$$x_i = p_i x_{i+1} + q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \tag{24}$$

където коефициентите p_i и q_i се определят последователно от

$$\begin{aligned} p_0 &= -a_0, \\ p_i &= -a_i/(1 + p_{i+1} b_i), \quad i = 1, 2, \dots, n; \qquad (25) \\ q_0 &= d_0, \\ q_i &= (d_i - b_i q_{i-1})/(1 + p_{i-1} b_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \qquad (26) \end{aligned}$$

От (24) при $i = n-1$ и от последното уравнение на системата (22), т. е. от системата

$$\left| \begin{array}{l} b_n x_{n-1} + x_n = d_n \\ x_{n-1} - p_{n-1} x_n = q_{n-1} \end{array} \right. \tag{27}$$

намираме x_n, използувайки например формулите на Крамер. Компонентите x_{n-1}, $x_{n-2}, \dots, x_0$ се пресмятат последователно от (24).

Твърдение 3.13 [25]. Да означим с $A^{-1} = (a_{ij}^{(-1)})_{i,j=0}^{n}$ обратната матрица на A, а с x решението на (22). Тогава е в сила представянето

$$\partial x_i / \partial d_j = a_{ij}^{(-1)}, \ \ i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Твърдение 3.14. Нека коефициентите p_i са определени съгласно (25). Да въведем следните означения:

$$\begin{aligned} s_0 &= -b_1, \\ s_i &= -b_{i+1}/(1 + p_{i-1} b_i), \ \ i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Тогава елементите $a_{ij}^{(-1)}$ на обратната матрица $A^{(-1)}$ могат да се пресметнат последователно по формулите

$$\begin{aligned} a_{nn}^{(-1)} &= 1/(1 + p_{n-1} b_n); \\ a_{ii}^{(-1)} &= p_i s_i a_{i+1 i+1}^{(-1)} + 1/(1 + p_{i-1} b_i), \ \ i = n-1, n-2, \ldots, 1, 0; \\ a_{ik}^{(-1)} &= \begin{cases} p_i p_{i+1} \ldots p_{k-1} a_{kk}^{(-1)}, & \text{ако } i < k, \\ s_k s_{k+1} \ldots s_{i-1} a_{ii}^{(-1)}, & \text{ако } i > k, \end{cases} \end{aligned}$$

където $p_{-1} = b_0 = 0$.

Доказателство. Извършва се чрез непосредствено пресмятане. □

Подобни формули за $a_{ij}^{(-1)}$ са дадени в [133].

Да разгледаме q_i от (26). Функцията q_i зависи явно от d_i и неявно от $d_0, d_1, \ldots, d_{i-1}$ чрез q_{i-1}. Да означим с Q_i обхвата на функцията $q_i = q_i(d_0, d_1, \ldots, d_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, в D. Тъй като всяка една от променливите d_j се появява само веднъж в аритметичния израз за q_i, в сила е следното представяне за обхвата Q_i (вж. Теорема 2.22):

$$Q_i = (D_i - b_i Q_{i-1})/(1 + p_{i-1} b_i), \ \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Да разгледаме x_j като функция на променливите $d_0, d_1, \ldots, d_n$, т.е. $x_j = x_j(d_0, d_1, \ldots, d_n)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Да означим с X_j обхвата на x_j в D. От (27) намираме за x_n

$$x_n = (d_n - b_n q_{n-1})/(1 + p_{n-1} b_n)$$

и обхватът X_n се изразява чрез

$$X_n = (D_n - b_n Q_{n-1})/(1 + p_{n-1} b_n).$$

За интервално-аритметичното представяне на обхватите X_i, $i = n-1, n-2, \ldots, 0$, ще използуваме Теорема 1.45 с $f_1 = p_i x_{i+1}$, $f_2 = q_i$ и $f = f_1 + f_2 = x_i$. За целта първо трябва да определим конусите на наредбата K_i на функциите x_i и K_i-върховете $u_i = u(K_i; D) = (u_{i0}, u_{i1}, \ldots, u_{in})$, $v_i = v(K_i; D) = (v_{i0}, v_{i1}, \ldots, v_{in})$ на интервалния вектор D. От Твърдение 3.13 получаваме

$$u_{ij} = \begin{cases} D_j^-, & \text{ако } a_{ij}^{(-1)} \geq 0, \\ D_j^+ & \text{в противен случай;} \end{cases} \qquad v_{ij} = \begin{cases} D_j^+, & \text{ако } a_{ij}^{(-1)} \geq 0, \\ D_j^- & \text{в противен случай;} \end{cases}$$
$$j = 0, 1, \ldots, n.$$

Да означим по-нататък с (вж. т. 1.3)

$$D_{K_i} = [u(K_i; D), v(K_i; D)]_{K_i} = \{u(K_i; D) + t(v(K_i; D) - u(K_i; D)),\ t \in [0, 1]\}.$$

От Теорема 1.45(а) получаваме

$$X_i = \begin{cases} p_i X_{i+1}(D_{K_i}) + Q_i(D_{K_i}), & \text{ако } p_i \delta(X_{i+1}(D_{K_i}))\delta(Q_i(D_{K_i})) \geq 0, \\ p_i X_{i+1}(D_{K_i}) +^- Q_i(D_{K_i}) & \text{в противен случай,} \end{cases}$$

където с $X_{i+1}(D_{K_i})$ и $Q_i(D_{K_i})$ са означени съответно интервалите

$$\begin{aligned} X_{i+1}(D_{K_i}) &= [x_{i+1}(u(K_i; D)) \vee x_{i+1}(v(K_i; D))], \\ Q_i(D_{K_i}) &= [q_i(u(K_i; D)) \vee q_i(v(K_i; D))], \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} \delta(X_{i+1}(D_{K_i})) &= x_{i+1}(u(K_i; D)) - x_{i+1}(v(K_i; D)), \\ \delta(Q_i(D_{K_i})) &= q_i(u(K_i; D)) - q_i(v(K_i; D)). \end{aligned}$$

Горните изрази за X_k съдържат интервалите $Q_i(D_{K_i})$ и $X_{i+1}(D_{K_i})$. Тъй като функциите q_i се пресмятат рекурсивно съгласно (26), за представянето на $Q_i(D_{K_i})$ трябва да знаем интервалите $Q_0(D_{K_i})$, $Q_1(D_{K_i})$, $\ldots$, $Q_{i-1}(D_{K_i})$. За пресмятането на $X_{i+1}(D_{K_i})$ са необходими $Q_{i+1}(D_{K_i})$, $Q_{i+2}(D_{K_i})$, $\ldots$, $Q_{n-1}(D_{K_i})$, а също и $X_n(D_{K_i})$, $X_{n-1}(D_{K_i})$, $\ldots$, $X_{i+2}(D_{K_i})$.

Твърдение 3.15. За $j = 0, 1, \ldots, n$ и за произволно i, $0 \leq i \leq n-1$, е в сила представянето $D_j(D_{K_i}) = D_j$ и $\delta(D_j) = -\sigma(a_{ij}^{(-1)})\omega(D_j)$, където $\sigma(a_{ij}^{(-1)}) = \{+,\ \text{ако } a_{ij}^{(-1)} \geq 0;\ -,\ \text{ако } a_{ij}^{(-1)} < 0\}$.

Доказателство. Имаме

$$\begin{aligned} D_j(D_{K_i}) &= [d_j(u(K_i;D)) \vee d_j(v(K_i;D))] = D_j; \\ \delta(D_j) &= d_j(u(K_i;D)) - d_j(v(K_i;D)) \\ &= \begin{cases} -\omega(D_j), & \text{ако } a_{ij}^{(-1)} \geq 0, \\ \omega(D_j), & \text{ако } a_{ij}^{(-1)} < 0; \end{cases} = -\sigma(a_{ij}^{(-1)})\omega(D_j). \end{aligned}$$

Твърдение 3.16. За произволно фиксирано i, $0 \leq i \leq n-1$, и за всяко $j = 0, 1, 2, \ldots, i$, е в сила представянето $Q_j(D_{K_i}) = Q_j = (D_j - b_j Q_{j-1})/(1+p_{j-1}b_j)$.

Доказателство. За $j = 0$ имаме:

$$Q_0(D_{K_i}) = D_0(D_{K_i}) = D_0 = Q_0.$$

За $j = 1$ получаваме

$$\begin{aligned} Q_1(D_{K_i}) &= [q_1(u(K_i;D)) \vee q_1(v(K_i;D))] \\ &= \begin{cases} (1/(1+p_0b_1))(D_1 -^- b_1D_0), & \text{ако } b_1a_{k1}^{(-1)}a_{k0}^{(-1)} \geq 0, \\ (1/(1+p_0b_1))(D_1 - b_1D_0), & \text{ако } b_1a_{k1}^{(-1)}a_{k0}^{(-1)} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

От Твърдение 3.14 получаваме

$$\begin{aligned} b_1a_{k1}^{(-1)}a_{k0}^{(-1)} &= b_1s_1\ldots s_{k-1}a_{kk}^{(-1)}s_0s_1\ldots s_{k-1}a_{kk}^{(-1)} \\ &= -(s_0s_1\ldots s_{k-1}a_{kk}^{(-1)})^2 < 0, \end{aligned}$$

откъдето следва

$$Q_1(D_{K_i}) = (1/(1+p_0b_1))(D_1 - b_1Q_0) = Q_1.$$

По-нататък от Твърдение 3.15 намираме

$$\begin{aligned} \delta(Q_1) &= (1/(1+p_0b_1))(\delta(D_1) - b_1\delta(Q_0)) \\ &= (1/(1+p_0b_1))(-\sigma(a_{k1}^{(-1)})\omega(D_1) + b_1\sigma(a_{k0}^{(-1)})\omega(D_0)) \\ &= -\sigma(a_{k1}^{(-1)}/(1+p_0b_1))(\omega(D_1) - b_1\sigma(a_{k0}^{(-1)})\sigma(a_{k1}^{(-1)})\omega(D_0)), \end{aligned}$$

следователно $\sigma(\delta(Q_1)) = -\sigma(a_{k1}^{(-1)}/(1+p_0b_1))$.

Да допуснем, че за някое j, $1 < j < i$, е вярно

$$\begin{aligned} Q_j(D_{K_i}) &= Q_j = (1/(1+p_{j-1}b_j))(D_j - b_jQ_{j-1}), \\ \sigma(\delta(Q_j)) &= -\sigma(a_{ij}^{(-1)}/(1+p_{j-1}b_j)). \end{aligned}$$

Ще докажем, че

$$\begin{aligned} Q_{j+1}(D_{K_i}) &= Q_{j+1} = (1/(1+p_j b_{j+1}))(D_{j+1} - b_{j+1}Q_j), \\ \sigma(\delta(Q_{j+1})) &= -\sigma(a_{ij+1}^{(-1)}/(1+p_j b_{j+1})). \end{aligned}$$

Наистина,

$$Q_{j+1}(D_{K_i}) = \begin{cases} (1/(1+p_j b_{j+1}))(D_j -^- b_{j+1}Q_j), & \text{ако } b_{j+1}\delta(D_{j+1})\delta(Q_j) \geq 0, \\ (1/(1+p_j b_{j+1}))(D_j - b_{j+1}Q_j), & \text{ако } b_{j+1}\delta(D_{j+1})\delta(Q_j) < 0. \end{cases}$$

От Твърдения 3.14 и 3.15 получаваме

$$\begin{aligned} \sigma(b_{j+1}\delta(D_{j+1})\delta(Q_j)) &= \sigma(b_{j+1}a_{ij+1}^{(-1)}\omega(D_{j+1})a_{ij}^{(-1)}/(1+p_{j-1}b_j)) \\ &= \sigma(-s_j a_{ij+1}^{(-1)}a_{ij}^{(-1)}) = -\sigma(a_{ij+1}^{(-1)})^2 = - \end{aligned}$$

и следователно

$$Q_{j+1}(D_{K_i}) = Q_{j+1}.$$

По-нататък имаме

$$\begin{aligned} \delta(Q_{j+1}) &= (1/(1+p_j b_{j+1}))(\delta(D_{j+1}) - b_{j+1}\delta(Q_j)) \\ &= -\sigma(a_{ij+1}^{(-1)}/(1+p_j b_{j+1}))\omega(D_{j+1}) = \sigma(a_{ij+1}^{(-1)})b_{j+1}\delta(Q_j)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(a_{ij+1}^{(-1)}b_{j+1}\delta(Q_j)) &= \sigma(a_{ij+1}^{(-1)})\sigma(b_{j+1})\sigma(\delta(Q_j)) \\ &= \sigma(a_{ij+1}^{(-1)})\sigma(b_{j+1})\sigma(a_{ij}^{(-1)}/(1+p_{j-1}b_j)) \\ &= \sigma(a_{ij+1}^{(-1)})\sigma(s_j)\sigma(a_{ij}^{(-1)}) \\ &= \sigma(a_{ij+1}^{(-1)})^2 = +, \end{aligned}$$

следователно

$$\sigma(\delta(Q_{j+1})) = -\sigma(a_{ij+1}^{(-1)}/(1+p_j b_{j+1})),$$

с което твърдението е доказано. □

Следствие 3.17. При предположенията на Твърдение 3.16 е в сила равенството $\sigma(\delta(Q_i)) = -\sigma(a_{ii}^{(-1)}/(1+p_{i-1}b_i))$.

Дефинираме следната процедура $(A1)$–$(A2)$ за пресмятане на интервалния вектор $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$:

$(A1)$. Пресмятаме p_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, съгласно (25);

$Q_0 = D_0;$

$$\begin{cases} Q_j = (1/(1 + p_{j-1}b_j))(D_j - b_j Q_{j-1}), \\ \sigma(\delta(Q_j)) = -\sigma(a_{jj}^{(-1)}/(1 + p_{j-1}b_j)), \\ j = 1, 2, \ldots, n-1; \end{cases}$$

$$X_n = (1/(1 + p_{n-1}b_n))(D_n - b_n Q_{n-1});$$

$(A2)$. За $i = n-1, n-2, \ldots, 0$ пресмятаме

$$\begin{cases} \delta(D_j) = -\sigma(a_{ij}^{(-1)})\omega(D_j)), \quad j = 0, 1, \ldots, n; \\ Q_j(D_{K_i}) = \begin{cases} (1/(1 + p_{j-1}b_j))(D_j -^- b_j Q_{j-1}(D_{K_i}), \\ \qquad b_j \delta(D_j)\delta(Q_{j-1}(D_{K_i})) \geq 0, \\ (1/(1 + p_{j-1}b_j))(D_j - b_j Q_{j-1}(D_{K_i})) \\ \qquad \text{в противен случай;} \end{cases} \\ \delta(Q_j(D_{K_i})) = (1/(1 + p_{j-1}b_j))(\delta(D_j) - b_j \delta(Q_{j-1}(D_{K_i}))); \\ j = i+1, i+2, \ldots, n-1; \end{cases}$$

$$Q_i(D_{K_i})) = Q_i;$$

$$X_n(D_{K_i}) = \begin{cases} (1/(1 + p_{n-1}b_n))(D_n -^- b_n Q_{n-1}(D_{K_i})), \\ \qquad b_n \delta(D_n)\delta(Q_{n-1}(D_{K_i})) \geq 0, \\ (1/(1 + p_{n-1}b_n))(D_n - b_n Q_{n-1}(D_{K_i})) \\ \qquad \text{в противен случай;} \end{cases}$$

$$\delta(X_n(D_{K_i})) = (1/(1 + p_{n-1}b_n))(\delta(D_n) - b_n \delta(Q_{n-1}(D_{K_i})));$$

$$\begin{cases} X_j(D_{K_i}) = \begin{cases} p_j X_{j+1}(D_{K_i}) + Q_j(D_{K_i}), \\ \qquad p_j \delta(X_{j+1}(D_{K_i})\delta(Q_j(D_{K_i}))) \geq 0, \\ p_j X_{j+1}(D_{K_i}) +^- Q_j(D_{K_i}) \\ \qquad \text{в противен случай;} \end{cases} \\ \\ \delta(X_j(D_{K_i})) = p_j \delta(X_{j+1}(D_{K_i})) + \delta(Q_j(D_{K_i})); \\ j = n-1, n-2, \ldots, i+1; \end{cases}$$

$$X_i = \begin{cases} p_i X_{i+1}(D_{K_i}) + Q_i, & a_i a_{ii}^{(-1)} \delta(X_{i+1}(D_{K_i})) \geq 0, \\ p_i X_{i+1}(D_{K_i}) +^- Q_i & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Теорема 3.18. Интервалният вектор $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$, пресметнат по схемата $(A1)$–$(A2)$, представлява оптимално решение на тридиагоналната интервална линейна система (23).

Доказателство. Интервалният вектор $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$ е най-малкият интервален вектор, съдържащ множеството от решения на (23). Това следва от факта, че X е пресметнат като обхват на функция съгласно Теорема 1.45. Условията в дясната страна на израза за X_i се получават от

$$\sigma(p_i\delta(X_{i+1}(D_{K_i}))\delta(Q_i)) = \sigma(p_i a_{ii}^{(-1)}/(1+p_{i-1}b_i)\delta(Y_{i+1}(D_{K_i})))$$
$$= -\sigma(a_i/(1+p_{i-1}b_i)^2 a_{ii}^{(-1)}\delta(Y_{i+1}(D_{K_i}))) = \sigma(a_i a_{ii}^{(-1)}\delta(Y_{i+1}(D_{K_i}))). \qquad \square$$

Забележка 3.19. В схемата $(A1)$–$(A2)$ се използуват само знаците на елементите $a_{ij}^{(-1)}$ на обратната матрица, а не техните стойности.

Като частен случай от Теорема 3.18 получаваме

Следствие 3.20. Нека компонентите на матрицата A и на обратната матрица $A^{-1} = (a_{ij}^{(-1)})$ удовлетворяват неравенствата

$$a_i b_{i+1} a_{ii}^{(-1)} a_{i+1i+1}^{(-1)} \geq 0, \quad a_{ii}^{(-1)}/(1+p_{i+1}b_i) \geq 0, \ \ i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

където $p_{-1} = b_0 = 0$. Тогава оптималното решение $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$ се пресмята по следната схема $(B1)$–$(B2)$:

$(B1)$. $p_0 = -a_0$, $Q_0 = D_0$;
$p_i = -a_i/(1+p_{i-1}b_i)$,
$Q_i = (1/(1+p_{i-1}b_i)) \times (D_i - b_i Q_{i-1})$;
$i = 1, 2, \ldots, n-1$;

$(B2)$. $X_n = (1/(1+p_{n-1}b_n)) \times (D_n - b_n Q_{n-1})$;
$X_i = p_i X_{i+1} + Q_i$, $i = n-1, n-2, \ldots, 0$.

Доказателство. Ще докажем последователно следните равенства:

$$(1) \quad X_{n-1} = p_{n-1}X_n + Q_{n-1}, \quad \text{ако} \quad \begin{array}{l} a_{n-1}b_n a_{n-1n-1}^{(-1)} a_{nn}^{(-1)} \geq 0, \\ a_{n-1n-1}^{(-1)}/(1+p_{n-2}b_{n-1}) \geq 0; \end{array}$$

$$(2) \quad X_{n-2} = p_{n-2}X_{n-1} + Q_{n-1}, \quad \text{ако} \quad \begin{array}{l} a_{n-1}b_n a_{n-1n-1}^{(-1)} a_{nn}^{(-1)} \geq 0, \\ a_{n-2}b_{n-1} a_{n-2n-2}^{(-1)} a_{n-1n-1}^{(-1)} \geq 0, \\ a_{n-2n-2}^{(-1)}/(1+p_{n-3}b_{n-2}) \geq 0, \\ a_{n-1n-1}^{(-1)}/(1+p_{n-2}b_{n-1}) \geq 0; \end{array}$$

$$
\begin{array}{llll}
(n-i-1) & X_{i+1} = p_{i+1}X_{i+2} + Q_{i+1}, & \text{ако} & a_{i+1}b_{i+2}a^{(-1)}_{i+1i+1}a^{(-1)}_{i+2i+2} \geq 0, \\
& & & a_{i+2}b_{i+3}a^{(-1)}_{i+2i+2}a^{(-1)}_{i+3i+3} \geq 0, \\
& & & \dots \\
& & & a_{n-1}b_n a^{(-1)}_{n-1n-1}a^{(-1)}_{nn} \geq 0, \\
& & & a_{k+1k+1}/(1+p_k b_{k+1}) \geq 0, \\
& & & \dots \\
& & & a^{(-1)}_{n-1n-1}/(1+p_{n-2}b_{n-1}) \geq 0; \\
(n-i) & X_i = p_i X_{i+1} + Q_i, & \text{ако} & a_i b_{i+1} a^{(-1)}_{ii} a^{(-1)}_{i+1i+1} \geq 0, \\
& & & a_{i+1}b_{i+2}a^{(-1)}_{i+1i+1}a^{(-1)}_{i+2i+2} \geq 0, \\
& & & \dots \\
& & & a_{n-1}b_n a^{(-1)}_{n-1n-1}a^{(-1)}_{nn} \geq 0, \\
& & & a^{(-1)}_{ii}/(1+p_{i-1}b_i) \geq 0, \\
& & & a^{(-1)}_{i+1i+1}/(1+p_i b_{i+1}) > 0, \\
& & & \dots \\
& & & a^{(-1)}_{n-1n-1}/(1+p_{n-2}b_{n-1}) \geq 0; \\
& i = n-4, n-3, \dots, 1, 0. & &
\end{array}
$$

Условията в дясната страна на равенството на стъпка $(n-i-1)$ се съдържат в условията на стъпка $(n-i)$; в последната имаме две допълнителни неравенства

$$
a_i b_{i+1} a^{(-1)}_{ii} a^{(-1)}_{i+1i+1} \geq 0, \quad a^{(-1)}_{ii}/(1+p_{i-1}b_i) \geq 0,
$$

чиято проверка ще докаже твърдението. Без ограничение на общността ще докажем прехода от стъпка (1) към стъпка (2). Прилагайки Теорема 3.18 за $i = n-1$ към стъпка (1) получаваме

$$
X_n(D_{K_{n-1}}) = (1/(1+p_{n-1}b_n))(D_n - b_n Q_{n-1}), \text{ ако } b_n a^{(-1)}_{n-1n}\delta(Q_{n-1}) \geq 0.
$$

Тъй като $\sigma(\delta(Q_{n-1})) = -\sigma(a^{(-1)}_{n-1n-1})/(1+p_{n-2}b_{n-1}))$, от Твърдение 3.14 и (26) получаваме

$$
\begin{aligned}
&\sigma(b_n a^{(-1)}_{n-1n}\delta(Q_{n-1})) \\
&= -\sigma(b_n p_{n-1} a^{(-1)}_{nn} a^{(-1)}_{n-1n-1}/(1+p_{n-2}b_{n-1})) \\
&= \sigma(b_n(a_{n-1}/(1+p_{n-2}b_{n-1}))a^{(-1)}_{nn}a^{(-1)}_{n-1n-1}(1/(1+p_{n-2}b_{n-1}))) \\
&= \sigma(b_n a_{n-1} a^{(-1)}_{nn} a^{(-1)}_{n-1n-1}).
\end{aligned}
$$

От последното равенство и от израза за $\delta(X_n)$ получаваме

$$\sigma(\delta(X_n)) = -\sigma(a_{n-1n}^{(-1)}/(1+p_{n-1}b_n)).$$

По-нататък имаме

$$X_{n-1} = p_{n-1}X_n + Q_{n-1}, \text{ ако } p_{n-1}\delta(X_n)\delta(Q_{n-1}) \geq 0.$$

Горният израз за X_{n-1} съдържа X_n, така че към условията в дясната страна трябва да добавим и неравенството $b_n a_{n-1} a_{nn}^{(-1)} a_{n-1n-1}^{(-1)} \geq 0$. Имаме

$$\begin{aligned}
&\sigma(p_{n-1}\delta(X_n)\delta(Q_{n-1}))\\
&= \sigma(p_{n-1}(a_{n-1n}^{(-1)}/(1+p_{n-1}b_n))(a_{n-1n-1}^{(-1)}/(1+p_{n-2}b_{n-1})))\\
&= \sigma(p_{n-1}^2(a_{nn}^{(-1)}/(1+p_{n-1}b_n))(a_{n-1n-1}^{(-1)}/(1+p_{n-2}b_{n-1})))\\
&= \sigma(a_{n-1n-1}^{(-1)}/(1+p_{n-2}b_{n-1})).
\end{aligned}$$

Следователно

$$X_{n-1} = p_{n-1}X_n + Q_{n-1}, \text{ ако } \begin{array}{l} a_{n-1}b_n a_{nn}^{(-1)} a_{n-1n-1}^{(-1)} \geq 0, \\ a_{n-1n-1}^{(-1)}/(1+p_{n-2}b_{n-1}) \geq 0. \end{array} \tag{28}$$

За доказателството на стъпка (2) прилагаме Теорема 3.18 за $i = n-2$. Получаваме последователно

$$\begin{aligned}
Q_{n-1}(D_{K_{n-2}}) &= (1/(1+p_{n-2}b_{n-1}))(D_{n-1} - b_{n-1}Q_{n-2}) = Q_{n-1},\\
&\quad \text{ако } a_{n-2}b_{n-1}a_{n-2n-2}^{(-1)}a_{n-1n-1}^{(-1)} \geq 0;\\
X_n(D_{K_{n-2}}) &= (1/(1+p_{n-1}b_n))(D_n - b_nQ_{n-1}) = X_n,\\
&\quad \text{ако } a_{n-1}b_n a_{n-1n-1}^{(-1)} a_{nn}^{(-1)} \geq 0\\
&\quad \text{и } a_{n-2}b_{n-1}a_{n-2n-2}^{(-1)}a_{n-1n-1}^{(-1)} \geq 0;\\
X_{n-1}(D_{K_{n-2}}) &= (1/(1+p_{n-1}Y_n + Q_{n-1} = X_{n-1},\\
&\quad \text{ако } a_{n-1n-1}^{(-1)}/(1+p_{n-2}b_{n-1}) \geq 0\\
&\quad \text{и условията при } X_n;\\
X_{n-2}(D_{K_{n-2}}) &= p_{n-2}X_{n-1} + Q_{n-2} = X_{n-2},\\
&\quad \text{ако } (a_{n-1n-1}^{(-1)}/(1+p_{n-2}b_{n-1}))(a_{n-2n-2}^{(-1)}/(1+p_{n-3}b_{n-2})) \geq 0\\
&\quad \text{и условията при } X_n.
\end{aligned}$$

Следователно

$$X_{n-2} = p_{n-2}X_{n-1} + Q_{n-1}, \text{ ако } \begin{array}{l} a_{n-1}b_n a_{n-1n-1}^{(-1)} a_{nn}^{(-1)} \geq 0, \\ a_{n-2}b_{n-1}a_{n-2n-2}^{(-1)}a_{n-1n-1}^{(-1)} \geq 0, \\ a_{n-2n-2}^{(-1)}/(1+p_{n-3}b_{n-2}) \geq 0, \\ a_{n-1n-1}^{(-1)}/(1+p_{n-2}b_{n-1}) \geq 0, \end{array}$$

с което (2) е доказано.

От (28) получаваме

$$X_{n-2} = p_{n-2}X_{n-1} + Q_{n-2}, \text{ ако } \begin{array}{l} a_{n-2}b_{n-1}a^{(-1)}_{n-2n-2}a^{(-1)}_{n-1n-1} \geq 0, \\ a^{(-1)}_{n-2n-2}/(1 + p_{n-3}b_{n-2}) \geq 0. \end{array}$$

В общия случай, т. е. за произволно i, $0 \leq i \leq n-1$, имаме аналогично

$$X_i = p_iX_{i+1} + Q_i, \text{ ако } \begin{array}{l} a_ib_{i+1}a^{(-1)}_{ii}a^{(-1)}_{i+1i+1} \geq 0, \\ a^{(-1)}_{ii}/(1 + p_{i-1}b_i) \geq 0. \end{array}$$

Заключителни бележки. От Теорема 3.18 е ясно, че пресмятането на оптимално решение на интервална линейна е свързано с разпределението на знаците на компонентите както на матрицата A, така и на обратната матрица A^{-1}. Например ако A е M-матрица, то условията на Следствие 3.20 са удовлетворени. Тогава оптималното решение се пресмята със стандартни интервално-аритметични операции. Класове матрици, които удовлетворяват изискванията на Следствие 3.20, са разгледани в [116]. В общия случай на произволна матрица A пресмятането на оптимално решение е много трудна задача.

3.5 Числен алгоритъм с верификация на резултата за нелинейни системи от K-изотонни функции

Тук ще използваме означенията и дефинициите, въведени в т. 1.3. Нека $X \in IR^n$ и $\{\omega(X)\}$ е множеството от върховете на X. Нека $K \in \mathcal{K}$ е конус, пораждащ наредбата $\leq_K$, а $u(K;X)$, $v(K;X)$ са K-върховете на X, дефинирани съгласно Твърдение 1.41.

От Твърдение 1.41 получаваме

$$X = (K + u(K;X)) \bigcap X = (-K + v(K;X)) \bigcap X.$$

Нека $x_0 \in int\, X$ е вътрешна точка за X. В сила е и следното представяне

$$X = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} ((K + x_0) \bigcap X) = \bigcup_{w \in \{w(X)\}} [x_0 \vee w]. \tag{29}$$

Интервалните вектори

$$X' = (K + x_0) \bigcap X = [x_0 \vee v(K; X)],$$
$$X'' = (-K + x_0) \bigcap X = [x_0 \vee u(K; X)]$$

са такива, че $X' \subseteq X$, $X'' \subseteq X$.

Нека $X, Y \in IR^n$. За всеки конус $K \in \mathcal{K}$ съществуват два върха $w(K; X)$ и $w(K; Y)$ съответно на X и Y, такива че е изпълнено

$$X = (w(K; X) + K) \bigcap X, \qquad Y = (w(K; Y) + K) \bigcap Y.$$

Върховете $w(K; X)$ и $w(K; Y)$ ще наричаме двойка K-върхове на X и Y.

Нека $x, y \in R^n$, $x - y \in K \bigcup (-K)$. Означаваме

$$\min_K\{x, y\} = \begin{cases} x, & \text{ако } x \leq_K y, \\ y, & \text{ако } x \geq_K y; \end{cases} \qquad \max_K\{x, y\} = \begin{cases} y, & \text{ако } x \leq_K y, \\ x, & \text{ако } x \geq_K y. \end{cases}$$

Нека $X, Y \in IR^n$. За $v(K; X) - v(K; Y)$, $u(K; X) - u(K; Y) \in K \bigcup (-K)$ дефинираме

$$X \sqcap_K Y = \begin{cases} [\min_K\{v(K; X), v(K; Y)\} \vee \max_K\{u(K; X), u(K; Y)\}], & \\ & \text{ако } X \bigcap Y = \emptyset, \\ \emptyset, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R^n$, е K-изотонна функция за $K \in \mathcal{K}$ (вж. Дефиниция 1.42). Да предположим, че f е непрекъснато диференцируема в D и да означим с $F' : ID \to IR$ изотонно по включване интервално разширение на градиента f'. За $X \in ID = \{X \in IR^n : X \subseteq D\}$ да означим

$$con\, F'(X) = \{z \in R^n : z = \lambda y,\, y \in F'(X), \lambda \geq 0\}.$$

От Твърдение 1.43 следва, че $f'(x) \in K$ за всяко $x \in X$. Без ограничение можем да предположим, че $con\, F'(X) \subseteq K$; в противен случай можем да положим $con\, F'(X) = con\, F'(X) \bigcap K$. Тъй като $F'(X)$ е изпъкнало множество, то $con\, F'(X)$ е изпъкнал конус.

Твърдение 3.21. При направените по-горе предположения за f и F', $con\, F'(X)$, $X \in ID$, е затворен конус.

Доказателство. Ако $con\ F'(X) = K$, то той е затворен конус. Нека $con\ F'(X) \subset K$. Тогава имаме $0 \notin F'(X)$. Да вземем редица от точки $\{z_n\} \in con\ F'(X)$, такава че $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, $z_0 \neq 0$. За всяко n е в сила представянето $z_n = \lambda_n y_n$, $y_n \in F'(X), \lambda_n \geq 0$. Редицата $\{\lambda_n\}$ е ограничена. Наистина, ако допуснем, че $\lambda_n \to \infty$, то тогава $\lambda_n \|y_n\| \to \|z_0\|$ и следователно $\|z_n\| \to 0$, което противоречи на предположението, че $0 \notin F'(X)$. Тъй като $F'(X)$ е компактно множество, съществува подредица $\{y_{n_i}\}$, за която $\lim_{i\to\infty} y_{n_i} = y_0$, $y_0 \in F'(X)$. Нека $\lim_{i\to\infty} \lambda_{n_i} = \lambda_0$, $\lambda_0 \geq 0$. Тогава

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{i\to\infty} z_{n_i} = \lim_{i\to\infty} \lambda_{n_i} y_{n_i} = \lambda_0 y_0 \in con\ F'(X),$$

което означава, че $con\ F'(X)$ е затворен конус. □

За $x, y \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, да означим с $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ скаларното произведение в R^n.

Дефинираме

$$(con\ F'(X))^\perp = \{y \in R^n : \langle p, y\rangle = 0 \text{ поне за едно } p \in con\ F'(X)\}.$$

Очевидно $(con\ F'(X))^\perp$ е затворен конус. От дефиницията на $(con\ F'(X))^\perp$ следва, че ако $y \in (con\ F'(X))^\perp$, то $-y \in (con\ F'(X))^\perp$.

Твърдение 3.22. Ако $int(conF'(X)) \neq \emptyset$ (а следователно и $int(conF'(X))^\perp \neq \emptyset$), то $(con\ F'(X))^\perp$ не е изпъкнал конус.

Доказателство. Нека $x, y \in (con\ F'(X))^\perp$, $x \neq y$. Тогава имаме $-x, -y \in (con\ F'(X))^\perp$. Да разгледаме сегментите

$$\begin{aligned} &\lambda x + (1-\lambda)y, \quad &&\lambda x + (1-\lambda)(-y), \\ &\lambda(-x) + (1-\lambda)y, \quad &&\lambda(-x) + (1-\lambda)(-y) \end{aligned}$$

за $\lambda \in [0,1]$. Да допуснем, че

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in (con\ F'(X))^\perp\ \forall\ \lambda \in [0,1]. \tag{30}$$

Тогава ще бъде изпълнено $\lambda(-x) + (1-\lambda)(-y) \in (con\ F'(X))^\perp$. Да разгледаме сегмента $\lambda(-x) + (1-\lambda)y$ и да предположим, че точката $\lambda(-x) + (1-\lambda)y \in (con\ F'(X))^\perp$ за някое $\lambda > 0$. В частност за $\lambda = \frac{1}{2}$ получаваме $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in (con\ F'(X))^\perp$. Следователно съществува $r \in con\ F'(X)$, такова че е изпълнено $\langle -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\ ,\ r\rangle = 0$, т. е. $\langle x, r\rangle = \langle y, r\rangle$. Поради (30), последното равенство е възможно точно тогава, когато $x = y$. Полученото противоречие доказва твърдението. □

Теорема 3.23. Нека $f : D \to R$, $D \subseteq R^n$, е K-изотонна и непрекъснато диференцируема в D. Нека $F' : ID \to IR$ е изотонно по включване интервално разширение на f', такова че е изпълнено $con\ F'(X) \subseteq K$, $X \in ID$. Да означим $Z = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Тогава за всяко $z^* \in Z$ е в сила следното включване:

$$Z \subset (z^* + (con\ F'(X))^{\perp}) \bigcap X.$$

Доказателство. Нека $z \in Z$, $z \neq z^*$. От теоремата за средните стойности получаваме $0 = f(z) - f(z^*) = \langle f'(\xi), z - z^* \rangle$, където $\xi = z + \theta(z^* - z)$, $0 < \theta < 1$. От $f'(\xi) \in F'(X)$ следва $\mu f'(\xi) = p \in con\, F'(X)$ за всяко $\mu > 0$, т.е. $\langle p, z - z^* \rangle = 0$. Следователно $z - z^* \in (con\ F'(X))^{\perp}$, което е еквивалентно на $z \in z^* + (con\ F'(X))^{\perp}$. □

Следствие 3.24. Нека са изпълнени предположенията на Теорема 3.23. Да означим с $u = u(K; X)$, $v = v(K; X)$ K-върховете на X. Тогава за всяко $z^* \in Z$ и $w \in \{w(X)\}$ е в сила включването

$$Z \subset \bigcup_{w \notin \{u,v\}} [w \vee z^*].$$

Доказателство. От включването $con\, F'(X) \subseteq K$ следва $(con\, F'(X))^{\perp} \subseteq K^{\perp}$, където $K^{\perp} = \{y \in R^n : \langle y, p \rangle = 0$ поне за едно $p \in K\}$. Лесно се вижда, че е изпълнено $K^{\perp} = \bigcup\{\tilde{K} : \tilde{K} \in \mathcal{K} \setminus \{K, -K\}\}$. По-нататък имаме $(z^* + K^{\perp}) \bigcap X = \bigcup\{(z^* + \tilde{K}) \bigcap X : \tilde{K} \in \mathcal{K} \setminus \{K, -K\}\}$. Тъй като $(z^* + K) \bigcap X = [z^* \vee v]$ и $(z^* + (-K)) \bigcap X = [z^* \vee u]$, получаваме $(z^* + K^{\perp}) \bigcap X = \bigcup_{w \notin \{u,v\}} [w \vee z^*]$ и следователно $Z \subset \bigcup_{w \notin \{u,v\}} [w \vee z^*]$. □

Следствие 3.25. При предположенията на Следствие 3.24 е изпълнено $Z \subset X \setminus ((z^* \vee u] \bigcup [v \vee z^*))$.

Теорема 3.26. Нека $f : D \to R^n$, $D \subseteq R^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, е векторна функция, такава че всяка координатна функция f_i е K_i-изотонна за $K_i \in \mathcal{K}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Да предположим, че f_i е непрекъснато диференцируема в $X \in ID$ и да означим с $F_i' : ID \to IR$ изотонно по включване интервално разширение на f_i', което удовлетворява $con\ F_i'(X) \subseteq K_i$; да означим с $Z_i = \{x \in X : f_i(x) = 0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Нека $x^* \in X$ е (единственото) решение на $f(x) = 0$. Тогава за произволно $z_i^* \in Z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, е в сила включването

$$x^* \in (\bigcap_{i=1}^{n} (z_i^* + (con\ F_i'(X))^{\perp})) \bigcap X.$$

Доказателство. Следва от Теорема 3.23 и от факта, че $x^* \in \bigcap_{i=1}^n Z_i$. □

Следствие 3.27. Нека са изпълнени предположенията на Теорема 3.26. Да означим с $u_i = u(K_i; X)$, $v_i = v(K_i; X)$ K_i-върховете на X, а с $w \in \{w(X)\}$ произволен връх на X. Тогава е изпълнено

$$x^* \in \bigcap_{i=1}^{n} \Big(\bigcup_{w \notin \{u_i, v_i\}} [w \vee z_i^*] \Big).$$

Нека $f : D \to R^n$, $D \subseteq R^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, удовлетворява изискванията на Следствие 3.27. От горните разглеждания следва, че точките $z_i^* \in Z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, са произволно избрани. Можем да намерим такива точки z_i^*, решавайки уравненията $\varphi_i(t) = 0$, $t \in [0,1]$, за $\varphi_i(t) = f_i(u_i + t(v_i - u_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (вж. т. 1.3). Очевидно ако $t_i^* \in [0,1]$ е единствения корен на $\varphi_i(t) = 0$, то е изпълнено $z_i^* = u_i + t_i^*(v_i - u_i) \in Z_i$.

За численото решаване на $\varphi_i(t) = 0$, $t \in [0,1]$, ще използуваме интервалния итерационен метод от Нютонов тип, представен в т. 2.2:

$$\begin{cases} T^{(0)} = [0,1]; \\ T^{(j+1)} = T^{(j)} -^- \varphi_i(T^{(j)}) /^- \varphi_i'(T^{(j)}), \\ j = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{31}$$

където $\varphi_i(T^{(j)}) = f_i(u_i + T^{(j)}(v_i - u_i))$, $\varphi_i'(T^{(j)}) = \langle v_i - u_i\, , \, F_i'(u_i + T^{(j)}(v_i - u_i)) \rangle$, и Алгоритъм с верификация на резултата 2.2. Последният произвежда машинен интервал T_i^*, съдържащ точното решение $t_i^* \in [0,1]$ на $\varphi_i(t) = 0$. Тогава интервалният вектор

$$Z_i^* = u_i + T_i^*(v_i - u_i) \tag{32}$$

съдържа $z_i^* = u_i + t_i^*(v_i - u_i) \in Z_i$. От Следствие 3.24 получаваме $Z_i \subset \bigcup_{w \notin \{u_i, v_i\}} [w \vee Z_i^*]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

По-долу ще опишем основните стъпки на алгоритъм с верификация за пресмятане на включване на $x^* \in X$, разглеждайки $X \in ID$ като начален интервален вектор.

Алгоритъм с верификация на резултата 3.3

1. Определяне на конусите на наредба. Пресмятаме (със закръгляване) интервални разширения $F_i'^{\diamond}(X)$ на градиентите $f_i'(x)$ в X, $i = 1,2,\ldots,n$. Конусите на наредбата $K_i = K_{(I,J)} \in \mathcal{K}$ на координатните функции определяме в зависимост от знаците на компонентите на $F_i'^{\diamond}(X) = (F_{i1}', F_{i2}', \ldots, F_{in}')$: ако $F_{ij}' \geq 0$, то $j \in I$, ако $F_{ij}' < 0$, то $j \in J$. Определяме K_i-върховете $u_i(X) = u(K_i; X)$, $v_i(X) = v(K_i; X)$, $i = 1,2,\ldots,n$.

2. Начален тест за съществуване на решение. За $i = 1,2,\ldots,n$ пресмятаме (със закръгляване) обхватите $f_i^{\diamond}(X) = [f_i^{\diamond}(u_i(X)) \vee f_i^{\diamond}(v_i(X))]$. Ако съществува индекс i, такъв че е изпълнено $0 \notin f_i^{\diamond}(X)$, спираме – нелинейната система $f(x) = 0$ няма решение в X.

3. Итерационен процес. Ако $K_i \neq K_j$ или $K_i \neq -K_j$ за $i \neq j$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, отиваме на стъпка **3.1**; Ако $K_i = K_j$ или $K_i = -K_j$ за $i \neq j$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, отиваме на стъпка **3.2**.

3.1. (1). Да разгледаме първото уравнение $f_1(x) = 0$ на системата $f(x) = 0$ (или кое да е друго уравнение, което ще наричаме първо). Прилагаме Алгоритъм 2.2 за решаване на $\varphi_1(t) = 0$, $t \in [0,1]$.

(2). Ако уравнението няма решение в $[0,1]$, спираме – нелинейната система няма решение в X. В противен случай намираме интервал T_1^* и пресмятаме интервалния вектор Z_1^* съгласно (32).

(3). Построяваме $2^n - 2$ интервални вектори $\{Y\}$ от вида $Y = [w(X) \vee Z_1^*]$, където $w(X)$ е връх на X, $w(X) \notin \{u_1(X), v_1(X)\}$. Във всеки интервален вектор Y пресмятаме обхватите $f_i^{\diamond}(Y) = [f_i^{\diamond}(u_i(Y)) \vee f_i^{\diamond}(v_i(Y))]$, $i = 2,3,\ldots,n$. Ако за някой индекс i, $i \neq 1$, получим $0 \notin f_i^{\diamond}(Y)$, елиминираме Y; в противен случай запазваме Y в списък L_1 от интервални вектори за по-нататъшна обработка; в друг списък IL_1 записваме следната информация: индекс idx на решаваното уравнение (първоначално ще имаме $idx = 1$), брой nbr на запазените в L_1 интервални вектори и интервалния вектор X, от който са получени всички $Y \in L_1$.

(4). Ако списъкът L_1 е празен, спираме – системата няма решение в началния интервален вектор.

(5). Прочитаме от IL_1 един запис (idx, nbr, X), където idx е индексът на решеното в X уравнение, от което са получени nbr на брой интервални вектори Y.

(6). Прочитаме един интервален вектор Y от L_1; изтриваме Y от L_1.

(7). Ако съществува индекс l, такъв че $u_l(X)$ или $v_l(X)$ принадлежат на Y, прилагаме Алгоритъм 2.2 към уравнението $\varphi_l(t) = 0$; в противен случай решаваме $\varphi_l(t) = 0$ за $l \neq idx$. Ако не съществува решение, отиваме на (6); в противен случай пресмятаме Z_l^*.

(8). Построяваме $2^n - 2$ интервални вектори $\{Y'\}$ от вида $Y' = [w(Y) \vee Z_l^*]$ за $w(Y) \notin \{u_l(Y), v_l(Y)\}$. Върху Y' пресмятаме обхватите $f_i^\diamond(Y')$, $i \neq l$. Ако съществува индекс i, такъв че $0 \notin f_i^\diamond(Y')$, елиминираме Y'; в противен случай го записваме в списък L_2. В друг списък IL_2 записваме информацията за Y': индекс l, брой на интервалните вектори Y', запазени в L_2, и Y.

(9). Повтаряме стъпки (5)–(8) до изчерпване на списъка IL_1.

(10). Преименуваме L_2 на L_1, IL_2 на IL_1 и отиваме на (4).

3.2. (1). Прилагаме Алгоритъм 2.2 за последователно решаване на всички уравнения $\varphi_i(t) = 0$, $t \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$; ако поне едно от уравненията няма решение, спираме – нелинейната система няма решение в началния интервален вектор. В противен случай пресмятаме интервалните вектори Z_i^*, $i = 1, 2, \ldots, n$, съгласно (32).

(2). Ако $\bigcap_{i=1}^n Z_i^* \neq \emptyset$, отиваме на стъпка (11); в противен случай намираме интервалния вектор $Z = (\sqcap_K)_{i=1}^n Z_i^*$.

(3). Построяваме интервални вектори от вида $Y = [w(K; X) \vee w(K; Z)]$, където $w(K; X), w(K; Z)$ е двойка K-върхове на X и Z за $K \in \mathcal{K} \setminus K_1$. Във всеки интервален вектор Y пресмятаме обхватите $f_j^\diamond(Y)$ за $j = 1, 2, \ldots, n$; ако $0 \notin f_j^\diamond(Y)$ за някой индекс j, елиминираме Y; в противен случай го записваме в списък L_1 от интервални вектори за по-нататъшна обработка.

(4). Ако списъкът L_1 е празен, спираме – системата няма решение в началния интервален вектор.

(5). Прочитаме Y от L_1; изтриваме Y от L_1.

(6). Прилагаме Алгоритъм 2.2 последователно към всички уравнения $\varphi_i(t) = 0$, $t \in [0, 1]$ върху Y; ако поне едно уравнение няма решение, отиваме на стъпка (5); в противен случай намираме Z_i^*, $i = 1, 2, \ldots, n$.

(7). Ако $\bigcap_{i=1}^n Z_i^* \neq \emptyset$ върху Y, отиваме на стъпка (11); в противен случай пресмятаме $Z = (\sqcap_K)_{i=1}^n Z_i^*$.

(8). Построяваме интервални вектори от вида $Y' = [w(K; Y) \vee w(K; Z)]$, където $w(K; Y), w(K; Z)$ е двойка K-върхове на Y и Z за $K \in \mathcal{K} \setminus K_1$. Пресмятаме обхватите $f_j^\diamond(Y')$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и в друг списък L_2 записваме интервалните вектори Y', за които е изпълнено $0 \in f_j^\diamond(Y')$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

(9). Повтаряме стъпки (5)–(8) до изчерпването на L_1.

(10). Преименуваме L_2 на L_1 и отиваме на стъпка (4).

(11). Пресмятаме $Z^* = \bigvee_{i=1}^{n} Z_i^*$ и построяваме интервални вектори от вида $Y' = [w(K;Y) \vee Z^*]$ с върхове $w(K;Y)$ за $K \in \mathcal{K} \setminus K_1$. Продължаваме както в **3.1**, като в списъците IL_1 и IL_2 записваме само индекса idx на решаваното уравнение и броя nbr на получените интервални вектори.

Един преход от списък L_1 в списък L_2 в стъпка **3.1** или **3.2** ще наричаме една вътрешна итерация.

Критерии за прекъсване (спиране). В резултат на итерационния процес получаваме списък L_1 от интервални вектори. L_1 може да съдържа интервални вектори Y, за които $x^* \notin Y$, защото запазените интервални вектори удовлетворяват $0 \in f_i^{\diamond}(Y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и може да се случи $0 \in f_i^{\diamond}(Y)$ и $0 \notin f_i(Y)$ да бъдат изпълнени едновременно. В случая **3.1** списъкът L_1 съдържа пресичащи се интервални вектори. Итерационният процес може да доведе до много дълъг списък L_1. За да избегнем големия брой на съхраняваните интервални вектори, правим следния компромис: след определен брой, да кажем N, вътрешни итерации построяваме свързаното обединение $X_1 = \bigvee_{Y \in L_1} Y$ и рестартираме итерационния процес в стъпка **3.1**$-(1)$ с $X := X_1$. По този начин разширяваме резултата, добавяйки към X_1 точки, които вече са били елиминирани на предходни стъпки. Числените експерименти показват, че този подход е по-ефективен, особено при по-големи размерности. Избираме за броя на вътрешните итерации $N = n + (2^n - 2n) = 2^n - n$, т. е. N зависи от размерността n на нелинейната система. Ако две последователни свързани обединения X и X_1 удовлетворяват $X_1 \not\subset X$, тогава прекъсваме алгоритъма и извеждаме X като краен резултат. Ако е изпълнено $0 \in f_i^{\diamond}(u_i(X))$ или $0 \in f_i^{\diamond}(v_i(X))$ за някой индекс i, $1 \leq i \leq n$, то алгоритъмът не може да определи съществуване/несъществуване на решение в началния интервал; в противен случай X представя включване на решението x^* на $f(x) = 0$.

В случая **3.2** списъкът L_1 съдържа непресичащи се интервални вектори. Техният брой много бързо намалява при следващи вътрешни итерационни стъпки. В този случай итерационният процес продължава, докато се получи $\bigcap_{i=1}^{n} Z_i^* \neq \emptyset$ поне за едно $Y \in L_1$ (стъпка **3.2**$-(11)$). По-нататък процедираме както в **3.1**.

Забележка 3.28. В случая, когато е изпълнено $K_1 = K_2 = \ldots = K_s$ и $K_{s+1} \neq K_{s+2} \neq \ldots \neq K_n$, $1 < s < n$, върху X, можем да комбинираме двата подхода, описани в **3.1** и **3.2** по следния начин: първо решаваме уравненията $\varphi_i(t) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$, и процедираме като в **3.2**. Да означим с Y кой да е от получените интервални вектори. В Y решаваме едно уравнение, напр. $\varphi_l(t) = 0$, $s + 1 \leq l \leq n$; по-нататък процедираме както в **3.1**.

Алгоритъмът с верификация на резултата 3.3 е реализиран програмно на езика за научни изчисления Pascal-SC.

Пример 3.7 [108].

$$\left| \begin{array}{l} x_1^2 - 1.2x_2 - 1.6x_3 + 1.66 = 0 \\ 1.2x_1 + x_2^2 - 1.2x_3 - 0.97 = 0 \\ 0.9x_1 + 1.2x_2 + x_3^2 - 2.18 = 0 \end{array} \right.$$

(a) Да разгледаме начален интервален вектор

$$X_0 = \begin{pmatrix} [3.00000000000E-01, 1.30000000000E+00] \\ [3.00000000000E-01, 1.30000000000E+00] \\ [3.00000000000E-01, 1.30000000000E+00] \end{pmatrix}$$

Конусите на наредбата K_1, K_2, K_3 на координатните функции са породени съответно от $\{e_1, -e_2, -e_3\}$, $\{e_1, e_2, -e_3\}$, $\{e_1, e_2, e_3\}$. След първите $N = 5$ итерационни стъпки получаваме 6 интервални вектора в L_1, чието свързано обединение е

$$X_1 = \begin{pmatrix} [5.94452732014E-01, 7.86321110909E-01] \\ [8.98221715815E-01, 1.01120319606E+00] \\ [5.84928257624E-01, 7.00110839912E-01] \end{pmatrix}$$

Рестартирайки итерационния процес с X_1, получаваме 15 интервални вектора, чието свързано обединение е равно на

$$X_2 = \begin{pmatrix} [6.83053869086E-01, 7.24779175147E-01] \\ [9.20839336685E-01, 9.54921951762E-01] \\ [6.12910160130E-01, 6.50357851690E-01] \end{pmatrix}$$

По-нататък получаваме последователно

$$X_3 = \begin{pmatrix} [7.00666456963E-01, 7.11106405447E-01] \\ [9.40805076938E-01, 9.48694129255E-01] \\ [6.37990193897E-01, 6.46671449014E-01] \end{pmatrix}$$

$$X_{17} = \begin{pmatrix} [7.06402999227E-01, 7.06402999306E-01] \\ [9.44299214228E-01, 9.44299214296E-01] \\ [6.41153837583E-01, 6.41153837712E-01] \end{pmatrix}$$

Тъй като $X_{18} \equiv X_{17}$ и $0 \notin f_i^{\diamond}(u_i(X_{17}))$, $0 \notin f_i^{\diamond}(v_i(X_{17}))$, $i = 1, 2, 3$, то крайният резултат е X_{17}, съдържащ точното решение на нелинейната система.

(б) Да разгледаме следния начален интервален вектор

$$X_0 = \begin{pmatrix} [3.00000000000E-01, 7.06400000000E-01] \\ [9.44300000000E-01, 1.30000000000E+01] \\ [3.00000000000E-01, 6.41100000000E-01] \end{pmatrix}$$

Използвайки $N = 5$ вътрешни итерации с построяване на свързано обединение след тях получаваме последователно

$$X_1 = \begin{pmatrix} [6.50384203623E-01, 7.06400000000E-01] \\ [9.44300000000E-01, 9.77907498439E-01] \\ [6.11752625164E-01, 6.41100000000E-01] \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} [7.06312593487E-01, 7.06365626701E-01] \\ [9.44322448689E-01, 9.44384881634E-01] \\ [6.41099999405E-01, 6.41100000000E-01] \end{pmatrix}$$

След 4 вътрешни итерации с X_4 получаваме, че списъкът L_1 е празен, следователно системата няма решение в началния интервален вектор X_0.

Пример 3.8 [38].

$$\left| \begin{array}{l} x_1^2 - x_2 - 1 = 0 \\ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 0.5)^2 - 1 = 0. \end{array} \right.$$

(а) Да разгледаме следния начален интервален вектор

$$X_0 = \begin{pmatrix} [1.00000000000E+00, 1.90000000000E+00] \\ [1.00000000000E+00, 1.90000000000E+00] \end{pmatrix}$$

Конусите на наредбата K_1, K_2 са породени съответно от $\{e_1, -e_2\}$, $\{-e_1, e_2\}$, т.е. K_1 и K_2 удовлетворяват $K_1 = -K_2$. След численото решаване на двете уравнения $\varphi_i(t) = 0$, $t \in [0,1]$, върху X_0 получаваме $Z_1^* \bigcap Z_2^* = \emptyset$.

Първата вътрешна итерация произвежда следните два непресичащи се интервални вектора:

$$\text{Итр. } 1: \quad \begin{pmatrix} [1.00000000000E+00, 1.52176700178E+00] \\ [1.00000000000E+00, 1.36284512126E+00] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [1.53715487874E+00, 1.90000000000E+00] \\ [1.37823299822E+00, 1.90000000000E+00] \end{pmatrix}$$

По-нататък последователно получаваме

$$\text{Итр. } 2: \quad \begin{pmatrix} [1.43531246385E+00, 1.52176700178E+00] \\ [1.17836724700E+00, 1.36284512126E+00] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [1.53715487874E+00, 1.65321227665E+00] \\ [1.37823299822E+00, 1.48473454040E+00] \end{pmatrix}$$

$$\text{Итр. } 3: \quad \begin{pmatrix} [1.53715487874E+00, 1.56745847263E+00] \\ [1.37823299822E+00, 1.41988827497E+00] \end{pmatrix}$$

$$\text{Итр. } 4: \quad \begin{pmatrix} [1.53715487874E+00, 1.54993996917E+00] \\ [1.37823299822E+00, 1.39548485058E+00] \end{pmatrix}$$

$$\text{Итр. } 5: \quad \begin{pmatrix} [1.54452101982E+00, 1.54993996917E+00] \\ [1.38895075089E+00, 1.39548485058E+00] \end{pmatrix}$$

$$\text{Итр. } 6: \quad \begin{pmatrix} [1.54452101982E+00, 1.54683410820E+00] \\ [1.38895075089E+00, 1.39180243909E+00] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [1.54757496792E+00, 1.54993996917E+00] \\ [1.39269575825E+00, 1.39548485058E+00] \end{pmatrix}$$

$$\text{Итр. } 7: \quad \begin{pmatrix} [1.54596834089E+00, 1.54683410820E+00] \\ [1.39070246404E+00, 1.39180243909E+00] \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\text{Итр. } 24: \quad \begin{pmatrix} [1.54634288329E+00, 1.54634288337E+00] \\ [1.39117631276E+00, 1.39117631285E+00] \end{pmatrix}$$

За интервалния вектор от Итр. 24 имаме $Z_1^* \bigcap Z_2^* \neq \emptyset$. След $N = 2$ вътрешни итерации получаваме 3 интервални вектора, чието свързано обединение е

$$X_1 = \begin{pmatrix} [1.54634288329E+00, 1.54634288336E+00] \\ [1.39117631277E+00, 1.39117631282E+00] \end{pmatrix}$$

Стартирайки с X_1 след $N=2$ вътрешни итерации получаваме 4 интервални вектора в списъка L_1, чието свързано обединение съвпада с X_1. Следователно X_1 е крайният резултат.

(б) За началния интервален вектор

$$X_0 = \begin{pmatrix} [1.00000000000E+00, 1.54634200000E+00] \\ [1.39117700000E+00, 1.90000000000E+00] \end{pmatrix}$$

получаваме $0 \notin f_1^{\diamond}(X_0)$ и прекъсваме итерационния процес. Системата няма решение в този начален интервален вектор.

(в) Разглеждаме следния начален интервален вектор

$$X_0 = \begin{pmatrix} [1.00000000000E+00, 1.54600000000E+00] \\ [1.00000000000E+00, 1.39100000000E+00] \end{pmatrix}$$

След 5 итерации получаваме

$$X_5 = \begin{pmatrix} [1.54529231005E+00, 1.54600000000E+00] \\ [1.38987512744E+00, 1.39100000000E+00] \end{pmatrix}$$

На следващата стъпка от X_5 получаваме два непресичащи се интервални вектора

$$Y_1 = \begin{pmatrix} [1.54529231005E+00, 1.54546339588E+00] \\ [1.39072805923E+00, 1.39100000000E+00] \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} [1.54594854741E+00, 1.54600000000E+00] \\ [1.39072805923E+00, 1.39100000000E+00] \end{pmatrix}$$

за които имаме $0 \notin f_1^{\diamond}(Y_1)$, $0 \notin f_1^{\diamond}(Y_2)$ и алгоритъмът спира – системата няма решение в началния интервален вектор.

Пример 3.9 [99].

$$\left| \begin{array}{l} \sin x_1 + \cos x_2 - 1 = 0 \\ 3 - 2\cos x_1 - 2\cos x_2 = 0. \end{array} \right.$$

(а) Да разгледаме начален интервален вектор

$$X_0 = \begin{pmatrix} [2.00000000000E-01, 1.20000000000E+00] \\ [2.00000000000E-01, 1.20000000000E+00] \end{pmatrix}$$

Конусите на наредбата K_1, K_2 удовлетворяват релацията $K_1 \neq K_2$, тъй като са породени съответно от $\{e_1, -e_2\}$ и $\{e_1, e_2\}$. Стартирайки с горния начален интервален вектор получаваме последователно

$$\begin{aligned}
X_1 &= \begin{pmatrix} [2.00000000000E-01, 4.40313582259E-01] \\ [2.00000000000E-01, 9.59686417743E-01] \end{pmatrix} \\
X_2 &= \begin{pmatrix} [2.00000000000E-01, 4.33090460492E-01] \\ [9.36852471148E-01, 9.59686417743E-01] \end{pmatrix} \\
X_3 &= \begin{pmatrix} [4.20954053955E-01, 4.33090460492E-01] \\ [9.38041374623E-01, 9.59686417743E-01] \end{pmatrix} \\
X_4 &= \begin{pmatrix} [4.23153143257E-01, 4.33090460492E-01] \\ [9.38041374623E-01, 9.41963407288E-01] \end{pmatrix} \\
X_5 &= \begin{pmatrix} [4.23153143257E-01, 4.24096601829E-01] \\ [9.38041374623E-01, 9.41591045726E-01] \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
X_{16} &= \begin{pmatrix} [4.24031039443E-01, 4.24031040306E-01] \\ [9.41517134541E-01, 9.41517134842E-01] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

От X_{16} получаваме два интервални вектора Y_1, Y_2 в списъка L_1:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \begin{pmatrix} [4.24031039443E-01, 4.24031039502E-01] \\ [9.41517134541E-01, 9.41517134824E-01] \end{pmatrix} \\
Y_2 &= \begin{pmatrix} [4.24031039495E-01, 4.24031040306E-01] \\ [9.41517134821E-01, 9.41517134842E-01] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

При следващата вътрешна итерация Y_2 съвпада с Z_2^*, т.е. той не може да бъде подобрен; от Y_1 получаваме два интервални вектора или общо

$$\begin{pmatrix} [4.24031039443E-01, 4.24031039500E-01] \\ [9.41517134809E-01, 9.41517134824E-01] \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} [4.24031039498E-01, 4.24031039502E-01] \\ [9.41517134541E-01, 9.41517134813E-01] \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} [4.24031039495E-01, 4.24031040306E-01] \\ [9.41517134821E-01, 9.41517134842E-01] \end{pmatrix}$$

Свързаното обединението на горните три интервални вектора дава

$$X_{17} = \begin{pmatrix} [4.24031039443E-01, 4.24031040306E-01] \\ [9.41517134541E-01, 9.41517134842E-01], \end{pmatrix}$$

което съвпада с X_{16}; следователно X_{16} е крайният резултат.

(б) Разглеждаме начален интервален вектор

$$X_0 = \begin{pmatrix} [4.24040000000E-01, 5.00000000000E-01] \\ [9.41520000000E-01, 1.00000000000E+00] \end{pmatrix}$$

След началния тест получаваме $0 \notin f_2^{\diamond}(X_0)$, следователно системата няма решение в X_0.

(в) За началния интервален вектор

$$X_0 = \begin{pmatrix} [4.25000000000E-01, 1.50000000000E+00] \\ [9.41000000000E-01, 1.20000000000E+00] \end{pmatrix}$$

след 9 итерации получаваме

$$X_9 = \begin{pmatrix} [4.25000000000E-01, 4.25000000001E-01] \\ [9.41023392960E-01, 9.42608855115E-01] \end{pmatrix}$$

и по-нататък $X_9 = X_{10} = \ldots$. Имаме

$$\begin{aligned} f_1^{\diamond}(u_1(X_9)) &= [-2.00000000000E-12, 0.00000000000E+00] \\ f_1^{\diamond}(v_1(X_9)) &= [1.28204879000E-03, 1.28204880000E-03]. \end{aligned}$$

Алгоритъмът не може да определи съществуване/несъществуване на решение в началния интервал, тъй като $0 \in f_1^{\diamond}(u_1(X_9))$.

Заключителни бележки. В сравнение с Алгоритъм 3.2, Алгоритъм с верификация 3.3 е приложим за начални интервални вектори със сравнително голяма ширина. От гледна точка на количеството изчисления Алгоритъм 3.3 предлага по-ефективен критерий за отхвърляне на интервални вектори, които не съдържат решение на нелинейната система. Прилагането на алгоритъма с начални интервални вектори с малка ширина може да доведе до експоненциално нарастване на броя на междинните резултати в една вътрешна итерация. В такъв случай (за интервални вектори с малка ширина) по-подходящо е прилагането на Алгоритъм 3.2 (вж. Пример 3.5 и Пример 3.7).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Изследване на статични характеристики на биотехнологични процеси в условия на неопределеност

Метановата ферментация е биологичен процес, при който отпадъчна органика се трансформира до биогаз и биошлам в отсъствие на кислород [131]. Непрекъснатият процес на метанова ферментация може да се опише със следния математически модел:

$$\frac{dx}{dt} = (\mu - u)x$$
$$\frac{ds}{dt} = u(s_0 - s) - \frac{1}{k_3}\mu x$$

където

$$\mu = \mu_m \frac{s}{k_2 + s}$$

е специфична скорост на растеж на микроорганизмите и

μ_m	е максимална специфична скорост на растеж
u	е скорост на разреждане
k_2	е коефициент на насищане на субстрата
s	е концентрация на замърсяващата органика
s_0	е концентрация на входната органика
x	е концентрация на биомасата
k_3	е добивен коефициент

От гледна точка на управлението непрекъснатият процес на метанова ферментация може да се разглежда като процес с два входа – s_0 и u, и един изход

$$Q = k\mu x,$$

където k е коефициент на пропорционалност, а Q – дебит на биогаз. При процеса на метанова ферментация е установено, че u влияе по-силно върху изхода, отколкото s_0, затова се приема $s_0 = const$.

Зависимостите между входните и изходните величини на обекта се изразяват чрез т. нар. характеристики на обекта – динамични и статични. Статичната характеристика дава най-обща представа за характера на процеса – напр. дали е линеен или нелинеен и т. н. Определянето на статичната характеристика на непрекъснат биотехнологичен процес на практика е съпроводено с продължителна работа. При наличие на математически модел на процеса този проблем може са бъде решен със средствата на числения анализ.

Статичният модел на процеса на метанова ферментация е

$$\frac{\mu_m s}{k_2 + s} - u = 0 \tag{1}$$

$$-\frac{1}{k_3}\frac{\mu_m s}{k_2 + s}x + u(s_0 - s) = 0, \tag{2}$$

а функцията

$$y(u) = k\frac{\mu_m s}{k_2 + s}x \tag{3}$$

представя статичната характеристика на процеса.

Кинетичните коефициенти μ_m, k_2, k_3 на практика са неизвестни, но са ограничени (англ. unknown but bounded). От биологични съображения и експерименти могат да се дадат граници за μ_m, k_2 и k_3. Ще отбележим, че съществуването на равновесни състояния на процеса не е гаранирано a priori и може съществено да зависи от зададените граници [46].

Целта ни е да изследваме функцията $y(u)$ относно неопределеностите в кинетичните коефициенти. За удобство да означим

$$k_1 = \mu_m.$$

Да предположим, че са известни интервали K_i за кинетичните коефициенти k_i, т. е. $k_i \in K_i$, $i = 1, 2, 3$. За фиксирано u функцията $y(u) = y(u; k_1, k_2, k_3)$ от (3) зависи явно от k_1 и k_2 и неявно от същите k_1 и k_2, както и от k_3 чрез променливите s и x от (1)–(2). Следователно задачата се свежда първо до намиране на множеството от всички решения (s, x) на нелинейната система (1)–(2), когато k_i варират в K_i, $i = 1, 2, 3$.

Да означим

$$\begin{aligned} f_1(s; u; k_1, k_2) &= \frac{k_1 s}{(k_2 + s)} - u; \\ f_2(s, x; u; k_1, k_2, k_3) &= -\frac{1}{k_3}\frac{k_1 s}{k_2 + s}x + u(s_0 - s) \end{aligned}$$

и за фиксирани s, x, u да разгледаме f_1 и f_2 като функции на k_1, k_2, k_3. Съгласно Теорема 2.22 получаваме следното представяне за обхватите F_1 и F_2 съответно на f_1 и f_2, когато $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$, $k_3 \in K_3$:

$$\begin{aligned} F_1(s;u) &= F_1(s;u;K_1,K_2) = (K_1 s)/(K_2+s) - u; \\ F_2(s,x;u) &= F_2(s,x;u;K_1,K_2,K_3) = -(1/K_3)(K_1 s/(K_2+s))x + u(s_0 - s). \end{aligned}$$

Да предположим, че u е фиксирано. Функцията $F_1(s;u)$ е интервална функция на реалната променлива s, която удовлетворява изискванията на Теорема 2.53. При зададен начален интервал S^0 за s можем да намерим интервала (ако съществува)

$$S^* = S^*(u) = \{s \in S^0 : 0 \in F_1(s;u)\}.$$

Във втората функция $F_2(s,x;u)$, която също е интервалнозначна, разглеждаме променливата s като параметър, изменящ се в интервала S^* и пресмятаме

$$F_2(x;u) = \bigvee_{s \in S^*} F_2(s,x;u).$$

За фиксирано u функцията $F_2(x;u)$ също удовлетворява изискванията на Теорема 2.53; да означим с

$$X^* = X^*(u) = \{x \in X^0 : 0 \in F_2(x;u)\}$$

при зададен начален интервал X^0 за x. Тогава интервалният вектор (S^*, X^*) ще съдържа множеството от всички решения на нелинейната система (1)–(2) за всяка конкретна фиксирана стойност на параметъра u и когато k_i варират в K_i, $i = 1,2,3$. По-нататък пресмятаме обхвата $Y(u)$ на функцията $y(u)$, т. е. пресмятаме

$$Y(u) = \{k\frac{k_1 s}{k_2+s}x : s \in S^*(u), x \in X^*(u), k_1 \in K_1, k_2 \in K_2\}.$$

Стойностите на параметъра u зависят от интервалите K_i, $i = 1,2,3$, в които варират кинетичните коефициенти. Искаме да определим интервал на изменение на u така, че да съществува S^*. Пресмятаме обхвата на интервалната функция $K_1 s/(K_2+s)$ върху интервала S^0 и полагаме

$$U = [U^-, U^+] = \bigvee_{s \in S^0} \frac{K_1 s}{K_2+s}.$$

Тогава $S^* \neq \emptyset$ за всяко $u \in U$.

От литературата и от практически експерименти са известни следните стойности за коефициентите [46]:

$$k_1 = 0.4;\;\; k_2 = 0.4;\;\; k_3 = 27.4;\;\; k = 75;\;\; s_0 = 3. \tag{4}$$

За числените експерименти разглеждаме k_i от (4) като центрове на интервали K_i; радиусите на K_i вземаме от вида pk_i, т. е.

$$K_i = [k_i(1-p), k_i(1+p)],\;\; 0 < p < 1,\;\; i = 1, 2, 3.$$

В пресметнатия интервал U за u построяваме мрежа $\{u_j\}$ от точки $u_j = u_{j-1} + (j-1)h$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $h = 0.02$, така че $u_0 = U^-$, $u_n \le U^+$. От биологични съображения за S^0 и X^0 вземаме интервалите

$$S^0 = [0.1, 2.999],\quad X^0 = [0.001, 1].$$

Програма, написана на Pascal-SC, пресмята с Алгоритъм 2.5 интервалите $S^*(u_j)$ и $X^*(u_j)$, а така също и интервали за стойностите на функцията $Y(u_j)$ във всяка точка от мрежата u_j $j = 1, 2, \ldots, n$.

Горните разсъждения остават в сила, ако не всички коефициенти k_i се изменят едновременно в интервалите K_i, $i = 1, 2, 3$. По-долу са разгледани случаи, когато само един от коефициентите варира в даден интервал, а останалите са фиксирани за стойностите от (4). За различни стойности на p са получени следните числени резултати за $Y(u_j)$:

Случай 1. $k_i \in K_i = [k_i(1-p), k_i(1+p)]$, $i = 1, 2, 3$.

(a) $p = 0.02$; $U = [7.71653543307E-02, 3.57311320755E-01]$;

$$\begin{aligned}
Y(u_1) &= [5.66175584429E-01, 6.67287590487E-01],\\
Y(u_2) &= [6.64341140654E-01, 8.83548167393E-01],\\
Y(u_3) &= [7.93233315965E-01, 1.04785834815E+00],\\
Y(u_4) &= [9.17310819265E-01, 1.20399968553E+00],\\
Y(u_5) &= [1.03501041847E+00, 1.35040758848E+00],\\
Y(u_6) &= [1.14418388920E+00, 1.48496191859E+00],\\
Y(u_7) &= [1.24179773275E+00, 1.60471843713E+00],\\
Y(u_8) &= [1.32342679102E+00, 1.70546776574E+00],\\
Y(u_9) &= [1.38235540278E+00, 1.78097711740E+00],\\
Y(u_{10}) &= [1.40787860668E+00, 1.82161233494E+00],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y(u_{11}) &= [1.38182813385E+00, 1.81165622024E+00],\\
Y(u_{12}) &= [1.27070252827E+00, 1.72361472658E+00],\\
Y(u_{13}) &= [1.00517763586E+00, 1.50465466680E+00],\\
Y(u_{14}) &= [4.14777898478E-01, 1.03869065098E+00].
\end{aligned}
$$

(б) $p = 0.05$; $U = [7.30769230769E-02, 3.72781065089E-01]$;

$$
\begin{aligned}
Y(u_{1}) &= [4.61926281651E-01, 7.31971153878E-01],\\
Y(u_{2}) &= [4.88491359281E-01, 1.10571427804E+00],\\
Y(u_{3}) &= [5.90714711842E-01, 1.31526992093E+00],\\
Y(u_{4}) &= [6.90147232362E-01, 1.51304379957E+00],\\
Y(u_{5}) &= [7.85391166081E-01, 1.69765937439E+00],\\
Y(u_{6}) &= [8.74494699282E-01, 1.86726505097E+00],\\
Y(u_{7}) &= [9.54655190522E-01, 2.01932566572E+00],\\
Y(u_{8}) &= [1.02170904497E+00, 2.15029302014E+00],\\
Y(u_{9}) &= [1.06920492821E+00, 2.25506487559E+00],\\
Y(u_{10}) &= [1.08660072983E+00, 2.32605498941E+00],\\
Y(u_{11}) &= [1.05543695511E+00, 2.35150356414E+00],\\
Y(u_{12}) &= [9.40227340717E-01, 2.31219026167E+00],\\
Y(u_{13}) &= [6.63015367946E-01, 2.17445818154E+00],\\
Y(u_{14}) &= [2.21197641508E-02, 1.87360716893E+00],\\
Y(u_{15}) &= [2.35635665528E-02, 1.20262342914E+00].
\end{aligned}
$$

Случай 2. $k_1 \in K_1 = [k_1(1-p), k_1(1+p)]$; k_2, k_3 фиксирани.

(а) $p = 0.02$; $U = [7.84000000000E-02, 3.60000000000E-01]$;

$$
\begin{aligned}
Y(u_{1}) &= [6.00120663634E-01, 6.50109890129E-01],\\
Y(u_{2}) &= [7.15175494372E-01, 8.41313023083E-01],\\
Y(u_{3}) &= [8.48814250632E-01, 9.99483894468E-01],\\
Y(u_{4}) &= [9.76331601486E-01, 1.15109636865E+00],\\
Y(u_{5}) &= [1.09615526812E+00, 1.29457390787E+00],\\
Y(u_{6}) &= [1.20612410333E+00, 1.42779065800E+00],\\
Y(u_{7}) &= [1.30318392378E+00, 1.54780937025E+00],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(u_8) &= [1.38287308846E+00, 1.65045345036E+00],\\
Y(u_9) &= [1.43840618493E+00, 1.72957621248E+00],\\
Y(u_{10}) &= [1.45893467958E+00, 1.77574397289E+00],\\
Y(u_{11}) &= [1.42597022639E+00, 1.77369978636E+00],\\
Y(u_{12}) &= [1.30522247420E+00, 1.69705025120E+00],\\
Y(u_{13}) &= [1.02512895087E+00, 1.49583642876E+00],\\
Y(u_{14}) &= [4.07317524636E-01, 1.06267531265E+00],\\
Y(u_{15}) &= [2.58258823526E-02, 1.12899608804E-01].
\end{aligned}
$$

(б) $p = 0.05$; $U = [7.60000000000E-02, 3.70588235295E-01]$;

$$
\begin{aligned}
Y(u_1) &= [5.47828362100E-01, 6.69230769251E-01],\\
Y(u_2) &= [6.18487692228E-01, 9.28361389339E-01],\\
Y(u_3) &= [7.36761953067E-01, 1.10848968793E+00],\\
Y(u_4) &= [8.49355900391E-01, 1.28184560166E+00],\\
Y(u_5) &= [9.54748021628E-01, 1.44688995221E+00],\\
Y(u_6) &= [1.05082013266E+00, 1.60157891251E+00],\\
Y(u_7) &= [1.13453309972E+00, 1.74313871730E+00],\\
Y(u_8) &= [1.20136528476E+00, 1.86770785031E+00],\\
Y(u_9) &= [1.24428302859E+00, 1.96974587505E+00],\\
Y(u_{10}) &= [1.25171482742E+00, 2.04100970317E+00],\\
Y(u_{11}) &= [1.20318802071E+00, 2.06867675269E+00],\\
Y(u_{12}) &= [1.05873217590E+00, 2.03165180818E+00],\\
Y(u_{13}) &= [7.28413819696E-01, 1.89261256542E+00],\\
Y(u_{14}) &= [2.27999999999E-02, 1.57537508935E+00],\\
Y(u_{15}) &= [2.41571428570E-02, 8.72082638762E-01].
\end{aligned}
$$

Случай 3. $k_2 \in K_2 = [k_2(1-p), k_2(1+p)]$; k_1, k_3 фиксирани.

(а) $p = 0.05$; $U = [7.69230769230E-02, 3.55029585799E-01]$;

$$
\begin{aligned}
Y(u_1) &= [5.65706482848E-01, 6.63919413939E-01],\\
Y(u_2) &= [6.55693354713E-01, 8.91953299237E-01],\\
Y(u_3) &= [7.88030395161E-01, 1.05218126936E+00],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(u_4) &= [9.17224096117E-01, 1.20237973571E+00],\\
Y(u_5) &= [1.04170972200E+00, 1.34114963759E+00],\\
Y(u_6) &= [1.15934429789E+00, 1.46656658403E+00],\\
Y(u_7) &= [1.26712140134E+00, 1.57592281718E+00],\\
Y(u_8) &= [1.36069899538E+00, 1.66530002049E+00],\\
Y(u_9) &= [1.43357979988E+00, 1.72882775549E+00],\\
Y(u_{10}) &= [1.47560421051E+00, 1.75731991608E+00],\\
Y(u_{11}) &= [1.46997378827E+00, 1.73558169743E+00],\\
Y(u_{12}) &= [1.38680952529E+00, 1.63658136095E+00],\\
Y(u_{13}) &= [1.16740534249E+00, 1.40720339814E+00],\\
Y(u_{14}) &= [6.78524770797E-01, 9.26897905764E-01].
\end{aligned}
$$

(б) $p = 0.1$; $U = [7.40740740740E-02, 3.57142857143E-01]$;

$$
\begin{aligned}
Y(u_1) &= [5.02720873077E-01, 6.92785475414E-01],\\
Y(u_2) &= [5.44817445632E-01, 1.01474562189E+00],\\
Y(u_3) &= [6.64553667384E-01, 1.19231446688E+00],\\
Y(u_4) &= [7.83806936288E-01, 1.35535367048E+00],\\
Y(u_5) &= [9.01135312260E-01, 1.50281447670E+00],\\
Y(u_6) &= [1.01452935129E+00, 1.63316665556E+00],\\
Y(u_7) &= [1.12113340608E+00, 1.74417075208E+00],\\
Y(u_8) &= [1.21678684064E+00, 1.83250294069E+00],\\
Y(u_9) &= [1.29523319465E+00, 1.89310815191E+00],\\
Y(u_{10}) &= [1.34667871133E+00, 1.91802081044E+00],\\
Y(u_{11}) &= [1.35497684812E+00, 1.89406132833E+00],\\
Y(u_{12}) &= [1.29162272842E+00, 1.79792250134E+00],\\
Y(u_{13}) &= [1.10135989459E+00, 1.58439319376E+00],\\
Y(u_{14}) &= [6.61587219645E-01, 1.15314574020E+00],\\
Y(u_{15}) &= [2.58948635631E-02, 2.25907107791E-01].
\end{aligned}
$$

Случай 4. $k_3 \in K_3 = [k_3(1-p), k_3(1+p)]$; k_1, k_2 фиксирани.

(а) $p = 0.05$; $U = [8.00000000000E-02, 3.52941176471E-01]$;

$$
Y(u_1) = [6.05494505476E-01, 6.69230769253E-01],
$$

$$
\begin{aligned}
Y(u_2) &= [7.48168498153E-01, 8.26923076952E-01],\\
Y(u_3) &= [8.85871271572E-01, 9.79120879152E-01],\\
Y(u_4) &= [1.01745562128E+00, 1.12455621306E+00],\\
Y(u_5) &= [1.14139194136E+00, 1.26153846159E+00],\\
Y(u_6) &= [1.25559440556E+00, 1.38776223783E+00],\\
Y(u_7) &= [1.35714285711E+00, 1.50000000006E+00],\\
Y(u_8) &= [1.44181929177E+00, 1.59358974364E+00],\\
Y(u_9) &= [1.50329670325E+00, 1.66153846161E+00],\\
Y(u_{10}) &= [1.53163265298E+00, 1.69285714295E+00],\\
Y(u_{11}) &= [1.51025641020E+00, 1.66923076929E+00],\\
Y(u_{12}) &= [1.40934065931E+00, 1.55769230773E+00],\\
Y(u_{13}) &= [1.16923076921E+00, 1.29230769234E+00],\\
Y(u_{14}) &= [6.50732600686E-01, 7.19230769284E-01].
\end{aligned}
$$

(б) $p = 0.1$; $U = [8.00000000000E-02, 3.52941176471E-01]$;

$$
\begin{aligned}
Y(u_1) &= [5.73626373614E-01, 7.01098901119E-01],\\
Y(u_2) &= [7.08791208774E-01, 8.66300366334E-01],\\
Y(u_3) &= [8.39246467803E-01, 1.02574568293E+00],\\
Y(u_4) &= [9.63905325426E-01, 1.17810650892E+00],\\
Y(u_5) &= [1.08131868129E+00, 1.32161172166E+00],\\
Y(u_6) &= [1.18951048948E+00, 1.45384615391E+00],\\
Y(u_7) &= [1.28571428569E+00, 1.57142857149E+00],\\
Y(u_8) &= [1.36593406590E+00, 1.66947496954E+00],\\
Y(u_9) &= [1.42417582413E+00, 1.74065934073E+00],\\
Y(u_{10}) &= [1.45102040808E+00, 1.77346938785E+00],\\
Y(u_{11}) &= [1.43076923071E+00, 1.74871794878E+00],\\
Y(u_{12}) &= [1.33516483513E+00, 1.63186813191E+00],\\
Y(u_{13}) &= [1.10769230767E+00, 1.35384615388E+00],\\
Y(u_{14}) &= [6.16483516433E-01, 7.53479853536E-01].
\end{aligned}
$$

Използувайки интерполация при интервални данни $\{(u_j, Y(u_j))\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, [18], [95], [96], във всеки един от разгледаните по-горе случаи ще намерим обвивката на полиномите от възможно най-ниска степен r, които минават през всички сегменти $(u_j, Y(u_j))$. За графичните изходи е използувана програма [18], написана в системата за компютърна алгебра *Mathematica*. Графиките, съответствуващи на Случай 1(а) и (б), са изобразени съответно на Фигура 1(а) и Фигура 1(б); при това интерполиращите полиноми са съответно от степен $r = 2$ и $r = 1$. На Фигура 2(а) и Фигура 2(б) са изобразени графичните изходи, съответствуващи на Случай 2; интерполиращите полиноми са от степен съответно $r = 2$ и $r = 1$. Фигури 3(а) и 3(б) съответствуват на Случай 3; интерполацията е извършена с полиноми съответно от степен $r = 3$ и $r = 2$. В Случай 4 графиките на интерполиращите полиноми от степен съответно $r = 4$ и $r = 3$ са изобразени на Фигури 4(а) и 4(б).

Заключителни бележки. Численете резултати за стойностите $Y(u_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, показват, че статичната харктеристика на процеса на метанова ферментация е нелинейна, което е известен факт най-вече от практически експерименти. Използуваната интерполация при интервални данни дава възможност за качествена оценка на това, как статичната характеристика се влияе от големината на интервалите K_i, $i = 1, 2, 3$. В Случай 1(б) съществуват полиноми от степен $r = 1$ (т. е. линейни функции), които минават през всички сегменти $\{(u_j, Y(u_j))\}$; следователно в този случай се изменя нелинейният характер на статичната характеристика. Аналогични разсъждения остават в сила и в Случай 2(б). Това показва, статичната характеристика е силно чувствителна относно неопределеност в коефициента μ_m (максимална специфична скорост на растеж на микроорганизмите). Зависимостта от останалите два коефициента k_2 и k_3 не е толкова силна, както показват графиките – дори при по-широки интервали K_i, $i = 2, 3$, интерполацията е извършена с полиноми съответно от степен $r = 3$ и $r = 2$ в Случай 3, и от степен $r = 4$ и $r = 3$ в Случай 4.

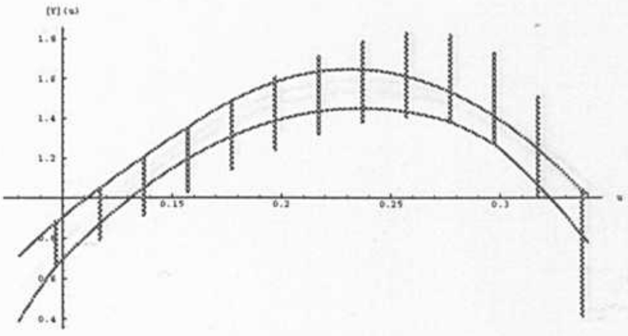

Figure 1 (a)

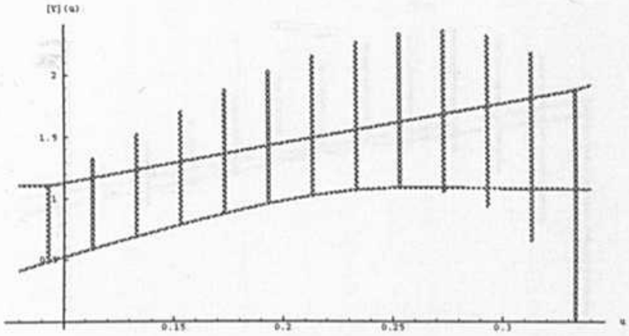

Figure 1 (b)

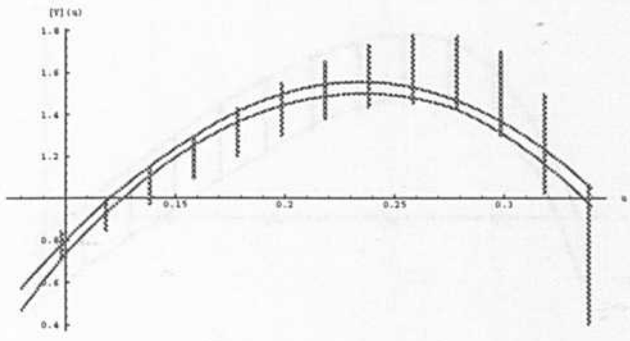

Figure 2 (a)

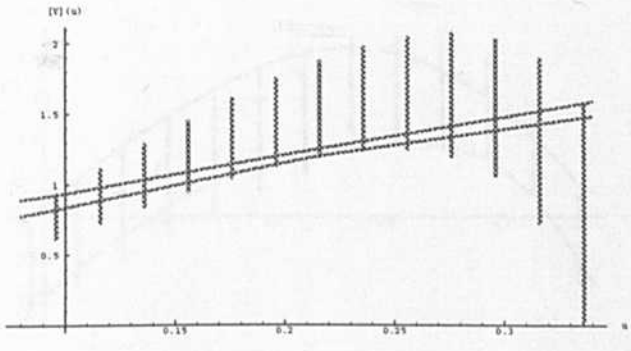

Figure 2 (b)

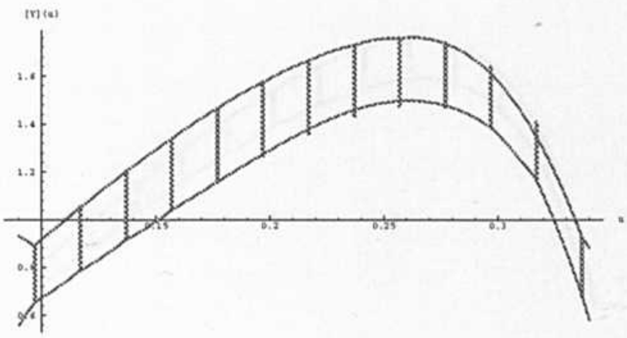

Figure 3 (a)

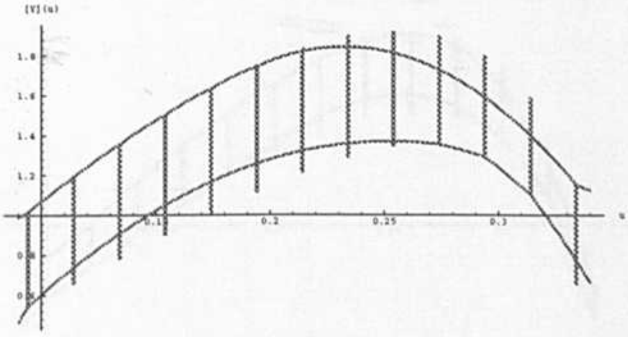

Figure 3 (b)

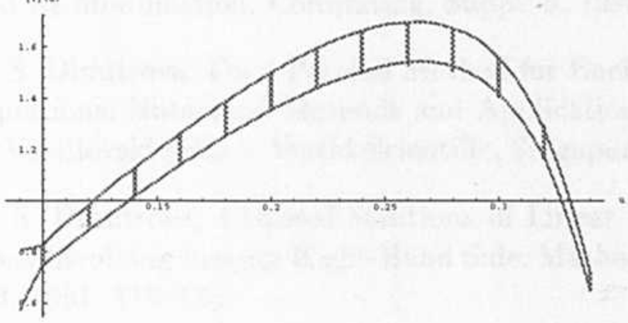

Figure 4 (a)

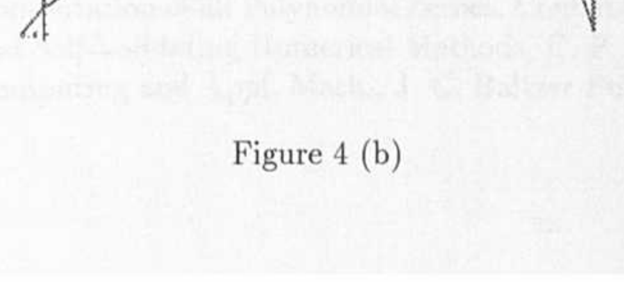

Figure 4 (b)

Литература

[1] N. Dimitrova: Über die Distributivgesetzte der erweiterten Intervallarithmetik. Computing *24*, 1980, 33–49.

[2] N. S. Dimitrova: On Some Properties of an Interval Newton Type Method and its Modification. Computing, Suppl. 9, 1993, 21–33.

[3] N. S. Dimitrova: On a Parallel Method for Enclosing Real Roots of Nonlinear Equations. Numerical Methods and Applications, I.T. Dimov, Bl. Sendov, P. S. Vassilevski (Eds.), World Scientific, Singapore, 1994, 78–84.

[4] N. S. Dimitrova: Optimal Solutions of Linear Tridiagonal Systems of Equations Involving Inexact Right-Hand Side. Mathematica Balkanica, Vol. 8, Fasc. 2-3, 1994, 113–130.

[5] N. S. Dimitrova: On a Cubically Convergent Interval Method for Nonlinear Equations. Mathematics and Education in Mathematics, Publ. House of the Bulg. Acad. Sci., Sofia, 1995, 177–188.

[6] N. S. Dimitrova: On a Numerical Approach for Solving a Class of Nonlinear Systems. Scientific Computing and Validated Numerics, G. Alefeld, A. Frommer, B. Lang (Eds.), Akademie Verlag, Berlin, 1996, 147–153.

[7] N. Dimitrova, S. M. Markov: Distributive Laws in the Extended Interval Arithmetic. Ann. Univ. Sofia, Math. Fac., *71*, Part I, 1976/77, 169–185 (in Bulgarian).

[8] N. Dimitrova, S. Markov: Über die intervallarithmetische Berechnung des Wertebereichs einer Funktion mit Anwendungen. Freiburger Intervall-Berichte 81/4, Univ. Freiburg, Germany, 1981, 1–22.

[9] N. Dimitrova, S. M. Markov: Interval Methods of Newton Type for Nonlinear Equations. Pliska stud. math. bulg. *5*, 1983, 105–117.

[10] N. Dimitrova, S. Markov: Interval-arithmetic Algorithms for Simultaneous Computation of all Polynomial Zeroes. Contributions to Computer Arithmetic and Self-Validating Numerical Methods, C. P. Ullrich (Ed.), IMACS Ann. on Computing and Appl. Math., J. C. Baltzer Publ., Basel, 7, 1990, 291–300.

[11] N. Dimitrova, S. Markov: On the Interval-arithmetic Presentation of the Range of a Class of Monotone Functions of Many Variables. Computer Aritmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling, E. Kaucher, S. M. Markov, G. Mayer (Eds.), J. C. Baltzer Publ. IMACS, 12, 1991, 213–228.

[12] N. S. Dimitrova, S. M. Markov: On Validated Newton Type Method for Nonlinear Equations. Interval Computations, 2, 1994, 27–51.

[13] N. S. Dimitrova, Ch. P. Ullrich: Implementation of an Algorithm with Result Verification for Linear Systems in Maple. Technical Report 96-2, Universitätsrechenzentrum und Institut für Informatik, Universität Basel, Switzerland, January 1996.

[14] N. S. Dimitrova, Ch. P. Ullrich: Verified Solving of Linear Systems with Uncertainties in Maple. Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag (to appear).

[15] N. Dimitrova, P. Zlateva: Investigation of the Methane Fermentation Process Using Interval Analysis. Automatica & Informatics, 5-6, 1994, 120–123 (in Bulgarian).

[16] N. Dimitrova, P. Zlateva: Study of the Steady-States of Methane Fermentation under Uncertain Data. Lecture Notes on Biomathematics and Bioinformatics'95, M. Candev (Ed.), DATECS Publ., Sofia, 1995, 90-99.

[17] S. Markov, N. Dimitrova: Rechengesetze der erweiterten Intervallarithmetik. Freiburger Intervall-Berichte 79/10, Universität Freiburg, 1979, 1–20.

[18] Y. Akyildiz, S. Markov, E. Popova, J. Schulze: Computer-Aided Interval Interpolation. Advances in Numerical Methods and Applications, I. T. Dimov, Bl. Sendov, P. S. Vassilevski (Eds.), World Scientific, Singapore, 1994, 3–10.

[19] G. Alefeld: On the convergence of Halley's method. American Math. Montly, Vol. 88, No. 7, 1981, 530–536.

[20] G. Alefeld: Bounding the Slope of Polynomial Operators and Some Applications. Computing *26*, 1981, 227–237.

[21] G. Alefeld: Über die Konvergenzordnung des Intervall–Newton–Verfahrens. Computing *39*, 1987, 363-369.

[22] G. Alefeld: Über die Divergenzgeschwindigkeit des Intervall-Newton-Verfahrens. Fasciuli Mathematici *19*, 1989, 9–13.

[23] G. Alefeld: On the Approximation of the Range of Values by Interval Expressions. Computing *44*, 1990, 273–278.

[24] G. Alefeld: Inclusion Methods for Systems of Nonlinear Equations – the Interval Newton Method and Modifications. Topics in Validated Computations, J. Herzberger (Ed.), Elsevier Sci. B. V., 1994, 7–26.

[25] G. Alefeld, J. Herzberger: Introduction to Interval Computations. Academic Press, New York, 1981.

[26] G. Alefeld, G. Mayer: Einschließungsverfahren. Wissenschaftliches Rechnen: Eine Einführung in das Scientific Computing, J. Herzberger (Hrsg.), Akademie Verlag, Berlin, 1995, 155–186.

[27] G. Alefeld, F. Potra: A New Class of Interval Methods with Higher Order of Convergence. Computing *42*, 1989, 69–80.

[28] N. Apostolatos, U. Kulisch: Grundlagen einer Maschinenintervallarithmetik. Computing *2*, 1967, 89–104.

[29] W. Barth, E. Nuding: Optimale Lösungen von Intervallgleichungssystemen. Computing *12*, 1974, 117–125.

[30] M. C. Bartholomew-Biggs, S. Zakovic: Using Markov's Interval Arithmetic to Evaluate Bessel-Ricatti Functions. Numerical Algorithms 10, 1995, 261–287.

[31] W. J. Beiser: Intervall-Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen reeller Funktionen einer Veränderlichen. Freiburger Intervall–Berichte 79/2, Universität Freiburg, 1979.

[32] A. H. Bentbib: Acceleration of Convergence of Interval Sequences. Journ. of Comp. and Appl. Math. 51, 1994, 395–409.

[33] G. Bohlender, L. B. Rall, C. P. Ullrich, J. Wolff von Gudenberg: Pascal-SC: A Computer Language for Scientific Computing. Perspectives in Computing, vol. 17, Academic Press, Orlando, 1987.

[34] G. Bohlender, Ch. Ullrich: Standards zur Computerarithmetik. Wissenschaftliches Rechnen: Eine Einführung in das Scientific Computing, J. Herzberger (Hrsg.), Akademie Verlag, Berlin, 1995, 9–52.

[35] G. Bohlender, C. P. Ullrich, J. Wolff von Gudenberg: New Developments in Pascal-SC. SIGPLAN Notices, 23(8), 1988, 83–92.

[36] O. Caprani, K. Madsen: Contraction Mappings in Interval Analysis. BIT 15, 1975, 362–366.

[37] O. Caprani, K. Madsen: Iterative Methods for Interval Inclusion of Fixed Points. BIT 18, 1978, 42–51.

[38] O. Caprani, K. Madsen: Experiments with Interval Methods for Nonlinear Systems. Freiburger Intervall-Berichte, 81/7, Univ. Freiburg, 1981, 1–13.

[39] B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan, S. M. Watt: Maple V Language Reference Manual. Springer Verlag, 1991.

[40] B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan, S. M. Watt: First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple V. Springer Verlag, 1992.

[41] Maple V Release 3 for DOS and Windows. Getting started. Waterloo Maple Software, 1994.

[42] A. E. Connel, R. M. Corless: An Experimental Interval Arithmetic Package in Maple. Interval Computations, 2, 1993, 120–134.

[43] H. Cornelius, R. Lohner: Computing the Range of Values with Accuracy Higher than Second Order. Computing *33*, 1984, 331–347.

[44] K. Dočev: A Modified Newton Method for Simultaneous Approximate Calculation of All Roots of Given Equation. Phys.-Math. Journ., 5, 1962, 136–139 (in Bulgarian).

[45] K. Dočev: Über Newtonsche Iterationen. C. R. Acad. Bulg. Sci., 15, 1962, 695–701.

[46] D. Dochain, G. Bastin: Adaptive Identification and Control Algorithm for Nonlinear Bacterial Growth Systems. Automatica, Vol. 20, No. 5, 1984, 621–634.

[47] J. J. Dongarra, C. B. Moler, J. R. Bunch, G. W. Stewart: LINPACK User's Guide. SIAM, Philadelphia, 1979.

[48] B. Döring: Einige Sätze über das Verfahren der tangierenden Hyperbeln in Banach-Räumen. Aplikace matematiky, 15, 1970, 418–464.

[49] C. Falcó Korn: Die Erweiterung von Software-Bibliotheken zur effizienten Verifikation der Approximationslösung linearer Gleichungssysteme. PhD Thesis, Institut für Informatik, Universität Basel, Switzerland, 1993.

[50] C. Falcó Korn, Ch. P. Ullrich: LINPACK and ITPACK Extensions for Verified Computing; Interfaces, Usage, Portability. Technical Report 94-2, Universitätsrechenzentrum und Institut für Informatik, Universität Basel, Switzerland, March 1994.

[51] C. Falcó Korn, Ch. P. Ullrich: Extending LINPACK by Verification Routines for Linear Systems. Mathematics and Computers in Simulation 39, 1995, 21–37.

[52] C. Falcó Korn, Ch. P. Ullrich: Verification may be Better than Estimation. To appear in SIAM Journal on Scientific Computing 1996, 6 pages.

[53] A. Frommer: Lösung linearer Gleichungssysteme auf Parallelrechnern. Vieweg, 1990.

[54] A. Frommer: Parallele asynchrone Iterationen. Wissenschaftliches Rechnen: Eine Einführung in das Scientific Computing, J. Herzberger (Hrsg.), Akademie Verlag, Berlin, 1995, 187–231.

[55] J. Garloff, R. Krawczyk: Optimal Inclusions of a Solution Set. Freiburger Intervall-Berichte 84/8, Univ. Freiburg, Germany, 1984, 14–33.

[56] R. Hammer, M. Hocks, U. Kulisch, D. Ratz: Numerical Toolbox for Verified Computing. Basic Numerical Problems; Theory, Algorithms and Pascal-XSC Programs. Springer Verlag, 1993.

[57] E. R. Hansen: Interval Arithmetic in Matrix Computations Part I. SIAM J. Numer. Anal. 2, 1965, 308–320.

[58] E. R. Hansen: The Centered Form. In: Topics in Interval Analysis, E. Hansen (Ed.), Oxford Univ. Press, London, 1969, 102–105.

[59] E. Hansen: Global Optimization Using Interval Analysis. Marcel Dekker, New York, 1992.

[60] E. R. Hansen, R. Smith: Interval Arithmetic in Matrix Computations Part II. SIAM J. Numer. Anal. 4, 1967, 1–9.

[61] HIFICOMP. Subroutine Library for Highly Efficient and Accurate Computations. Program Description and User's Guide, CINTI Reg. Nbr. 1.A.006.02112-01 13, 1987.

[62] L. Ilieff, K. Dočev: Über Newtonsche Iterationen. Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 12, 1962, 117–118.

[63] C. Jansson: Calculation of Exact Bounds for the Solution Set of Linear Interval Systems. Linear Algebra and its Applications (to appear).

[64] American National Standards Institute/Institute of Electrical and Electronics Engineers: IEEE Standard for Radix-Independent Floating-Point Arithmetic. ANSI/IEEE Std 854–1987, New York, 1987.

[65] IBM Corporation: IBM High-Accuracy Subroutine Library (ACRITH). Program Description and User's Guide, 1986.

[66] R. B. Kearfott et al.: A Specific Proposal for Interval Arithmetic in Fortran. March 20, 1996, electronic submission to the "Reliable Computing" newsgroup.

[67] N. V. Kjurkchiev, S. M. Markov: Two Interval Methods for Algebraic Equations with Real Roots. Pliska stud. math. bulg. *5*, 1983, 118–131.

[68] R. Klatte, U. Kulisch, M. Neaga, D. Ratz, Ch. Ullrich: PASCAL–XSC: Sprachbeschreibung mit Beispielen. Springer-Verlag, 1991.

[69] R. Klatte, U. Kulisch, A. Wiethoff, C. Lawo, M. Rauch: *C–XSC, A C++* Class Library for Extended Scientific Computing. Springer, Lrlin, 1993.

[70] W. Krandick: Isolierung reeller Nullstellen von Polynomen. Wissenschaftliches Rechnen: Eine Einführung in das Scientific Computing, J. Herzberger (Hrsg.), Akademie Verlag, Berlin, 1995, 105–154.

[71] R. Krawczyk: Newton–Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken. Computing *4*, 1969, 187–201.

[72] R. Krawczyk: Einschließung von Nullstellen mit Hilfe einer Intervallarithmetik. Computing *5*, 1970, 356–370.

[73] R. Krawczyk: Intervalliterationsverfahren. Freiburger Intervall–Berichte, 83/6, Univ. Freiburg, 1983.

[74] R. Krawczyk, A. Neumaier:Interval Slopes for Rational Functions and Associated Centered Forms. SIAM J. Numer. Anal. 22, 1985, 604–616.

[75] V. Kreinovich, V. Nesterov, N. Zheludeva: Interval Methods that Are Guaranteed to Underestimate (and the Resulting New Justification of Kaucher Arithmetic). Reliable Computing **2** (2), 1996, 119–124.

[76] U. W. Kulisch (Ed.): PASCAL-SC: A PASCAL Extension for Scientific Computations; Information Manual and Floppy Discs; version IBM PC/AT; operating system DOS. Teubner (Willy-Teubner series in computer science), Stuttgart, 1987.

[77] U. Kulisch (Hrsg.): Wissenschaftliches Rechnen mit Ergebnisverifikation. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1989.

[78] U. W. Kulisch, W. L. Miranker: Computer Arithmetic in Theory and Practice. Academic Press, New York, 1981.

[79] U. W. Kulisch, W. L. Miranker: A New Approach to Scientific Computation. Academic Press, New York, 1983.

[80] U. W. Kulisch, W. L. Miranker: The Arithmetic of the Digital Computer: a New Approach. SIAM Review, 28, 1, 1986, 1–40.

[81] U. Kulisch, H. J. Stetter (Eds.): Automatic Result Verification. Computing, Suppl. 6, 1988, 1–6.

[82] V. P. Madan: Interval Contractions and Rootfinding. Rivista di Mathematica ed Applicata *6*, 1990, 55–61.

[83] S. M. Markov: Extended Interval Arithmetic and Differential and Integral Calculus for Interval Functions of a Real Variable. Ann. Univ. Sofia, Fac. Math., *71*, Part I, 1976/77, 131–168 (in Bulgarian).

[84] S. M. Markov: Extended Interval Arithmetic. Compt. rend. Acad. bulg. Sci., *30*, 9, 1977, 1239–1242.

[85] S. Markov: On the Extended Interval Arithmetic. Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. *31*, 2, 1978, 163–166.

[86] S. M. Markov: Calculus for Interval Functions of a Real Variable. Computing, *22*, 1979, 325–337.

[87] S. M. Markov: Some Applications of Extended Interval Arithmetic to Interval Iterations. Computing, Suppl. 2, 1980, 69–84.

[88] S. Markov: Interval Differential Equations. Interval Mathematics, K. Nickel (Ed.), Academic Press 1980, 145–164.

[89] S. M. Markov: Mathematical Modelling of Dynamical Processes Under Interval Experimental Data. IIASA, WP-91-00, January 1991.

[90] S. M. Markov: On the Presentation of Ranges of Monotone Functions Using Interval Arithmetic. Interval Computations, 2, 1992, 66–74.

[91] S. M. Markov: Extended Interval Arithmetic Involving Infinite Intervals. Mathematica Balkanica, 6, 1992, 269–304.

[92] S. M. Markov: On two Interval-Arithmetic Structures and their Properties. Ann. Univ. Sofia, Fac. Math., to appear 1997 (in Bulgarian).

[93] S. M. Markov: On Directed Interval Arithmetic and its Applications. Proc. of Int. Conf. on Real Numbers and Systems (Eds. J.-C. Bajard et al.), April 2-6, 1995, Saint-Etienne, France, 249–260.

[94] S. M. Markov, N. Kjurkchiev.: A Method for Solving Algebraic Equations. ZAMM 69, 1989, T106–T107.

[95] S. Markov, E. Popova: Interpolation and Estimation Using Interval Analysis. Bounding Approaches to System Identificatin, M. Milanese, J. P. Norton, H. Piet-Lahanier, E. Walter (Eds.), Plenum Press, London, N. Y., 1996, 139–157.

[96] S. Markov, E. D. Popova, U. Schneider, J. Schulze: On Linear Interpolation under Interval Data. Mathematics and Computers in Simulation, 42, 1, 1996, 35–45.

[97] G. Mayer: Epsilon-inflation in Verification Algorithms. Journal of Computational and Applied Mathematics, 60, 1995, 147–169.

[98] R. Moore: Interval Analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1966.

[99] R. Moore: Methods and Applications of Interval Analysis. SIAM, Philadelphia, 1979.

[100] V. M. Nesterov: How to Use Monotonicity-Type Information To Get Better Estimation of the Range of Real-Valued Functions. Interval Computations, No 4, 1993, 3–12.

[101] A. Neumaier: Interval Methods for Systems of Equations. Cambridge University Press, 1990.

[102] F. A. Oliveira: Bounding Solutions of Nonlinear Equations with Interval Analysis. Proc. of IMACS'91 13th World Congress on Comp. and Appl. Math., July 22-26, 1991, Trinity Collage Dublin, Ireland, 1991, 246–247.

[103] J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt: Iterative solution of nonlinear equations in several variables, New York–London, Academic Press 1970.

[104] A. M. Ostrowski: Solution of equations and systems of equations. New York, Academic Press, 1960.

[105] M. Petkov: Numerical Methods for Algebraic Problems. Nauka i izkustvo, Sofia 1974.

[106] F. A. Potra: On an Iterative Algorithm of Order 1.839 ... for Solving Nonlinear Operator Equations. Num. Func. Anal. and Optimiz. 7(1), 1984–1985, 75–106.

[107] B. N. Pshenichny: Convex Analysis and Extremal Problems. Moscow, Nauka, 1980. (in Russian)

[108] L. Qi: An Interval Test Using the New Krawczyk Operator. Freiburger Intervall-Berichte, 81/4, Universität Freiburg, Germany, 1981, 25–37.

[109] H. Ratschek: Über einige intervallarithmetische Grundbegriffe. Computing, 4, 1969, 43–55.

[110] H. Ratschek: Die Subdistributivität der Intervallarithmetik. ZAMM 51, 1971, 189–192.

[111] H. Ratschek: Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik. J. Reine Angew. Math., 252, 1972, 128–138.

[112] H. Ratschek, J. Rokne: Computer Methods for the Range of Functions. Ellis Horwood Ltd. Publ., Halsted Press, New York, 1984.

[113] H. Ratschek, J. Rokne: New Computer Methods for Global Optimization. Ellis Horwood Ltd. Market Cross House, England, 1988.

[114] H. Ratschek, G. Schröder: Über die Ableitung von intervallwertigen Funktionen. Computing 7, 1971, 172–187.

[115] K. Reichmann: Abbruch beim Intervall-Gauß-Algorithmus. Computing *22*, 1979, 355–361.

[116] K. Reichmann: Ein hinreichendes Kriterium für die Durchführbarkeit des Intervall-Gauß-Algorithmus bei Intervall-Hessenberg-Matrizen ohne Pivotsuche. ZAMM 59, 1975, 373–379.

[117] RINA. Subroutine Library for Reliable Interval Numerical Algorithms. Program Description and User's Guide, CINTI Reg. Nbr. 1.2310.00862-01 13, 1983.

[118] S. M. Rump: Wie zuverlässig sind die Ergebnisse unserer Rechenanlagen? Jahrbuch Überblicke Mathematik, Bibl. Inst. AG, 1983, 163–168.

[119] S. M. Rump: New Results on Verified Inclusions. Accurate Scientific Computations, W. L. Miranker, R. Toupin (Eds.), Springer Lecture Notes in Computer Science 235, 1986, 31–69.

[120] S. M. Rump: Inclusion of the Solution for Large Linear Systems with M-matrix. Interval Computations No. 1(3), 1992, 22–43.

[121] S. M. Rump: Inclusion of the Solution of Large Linear Systems with Positive Definite Symmetric M-matrices. Computer Arithmetic and Enclosure Methods, L. Atanassova, J. Herzberger (Eds.), Elsevier, North Holland, 1992, 339–347.

[122] S. M. Rump: Verification Methods for Dense and Sparse Systems of Equations. Topics in Validated Computations – Studies in Computational Mathematics, J. Herzberger (Ed.), Elsevier, 1994, 63–136.

[123] S. M. Rump: Improved Iteration Schemes for Validation Algorithms for Dense and Sparse Nonlinear Systems. Computing *57*, 1996, 77–84.

[124] S. M. Rump: Expansion and Estimation of the Range of Nonlinear Functions. To appear in Math. Comp.

[125] G. Schröder: Bemerkung zur Differentiation von intervallwertigen Funktionen. Computing 26, 1981, 271–274.

[126] Bl. Sendov: Segment Arithmetic and Segment Limit. Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., 30, 7, 1977, 955–958.

[127] Bl. Sendov: Segment Derivatives and Taylor's Formula. Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., 30, 8, 1977, 1093–1096.

[128] Bl. Sendov: Some topics of segment analysis. Interval Mathematics, K. Nickel (Ed.), Academic Press, 1980, 203–222.

[129] Bl. Sendov, V. Popov: Numerical Methods Part 1. Nauka i izkustvo, Sofia, 1976 (in Bulgarian).

[130] Yu. I. Shokin, S. A. Kalmikov, Z. H. Yuldashev: Methods of Interval Analysis. Nauka, Novosibirsk, 1986 (in Russian).

[131] I. Simeonov: Modelling and Control of Anaerobic Digestion of Organic Waste. Chem. Biochem. Eng. Q. 8 (2), 1994, 45–52.

[132] J. Stoer: Einführung in die numerische Mathematik I - vierte Auflage. Springer Verlag, 1978.

[133] F. Stummel: Rounding Error in Gaussian Elimination of Tridiagonal Linear Systems; Survey of Results. Interval Mathematics, K. Nickel (Ed.), Academic Press, 1980, 223-245.

[134] T. Sunaga: Theory of an Interval Algebra and its Applications to Numerical Analysis. RAAG Memoirs, 2, 1958, 29–46.

[135] Ch. Ullrich (Ed.): Computer Arithmetic and Self-Validating Numerical Methods. Academic Press, 1990.

[136] Ch. Ullrich (Ed.): Contributions to Computer Arithmetic and Self-validating Numerical Methods. IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, J. C. Baltzer A. G. Sci. publ., Basel, Switzerland, 7, 1990.

[137] Ch. P. Ullrich: Interval Arithmetic on Computers. Topics in Validated Computations – Studies in Computational Mathematics, J. Herzberger (Ed.), Elsevier, 1994, 473–495.

[138] K. Weierstrass: Neuer Beweis des Satzes daß jede ganze rationale Funktion einer Veränderlichen dargestellt werden kann auf ein Produkt aus linearen Funktionen derselben Veränderlichen. Gesammelte Werke Vol. 3 (1903), Johson, New York, 1967, 251–269.

[139] T. Yamamoto, S. Konno, L. Atanassova: Validated Computation of Polynomial Zeros by the Durand-Kerner Method. In: Topics in Validated Computations, J. Herzberger (Ed.), Elsevier Sci. B. V., 1994, 27–53.

[140] R. C. Young: The Algebra of Many-Valued Quantities. Math. Ann. 104, 1931, 260–290.