БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Иван Иванов Гаджев

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НА ПРИБЛИЖЕНИЯТА С ОПЕРАТОРИ НА БАСКАКОВ И НА МАЙЕР-КЬОНИГ И ЦЕЛЕР

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертацията за присъждане на
образователната и научната степен „Доктор"
по област на висшето образование „Природни науки,
математика и информатика"
Професионално направление: „Математика"
Научна специалност: „Математически анализ"

Научен ръководител: ст.н.с. II ст. д-р Владимир Христов

София, 2015 г.

В началото на века Бернщайн дава едно от най-красивите доказателства на теоремата на Вайерщрас. За целта той въвежда следните полиноми, известни днес като "полиноми на Бернщайн":

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

където $x \in [0,1]$ и f е непрекъсната в интервала $[0,1]$ функция.

Веднага след въвеждането им, тези полиноми стават обект на много изследвания. Появяват се много техни модификации и аналози и въобще започва интензивно изследване на приближаването на функции с линейни положителни оператори. Коровкин обобщава теоремата на Бернщайн за поточковата сходимост за широк кръг от линейни положителни оператори.

След като е установена поточковата сходимост, на преден план е поставен въпроса за оценка на грешката на приближението. В 1932 година Вороновская [33] доказва една от първите теореми за насищане, т.е. за определени оператори сходимостта не може да е прекалено бърза, дори и за много гладки функции. В частност, че грешката при приближаване с оператора на Бернщайн е от порядък, в най-добрия случай, $\frac{1}{n}$ ако $f''(x) \neq 0$.

Има много резултати върху оценката на грешката при приближаване с полиномите на Бернщайн. Дициян дава оценката [9]

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leq C\omega^2_{\phi^{\lambda/2}}\left(f, n^{-1/2}\phi(x)^{(1-\lambda)/2}\right), \quad x \in [0,1], \qquad (1)$$

където $\lambda \in [0,1]$, $\phi(x) = x(1-x)$ и $\omega^2_\varphi(f,\delta)$ е модула на гладкост на Дициян-Тотик [11] от втори ред

$$\omega^2_\varphi(f,\delta) = \sup_{|h|\leq\delta} \sup_{t\pm h\varphi(t)\in[0,1]} |f(t-\varphi(t)h) - 2f(t) + f(t+\varphi(t)h)|.$$

Случаят $\lambda = 0$ дава класическия локален резултат, а $\lambda = 1$ дава глобална оценка чрез модулите на Дициян-Тотик.

Както е известно [9, теорема 2.1.1, стр.11], горният модул на гладкост на Дициян-Тотик е еквивалентен на следния К-функционал:

$$K_\varphi(f, \delta^2) = \inf_g \left\{ \|f - g\| + \delta^2 \|\varphi^2 g''\|; g, g' \in AC_{loc} \right\}$$

в смисъл, че съществуват положителни константи C_1 и C_2, независещи от f и δ такива, че

$$C_1 \omega_\varphi^2(f, \delta) \leq K_\varphi(f, \delta^2) \leq C_2 \omega_\varphi^2(f, \delta).$$

В такъв случай горната оценка (1), за $\lambda = 1$, може да се запише във вида

$$\|B_n f - f\| \leq C K_\phi \left(f, \frac{1}{n} \right).$$

Оценки от този вид, а именно, оценки на грешката на приближение отгоре чрез дадена величина, например К-функционал или модул на непрекъснатост, се наричат директни теореми или директни неравенства.

Доказването на обратната теорема, т.е. на оценката на грешката на приближение отдолу чрез същата величина, е доста по-трудно. Затова в [10] Дициян и Иванов предлагат следната класификация от четири типа обратни неравенства за даден апроксимационен процес. Нека за редицата от равномерно ограничени оператори Q_n и за някоя редица от числа $\lambda(n)$, която монотонно намалявайки клони към 0, са изпълнени следните неравенства от Джексънов тип:

$$\|f - Q_n f\| \leq C K(f, \lambda(n)),$$

където константата C не зависи от f и n. Така, при тези условия за редицата от равномерно ограничени оператори Q_n, те дефинират следните типове силни обратни неравенства:

A $K(f, \lambda(n)) \leq C \|f - Q_n f\|$ за всяко n (или за всяко $n \geq n_0$).

B $K(f,\lambda(n)) \le C\frac{\lambda(n)}{\lambda(k)}\{\|f-Q_nf\|+\|f-Q_kf\|\}$ за всички $k \ge rn$ и за някое фиксирано $r > 1$.

C $K(f,\lambda(n)) \le C\frac{1}{(r-1)n}\sum_{k=n}^{rn-1}\|f-Q_kf\|$ за всички n и някое $r > 1$.

D $K(f,\lambda(n)) \le C\sup_{k\ge n}\|f-Q_kf\|$ за всички n.

В зависимост от редицата от оператори Q_n са възможни някои от посочените силни обратни неравенства. Например, ако редицата от оператори Q_n е редицата от частично линейни функции, интерполиращи функцията f в точките $\frac{k}{n}$, то тогава са изпълнени неравенствата от тип C и D и не са в сила неравенствата от тип A и B. В същата статия авторите доказват силното обратно неравенство от тип B за оператора на Бернщайн. Тотик обобщава този резултат за широк кръг от оператори [32]. Силното обратно неравенство от тип A за оператора на Бернщайн е доказано от Тотик в [31] и независимо от Кнооп (Knoop) и Жоу (Zhou) в [26]. Така, комбинирайки правата и обратна теорема получаваме пълната еквивалентност между грешката на приближение с оператора на Бернщайн и съответния K-функционал (а също и модула на непрекъснатост на Дициян-Тотик):

$$\|B_n(f)-f\| \sim K_\phi\left(f,\frac{1}{n}\right) \sim \omega^2_{\sqrt{\phi}}(f,\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Една от целите на дисертацията е получаването на подобни характеризации на грешката при приближаване на функции с операторите на Баскаков и на Майер-Кьониг и Целер - със и без тегло.

Дисертацията се състои от три глави. В първа глава изследваме приближаването на функции с класическия вариант на оператора на Баскаков.

За функции $f \in C[0,\infty)$ операторът на Баскаков се дефинира чрез формулата [1]

$$V_nf(x) = (V_nf,x) = V_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)V_{n,k}(x) \quad \text{за} \quad 0 \le x < \infty, \tag{2}$$

където $V_{n,k}(x)$ са базисните "полиноми"на Баскаков

$$V_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k}. \tag{3}$$

Директната теорема за приближаване на функции с оператора на Баскаков е доказана в [11, теорема 9.3.2, стр.117]. В [31] Тотик формулира силното обратно неравенство от тип А за оператора на Баскаков като отделна теорема (Теорема 3.2., без доказателство), казвайки че тя може да бъде доказана по същия начин както за оператора на Сас-Миракян. Ние не успяхме да докажем неравенството от тип А по метода, предложен от Тотик, и не ни е известно доказателство на това неравенство.

В глава 1 доказваме силното обратно неравенство от тип А за оператора на Баскаков (Теорема 1). За целта прилагаме метод, предложен от Дициян и Иванов в [10], основаващ се на използването на итерирания оператор на Баскаков и за пръв път приложен от Кнооп и Жоу за оператора на Бернщайн. В процеса на доказване на Теорема 1, установяваме и две неравенства, важни сами по себе си, а именно: неравенство от тип на Вороновская (Теорема 2) за оператора на Баскаков и неравенство от Бернщайнов тип (Теорема 3) за итерирания оператор на Баскаков.

Но преди да формулираме тези резултати, ще въведем някои означения. Операторът на диференциране ще означаваме с D, т.е. $D = \frac{d}{dx}$. Така, $Dg(x) = g'(x)$ и $D^2 g(x) = g''(x)$. Теглото, което е естествено свързано с втората производна на оператора на Баскаков ще означаваме с $\psi(x) = x(1+x)$.

Със $C[0,\infty)$ ще означаваме пространството на всички непрекъснати в $[0,\infty)$ функции, с $L_\infty[0,\infty)$ пространството на всички Лебегово измерими и съществено ограничени в $[0,\infty)$ функции (при равномерната норма $\|.\|$) и с $CB[0,\infty) = C[0,\infty) \cap L_\infty[0,\infty)$ пространството на всички непрекъснати и ограничени в $[0,\infty)$ функции.

Също, дефинираме и следните пространства:

$$W^2(\psi)[0,\infty) = \left\{g : Dg \in AC_{loc}(0,\infty) \quad \text{и} \quad \psi D^2 g \in L_\infty[0,\infty)\right\},$$
$$W^3(\psi)[0,\infty) = \left\{g : D^2 g \in AC_{loc}(0,\infty) \quad \text{и} \quad \psi^{3/2} D^3 g \in L_\infty[0,\infty)\right\},$$

където $AC_{loc}(0,\infty)$ е пространството на всички функции, които са абсолютно непрекъснати в $[a,b]$ за всеки интервал $[a,b] \in [0,\infty)$.

За да оценим точно приближението на функции с оператора на Баскаков ще използваме следния K-функционал:

$$K_\psi(f,t^2) = \inf\left\{\|f-g\| + t^2\left\|\psi D^2 g\right\| : g \in W^2(\psi)[0,\infty), f-g \in CB[0,\infty)\right\}, \tag{4}$$

дефиран за функции $f \in CB[0,\infty) + W^2(\psi)[0,\infty)$. Тук $f \in X+Y$ означава, че функцията f може да се представи във вида
$f = f_1 + f_2$, където $f_1 \in X$ и $f_2 \in Y$.

Това е стандартната дефиниция на K-функционала в теорията за интерполация на пространства. Ще отбележим, че в теорията на апроксимациите, обикновено, условието $f - g \in CB[0,\infty)$ е тривиално изпълнено, тъй-като в повечето случаи второто интерполационно пространство е вложено в първото. Но при изучаването на апроксимацията на функции чрез операторите на Баскаков (а също и на Майер-Кьониг и Целер), се налага това условие да бъде добавено в дефиницията на K-функционала. Тъй-като, в този случай имаме интерполация между пространствата $CB[0,\infty)$ и $W^2(\psi)[0,\infty)$, като в същото време $W^2(\psi)[0,\infty) \backslash CB[0,\infty)$ не е подмножество на крайномерно пространство.

Наистина, ако означим с π_1 пространството на всички линейни функции в интервала $[0,\infty)$, то ясно е, че пространството за което е валидна горната теорема би трябвало да съдържа като подпространства $CB[0,\infty)$ и π_1 (тъй-като операторът на Баскаков възстановява линейните функци). Но пространството от функции

$CB[0,\infty)+W^2(\psi)[0,\infty)$, за което е доказана горната еквивалентност, всъщност, е съществено по-голямо от $CB[0,\infty)+\pi_1$. Например функцията

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e}, & x\in[0,e]\\ \ln x, & x\in[e,\infty)\end{cases}$$

принадлежи на пространството $W^2(\psi)[0,\infty)$ и не принадлежи на $CB[0,\infty)+\pi_1$, т.е.

$$f(x)\in\left\{CB[0,\infty)+W^2(\psi)[0,\infty)\right\}\setminus\left\{CB[0,\infty)+\pi_1\right\}.$$

Основният резултат в първа глава е следващата теорема, установяваща пълна еквивалентност между грешката на приближение $\|V_nf-f\|$ от една страна, и К-функционала $K_\psi\left(f,\frac{1}{n}\right)$ (съответно модула на непрекъснатост на Дициян-Тотик $\omega^2_{\sqrt{\psi}}(f,\frac{1}{\sqrt{n}})$) от друга.

Теорема 1. *Съществува абсолютна константа L такава, че за всяко естествено число $n>L$ и за всяка функция*

$$f\in CB[0,\infty)+W^2(\psi)[0,\infty)$$

е в сила еквивалентността

$$\|V_nf-f\|\sim K_\psi\left(f,\frac{1}{n}\right)\sim\omega^2_{\sqrt{\psi}}\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Правата теорема, т.е. че съществува константа $C>0$ такава, че

$$C\|V_nf-f\|\le K_\psi\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

е доказана, например, в [11, Теорема 9.3.2, страница 117]. Доказваме обратната теорема, а именно, че съществува константа C такава, че

$$K_\psi\left(f,\frac{1}{n}\right)\le C\|V_nf-f\|$$

в § 1.2.

Тази теорема показва, че K-функционалът (съответно модулът на гладкост на Дициян-Тотик от втори ред) е точната величина за характеризиране на грешката на приближение с оператора на Баскаков.

Ще отбележим, че както доказателството на тази теорема, така и на всички останали теореми и леми, е конструктивно. Това означава, че лесно може да се даде оценка на константата L, а също и на C отгоре. Тези оценки могат да се подобрят, но за сметка на това доста от доказателствата биха станали по-дълги и тромави.

Въпреки, че Теорема 1 е формулирана и доказана за цели числа n, тя е в сила и ако допуснем, че n е непрекъснат положителен параметър. В този случай базисните полиноми на Баскаков (3) се заменят с

$$\frac{\Gamma(n+k)}{k!\Gamma(n)}x^k(1+x)^{-n-k},$$

където с Γ е означена Гама функцията, а операторът V_n е дефиниран отново с (2).

Доказателството на силното обратно неравенство от тип A за оператора на Баскаков се базира на метод, предложен от Дициян и Иванов в [10], а именно, използването на итерирания оператор (в този случай на Баскаков) $V_n^N f$ в K-функционала. За да се приложи този метод е нужно да се докажат: неравенство от тип на Вороновская за класическия оператор на Баскаков и неравенство от Бернщайнов тип за итерирания оператор на Баскаков, като константата във второто неравенство трябва да е по-малка от единица. Тези две важни сами по себе си неравенства доказваме също в глава 1.

Теорема 2. *Съществува абсолютна константа $C>0$ такава, че за всички функции $f\in W^3(\psi)[0,\infty)$ е изпълнено неравенството*

$$\left\|V_nf-f-\frac{1}{2n}\,\psi D^2f\right\|\le Cn^{-3/2}\left\|\psi^{3/2}D^3f\right\|.$$

Доказателство на тази теорема е дадено в § 1.3.

Теорема 3. *Нека* $2 \leq N \leq \frac{n-2}{2}$, $n \geq 10$. *Тогава съществува абсолютна константа* C *такава, че за всяка функция* $f \in W^2(\psi)[0,\infty)$ *е изпълнено неравенството*

$$\left\|\psi^{3/2} D^3(V_n^N f)\right\| \leq K(N)\sqrt{n}\left\|\psi D^2 f\right\|,$$

където $K(N) \leq CN^{-1/4} \ln N$.

Пълното доказателство на тази теорема е дадено в § 1.4.

Във втора глава изследваме тегловата апроксимация с операторите на Баскаков.

Тегловата апроксимация с различни оператори, т.е. оценяването на грешката на приближение $\sup_{x\in I} |w(x)\,(f(x) - Q_n(f,x))|$ за дадена редица от оператори $Q_n(f,x)$, където $w(x)$ е сътветното тегло, също е обект на много изследвания. Количествена оценка на особената роля на крайните точки при приближаването с алгебрични полиноми е дадена първо от Николски в 1946 година [5]. Добре известен факт е, че поточковите оценки при тези приближения, могат да бъдат разглеждани като най-добрата теглова апроксимация със съответните полиноми.

За полиномите на Бернщайн началото е поставено от Беренс (Berens) и Лоренц (Lorentz) [4]. Основните резултати, обединяващи правите и обратни теореми, могат да бъдат резюмирани в следващата еквивалентност

$$\|\phi^{\gamma}(B_n f - f)\| = O(n^{-\alpha}) \Leftrightarrow \left\|\phi^{\alpha+\gamma}\Delta_h^2 f\right\|_{[h,1-h]} = O\left(h^{2\alpha}\right), \qquad (5)$$

която е валидна за $0 < \alpha < 1, -1 < \gamma \leq 0$ и за $\alpha = -\gamma = 1$. Тук

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)$$

и константите при O-еквивалентността не зависят от n и h. Тази еквивалентност е доказана за $0 < \alpha = -\gamma \leq 1$ в [4]. Случайте $0 \leq -\gamma \leq \alpha \leq 1$ и $0 < \alpha < -\gamma \leq 1$ са доказани в [6], [7], [8]. Останалите случаи $0 < \alpha < -\gamma \leq 1, 1 < \alpha - \gamma$ са доказани в [36].

Тук ще разглеждаме само приближаването на функции с тегла на Якоби (Jacobi), а именно:

за приближаване в интервала $[0, 1]$ или $[0, 1)$,

$$w(x) = x^{\gamma_0}(1-x)^{\gamma_1}, \tag{6}$$

а за $[0, \infty)$,

$$w(x) = x^{\gamma_0}(1+x)^{\gamma_\infty}. \tag{7}$$

Така, споменатата по-горе еквивалентност третира само случая на симетрични тегла ($\gamma_0 = \gamma_1$). По-късно Фелтън (Felten) [12], [13] обобщава горната еквивалентност за оператори от експоненциален тип (в частност за операторите на Сас-Миракян), а също и като заменя дясната част в (5) с реда на сходимост на съответните модули на гладкост на Дициян-Тотик и разглеждайки несиметрични тегла $0 \le -\gamma_0, -\gamma_1 \le \alpha, 0 < \alpha < 1$. Във всички тези резултати обратните теореми са формулирани в термините на порядък на сходимост. Но за да бъде точно характеризирана грешката на приближение, е нужна оценка от долу и от горе с една и съща величина. Такава величина е съответния К-функционал

$$K_w^{\phi}(f, t^2) = \inf\left\{\|w(f-g)\| + t^2\left\|w\phi D^2 g\right\|\right\}, \tag{8}$$

където инфимумът е по всички функции $g \in W^2(w\phi)(0, 1)$ такива, че $w(f-g) \in L_\infty[0, 1]$ и

$$W^2(w\phi)(0,1) = \left\{g, Dg \in AC_{loc}(0,1) : w\phi D^2 g \in L_\infty[0,1]\right\}.$$

В [23] К. Иванов доказва, че грешката на приближение с полиномите на Бернщайн (при тегла (6), $\gamma_0, \gamma_1 \in [-1, 0]$) е еквивалентна на К-функционала (8). Пак там той въвежда понятието "естествени тегла" за дадена редица от оператори и показва, че при приближаване с операторите на Бернщайн естествените тегла (6) са за $\gamma_0, \gamma_1 \in [-1, 0]$.

Дефиниция 1. *Теглото w се нарича естествено тегло за редицата от оператори Q_n в дадена норма, ако нормата на грешката с тегло $w(f - Q_n f)$ допуска съответствуващи си прави и силни обратни неравенства за най-широкия естествен клас от функции f, за които $Q_n f$ е дефиниран.*

Ще отбележим също така, че за тегловата апроксимация чрез полиномите на Бернщайн, са известни резултати и за други области на γ_0 и γ_1, макар и за по-тесен кръг от функции, например [29], [30].

Доколкото ни е известно, началото на изследванията на тегловата апроксимация с операторите на Баскаков е поставено от Бекер (Becker) в [2], където той доказва правата теорема за тегла $w(x) = 1+x^n, n \in \mathbb{N}$. В [21] Холхош (Holhoş) разширява този резултат за тегла (7), където $\gamma_0 = 0, \gamma_\infty \leq 0$. Гуо (Guo) и Ки (Qi) в [20] доказват силно обратно неравенство от тип B за симетрични тегла (7), където $\gamma_0 = \gamma_\infty \in [-1, 0)$. В [15] Финта (Finta) обобщава този метод, което му позволява да докаже силно обратно неравенство от тип B и за някои несиметрични тегла (7).

Във втора глава ние изследваме тегловата апроксимация с операторите на Баскаков като установяваме естествените тегла за тях и доказваме прави и силни обратни неравенства от тип A за възможно най-широк клас от тегла (7) - Теорема 4. Ще отбележим, че във всички известни резултати до сега са доказани, в наи-добрия случай, силни обратни неравенства от тип B. Също, в глава 2 доказваме и неравенство от тип на Вороновская (теорема 5) за оператора на Баскаков и неравенство от Бернщайнов тип (теорема 6) за итерирания оператор на Баскаков.

Но за да формулираме основните резултати от втора глава, ще са ни нужни някои дефиниции.

Дефинираме следните пространства:

$$C(w)[0,\infty) = \{g \in C[0,\infty); \quad wg \in L_\infty[0,\infty)\},$$
$$W^2(w\psi)[0,\infty) = \left\{g, Dg \in AC_{loc}(0,\infty) \quad \text{и} \quad w\psi D^2 g \in L_\infty[0,\infty)\right\},$$
$$W^3(w\psi^{3/2})[0,\infty)$$
$$= \left\{g, Dg, D^2 g \in AC_{loc}(0,\infty) \quad \text{и} \quad w\psi^{3/2} D^3 g \in L_\infty[0,\infty)\right\}.$$

Грешката на приближение ще бъде оценявана чрез съответния K-функционал: за всяка функция

$$f \in C(w)[0,\infty) + W^2(w\psi)[0,\infty)$$

и всяко $t > 0$ дефинираме

$$K_w^\psi(f,t^2) = \inf\left\{\|w(f-g)\| + t^2\left\|w\psi D^2 g\right\|\right\}, \tag{9}$$

където инфимумът е по всички функции $g \in W^2(w\psi)[0,\infty)$ такива, че $f - g \in C(w)[0,\infty)$.

Основният резултат във втора глава е установяването на пълната еквивалентност на грешката на приближение с операторите на Баскаков и K-функционала (9).

Теорема 4. *За w, дефинирани чрез (7), $\gamma_0 \in [-1,0], \gamma_\infty \in \mathbb{R}$, съществува абсолютна константа L такава, че за всяко естествено число $n > L$ и за всяка функция*

$$f \in C(w)[0,\infty) + W^2(w\psi)[0,\infty)$$

е в сила еквивалентността

$$\|w(V_n f - f)\| \sim K_w^\psi\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

Така, естествените тегла w за операторите на Баскаков са от тип (7) с $\gamma_0 \in [-1,0]$ и $\gamma_\infty \in \mathbb{R}$. Наистина, ако $\gamma_0 < -1$, то тогава е необходимо $f(x) = 0$ в околност на 0, иначе операторът $V_n f$ няма да е ограничен. От друга страна, ако $\gamma_0 > 0$, то тогава $f(x)$, в общия случай, не е дефинирана в $x = 0$ и следователно $V_n f$ не е дефиниран. Дори и да се ограничим в разглеждането на функции f такива, че $wf \in C[0, \infty)$, (което прави класа на разглеждане по-малък), то операторът $V_n f$ не би бил ограничен в тегловата норма (в противоречие с предположението, че горната еквивалентност е в сила).

Тук ще отбележим, че за по-малки класове от функции, в модифицирана норма, са доказани някои резултати - например в [14] е разгледан случая $\gamma_0 \in [0, 1]$. Тегловата апроксимация с операторите на Баскаков от този вид е разгледана в [2], [14], [20], [34], [35], [24], [25].

Във втора глава доказваме и следващите две теореми.

Теорема 5. *За тегла w, дефинирани чрез (7) с $\gamma_0 \in [-1, 0]$ и $\gamma_\infty \in \mathbb{R}$, съществуват абсолютни константи L и C такива, че за всяко естествено число $n \geq L$ е изпълнено*

$$\left\| w \left(V_n g - g - \frac{1}{2n} \psi D^2 g \right) \right\| \leq \frac{C}{n^{3/2}} \left\| w \psi^{3/2} D^3 g \right\| \tag{10}$$

за всяка функция $g \in W^3(w\psi^{3/2})[0, \infty)$.

Теорема 6. *Нека $2 \leq N \leq \frac{n-2}{2}$, $n \geq 10$. Тогава за тегла w, дефинирани чрез (7) с $\gamma_0 \in [-1, 0]$ и $\gamma_\infty \in \mathbb{R}$ и за всички функции $g \in W^2(w\psi)[0, \infty)$ е изпълнено неравенството*

$$\left\| w \psi^{\frac{3}{2}} D^3 V_n^N g \right\| \leq K(N) \sqrt{n} \left\| w \psi D^2 g \right\| \tag{11}$$

където

$$\lim_{N \to \infty} K(N) = 0.$$

В глава 3 изследваме апроксимацията с операторите на Майер-Кьониг и Целер. Правото неравенство е доказано в [11]. Относно обратното неравенство най-добрият резултат е силното обратно неравенство от тип B, доказано в [27]. Използувайки тясната връзка между операторите на Майер-Кьониг и Целер и операторите на

Баскаков, доказваме силното обратно неравенство от тип А в случая на безтеглова апроксимация. Така, комбинирайки правата и обратна теорема установяваме еквивалентността на грешката на приближение с операторите на Майер-Кьониг и Целер и съответния К-функционал (а също и на модула на гладкост на Дициян и Тотик) - Теорема 7. Но преди да я формулираме, ще дадем нужните дефиниции.

Със $C[0,1)$ ще означаваме пространството на всички непрекъснати в $[0,1)$ функции, като в точката 1 не се предполага нито непрекъснатост, нито ограниченост. С $L_\infty[0,1)$ означаваме пространството на всички Лебегово измерими и съществено ограничени в $[0,1)$ функции (при равномерната норма $\|.\|$) и с $CB[0,1) = C[0,1) \cap L_\infty[0,1)$ пространството на всички непрекъснати и ограничени в $[0,1)$ функции. Също дефинираме и пространствата

$$W^2(\varphi)[0,1) = \left\{g : Dg \in AC_{loc}(0,1) \quad \text{и} \quad \varphi D^2 g \in L_\infty[0,1)\right\},$$
$$W^3(\varphi)[0,1) = \left\{g : D^2 g \in AC_{loc}(0,1) \quad \text{и} \quad \varphi^{3/2} D^3 g \in L_\infty[0,1)\right\}.$$

За да оценим точно приближението на функции с оператора на Майер-Кьониг и Целер ще използваме следния К-функционал:

$$\begin{aligned} &K_\varphi(f,t^2) \\ &= \inf\Big\{\|f-g\| + t^2\left\|\varphi D^2 g\right\| : g \in W^2(\varphi)[0,1), f-g \in CB[0,1)\Big\}, \end{aligned} \tag{12}$$

дефиран за функции $f \in CB[0,1) + W^2(\varphi)[0,1)$.

Теорема 7. *Съществува абсолютна константа L такава, че за всяко естествено число $n > L$ и за всяка функция*

$$f \in CB[0,1) + W^2(\varphi)[0,1)$$

е в сила еквивалентността

$$\|M_n f - f\| \sim K_\varphi\left(f, \frac{1}{n}\right) \sim \omega^2_{\sqrt{\varphi}}\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Също, в трета глава изследваме и тегловата апроксимация с операторите на Майер-Кьониг и Целер.

Началото на изследванията е поставено от Бекер (Becker) и Несел (Nessel) в [3], които получават прави оценки за симетрични тегла $w(x) = \varphi^{\alpha}(x)$ where $-1 \leq \alpha \leq 0$.

В [29] Тотик доказва, че за $0 < \alpha \leq 1$ условието

$$\varphi^{\alpha}|\Delta_h^2(f,x)| \leq Kh^{2\alpha}$$

е еквивалентно на

$$M_n f - f = O\left(n^{-\alpha}\right).$$

В [28] авторите доказват, че за $0 \leq \lambda \leq 1$ и $0 < \alpha < 2$ условието

$$|M_n f(x) - f(x)| = O\left(\left(\frac{\varphi^{1-\lambda}(x)}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha}\right)$$

е еквивалентно на

$$\omega^2_{\varphi^{\lambda}}(f,t) = O(t^{\alpha}).$$

Тук $\omega^2_{\varphi^{\lambda}}(f,t)$ са модулите на Дициян и Тотик, т.е.

$$\omega^2_{\varphi^{\lambda}}(f,t) = \sup_{0<h\leq t} \sup_{x\pm h\varphi^{\lambda}(x)\in[0,1)} |\Delta^2_{h\varphi^{\lambda}(x)} f(x)|.$$

В [22] Холхош доказва следната права теорема за $\gamma_0 = 0, \gamma_1 < 0$:

$$\|w(M_n f - f)\| \leq \|wf\| \frac{\gamma_1 C(\gamma_1)}{\sqrt{n}} + 2\omega\left(f(1-e^{-t})e^{-\gamma_1 t}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

В последната глава от дисертацията ние установяваме естествените тегла от тип (6) за операторите на Майер-Кьониг и Целер и доказваме правите и обратни (силни обратни от тип A) неравенства.

Отново, ще трябва първо да дефинираме съответните пространства и K-функционали.

$$\begin{aligned}
&C(w)[0,1) = \{g \in C[0,1); \quad wg \in L_{\infty}[0,1)\},\\
&W^2(w\varphi)[0,1) = \left\{g, Dg \in AC_{loc}(0,1) \quad \text{и} \quad w\varphi D^2 g \in L_{\infty}[0,1)\right\},\\
&W^3(w\varphi^{3/2})[0,1)\\
&\qquad = \left\{g, Dg, D^2 g \in AC_{loc}(0,1) \quad \text{и} \quad w\varphi^{3/2} D^3 g \in L_{\infty}[0,1)\right\}
\end{aligned}$$

и за всяка функция $f \in C(w)[0,1) + W^2(w\varphi)[0,1)$ и всяко $t > 0$

$$K_w^\varphi(f, t^2) = \inf\left\{\|w(f-g)\| + t^2 \left\|w\varphi D^2 g\right\|\right\} \tag{13}$$

където инфимумът е по всички функции $g \in W^2(w\varphi)[0,1)$ такива, че $f - g \in C(w)[0,1)$.

Доказваме следващата теорема, установяваща еквивалентността на грешките на приближение и съответните K-функционали.

Теорема 8. *За тегла w, дефинирани чрез* (6) *с* $\gamma_0 \in [-1, 0]$ *и* $\gamma_1 \in \mathbb{R}$*, съществува абсолютна константа L такава, че за всяко естествено число $n > L$ и за всяка функция*

$$f \in C(w)[0,1) + W^2(w\varphi)[0,1)$$

е в сила еквивалентността

$$\|w(M_n f - f)\| \sim K_w^\varphi\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

Така естествените тегла w, дефинирани чрез (6), при приближаване с операторите на Майер-Кьониг и Целер (за разлика от тези при приближаване с операторите на Бернщайн) са за $\gamma_0 \in [-1, 0]$ и $\gamma_1 \in \mathbb{R}$.

* * *

Резултатите от дисертацията са докладвани на научната сесия на секция „Математическо моделиране и числен анализ“ на ИМИ, на „Workshop on Approximation Theory, CAGD, Numerical Analysis, and Symbolic Computation“, Созопол, 2014 г. и на пролетната научна сесия на ФМИ, СУ „Климент Охридски“, 2015 г.

Основната част от тях е публикувана в [16], [17], [18], [19].

В резюме, доказани са следните *нови* резултати.

1. В глава 1 е доказано силното обратно неравенство от тип А за оператора на Баскаков (без тегло), неравенсво от тип на Вороновская за Баскаков и неравенство от Бернщайнов тип за итерирания оператор на Баскаков.

2. В глава 2 са установени естествените тегла за Баскаков и са доказани правите и обратни теореми за тях (силни обратни неравенства от тип А, неравенсва от тип на Вороновская за Баскаков и неравенства от Бернщайнов тип за итерирания оператор на Баскаков).

3. В глава 3 са доказани силното обратно неравенство от тип А за оператора на Майер-Кьониг и Целер (без тегло), установени са естествените тегла при теглова апроксимация и са доказани правите и обратни теореми за тях (силни обратни неравенства от тип А).

$* * *$

Бих искал да изразя специални благодарности на проф. дмн Камен Иванов за предложените интересни задачи, постоянното внимание към моята работа над тях и оказаната помощ.

Литература

[1] Baskakov V. A. An instance of a sequence of the linear positive operators in the space of continuous functions. *Docl. Akad. Nauk SSSR*, 113:249–251, 1957.

[2] M. Becker. Global approximation theorems for Szász-Mirakjan and Baskakov operators in polynomial weght spaces. *Indiana Univ. Math. J.*, 27 No. 1:127–142, 1978.

[3] M. Becker and R.J. Nessel. A global approximation theorem for Meyer-König and Zeller operators. *Math. Z.*, 160:195–206, 1978.

[4] H. Berens and G. G. Lorentz. Inverse theorems for Bernstein polynomials. *Indiana Univ. Math. J.*, 21:693–708, 1972.

[5] R. A. DeVore and G. G. Lorentz. *Constructive Approximation.* Springer, Berlin, 1993.

[6] Z. Ditzian. A global inverse theorem for combinations of Bernstein polynomials. *J. Approx. Theory*, 26:277–292, 1979.

[7] Z. Ditzian. Interpolation theorems and the rate of convergence of Bernstein polynomials. *J. Approx. Theory*, 26:277–292, 1979.

[8] Z. Ditzian. Rate convergence for Bernstein polynomials revisited. *J. Approx. Theory*, 50:40–48, 1987.

[9] Z. Ditzian. Direct estimate for Bernstein polynomials. *J. Approx. Theory*, 79:165–166, 1994.

[10] Z. Ditzian and K. G. Ivanov. Strong converse inequalities. *J. Anal. Math.*, 61:61–111, 1993.

[11] Z. Ditzian and V. Totik. *Moduli of Smoothness*. Springer, Berlin, New York, 1987.

[12] M. Felten. Direct and inverse estimates for Bernstein polynomials. *Constr. Approx.*, 14:459–468, 1998.

[13] M. Felten. Local and global approximation theorems for positive linear operators. *J. Approx. Theory*, 94:396–419, 1998.

[14] Guo Feng. Direct and inverse approximation theorems for Baskakov operators with the Jacobi-Type weights. *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2011, 2011.

[15] Z. Finta. On converse approximation theorems. *J. Math. Anal. Appl.*, 312:159–180, 2005.

[16] I. Gadjev. Weighted Approximation by Baskakov Operators. *Manuscript submitted to the Journal of Math. Inequal. Appl.*

[17] I. Gadjev. Strong converse result for Baskakov operator. *Serdica Math. Journal*, 40:273–318, 2014.

[18] I. Gadjev. Strong converse result for uniform approximation by Meyer-König and Zeller operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 428:32–42, 2015.

[19] I. Gadjev. Weighted approximation by Meyer-König and Zeller operators. *IMI preprint ISSN 1314-541X*, 2015.

[20] Sh. Guo and Q. Qi. Strong converse inequalities for Baskakov operators. *J. Approx. Theory*, 124:219–231, 2003.

[21] A. Holhoş. Uniform weighted approximation by positive linear operators. *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math*, 56 No. 3:135–146, 2011.

[22] A. Holhoş. Uniform approximation of functions by Meyer-König and Zeller operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 393:33–37, 2012.

[23] K. G. Ivanov. Natural weights for uniform approximation by Bernstein polynomials. *manuscript*, 2011.

[24] A. Carrillo-Zentella J. Bustamante and J. M. Quesada. Direct and strong converse theorems for a general sequence of positive linear operators. *Acta Math. Hungar.*, 2011.

[25] J. M. Quesada J. Bustamante and Lorena Morales de la Cruz. Direct estimate for positive linear operators in polynomial weighted spaces. *J. Approx. Theory*, 162:1495–1508, 2010.

[26] Hans-Bernd Knoop and Xin long Zhou. The lower estimate for linear positive operators (ii). *Results in Mathematics*, 25:316–330, 1994.

[27] Shunsheng Guo Qiulan Qi and Cuixiang Li. Strong converse inequalities for Meyer-König and Zeller operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337:994–1001, 2008.

[28] Lixia Liu Shunsheng Guo and Zhiming Wang. Pointwise approximation by Meyer-König and Zeller operators. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 29(7-8):770–778, 2008.

[29] V. Totik. Uniform aproximation by Baskakov and Meyer-König and Zeller-type operators. *Period. Math. Hungar*, 14(3-4):209–228, 1983.

[30] V. Totik. Uniform aproximation by exponential-type operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 132:238–246, 1988.

[31] V. Totik. Approximation by Bernstein polynomials. *Amer. J. Math.*, 116:995–1018, 1994.

[32] V. Totik. Strong converse inequalities. *J. Approx. Theory*, 76:369–375, 1994.

[33] E. Voronovskaja. Determination de la forme asyptotique de approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein. *C. R. Acad. Sci. URSS 1932*, pages 79–85, 1932.

[34] Jian-Jun Wang and Zong-Ben Xu. Approximation with Jacobi weights by Baskakov operators. *Taiwanese journal of mathematics*, 13 No. 1:157–168, 2009.

[35] P. C. Xun and D. X. Zhou. Rate of convergence for Baskakov operators with Jacobi-weights. *Acta Mathematics Applicatae Sinica*, 18:127–139, 1995.

[36] Ding-Xuan Zhou. On a conjecture of Z. Ditzian. *J. Approx. Theory*, 69:167–172, 1992.