

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
Институт по Математика и Информатика

Мая Маркова Стоянова

**Изследване на динамиката на модели Клетъчно Невронни
Мрежи възникващи в биологията и екологията**

Автореферат

**на дисертация за получаване на образователна и научна степен
“доктор”**

Научна специалност 01.01.13

“Математическо моделиране и приложения на математиката”

Научен ръководител: проф. дмн А. Славова
София, 2013

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на научен семинар на секция “Диференциални уравнения и математическа физика” при Института по математика и информатика на БАН, състоял се на2013 г.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на Института по математика и информатика на БАН.

Автор: Мая Маркова Стоянова

**Заглавие: Изследване на динамиката на модели Клетъчно Невронни
Мрежи възникващи в биологията и екологията**

Научен ръководител: проф. дмн А. Славова

Обща характеристика на дисертацията

1. Актуалност и мотивировка на темата

В настоящия дисертационен труд се изследва динамичното поведение на полиномиални Клетъчно Невронни Мрежи (КНМ) с приложения в екологията и биологията.

В природата се наблюдават много явления със сложна структура. Например, петната на леопарда, лентите на зебрата, пръстовите отпечатащи и др. Всички тези явления се обединяват от една мултидисциплинарна парадигма наречена комплексност. Общ е принципът на динамичните решетки, според който достатъчно голям брой прости динамични единици могат да предизвикат сложно и самоорганизиращо се поведение. Невронната мрежа е модел за обработка на информация, вдъхновен от изучаването на биологичните процеси в мозъка на човека и животните, образувани от неврони и техните синапси. Математическият аналог на биологичната невронна мрежа представлява множеството от взаимно свързани прости изчислителни елементи, наречени неврони. Клетъчно Невронните Мрежи са въведени в статията на Л.Чуа и Л.Янг (Chua & Yang, Cellular Neural Network: Theory and Applications, 1988) през 1988 г. Основната идея е била да се използва решетка от нелинейни динамични вериги, взаимно свързани помежду си, с цел да се проведе сравнително голямо количество информация в реално време. Концепцията за тази нова архитектура е взимствана от архитектурата на клетъчните автомати и на невронните мрежи, като по този начин се показва нова възможност за ефективно решаване на доста бавни във времето задачи, например за разпознаване и обработка на образи и за решаване на нелинейни частни диференциални уравнения. През последните 20 години оригиналната архитектура на КНМ е обобщавана и разширявана с оглед на все по-увеличаващите се приложения след разработването на КНМ чип – универсална машина (Arena, A mechatronic lampreycontrolled by analog circuits, 2001), (Arena, Fortuna, & Branciforte, Realization of a reaction- diffusion CNN algorithm for locomotion control in an hexapode robot, 1999), (Arena, Fortuna, & Frasca, Attitude control in walking hexapod robots : an analogic spatio-temporal approach, 2002), (Arena, Fortuna, & Occhipinti, A CNN algorithm for real time analysis of DNA microarrays), (Balya, Roska, Roska, & Werblin, 2002), (Chua & Roska, Cellular neural networks and visual computing, 2002), (Chua & Roska, The CNN paradigm, 1993).

Едно от най-важните свойства на КНМ е, че отделните клетки са нелинейни динамични системи, но връзките между тях са линейни. С други думи, тези мрежи могат да се разглеждат като нелинейни с линейна пространствена структура, което прави общите техники за изследване от физиката и инженерството еднакво атрактивни. За някои симетрични темплети уравненията, описващи динамиката на КНМ, са много близки до пространствената дискретизация на нелинейни частни диференциални уравнения, като например системите на реакция-дифузия, които моделират механизмите на структурното формиране в биологията и екологията. Основната концепция на КНМ се базира на някои аспекти от невробиологията и е адаптирана към интегралните вериги. Например, в мозъка активната среда

представлява листоподобна решетка от здраво свързани възбудими неврони, чиято енергия идва от изгарянето на глюкоза с кислород. В КНМ активната среда представлява локално свързани активни клетки, чиито изграждащи блокове включват нелинейни устройства (като например транзистори) захранени от батерии.

2. Цел, предмет, задачи и структура на дисертацията

Цел на дисертацията е изследване на динамиката на модели КНМ описващи процеси от биологията и екологията. Основни методи на изследванията са метода на описващата функция и метода за локалната активност. Основното приложение на метода на описващите функции е за прогнозиране на граничните цикли в нелинейни системи. В дисертацията е разработен алгоритъм за изучаване динамиката на КНМ, който е базиран на метода на описващите функции. Той е основан на описание на линейна система чрез комплексни функции, като честотният израз е заменен от диференциално уравнение. Другият метод прилаган в изследванията се базира на принципа на локалната активност. А именно, КНМ асоциирана с хомогенна не консервативна (т.е. не без загуби) среда не може да показва модели или структури на разсейване, освен ако клетките или връзките между тях са локално активни.

Предмет на изследване в дисертацията са системи на реакция-дифузия, описващи реални процеси от биологията и екологията. Разглеждат се основно нелинейни частни диференциални уравнения (ЧДУ), които се апроксимират върху архитектурата на полиномиални КНМ на реакция-дифузия. Решенията на тези КНМ модели имат четири основни свойства: 1). непрекъснати са във времето; 2). непрекъснати и ограничени са по стойности; 3). непрекъснати са по взаимодействащи параметри; 4). дискретни са в пространството.

В дисертационния труд подробно е изучено явлениято хистерезис. Това е специален тип зависимост с памет между входния сигнал и изходния сигнал. Хистерезисът е важен в моделирането на биологичното развитие, тъй като според наблюденията, индуктивните сигнали съществуват само в определен времеви интервал от развитието. Той ускорява измененията в клетъчното ядро и поражда диференцирания, които не се връщат когато сигнала е спрял.

Задачи:

- Да се представи механизъм за моделиране на уравненията на реакция-дифузия с КНМ. Да се представят уравнения, описващи полиномиални КНМ и да се изложи метода на локалната активност, с цел да се използва за изследване на динамиката на съответните модели.
- Да се моделират рецепторни КНМ. Да се построи КНМ за прост модел описващ лиган-рецепторен комплекс. Нейната динамика да се изследва с метода на описващите функции.
- Да се изучат рецепторни КНМ модели с хистерезис. Да се построи КНМ модел за тази задача и да се изучи неговата динамика с метода на описващите функции.

- Да се изучат КНМ модели с приложения в биологията. Да се разгледа система на Lotka-Volterra, която моделира общност от три взаимодействащи популации. За нея да се построи полиномиална КНМ и да се построи конструктивен алгоритъм за определяне на областта наречена граница на хаоса.
- Да се изучи структурата на решенията от типа бягащи вълни на КНМ с приложения в екологията. Да се построи модел с КНМ на вълна цунами и да се изследва неговата динамика с цел предсказване на това природно явление. Да се построят решения на този модел от типа бягащи вълни.
- Да се изследва модифицираното уравнение на Sine-Gordon и за него да се построи КНМ архитектура. Да се изучи взаимодействието на флуксон-антифлуксон и два флуксона.

Структурата на дисертацията се състои от:

- уводна част;
- 5 глави;
- 2 приложения;
- заключителна част;
- списък на цитираните литературни източници;

Текстът е в обем от 171 страници, в това число 36 фигури и 1 таблица. Списъкът на литературата обхваща 122 заглавия. Номерата на уравненията, таблиците и фигурите в автореферата съвпадат с тези от дисертацията.

3. Ползност и приложимост на получените резултати в дисертацията

Повечето теоретични проучвания в теорията за генериране на структури, дължащи се на неустойчивост причинена от дифузия се фокусират върху анализа на системи със само две уравнения на реакция-дифузия. Те са активатор-инхибитор системи и включват кинетика избрана по начин необходим за предизвикване на дифузионна неустойчивост. Най-простият модел, който разглеждаме в дисертацията се състои от три уравнения, но само едно с ненулева дифузия. Изглежда интересно да се провери дали в такива модели структурите могат да се образуват поради дифузионна неустойчивост и как зависят от началните условия.

КНМ технологиите, вдъхновени първоначално от нервната система, скоро се присъединяват към генетичните алгоритми, а наскоро и към алгоритмите вдъхновени от имунния отговор. Освен това съвременните постижения в разкриването на схемата и многоканалните аспекти на ретинната обработка вдъхновява няколко нови алгоритмични принципа.

Възможни приложения на получените в дисертацията резултати са при моделирането на реални процеси, възникващи в приложенията, като например системи наподобяващи мозъка, клетъчно вълновите компютри. В последните години КНМ широко използват така наречените генетични алгоритми, които позволяват да се моделират такива системи като ДНК, имунен отговор, ретина, сензори и др. Друго приложение на разглежданите модели КНМ, което произтича от невробиологията, имунологията или генетиката, е да се извлекат функционалните принципи и да се нарекат био-вдъхновени принципи. Такива са принцип на двойната вълна, който произтича от операции вътре в ретината, принцип на многоканалния опонент, принцип на имунния отговор, и др. Всички тези процеси се описват от КНМ на реакция-дифузия, които подробно са изучени в дисертацията от гледна точка на тяхното динамично поведение.

4. Аprobация на дисертацията

Основните резултати са публикувани в International Journal of Neural Networks and Applications; Comptes Rendus De L'Academie Bulgare Des Sciences; IEEE Proceedings CNNA 2006; WSEAS Transactions on Mathematics, в глава от книгата "Recent advances in dynamics and control of neural networks", Cambridge Scientific Publishers; Proceedings URSI General Assembly.

Част от резултатите са получени в изпълнение на договор ДИД 02/ 15, финансиран от Националния Фонд Научни Изследвания на тема „Комбиниран подход с метод на гранични интегрални уравнения и клетъчно невронни мрежи за анализ на пиезоелектрични материали с пукнатини”.

Компютърните симулации са направени с програмните продукти MATLAB и Maple.

Също така резултатите са докладвани на конференциите BGSIAM 2008, 2009, 2010, 2011г., на семинара по диференциални уравнения и приложения в ИМИ, БАН през 2008г. и на отчетните сесии на Секция Математическа физика на ИМИ, БАН през 2011г.

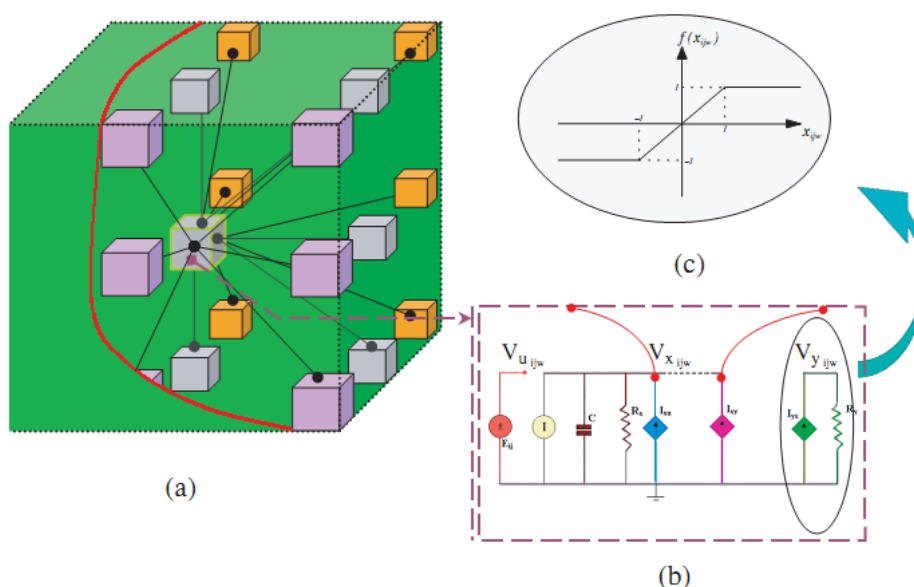
Съдържание на дисертацията

1 ГЛАВА 1. ВЪВЕДЕНИЕ В ПОЛИНОМИАЛНИТЕ КЛЕТЪЧНО НЕВРОННИ МОДЕЛИ (КНМ)

1.1 КНМ на реакция-дифузия

1.1.1 Клетъчно невронни мрежи

Идеята на Chua (Chua & Yang, Cellular Neural Network: Theory and Applications, 1988) била да използва масив от прости, съединени нелинейни динамични вериги, наречени клетки, за обработване на голямо количество информация в реално време. Концепцията е вдъхновена от архитектурата на Клетъчните автомати и на Невронните мрежи. Тази нова архитектура е способна да изпълнява задачи, които се решават за голямо време, като например обработка на изображения и решаване на частни диференциални уравнения и в същото време е подходяща за VLSI изпълнение. Оригиналният КНМ модел е представен през 1988 (Chua & Yang, Cellular Neural Network: Theory and Applications, 1988) и е показан на фигура 1.1, отнасящ се за обща примерна локално свързана схема (фиг. 1.1a).



Фигура 1.1 КНМ схема: а) пространствена мрежа, показваща локалните връзки; б) веригата на всяка клетка; в) класическа изходна нелинейна функция на всяка клетка.

Клетките са дефинирани като нелинейни вериги от първа степен, показани на фиг. 1.1b, u_{ijw} , y_{ijw} и x_{ijw} са съответно входа, изхода и статичната променлива на клетката. Изхода е свързан със състоянието чрез нелинейно уравнение:

$$y_{ijw} = f(x_{ijw}) = \frac{1}{2} \cdot (|x_{ijw} + 1| - |x_{ijw} - 1|) \quad (1.1)$$

чиято графика е показана на фигура 1.1c.

КНМ се описват от статичните уравнения на всяка клетка:

$$\begin{aligned}
Cx_{ijw} &= -\frac{1}{R_x}x_{ijw}(t) \\
&+ \sum_{C(k,l,z) \in N_r(i,j,w)} A(i,j,w;k,l,z)y_{klz} \\
&+ \sum_{C(k,l,z) \in N_r(i,j,w)} B(i,j,w;k,l,z)u_{klz} + I \quad (1.2)
\end{aligned}$$

с $1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N, 1 \leq w \leq P$ където $N_r(i,j,w) = \{C(k,l,z) | \max(|k-i|, |l-j|, |z-w|) \leq r\}$ с $1 \leq k \leq M, 1 \leq l \leq N, 1 \leq z \leq P$ е r -съседство и $x_{ijw}(0) = x_{ijw0}; |x_{ijw0}| \leq 1; C > 0; R_x > 0$. Този модел е познат като Chua-Yang модел или линейна клетъчно невронна мрежа.

1.1.2 КНМ – модел на реакция дифузия

Присъщата пространствена топология прави КНМ способни да произвеждат решения на нелинейни частни диференциални уравнения в реално време (Chua, CNN: a Paradigm for Complexity, 1998) и да пресъздават пространствено-времево явление като биологичен робот. В този случай непрекъснатия времеви поток на променливите на КНМ съответства на специфични траектории на връзките на робота. Тъй като не е лесно да се определи класът и характеристиките на подходящите сигнали, които трябва да се генерират от КНМ, се използва подход произтичащ от биологията. Такъв феномен може да бъде ефективно описан чрез специални решения на нелинейни частни диференциални уравнения, така наречените уравнения на реакция-дифузия (Krinisky, 1984)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(U) + D\nabla^2 U$$

където U е вектор на състоянието, състоящ се от поне две общи променливи представящи съответно химичните концентрации на активатора и инхибитора, в така наречения активатор-инхибитор механизъм предложен в (Murray, Mathematical Biology, 1989), $F(U)$ е векторна нелинейна функция, описваща кинетиката на феномена, D е дифузионна матрица и

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.3)$$

е тримерен оператор на Лаплас.

1.1.3 Моделиране на ЧДУ чрез КНМ

Огромно мнозинство от активни хомогенни среди, за които се знае, че проявяват комплексност във вид на дисипативни структури, са моделирани чрез ЧДУ на реакция-дифузия (Nicolis & Prigogine, 1989), (Stein & Ed., 1989), (Manneville, 1990), (Kapral, Showalter, & Eds., 1995), (Walgraef, 1997):

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + D_i \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial z^2} \right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$

където $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ са променливи на състоянието, (x, y, z) са пространствени координати, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ е нелинейна вектор-функция на \mathbf{x} , наречена кинетичен член и D_1, D_2, \dots, D_n са константи наречени дифузионни коефициенти.

Замествайки Лапласиана в (1.4) чрез неговата дискретизирана версия

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial z^2} \rightarrow (\nabla^2 \mathbf{x}_{\alpha, \beta, \gamma})_i \quad (1.5)$$

където

$$\begin{aligned} \nabla^2(\mathbf{x}_{\alpha, \beta, \gamma})_i \triangleq & x_i(\alpha + 1, \beta, \gamma) + x_i(\alpha - 1, \beta, \gamma) + x_i(\alpha, \beta + 1, \gamma) + x_i(\alpha, \beta - 1, \gamma) \\ & + x_i(\alpha, \beta, \gamma + 1) + x_i(\alpha, \beta, \gamma - 1) - 6x_i(\alpha, \beta, \gamma) \quad i = 1, 2, \dots, N_x \end{aligned} \quad (1.6)$$

получаваме следното асоциирано КНМ уравнение на реакция-дифузия

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(\alpha, \beta, \gamma) = & f_i(x_1(\alpha, \beta, \gamma), x_2(\alpha, \beta, \gamma), \dots, x_n(\alpha, \beta, \gamma)) + D_i \nabla^2(\mathbf{x}_{\alpha, \beta, \gamma})_i \\ i = & 1, 2, \dots, n; \alpha = (1, 2, \dots, N_\alpha); \beta = (1, 2, \dots, N_\beta) \text{ и } \gamma = (1, 2, \dots, N_\gamma) \end{aligned} \quad (1.7)$$

където $x_i(\alpha, \beta, \gamma)$ означават статичните променливи x_i разположени в точка в тримерно пространство с пространствени координати (α, β, γ) . Забележете, че КНМ уравнение на реакция-дифузия (1.7) се състои от система от $n = N_x N_\alpha N_\beta N_\gamma$ обикновени диференциални уравнения (ОДУ).

1.2 Полиномиални КНМ

Разглеждаме КНМ съставена от $N \times M$ клетки, подредени в правилна решетка и означаваме позицията на клетката чрез два индекса (i, j) . Ще разгледаме накратко принципните характеристики на три КНМ модела – Chua-Yang КНМ (CYCNN), Пълна КНМ (FRCNN), Полиномиален тип КНМ (PTCNN) модели.

Полиномиална КНМ: Полиномиалните КНМ са описани чрез следното нормализирано уравнение (Terzlaff, Kunz, Ames, & Wolf, 1999), (Laiho, Paasio, & Halonen, May 2000) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ij} = & -x_{ij} + \sum_{|k| \leq r, |l| \leq r} [\hat{A}_{kl}^{(1)} y_{i+k, j+l} + \hat{A}_{kl}^{(2)} y_{i+k, j+l}^2 + \dots + \hat{A}_{kl}^{(P)} y_{i+k, j+l}^P] + \sum_{|k| \leq r, |l| \leq r} [\hat{B}_{kl}^{(1)} u_{i+k, j+l} + \\ & \hat{B}_{kl}^{(2)} u_{i+k, j+l}^2 + \dots + \hat{B}_{kl}^{(P)} u_{i+k, j+l}^P] + \hat{I} \end{aligned} \quad (1.16)$$

където x_{ij}, u_{ij} и y_{ij} представляват състоянието, входа и изхода на клетката (i, j) ; $\hat{A}_{kl}^{(1)}, \hat{A}_{kl}^{(2)}, \dots, \hat{A}_{kl}^{(P)}$ коефициенти на темплата за обратна връзка, който описва взаимодействията между състоянието на клетката (i, j) и различните степени

$y_{i+k,j+l}, y_{i+k,j+l}^2, \dots, y_{i+k,j+l}^P$ на изходите на съседните клетки; $\hat{B}_{kl}^{(1)}, \hat{B}_{kl}^{(2)}, \dots, \hat{B}_{kl}^{(P)}$ са коефициентите на входния темплет, които описват взаимодействието с входа.

Чрез написване на статичния, входния и допълнителния член във векторна форма \mathbf{x}, \mathbf{u} и $\hat{\mathbf{I}}$ се получава следната компактна форма:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} + \sum_{h=1}^P \mathbf{A}^{(h)} \mathbf{y}^h(\mathbf{x}) + \sum_{h=1}^P \mathbf{B}^{(h)} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{I}} \quad (1.17)$$

където матриците $\mathbf{A}^{(h)}$ и $\mathbf{B}^{(h)}$ са получени от темплетите $\hat{\mathbf{A}}^{(h)}$ и $\hat{\mathbf{B}}^{(h)}$ ($h > 1$), както е означено за CYCNN (Chua & Roska, Cellular Neural Networks with Nonlinear and Delay-Type Template Elements and Non-Uniform Grids", 1992). Приемаме, че входните темплети $\hat{\mathbf{B}}^{(h)}$ ($h \geq 1$) и допълнителният член ще бъдат нула и че само темплетите за обратна връзка $\hat{\mathbf{A}}^{(1)}, \hat{\mathbf{A}}^{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{A}}^{(P)}$ са различни от нула.

1.3 Изследване на динамичното поведение на полиномиални КНМ

1.3.1 Метод за локална активност

Нека N да бъде двумерна КНМ асоциирана с хомогенна среда. По определение КНМ е уникално дефинирана чрез клетките и техните съединения. Нека идентифицираме всяка клетка $C(j, k)$ като нелинеен m -порт определен чрез неговата клетъчна динамика, където m е равно на броя статични променливи, които са директно свързани с техните съседи.

Принцип на локалната активност:

КНМ асоциирана с хомогенна неконсервативна (т.е. не без загуби) среда не може да показва модели или структури на разсейване, освен ако клетките или връзките между тях са локално активни.

1.3.2 Локална активност за КНМ на реакция-дифузия.

По принцип всяка клетка $C(j, k, l)$ в КНМ на реакция-дифузия има n статични променливи, но само $m \leq n$ от тях са свързани директно с техните най-близки съседи чрез дифузия. В този случай статичното уравнение на всяка клетка $C(j, k, l)$ приема формата:

$$\begin{cases} \dot{V}_1(j, k, l) = f_1(V_1(j, k, l), V_2(j, k, l), \dots, V_n(j, k, l)) + D_1 \nabla^2 V_1(j, k, l) \\ \dot{V}_2(j, k, l) = f_2(V_1(j, k, l), V_2(j, k, l), \dots, V_n(j, k, l)) + D_2 \nabla^2 V_2(j, k, l) \\ \vdots \\ \dot{V}_m(j, k, l) = f_m(V_1(j, k, l), V_2(j, k, l), \dots, V_n(j, k, l)) + D_m \nabla^2 V_m(j, k, l) \\ \dot{V}_{m+1}(j, k, l) = f_{m+1}(V_1(j, k, l), V_2(j, k, l), \dots, V_n(j, k, l)) \\ \vdots \\ \dot{V}_n(j, k, l) = f_n(V_1(j, k, l), V_2(j, k, l), \dots, V_n(j, k, l)) \end{cases} \quad (1.18)$$

$j = 1, 2, \dots, N_x; \quad k = 1, 2, \dots, N_y; \quad l = 1, 2, \dots, N_z$

Алтернативно можем да включим всички Лапласиани $D_{m+1}\nabla^2 V_{m+1}(j, k, l), D_{m+2}\nabla^2 V_{m+2}(j, k, l), \dots, D_n\nabla^2 V_n(j, k, l)$ в (1.18) и да установим $D_{m+1} = D_{m+2} = \dots = D_n = 0$.

Преработвайки (1.18) във векторна форма, получаваме:

$$\dot{V}_a = f_a(V_a, V_b) + D_a \nabla^2 V_a \quad (1.19)$$

$$\dot{V}_b = f_b(V_a, V_b) \quad (1.20)$$

където

$$V_a = [V_1(j, k, l), V_2(j, k, l), \dots, V_m(j, k, l)]^T \quad (1.21)$$

$$V_b = [V_{m+1}(j, k, l), V_{m+2}(j, k, l), \dots, V_n(j, k, l)]^T \quad (1.22)$$

$$f_a = [f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_m(\cdot)] \quad (1.23)$$

$$f_b = [f_{m+1}(\cdot), f_{m+2}(\cdot), \dots, f_n(\cdot)] \quad (1.24)$$

$$\nabla^2 V_a = [\nabla^2 V_1(j, k, l), \nabla^2 V_2(j, k, l), \dots, \nabla^2 V_m(j, k, l)]^T \quad (1.25)$$

$$D_a \triangleq \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_m \end{bmatrix}, \quad D_i > 0 \quad (1.26)$$

За да подчертаем, че КНМ е дефинирана, чрез определяне на динамиката на клетките и техните връзки, нека пренапишем (1.19) и (1.20) в следната стандартна форма (Chua, Hasler, Moschytz, & Neirynsk, Autonomous cellular neural networks: a unified paradigm for pattern formation and active wave propagation, Oct. 1995):

Клетъчна динамика:

$$\dot{V}_a = f_a(V_a, V_b) + I_a \quad (1.27)$$

$$\dot{V}_b = f_b(V_a, V_b) \quad (1.28)$$

Закони на връзките:

$$I_a = g_a(V_a(j, k, l), V_a(j-1, k, l), V_a(j+1, k, l), V_a(j, k-1, l), V_a(j, k+1, l), V_a(j, k, l-1), V_a(j, k, l+1)) \\ = \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^2 V_1(j, k, l) \\ \nabla^2 V_2(j, k, l) \\ \vdots \\ \nabla^2 V_m(j, k, l) \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Важно е да забележим, че (1.27) и (1.28) дефинират клетъчната динамика, включвайки само напрежението $V_a(j, k, l)$, $V_b(j, k, l)$ и тока $I_a(j, k, l)$ в една и съща точка (j, k, l) , докато (1.29) дефинира закона на връзките включвайки не само напрежението $V_a(j, k, l)$ в точка (j, k, l) , но също така и на съседните клетки. Взаимодействието между типична клетка $C(j, k, l)$ в точка (j, k, l) и нейната мрежа от връзки за уравнение на реакция-дифузия в двумерна КНМ, където $V_a = [V_1(j, k), V_2(j, k), \dots, V_m(j, k)]^T$ и

$\mathbf{I}_a = [I_1(j, k), I_2(j, k), \dots, I_m(j, k)]^T$ са напрежението на "m" порта и променливата на тока на порта. В специалния случай, когато $m = 1$ клетката $C(j, k)$ се изразжда в един порт.

Определение 1.1 Локална активност: Една КНМ клетка $C(j, k, l)$ се нарича локално активна в Q_i ако съществуват някакъв ток на порта $\mathbf{i}_a(t)$ и някакво време $T > 0$ такива, че :

$$\delta\varepsilon(Q_i) \triangleq \int_0^T \langle \mathbf{v}_a(t), \mathbf{i}_a(t) \rangle dt < 0 \quad (1.38)$$

където $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означава векторно скалярно произведение и $\mathbf{v}_a(t)$ е решението получено при решаването на $\dot{\mathbf{v}}_a = \mathbf{A}_{aa}\mathbf{v}_a + \mathbf{A}_{ab}\mathbf{v}_b + \mathbf{i}_a$ (1.36) и $\dot{\mathbf{v}}_b = \mathbf{A}_{ba}\mathbf{v}_a + \mathbf{A}_{bb}\mathbf{v}_b$ (1.37) при нулеви начални условия $\mathbf{v}_a(0) = 0$ и $\mathbf{v}_b(0) = 0$.

За да направим тест за локална активност, нека вземем Лапласовата трансформация на (1.37), за да получим:

$$s\hat{\mathbf{v}}_a(s) = \mathbf{A}_{aa}\hat{\mathbf{v}}_a(s) + \mathbf{A}_{ab}\hat{\mathbf{v}}_b(s) + \hat{\mathbf{i}}_a(s) \quad (1.39)$$

$$s\hat{\mathbf{v}}_b(s) = \mathbf{A}_{ba}\hat{\mathbf{v}}_a(s) + \mathbf{A}_{bb}\hat{\mathbf{v}}_b(s) \quad (1.40)$$

където $\hat{\mathbf{v}}_a(s)$, $\hat{\mathbf{v}}_b(s)$ и $\hat{\mathbf{i}}_a(s)$ показват Лапласовата трансформация съответно на $\mathbf{v}_a(t)$, $\mathbf{v}_b(t)$ и $\mathbf{i}_a(t)$.

Решавайки по отношение на $\hat{\mathbf{v}}_b(s)$ от (1.37) получаваме:

$$\hat{\mathbf{v}}_b(s) = (s\mathbf{1} - \mathbf{A}_{bb})^{-1}\mathbf{A}_{ba}\hat{\mathbf{v}}_a(s). \quad (1.41)$$

Замествайки (1.41) за $\hat{\mathbf{v}}_b(s)$ в (1.39) и решавайки за $\hat{\mathbf{i}}_a(s)$, получаваме:

$$\hat{\mathbf{i}}_a(s) = \mathbf{Y}_Q(s)\mathbf{v}_a(s) \quad (1.42)$$

където матрица на проводимостта на КНМ клетка в Q_i

$$\mathbf{Y}_Q(s) \triangleq (s\mathbf{1} - \mathbf{A}_{aa}) - \mathbf{A}_{ab}(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_{bb})^{-1}\mathbf{A}_{ba} \quad (1.43)$$

се нарича матрица на проводимостта на КНМ клетка в равновесната точка на клетката Q_i . За да бъде локално активна КНМ клетката на реакция-дифузия в Q_i , $\mathbf{Y}_Q(s)$ не трябва да бъде положителна реална матрица в Q_i (Anderson & Vongpanitlerd, 1973). Следователно, за да гарантираме, че КНМ клетката на реакция-дифузия ще бъде локално активна в Q_i , просто трябва да премахнем всички условия за добре познатите критерии за положителна реална матрица или други еквивалентни критерии за пасивност. В практиката всички КНМ уравнения на реакция-дифузия идват с контролируеми КНМ клетъчни параметри. С цел КНМ уравнението на реакция-дифузия да прояви комплексност е необходимо клетъчните параметри да се изберат такива, че клетката да е локално активна поне в някоя клетъчно равновесна точка. Там критериите за положителна реална матрица и многото техни еквивалентни версии стават задължителни (Chua, CNN: A vision of complexity, 1997), (Dogaru

& Chua, Edge of chaos and local activity domain of FitzHugh-Nagumo equation, 1998). Критериите за локална активност са показани по-долу.

КРИТЕРИИ ЗА ЛОКАЛНА АКТИВНОСТ ЗА КНМ НА РЕАКЦИЯ-ДИФУЗИЯ

КНМ клетката на реакция-дифузия е локално активна в равновесна точка на клетката Q_i ако, и само ако, нейната клетъчна матрица на проводимостта $Y_Q(s)$ [или нейната импедансна матрица $Z_Q(s)$] удовлетворяват всяко от следващи четири условия:

1. $Y_Q(s)$ има стълб в $\text{Re}[s] > 0$.
2. $Y_Q^H(i\omega) \triangleq Y_Q^\dagger(i\omega) + Y_Q(i\omega)$ не е положителна полу-определена матрица в някакво $\omega = \omega_0$, където ω_0 е кое да е реално число.
3. $Y_Q(s)$ има прост стълб $s = i\omega_p$ на имагинерните оси, където се асоциира с остатъчната матрица $K_{-1} \triangleq \begin{cases} \lim_{s \rightarrow i\omega_p} (s - i\omega_p) Y_Q(s), & \text{ако } \omega_p < \infty \\ \lim_{\omega_p \rightarrow \infty} \frac{Y(i\omega_p)}{i\omega_p}, & \text{ако } \omega_p = \infty \end{cases}$ или не е Ермитова матрица или поне не е положителна полуопределена Ермитова матрица.
4. $Y_Q(s)$ има множество стълбове на имагинерните оси.

2 ГЛАВА 2. РЕЦЕПТОРНИ КНМ

2.1 Моделиране на рецепторни КНМ

Хидрата е един от най-често изучаваните организми в теорията за биологично генериране на структури. Съществуват множество модели за генериране на структури и регулация, основани на идеята, че позиционната информация се доставя до клетките чрез разпространяващ се биохимичен морфоген.

Целта на изследването е да се отговори на следните въпроси, които са свързани с експериментите:

- Какви минимални процеси са достатъчни за създаване на структури? Направен е опит да се създаде модел за генериране на структура *de novo*. Показано е (Gierer, et al., 1972), (Noda, 1971), че нормална хидра може да се регенерира от случайна съвкупност от клетки. Реорганизацията не е резултат от пространствено преподреждане, а от съгласувана промяна във функционалното състояние на клетките. Клетките не се разпределят съгласно позиционния произход по дължината на тялото. Трябва да съществува механизъм, който определя нов център на главата или крака организиращ действията в началната хаотична маса от клетки.
- Кои модели могат да обяснят резултатите от експериментите с присаждането на части от хидра. Хидрата има способност за възстановяване на всяка загубена част от тялото и е обект на много проучвания на регенерацията. Регенерацията е способността на напълно развит организъм да заменя загубени части чрез израстване и изграждане на ново на соматична тъкан. В хидрата регенерацията става главно чрез преструктуриране на съществуващи тъкани. Механизма на генериране на структури в хидрата изглежда независим от възрастта.

Чрез основополагащата работа на Turing, изучаването на структури възникващи чрез бифуркации беше разпространено в моделиращата литература, особено за морфогенеза (Murray, *Mathematical Biology*, 1993), (Grindrod, 1991), (Maini, 1999). Ограничаваме вниманието си само до бифуркационни решения. Дифузионно управлявана неустойчивост е също механизъм за генериране на структури в активатор-инхибитор модела на хидра предложен от Meinhardt и Gierer. Възнамеряваме да проверим дали рецепторния модел може да включва такъв механизъм и какви са ограниченията съгласно кинетиката.

2.1.1 Математическа структура на рецепторните модели

Повечето модели на морфогенеза са модели на реакция-дифузия, предполагайки наличието на дифузионна субстанция. Тъй като някои от молекулите, които вземат участие в морфогенетичния процес, например рецептори или клетки не дифузират, е необходимо да разгледаме системи на реакция-дифузия в съчетание с обикновени диференциални уравнения.

Теории за уравнения на реакция-дифузия са разработени от много автори, например Britton (Britton, *Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology*, 1986), Smoller (Smoller, 1994), Fife (Fife, 1979), Rothe (Rothe, 1984), Henry (Henry, 1981) и наскоро Fiedler и Scheel (Fiedler & Scheel, 2002). Някои от резултатите могат да се приложат в случай, когато някои от дифузионните коефициенти са равни на нула, което е интересно за нас.

Всички разглеждани рецепторни модели се състоят от две подсистеми – уравнения на реакция-дифузия и обикновени диференциални уравнения, съединени чрез нелинейни кинетични функции. Най-общо уравненията в нашия модел могат да се представят в следната форма:

$$\begin{aligned} u_t^1 &= f_1(u^1, u^2), \\ u_t^2 &= D_+ \Delta u^2 + f_2(u^1, u^2), \\ \partial_n u^2 &= 0 \text{ в } \partial\Omega, \\ u^1(0, x) &= u_0^1(x), \\ u^2(0, x) &= u_0^2(x), \end{aligned} \quad (2.1)$$

където $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ е гранична област и D_+ е диагонална $(m-r) \times (m-r)$ матрица с положителни коефициенти. В нашия модел $N=1$ и $\Omega = [0,1]$.

$$u^1: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad u^2: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{m-r}$$

r е броят на обикновените диференциални уравнения, а $m-r$ броят на уравненията на реакция-дифузия.

f_1 и f_2 са гладки функции $f_1: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$ и $f_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-r}$

За удобство предлагаме векторно представяне, което обхваща всички наши рецепторни модели

$$\begin{aligned}
u_t &= D\Delta u + f(u) \text{ в } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\
\partial_n u_i &= 0 \text{ за } i = r + 1, \dots, m \text{ в } \partial\Omega \\
u(0, x) &= u_0(x) \quad (2.2)
\end{aligned}$$

където $u=(u_1, u_2)$ и D е диагонална матрица с неотрицателни дифузионни коефициенти.

Нека $d_i=0$ за $i=1, \dots, r$ и $d_i>0$ за $i=r+1, \dots, m$ и $D=diag(d_1, d_2, \dots, d_m)$.

Матрицата на дифузионните коефициенти има следната форма:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_+ \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Където D_+ е диагонална $(m-r) \times (m-r)$ матрица с положителни коефициенти и нулите означават нулева матрица от съответната размерност.

f е изображение, $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, където m е броя на уравненията.

В нашата система ненулеви дифузионни коефициенти има само в едно или две уравнения. Такива системи могат да се третират като параболични системи що се отнася до съществуването и единствеността на решенията.

За да покажем общото съществуване и единственост на решението на нашия рецепторен модел, прилагаме теорията на ограничените инвариантни правоъгълници т.е. ограничен регион Σ във фазовото пространство, със свойството, че ако началните данни лежат в Σ , тогава решението $u(x, t)$ лежи в Σ за всяко $x \in \Omega$ и всяко $t > 0$. Следователно Σ осигурява предварителна супремум-норма граничеща с u . Съответните теореми и доказателства могат да се намерят например в (Smoller, 1994).

2.1.2 Дефиниции на решенията и теореми за съществуване

В литературата се разглеждат множество дефиниции и теореми за съществуване на класически, “меки” (mild) и слаби решения на нашия проблем. Тези подходи се различават по отношение на техните хипотези. Прегледът представен по-долу цели да покаже връзката между различните класове решения.

2.1.2.1 От “меки” към класически решения

Построяването на решения на началните гранични задачи започва с построяване на “меки” решения, които в последствие се превръщат в класически решения.

Разглеждаме u като функция на времето t със стойности в Банаховото пространство X . Дефинираме $C([t_1, t_2], X)$ като набор от непрекъснати функции u дефинирани в $t_1 \leq t \leq t_2$ със стойности в Банаховото пространство X .

Разглеждаме задачата в следната форма:

$$\begin{aligned} u_t &= Au + f(u), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

С цел да пренапишем (2.2) като абстрактна задача във формата (2.4) дефинираме оператора $A = D\Delta$ с областта $D(A) := \{(u^1, u^2) \in (L^\infty(\Omega))^r \times (H^2(\Omega))^{m-r} : \partial_n u^2 = 0 \text{ в } \partial\Omega\}$.

Отбелязваме, че A има формата $A = A_1 \times A_2$, където $A_1 = 0$, $A_2 = D_+\Delta$ и $(A_1 \times A_2)(u^1, u^2) = (A_1 u^1, A_2 u^2)$ за $u^1(t) \in D(A_1)$ и $u^2(t) \in D(A_2)$ за $u^1 = (u_1, \dots, u_r)$ и $u^2 = (u_{r+1}, \dots, u_m)$.

Забележка 2.1. По-късно ще покажем, че дефинирания по-горе A е секторен оператор. Ето защо, A генерира C_0 – полугрупа (виж Теорема 4.6 в (Engel, 2000)).

Ще използваме следните означения:

Определение 2.1 Нека A е безкрайно малък генератор на C_0 полугрупата $P(t)$. Нека $u_0 \in X$ и $f \in L^1([0, T], X)$. Функцията $u \in C([0, T], X)$ удовлетворяваща

$$u(\cdot, t) = P(t)u_0 + \int_0^t P(t-s)f(u(\cdot, s))ds \text{ за всяко } t \in [0, T]$$

се нарича „меко“ решение на началната задача (2.4) в $[0, T]$.

Определение 2.2 Функцията $u : [0, T] \rightarrow X$ е класическо решение на (2.4) в $[0, T]$ ако u е непрекъснатата в $[0, T]$, непрекъснато диференцируема в $(0, T)$ $u(t) \in D(A)$ за $0 < t < T$, (2.4) е удовлетворено за $(0, T)$ и $u(0) = u_0$.

Rothe (Rothe, 1984) формулира теорема за съществуване на “меки” и класически решения на системи уравнения на реакция-дифузия свързани с обикновени диференциални уравнения. Можем да го приложим към нашия модел, за да покажем съществуването на решения в пространството на непрекъснато диференцируемите и α - Hölder функции.

Теорема 2.1.

Приемаме че:

(i) $u_0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

(ii) Функцията $F(\cdot, \cdot, u); (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow F(x, t, u) \in \mathbb{R}^m$ е измерима в (x, t) за всяко $u \in \mathbb{R}^m$.

(iii) За всеки граничен набор $B \subset \bar{\Omega} \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^m$, съществува константа $L(B)$, такава че $|F(x, t, u)| \leq L(B)$ за всяко $(x, t, u) \in B$

$|F(x, t, u) - F(x, t, v)| \leq L(B)|u - v|$ за всяко $(x, t, u), (x, t, v) \in B$.

Тогава важи следното:

- (1) За всяка начална функция $u_0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$, съществува $T \in [0, \infty)$ такава, че началната гранична задача (2.4) има единствено – „меко“ решение в интервала $[0, T]$.

(2) Разглеждайки времето на съществуване T като функция на началните данни $u_0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Тогава тази функция $T = T(u_0)$ удовлетворява $\inf\{T(u_0) | u_0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m), \|u_0\|_\infty \leq \bar{u}_0\} > 0$ за всяко $\bar{u}_0 \in [0, \infty)$.

(3) Времето на съществуване $T \in (0, \infty) \cup \infty$ може да бъде избрано максимално т.е. Определение 2.1 не важи за по-големи времена. В този случай нека $T = T_{\max}$ и получаваме $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(t)\|_\infty = \infty$ ако $T_{\max} < \infty$.

(4) Предполагаме еднородни начални данни u_0 т.е.

$$\begin{aligned} u_{0i} &\in C^\alpha, \alpha \in (0, 1) \text{ за } i = 1, \dots, r, \\ u_{0i} &\in C^{2+\alpha} \text{ за } i = r + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

където r е размера на ОДУ подсистема (както беше дефинирано преди: $d_i = 0$ за $i = 1, \dots, r$ и $d_i > 0$ за $i = r + 1, \dots, m$ и такава, че за всеки граничен набор $B \in \bar{\Omega} \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^m$, съществува константа $L(B)$ такава, че:

$$\begin{aligned} |F(x, t, u)| &\leq L(B) \text{ за всяко } (x, t, u) \in B, \\ |F(x, t, u) - F(y, s, v)| &\leq L(B) \left(|x - y|^\alpha + |t - s|^{\frac{\alpha}{2}} + |u - v| \right) \\ &\text{за всяко } (x, t, u), (y, s, v) \in B. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тогава „мекото“ решение е гладко, в смисъл че с $u(\cdot, 0) = u_0$ имаме

$$\begin{aligned} u_i &\in C^{\alpha, 1 + \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times [0, T]) \text{ за } i = 1, \dots, r \text{ всяко } T \in (0, T_{\max}), \\ u_i &\in C^{2+\alpha, 1 + \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times [0, T]) \text{ за } i = r + 1, \dots, m \text{ всяко } T \in (0, T_{\max}). \end{aligned}$$

2.1.2.2 Слаби решения

Ball (Ball, 1977) дефинира слабите решения на уравнение (2.4) по следния начин:

Определение 2.4. Функция $u \in C([0, T], X)$ е слабо решение на (2.4) в $[0, T]$ ако за всяко $v^* \in D(A^*)$ функцията $\langle u, v^* \rangle$ е абсолютно непрекъсната в $[0, T]$ и

$$\frac{d}{dt} \langle u, v^* \rangle = \langle u, A^* v^* \rangle + \langle f(u), v^* \rangle \text{ в } [0, T]. \quad (2.12)$$

A^* е спрегнатия оператор на A от $D(A^*) \subset X^*$ в X^* , където X^* е дуалното Банахово пространство на X и $D(A^*)$ е набор от елементи $u^* \in X^*$, за всеки от които съществува $v^* \in X^*$, такава че $\langle u^*, Au \rangle = \langle v^*, u \rangle$, за всяко $u \in D(A)$ и ако $u^* \in D(A^*)$, тогава $v^* = A^* u^*$.

Ball (Ball, 1977) доказва, че:

Теорема 2.2. Съществува единствено слабо решение u на (2.4) в $[0, T]$ удовлетворяващо $u(0) = u_0$, точно когато A е безкрайно малък генератор на C_0 на полугрупата $P(t)$ от гранично линейни оператори в X и в този случай u е дадено чрез:

$$u(\cdot, t) = P(t)u_0 + \int_0^t P(t-s)f(u(\cdot, s))ds \text{ за всяко } t \in [0, T] \quad (2.13)$$

2.1.3 Turing тип структури в системите на реакция-дифузия

В системите на реакция-дифузия възниква неустойчивост причинена от дифузия (Turing-тип неустойчивост). Това се случва, когато съществува пространствено хомогенно решение, което е асимптотично устойчиво в смисъл на линейна устойчивост в пространство на константни функции, но е неустойчиво по отношение на пространствено нехомогенни смущения.

Изучаваме линейна неустойчивост в хомогенно равновесно състояние, за да класифицираме структурите, които могат да се появят, чрез техните вълнови числа.

Има два вида Turing структури (в зависимост от имагинерната част на собствените стойности с положителна реална част).

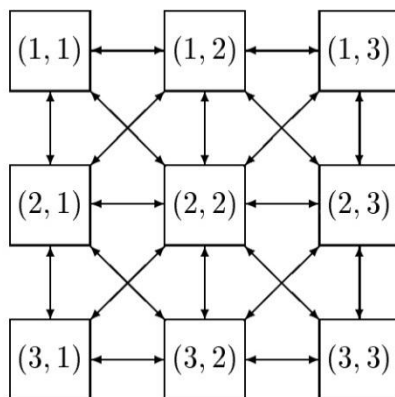
- *Стационарни структури, когато единична собствена стойност на Якобиана B стане положителна и бифуркационното решение е неконстантно равновесно състояние. В такъв случай дългосрочните решения са стационарни и пространствено хетерогенни структури.*
- *Вълнови структури (Kromker, 1997), когато две комплексно спрегнати собствени стойности на B пресичат имагинерната ос. Това е суперкритична Hopf бифуркация от хомогенно решение в устойчиво периодично и неконстантно решение. Резултатът е структура, която осцилира във времето.*

Най-простият модел, който разглеждаме тук се състои от три уравнения, но само едно с ненулева дифузия. Изглежда интересно да се провери дали в такива модели структурите могат да се образуват поради дифузионна неустойчивост и как зависят от началните условия. Модел (2.1) не е активатор-инхибитор модел. Ние анализираме възможната дифузионна неустойчивост, която може да възникне в двата модела и показваме необходимите ограничения в зависимост от кинетиката.

2.2 Динамика на рецепторни КНМ

2.2.1 Двумерни Клетъчно Невронни Мрежи

Клетъчно невронните мрежи представляват масив от аналогови динамични процесори, създадени от клетки, които съдържат линейни кондензатори, линейни резистори, линейни и нелинейни източници. Нека разгледаме двумерна решетка с 3×3 система на съседно взаимодействие, която е показана на Фигура 2.1



Фигура 2.1 Двумерна КНМ с 3x3 система на съседно взаимодействие

Квадратите на фигурата са основните единици на клетъчно невронната мрежа (КНМ) – клетките, а връзките между тях показват наличието на взаимодействие между свързаните клетки. Една от главните черти на КНМ е, че отделните клетки са нелинейни динамични системи, но връзката между тях е линейна. Може да се каже, че масивите са нелинейни, но имат линейна пространствена структура, което прави общите техники за изследване от физиката и инженерството еднакво атрактивни.

Ще дадем общо определение за клетъчно невронни мрежи :

Определение 2.5: Клетъчно невронната мрежа е:

- а) 2-, 3-, или n мерна решетка,
- б) състояща се от идентични динамични системи, наречени клетки, които удовлетворяват следните две свойства:
- в) повечето взаимовръзки са локални в рамките на краен радиус r и
- г) всички статични променливи са непрекъснати сигнали.

Определение 2.6: Клетъчно невронната мрежа е високоразмерна динамична нелинейна верига състояща се от локално свързани, пространствено независими елементи, наречени клетки. Мрежата може да има всякаква архитектура, включително правоъгълна, шестоъгълна, тороидална, сферична и т.н. $M \times M$ КНМ се дефинира математически със следните 4 спецификации:

- 1) Клетъчна динамика;
- 2) Синаптичен закон, който определя взаимодействието (пространствено) между съседните клетки;
- 3) Гранични условия;
- 4) Начални условия;

Съгласно Определение 2.6 представяме динамичната система описваща клетъчно невронните мрежи. За обща клетъчно невронна мрежа, чийто клетки са направени от независещи от времето елементи, всяка клетка $C(i,j)$ се характеризира с нейната КНМ клетъчна динамика:

$$\dot{x}_{ij} = -g(x_{ij}, u_{ij}, I_{ij}^s) \quad (2.19)$$

където $x_{ij} \in \mathbb{R}^m$, u_{ij} обикновено е скаларна величина. В повечето случаи, взаимодействията (пространствени двойки) със съседна клетка $C(i+k,j+l)$ се определят чрез синаптичен закон:

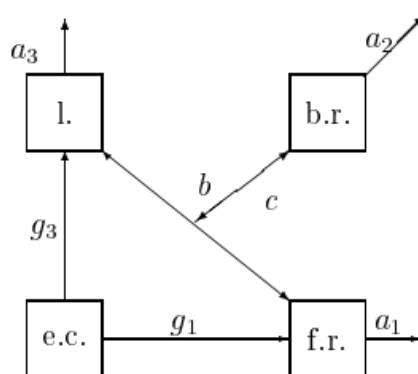
$$I_{ij}^s = A_{ij,kl}x_{i+k,j+l} + \tilde{A}_{ij,kl} * f_{kl}(x_{ij}, x_{i+k,j+l}) + \tilde{B}_{ij,kl} * u_{i+k,j+l}(t). \quad (2.20)$$

Първия член $A_{ij,kl}x_{i+k,j+l}$ на (2.20) е просто линейна обратна връзка на състоянията на съседните клетки. Вторият член представя произволна нелинейна двойка, а третият член се отнася до външните входове за всяка клетка, която се намира в околността N_r .

Знае се (Chua, Hasler, Moschytz, & Neirynsk, Autonomous cellular neural networks: a unified paradigm for pattern formation and active wave propagation, Oct. 1995) (Roska, Chua, Wolf, Kozek, Tetzlaff, & Puffer, Simulating nonlinear waves and partial differential equations via CNN - Part I: Basic techniques, 1995), че някои автономни клетъчно невронни мрежи представляват отлична апроксимация на нелинейни частни диференциални уравнения (ЧДУ).

2.2.2 Рецепторни модели.

Най-простия модел описващ лиган-рецепторен комплекс е даден във вид на три уравнения. Вземаме предвид плътността на свободните рецептори, на свързаните рецептори и на връзките. Представяме възможно най-простия рецепторен модел, който е и възможно най-общ и се основава на схемата показана на Фигура 2.2



Фигура 2.2 Обща схема на най-простия рецепторен модел

Разглеждаме едномерна епителна повърхност с дължина L . Означаваме концентрацията от връзки чрез $w(x,t)$, където x и t са пространствената и времевата координати, с x нарастващо

от 0 до L по дължината на тялото. Плътноста на връзките и свободните рецептори се означават съответно с $u(x,t)$ и $v(x,t)$. За опростяване приемаме, че всички свързващи процеси се управляват от закона за движение на масата без ефект на насищане. Моделът се описва чрез следната динамична система:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = f_1(u, v, w) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v = f_2(u, v, w)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w = d \frac{\partial^2}{\partial x^2} w + f_3(u, v, w),$$

където $u, v, w: [0,1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ функциите $f_i, i = 1,2,3$ са неотрицателни при неотрицателни аргументи и имат следната форма:

$$\begin{aligned} f_1 &= -a_1 u + g_1(u, v) - buw + cv, \\ f_2 &= -a_2 v + buw - cv, \\ f_3 &= -a_3 w - buw + g_3(u, v) + cv, \end{aligned}$$

$a_i > 0, i = 1,2,3, b, c > 0$. Предполагаме, че функциите $g_i, i = 1,3$ са в квадратична форма, т.е. $g_i(u, v) = g_i u^2$. Моделът има биологическа интерпретация за такива функции (Turing, The chemical basis of morphogenesis, 1952).

2.2.3 Клетъчно невронно мрежови модел и неговата динамика.

Както вече споменахме има няколко начина да се апроксимира оператора на Лаплас в дискретното пространство чрез КНМ синаптичен закон с подходящи А-темплети (Chua & Yang, Cellular Neural Network: Theory and Applications, 1988). В нашия случай ще вземем едномерен дискретен Лапласов темлет:

A: (1, -2, 1).

Следователно клетъчно невронно мрежовото представяне на нашия рецепторен модел (2.21) ще бъде следното:

$$\frac{du_j}{dt} = -a_1 u_j + g_1 u_j^2 - bu_j w_j + cv_j \quad (2.22)$$

$$\frac{dv_j}{dt} = -a_2 v_j + bu_j w_j - cv_j$$

$$\frac{dw_j}{dt} = -a_3 w_j + d(w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}) - bu_j w_j + g_3 u_j^2 + cv_j,$$

$1 \leq j \leq N$. Горното уравнение е всъщност обикновено диференциално уравнение, което е идентифицирано като уравнение на състоянието на автономна клетъчно невронна мрежа съставена от N клетки. За изход на нашия КНМ модел ще приемем стандартна сигмоидна функция (Chua & Yang, Cellular Neural Network: Theory and Applications, 1988).

Представяме приблизителен метод за изучаване на динамиката на КНМ модела (2.22), основан на специална трансформация на Fourier. Идеята за използване на преобразуване на Fourier за откриване на решения на частни диференциални уравнения е добре известна във физиката. Използва се за предсказване на доминирането на пространствените честоти или методи при нелинейните частни диференциални уравнения. В КНМ литературата този подход е разработен за анализиране на динамиката на клетъчно невронни мрежи със симетрични темплети (Genesio, Tesi, & Villoresi, 1993), (Mees, Dynamics of Feedback Systems, 1981).

Изследваме динамичното поведение на КНМ модел (2.22) чрез метод, добре познат в теорията на управлението и изучаването на електронните осцилатори (Mees, Dynamics of Feedback Systems, 1981), като метод на описваща функция (виж Приложение 1). Методът се основава на факта, че всички клетки в КНМ са идентични (Chua & Yang, Cellular Neural Network: Theory and Applications, 1988) и следователно чрез предлагане на подходящо двойно преобразуване мрежата може да се редуцира до скаларната схема на Lure (Mees, Dynamics of Feedback Systems, 1981).

Прилагайки двойно преобразуване на Fourier

$$F(s, z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} z^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) e^{-st} dt,$$

върху КНМ уравнение (2.22) получаваме:

$$sU = -a_1U + g_1U^2 - bUW + cV \quad (2.23)$$

$$sV = -a_2V + bUW - cV$$

$$sW = -a_3W + d(z^{-1}W - 2W + zW) + g_3U_b^2UW + cV$$

Без загуба на общото отбелязваме с $N(U, V, W) = g_1U^2 - bUW + cV$ и тогава от (2.23) получаваме:

$$U = \frac{1}{s + a_1} N \quad (2.24)$$

$$V = \frac{1}{s + a_2} N$$

$$W = \frac{1}{s + a_3 - d(z^{-1} - 2 - z)} N.$$

В двойното преобразуване на Fourier, приемаме че $s = iw_0$ и $z = e^{i\Omega_0}$, където w_0 е времевата честота, а Ω_0 е пространствената честота.

Съгласно метода на описващата функция,

$$H(s, z) = \frac{s + a_1}{s + a_3 - d(z^{-1} - 2 + z)}$$

е трансферна функция, която може да се представи чрез w_0 и Ω_0 т.е.

$$H(s, z) = H_{\Omega_0}(w_0).$$

Търсим възможни периодични решения на уравненията на състоянието на системата (2.23) във вида:

$$X_{\Omega_0}(w_0) = X_{m_0} \sin(w_0 t + j\Omega_0), \quad (2.25)$$

където $X = (U, V, W)$. Съгласно метода на описващата функция вземаме първите хармоници, т.е. $j = 0 \Rightarrow$

$$X_{\Omega_0}(w_0) = X_{m_0} \sin(w_0 t),$$

От друга страна ако положим $s = iw_0$ и $z = e^{i\Omega_0}$ в трансферната функция $H(s, z)$ получаваме:

$$H_{\Omega_0}(w_0) = \frac{iw_0 + a_1}{iw_0 + a_3 - d(2\cos\Omega_0 - 2)}. \quad (2.26)$$

Съгласно (2.26) са в сила следните ограничителни условия:

$$\Re(H_{\Omega_0}(w_0)) = \frac{X_{m_0}}{Y_{m_0}} \quad (2.27)$$

$$\Im(H_{\Omega_0}(w_0)) = 0.$$

Оттук получаваме следните ограничения:

$$w_0 = \frac{1}{a_3 - a_1 + d(2\cos\Omega_0 - 2)} \quad (2.28)$$

$$X_{m_0} = \frac{4}{\pi} \left[X_{m_0} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{X_{m_0}}\right) + \sqrt{1 - \frac{1}{X_{m_0}^2}} \right].$$

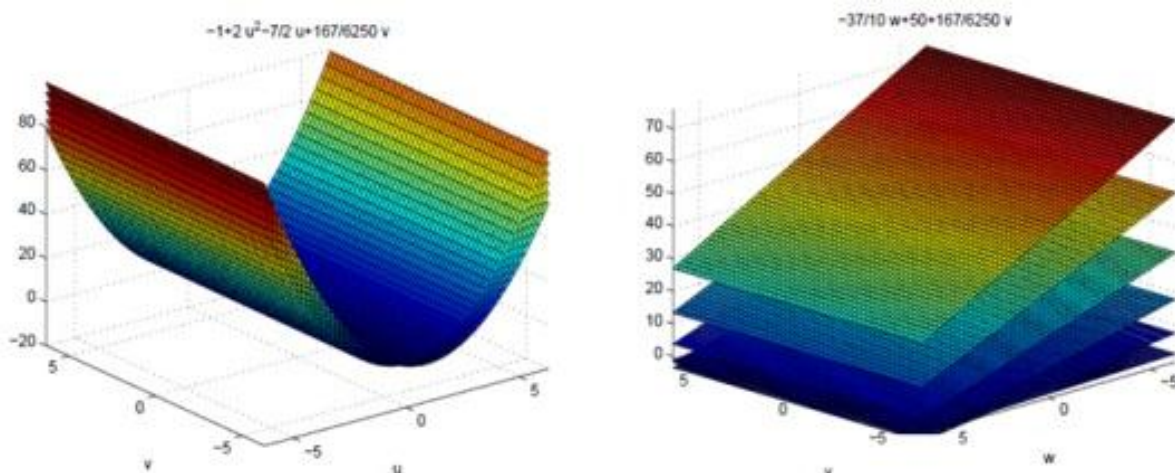
Допускаме, че нашия КНМ модел (2.22) е затворена верига от N клетки. За този случай имаме ограничен набор от честоти:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N}, \quad 0 \leq k \leq N - 1. \quad (2.29)$$

Следователно (2.27),(2.28) и (2.29) дават необходимия набор от уравнения за намирането на неизвестните X_{m_0} , w_0 , Ω_0 . Както споменахме по-горе търсим периодично вълново решение на (2.23), където X_{m_0} ще определи приблизителната амплитуда на вълната, а $T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$ ще определи скоростта на вълната.

Теорема 2.3. КНМ модел (2.22) на рецепторна система (2.21) със затворена верига от N клетки има периодично решение на уравненията на състоянието $x_j(t)$ с ограничен набор от пространствени честоти $\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N}$, $0 \leq k \leq N - 1$.

Забележка 2.4. За неустойчивост от тип Turing функцията описваща продукцията на свободни рецептори трябва да зависи от плътността на свободните рецептори и тази зависимост трябва да бъде степенна функция от ред $\alpha + 1$, където $\alpha > 0$. Следователно схема на от Turing тип може да има ако $g_1(u) = g_1 u^{\alpha+1}$, $\alpha > 0$. Тази функция може да зависи и от плътността на свързаните рецептори, но също така критична е зависимостта от плътността на свободните рецептори. За числени симулации е използвана най-простата функция изпълняваща горните условия, а именно $g_1(u) = g_1 u^2$. За да моделираме производството на лигани g_3 използваме и функция за концентрацията на свободни рецептори. В числените симулации се използва функция подобна на g_1 , а именно $g_3(u) = g_3 u^2$. Получават се следните бифуркационни диаграми:



Фигура 2.2 Бифуркационна диаграма на КНМ модела (2.22).

3 ГЛАВА 3. РЕЦЕПТОРНИ КНМ С ХИСТЕРЕЗИС

3.1 Явлението Хистерезис

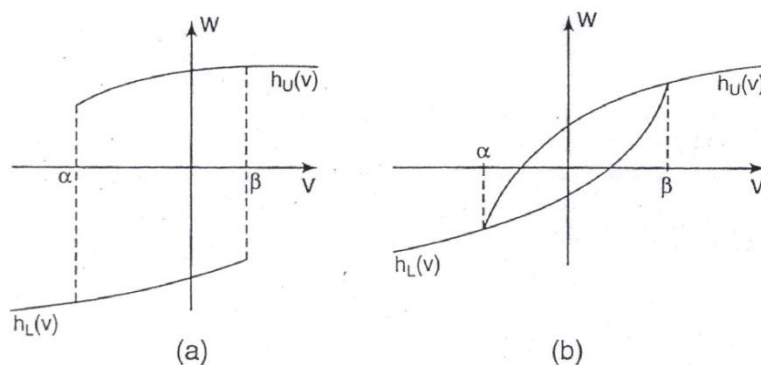
3.1.1 Пасивен и активен хистерезис.

Явлението хистерезис се дефинира като специален тип зависимост с памет между входния сигнал $v(t)$ и изходния сигнал $w(t)$. Зависимостта между входа и изхода се определя от двойка прагови стойности $\alpha < \beta$ за входа. Ще използваме имената пасивен хистерезис (наричан още положителен) и активен (наричан още отрицателен) хистерезис за двата типа зависимости, които ще обсъждаме. Отбелязваме, че в момента няма универсално приета терминология за този феномен.

При пасивния хистерезис графиката (v,w) с изход $w(t)=F[v](t)$ се премества, за даден непрекъснат частично монотонен вход $v(t)$, в една от две фиксирани изходни криви $h_U(v)$, $h_L(v)$ дефинирани съответно в $[\alpha, \infty)$, $(-\infty, \beta]$, $\alpha < \beta$ (Фигура 3.1), в зависимост от това кой праг α или β е достигнат последно. Обичайно е h_U (h_L) да бъде асимптотична константа заради насищане когато $v \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) и h_U, h_L не е необходимо да се срещат (Фигура 3.2 (a)). При пасивния хистерезис паметта в поведението на изхода може да се опише чрез формулата:

$$F[v](t) = \begin{cases} h_L(v(t)) \text{ ако } v(t) \leq \alpha; \\ h_U(v(t)) \text{ ако } v(t) \geq \beta; \\ h_L(v(t)) \text{ ако } v(t) \in (\alpha, \beta) \text{ и } v(\tau(t)) = \alpha; \\ h_U(v(t)) \text{ ако } v(t) \in (\alpha, \beta) \text{ и } v(\tau(t)) = \beta; \end{cases} \quad (3.1)$$

където $\tau(t) = \sup\{s | s \leq t, v(s) = \alpha \text{ или } v(s) = \beta\}$ т.е. $\tau(t)$ е стойността на времето, когато е достигнат последния праг. Ако $\tau(t)$ не съществува (т.е. $v(s) \in (\alpha, \beta)$ за всяко $s < t$), тогава е необходимо специално да дефинираме $F[v](t)$ в зависимост от физическата задача, която моделираме. Следователно дефинираме $F[v](t) = \eta$ ако не съществува предишен праг, където $\eta = h_L(v(t))$ или $\eta = h_U(v(t))$ както се изисква. Забележете, че $\tau(t)$ е дефинирана за всеки непрекъснат вход $v(\cdot)$, следователно областта на F може да се вземе като $C[0, \infty)$.



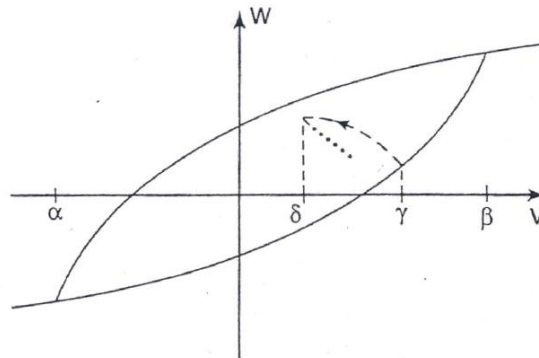
Фигура 3.1 Пасивен хистерезис.

Хистерезисният регион H е дефиниран чрез:

$$H = \{(v, w) | \alpha < v < \beta, h_L(v) < w < h_U(v)\}.$$

Активният хистерезис позволява траектории вътре в хистерезисния регион H . Разглеждайки Фигура 3.2, ако частично монотонен вход $v(t)$ нараства до γ , след това намалява, графиката (v,w) след $v(t) = \gamma$ се премества в съответна крива вътре в H (с пунктирна линия), ако входа продължава да намалява до δ , след това се увеличава, графиката се премества по нов вътрешен път (с точки). Математическите модели за този тип хистерезис изискват съществуването на поне две фиксирани семейства криви запълващи H , едно семейство за нарастване $v(\cdot)$, едно семейство за намаляване $v(\cdot)$. Забелязваме, че в случай на пасивен хистерезис в дадения пример ще имаме $f[v](t) = h_L(v(t))$. Може да се случи също да има само

едно семейство вътрешни криви, в което се среща двупосочно движение, например кривите с пунктирна линия и с точки разглеждани на Фигура 3.2



Фигура 3.2 Активен хистерезис.

Във всички от по-горните описания на явлениято хистерезис зависимостта от отговора на входа е независима от скоростта: скоростта, с която входа се движи по оста v оказва влияние само на скоростта на изхода върху оста w . Качествената природа на отговора не се променя.

Математическите модели за двата типа хистерезис дефинирани по-горе са твърде различни по своя характер, въпреки че техните поведения по отношение на паметта са подобни. Двата типа са описани за непрекъсната частично монотонна $v(t)$, но активният хистерезис лесно се разширява до непрекъснати входове чрез използването на апроксимации и ограничаващи процеси (Krasnosel'skii & Pokrovskii, 1983,1989). Пасивният хистерезис $F: v \rightarrow F[v]$ по своята същност е прекъснат, като изображение между функционалните пространства, тъй като входната функция, която достига прага и се връща дава много различен изход от функция, която се връща произволно малко преди прага. Ако семействата вътрешни криви са достатъчно симетрични, активният хистерезис има отлични непрекъснати свойства като изображение на подходящи функционални пространства.

3.1.2 Математически модели

3.1.2.1 Хистерезисен оператор на Duhem. Моделът на Duhem за активен хистерезис датира от 1897 (Duhem, 1897) и се фокусира върху факта, че изходът може да промени своя характер само когато входа смени своята посока. Този модел използва феноменологичен подход, приемайки интегрален оператор или диференциално уравнение за моделиране на зависимостта описана на Фигура 3.2 Babuska (Babuska, 1959) използва диференциалното уравнение:

$$\dot{w}(t) = f_1(w, v)\dot{v}_+(t) + f_2(w, v)\dot{v}_-(t) \quad (3.2)$$

с $\dot{v}_+(t) = \max[0, \dot{v}(t)]$, $\dot{v}_-(t) = \min[0, \dot{v}(t)]$, за да генерира кривите от Фигура 3.2 Bouc (Bouc, Solution periodique de l'equation de la "ferro-resonance" avec hysteresis, 1966), (Bouc, Modele mathematique d'hysteresis, 1971) използва интегрален оператор, чийто частен случай е уравнението:

$$\frac{dw}{dt} + a \left| \frac{dv}{dt} \right| g(v, w) = b \frac{dv}{dt}. \quad (3.3)$$

Типичен избор за g е $g(v, w) = w - b\phi(v)$, с ϕ избрано (да кажем частично линейно) така, че $w(\cdot)$ формира класически хистерезисен контур когато $v(\cdot)$ е синусоида.

3.1.2.2 Хистерезисен оператор на Ishlinskii. Моделът на Ishlinskii (Krasnosel'skii & Pokrovskii, 1983,1989) датира от 1944г и е предложен като модел за пластично-еластичност. Основа за този модел е начално изображение на активния хистерезис, наречено “stop” от Krasnosel'skii-Pokrovskii (Krasnosel'skii & Pokrovskii, 1983,1989).

За “stop”-а граничните криви са $w = \pm h$, хистерезисния регион H е отрязъка

$$\{(v, w) \mid -\infty < v < \infty, \quad -h < w < h\},$$

и съответния оператор $S_h : v \rightarrow w$ за v непрекъсната монотонна, началното състояние $(v_0, w_0) \in H$, съгласно следните правила:

(i) Ако $v(\cdot)$ се движи надясно във времето t , тогава

$$S_h[v](t) = \min\{h, v(t) - v_0 + w_0\};$$

(ii) Ако $v(\cdot)$ се движи наляво във времето t , тогава

$$S_h[v](t) = \max\{-h, v(t) - v_0 + w_0\};$$

Когато искаме да въведем зависимост (t_0, w_0) записваме $S_h(t_0, w_0)[v]$.

Най-простата форма на хистерезисния оператор на Ishlinskii може да се дефинира като суперпозиция

$$w(t) = F[v](t) \equiv \int_0^\infty \xi(h) S_h(t_0, w_0(h))[v](t) dh. \quad (3.6)$$

3.1.2.3 Preisach модел. Моделът на Preisach на електромагнитен хистерезис датира от 1935 (Preisach, 1935). Този модел използва суперпозиция на особено прости независими пасивни хистерезисни оператори както е описано на Фигура 3.1(a). Това е:

$$F[v](t) = \iint \mu(\alpha, \beta) \hat{F}_{\alpha, \beta}[v](t) d\alpha d\beta \quad (3.7)$$

където $\mu(\alpha, \beta) \geq 0$ е тегловна функция, обикновено с поддръжка на граничен набор в равнината (α, β) , $\hat{F}_{\alpha, \beta}$ е пасивен хистерезисен оператор с праг $\alpha < \beta$ и

$$h_U(v) = +1 \text{ при } [\alpha, \infty);$$

$$h_L(v) = -1 \text{ при } (-\infty, \beta].$$

Произволно начално състояние $\eta = \pm 1$ трябва да се избере ако $v(t_0) \in (\alpha, \beta)$. Като се има предвид, че Madelung модела са основава на подхода „как можем да моделираме това взаимоотношение“, Preisach модела се основава на физическото допускане: хистерезисът е

резултат от суперпозицията на поведението на независими области в материала, всяка от които може да се моделира чрез прост тригерен пасивен хистерезисен оператор.

3.1.2.4 Krasnosel'skii-Pokrovskii хистерон. Krasnosel'skii и Pokrovskii използват геометричен подход, за да дефинират техния базов хистерезисен оператор, наречен хистерон.

Първоначално, те дефинират хистерезисен оператор наречен "play". Едномерния "play" може да се представя като бутало с плунжер, с дължина $2h$.

Изходът е позицията на центъра на буталото $w(t)$, входът е позицията на плунжера $v(t)$. Забележете, че винаги имаме $|w - v| \leq h$. Това дефинира активен хистерезисен оператор с $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$ и единични семейство от вътрешни криви.

Забелязваме, че при даден вход $v(\cdot)$ изходът $w(\cdot) \equiv P_h[v](t)$ на "play" е:

$$P_h[v](t) = v(t) - S_h[v](t),$$

където S_h е stop. В същност можем да дадем директна формула за P_h както следва. Дефинираме $g_h(v,w) = \min[v+h, \max(v-h,w)]$. Ако е дадена стойността на началния изход $w_0 = w(t_0)$ и ако входът $v(\cdot)$ е монотонен, тогава $P_h[v; w_0](t) = g_h(v(t), w_0)$. Ако $v(\cdot)$ е частично монотонна, с $v(\cdot)$ е монотонна за $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, n$, тогава

$$P_h[v; w_0](t) = g_h(v(t), w(t_{i-1})) \text{ за } t \in I_i.$$

Дефинира се хистерон F , като изображение от частично монотонни непрекъснати входни функции $v(\cdot)$ в изходни функции $w[v](\cdot)$.

Нека $f(v,z)$ да бъде дадена функция с реални стойности на две реални променливи непрекъсната в $\Omega(F)$ и стриктно монотонна в z . Krasnosel'skii-Pokrovskii показват, че всеки хистерон може да се представи в следната форма:

$$F[v](t) = f(v(t), P(\Gamma_L, \Gamma_R)[v](t)), \quad (3.8)$$

където $P(\Gamma_L, \Gamma_R)$ е обобщен „play“ оператор

3.2 Динамика на рецепторни КНМ с хистерезис

Пространствените и пространствено-времените модели се срещат често във физиката, химията и биологията. В много случаи те изглеждат случайно създадени. Този феномен мотивира голям дял от математическото моделиране и анализът на резултантните системи довежда до по-добро разбиране на вътрешните механизми. Частните диференциални уравнения от дифузионен тип дълго време са служили като модел за регулаторна обратна връзка и генериране на структури в съвкупност от живи клетки. Разглеждаме рецепторен модел за генериране на структури и регулация на многоклетъчни биологични системи. Системите описващи нашия модел са съставени от дифузионен тип и обикновени диференциални уравнения. Такива системи създават някои затруднения, тъй като съществуването и поведението на решенията са по-трудни за установяване. Много аспекти

от качествено поведение трябва да се изследват числено. За тази цел използваме клетъчно нелинейно мрежови подход за изучаване на такива модели.

Хистерезисът изглежда важен в моделирането на биологичното развитие, тъй като според наблюденията, индуктивните сигнали съществуват само в определен времеви интервал от развитието. Той ускорява измененията в клетъчното ядро и поражда диференцирания, които не се връщат когато сигнала е спрял. Процесът на развитие е необратим. Хистерезисът е резултат от множество равновесни състояния. Модел реакция-дифузия, включващ хистерезисна функция е предложен от Hoppensteadt и Jager (Hoppensteadt and Jager 1980). Те допускат, че растежът на клетките е в хистерезисна зависимост от количеството на получаваните хранителни вещества и наличните киселини. Генерирането на структури в този случай е предизвикано от началната неустойчивост на обикновените диференциални уравнения (ОДУ).

3.2.1 Рецепторни модели с хистерезис

Най-простият модел на лиган-рецепторния комплекс се описва от три уравнения. Той има предвид плътността на свободните рецептори, на свързващите рецептори и на лиганите.

Разглеждаме следния рецепторен модел с хистерезис, в който производството на лигани и използването на ензими е представено чрез допълнително ОДУ с хистерезис:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= d\Delta u + g_1(u, v) \quad (3.10) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= g_2(u, v) \end{aligned}$$

където u е плътността на свободните рецептори, v е плътността на лиганите, d е коефициент на дифузия, функциите $g_1(u, v)$ и $g_2(u, v)$ представят скоростта на произвеждане на новите свободни рецептори и лигани, респективно и са показани чрез следните формули:

$$\begin{aligned} g_1(u, v) &= -\delta_1 \frac{u}{1+u^2} + \frac{b_1 v}{(1+u^2-u)(1+v)} \quad (3.11) \\ g_2(u, v) &= -\delta_2 \frac{v}{1+v^2} + \frac{b_2 v}{(1+v^2-v)(1+u)} \end{aligned}$$

δ_1 е скоростта на разлагане на свободните рецептори, δ_2 е скоростта на разлагане на лиганите, b_i , $i=1,2$ са константи.

Приемаме, че производството на нови рецептори и лигани в равновесно състояние има хистерезисна зависимост от количеството на новите рецептори и лигани. Няма да зависи от плътността на свързаните рецептори, за които предполагаме че са константа. За да моделираме хистерезисната зависимост от g_1 и g_2 приемаме, че в равновесно състояние плътността на новите рецептори и лигани е полином от трета степен разделен на полином от втора степен.

3.2.2 Рецепторни КНМ модели и тяхната динамика

Известно е (Chua, Hasler, Moschytz, & Neirynsk, Autonomous cellular neural networks: a unified paradigm for pattern formation and active wave propagation, Oct. 1995), (Roska, Chua, Wolf, Kozek, Tetzlaff, & Puffer, Simulating nonlinear waves and partial differential equations via CNN - Part I: Basic techniques, Oct. 1995), че някои автономни клетъчно нелинейни мрежи представляват отлично приближение на нелинейни частни диференциални уравнения (ЧДУ). Ще представим рецепторен модел, чрез КНМжи на реакция-дифузия. Както вече споменахме има няколко начина за апроксимиране на оператора на Лаплас в дискретното пространство чрез КНМ синаптичен закон с подходящ А-темплет (Roska, Chua, Wolf, Kozek, Tetzlaff, & Puffer, Simulating nonlinear waves and partial differential equations via CNN - Part I: Basic techniques, Oct. 1995).

В нашия конкретен случай за рецепторни модели (3.10), (3.11) ще вземем едномерен дискретизиран темплет на Лаплас:

$$A: (1, -2, 1)$$

Следователно КНМ представянето за нашия рецепторен модел (3.10), (3.11) ще бъде следното:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = d(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + g_1(u_j, v_j) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = g_2(u_j, v_j), 1 \leq j \leq N.$$

Горната система е всъщност система от обикновени диференциални уравнения, която се идентифицира като уравнение на състоянието на автономна КНМ съставена от N клетки. За изход на нашия КНМ модел (3.12) ще вземем стандартна сигмоидна функция (Chua & Yang, Cellular Neural Network: Theory and Applications, Oct. 1988).

Ще изследваме свойствата - динамика и устойчивост на (3.12) чрез метода на описващата функция (Genesio, Tesi, & Villorresi, 1993). Прилагайки двойна трансформация на Fourier (виж Приложение 1):

$$F(s, z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} z^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) \exp(-st) dt, \quad (3.13)$$

на рецепторния КНМ модел (3.12) получаваме:

$$\begin{aligned} sU(s, z) &= d(z^{-1}U(s, z) - 2U(s, z) + zU(s, z)) + G_1(U(s, z), V(s, z)) \\ sV(s, z) &= G_2(U(s, z), V(s, z)). \end{aligned} \quad (3.14)$$

където G_1 и G_2 са съответно трансформацията на Fourier (3.13) за функциите g_1 и g_2 . Без загуба на точност получаваме от (3.14):

$$U(s, z) = \frac{1}{s - d(z^{-1} - 2 + z)} G_1 \quad (3.15)$$

$$V(s, z) = \frac{1}{s} G_2.$$

В двойната трансформация на Fourier (3.13) приемаме, че $s = i\omega_0$ и $z = \exp(i\Omega_0)$, където ω_0 е времевата честота, а Ω_0 е пространствената честота.

Съгласно метода на описващата функция (Mees, Dynamics of Feedback Systems, 1981), $H(s, z) = \frac{s}{s - d(z^{-1} - 2 + z)}$ е трансферна функция, която може да се представи чрез ω_0 и Ω_0 т.е. $H(s, z) = H_{\Omega_0}(\omega_0)$.

Търсим възможни периодични решения на системата (3.14) в следната форма:

$$U_{\Omega_0}(\omega_0) = U_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0) \quad (3.16)$$

$$V_{\Omega_0}(\omega_0) = V_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0).$$

Съгласно метода на описващата функция вземаме първия хармоник т.е. $j=0 \Rightarrow$

$$U_{\Omega_0}(\omega_0) = U_{m_0} \sin(\omega_0 t),$$

$$V_{\Omega_0}(\omega_0) = V_{m_0} \sin(\omega_0 t).$$

От друга страна ако заместим $s = i\omega_0$ и $z = \exp(i\Omega_0)$ в трансферната функция $H(s, z)$ получаваме:

$$H_{\Omega_0}(\omega_0) = \frac{i\omega_0}{i\omega_0 - d(2\cos\Omega_0 - 2)}. \quad (3.17)$$

Съгласно метода на описващата функция (Mees, Dynamics of Feedback Systems, 1981) са в сила следните ограничения:

$$\Re(H_{\Omega_0}(\omega_0)) = \frac{U_{m_0}}{V_{m_0}} \quad (3.18)$$

$$\Im(H_{\Omega_0}(\omega_0)) = 0$$

Следователно (3.17) и (3.18) ни дават необходимия набор от уравнения за намиране на неизвестните U_{m_0} , V_{m_0} , ω_0 и Ω_0 . Както споменахме по-горе търсим периодично решение на (3.14), такова че U_{m_0} и V_{m_0} ще определят приблизителната амплитуда на вълната и $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ще определи скоростта на вълните.

Теорема 3.1. Рецепторен КНМ модел (3.12) състоящ се от N клетки има периодично решение на уравнението на състоянието u_j, v_j с краен набор от пространствени честоти $\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N}$, $0 \leq k \leq N - 1$.

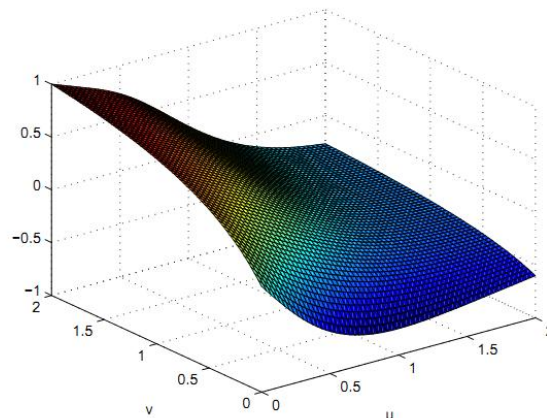
Забележка 3.2. За системи подобни на тип (3.10) състоящи се от едно уравнение на реакция-дифузия и едно обикновено диференциално уравнение, т.е.

$$u_t = \Delta u + f(u, v)$$

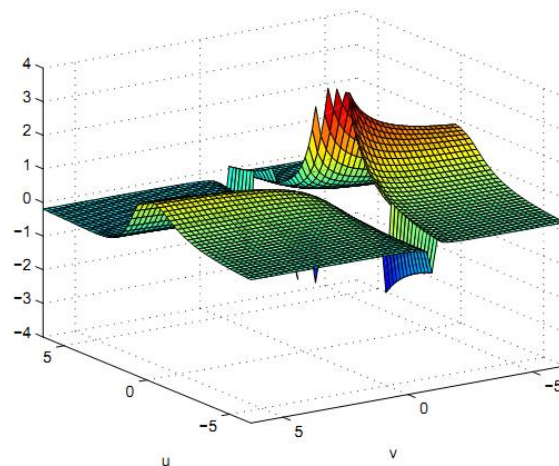
$$v_t = g(u, v),$$

такава че $\partial_v f(u, v) \leq 0$ и $\partial_u g(u, v) \leq 0$ е в сила, Heinze и Schweizer (Heinze & Schweizer, 2005) доказват съществуването на стационарен и подвижен фронт и изследват устойчивостта на тези решения.

Правим симулация на рецепторен КНМ модел (3.12). Получаваме следната фигура:



Фигура 3.3 Стационарно вълново решение на рецепторен КНМ модел



Фигура 3.4 Пространствено-времево решение на рецепторен КНМ модел.

Симулацията показва, че за модела (3.12) можем да имаме градиенто-подобно решение за плътността на свободните рецептори (стоящи вълни), което е стабилно във времето (виж Фигура 3.3) или пространствено-времево решение осцилиращо във времето (виж. Фигура 3.4). Формирането и запазването на няколко пика на Фигура 3.4 са резултат от

бистабилността на реакционния период. За такъв модел можем да имаме различни устойчиви решения, които са преходи между равновесните устойчиви състояния.

4 ГЛАВА 4. КНМ В БИОЛОГИЯТА

4.1 Биологични модели

Растежа и намаляването на популациите в природата и борбата на видовете да доминират над някои друг са обект на изучаване от много години. Приложения на прости математически концепции на този феномен са наблюдавани още преди векове. Сред основателите на математическите популационни модели са Malthus (1798), Verhulst (1838), Pearl и Reed (1908) и след това Lotka и Volterra, чийто работи са публикувани първоначално през 1920 и 1930-те години.

Ще разгледаме описание и анализ на моделите на Lotka-Volterra хищник-жертва и конкуренция на видовете. Историята за навлизането на Volterra в тази биологична област е добре позната. Този италиански математик е заинтересован от областта на популационната биология чрез разговор с неговия колега U. d'Ancona, който е наблюдавал загадъчна биологична тенденция. През Първата световна война комерсиалният риболов в Адриатическо море пада до твърде ниско ниво. Това предполага, че ще нарасне наличността на рибата за ловене. Вместо това популацията на комерсиално значимата риба е намаляла средно, докато броя на акулите, които са техни хищници, е нараснал. Двете популации също са забелязани и да се колебаят.

4.2 Приложение на КНМ в биологични модели

4.2.1 Биологични приложения на КНМ

КНМ технологиите първоначално са вдъхновени от нервната система, но скоро се присъединяват към генетичните алгоритми, а наскоро и към алгоритмите вдъхновени от имунния отговор. Освен това съвременните постижения в разкриването на схемата и многоканалните аспекти на ретинната обработка вдъхновява няколко нови алгоритмични принципа. Накратко ще покажем някои от последните резултати свързани с ретината на бозайници и тактилните усещания на нашите пръсти и ще подчертаем принципа на проактивно наблюдение.

4.2.1.1 Многоканални ретина модели

До преди дванадесетина години работата на вътрешната част от ретината на бозайниците е била непозната за учените изучаващи нервната система. От друга страна, инженери ентузиазирани относно някои познания за външната част на ретината разработват прост модел с резистивна мрежа, наречен „силиконова ретина“. Ясно е, че това е само добра имитация в сравнение с работата на ретината. След сериозния пробив в разбирането на невробиологичните структури на многоканалната природа на вътрешната ретина на бозайник (заек), са разработени много по-сложни, макар и все още приблизителни, модели с многослойни КНМ. Същността на тези модели е представянето на рецептивното поле или по-точно, локалните свойства на взаимодействието на невроните. Тази локална взаимосвързаност е ключов елемент на много сетивни органи. Типична 3-слойна КНМ

единица, наречена R-единица, може да се използва, за да имитира някои основни динамични взаимодействия (също направена от силиций в КНМ универсална машина с програмируеми настройки). Хоризонталната линия представлява един слой КНМ, типично с дифузионни темплети, с дифузионна константа L и времева константа T . Двата слоя имат различни времева и дифузионна константи, и взаимното свързване (вертикално) между клетките е разположено между слоевете. По този начин се използват само 5 параметъра, току що дефинирани. Използвайки тази конструкция може да се направи по сложен модел на ретина.

4.3 Динамика на полиномиални Lotka-Volterra КНМ

Ще разгледаме следната Lotka-Volterra система, която моделира общността от три взаимодействащи популации:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(r_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} = x_3(r_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - a_{33}x_3), \end{cases} \quad (4.55)$$

където $x_i, i = 1, 2, 3$ е плътността на i -тата популация, $r_i, a_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ положителни реални коефициенти; r_i е вътрешната степен на растеж на i -тата популация и коефициента a_{ij} описва влиянието на j -тата популация върху i -тата популация (Hofbauer & Sigmund, 1988). Знаците на a_{ij} и a_{ji} определят характера на взаимодействието между популациите i и j : система (4.55) може да опише всеки от трите основни типа взаимодействие: съперничество, сътрудничество и хищник – жертва. Такива системи се срещат често в природата. Например два растителни вида съревноваващи се за едни и същи опрашващи насекоми или два вида гъби съревноваващи се за корените на едни и същ вид дърво, за да образуват микориза формират такава съперник – съперник - мутуалист система.

4.3.1 Полиномен КНМ модел на системата на Lotka-Volterra

За изучаване на системата Lotka-Volterra ще използваме КНМ с независима от транслациите полиномна функция за обратна връзка. В предложената VLSI (Very-large-scale integration) разработка е представено първото КНМ базирано хардуерно изпълнение с полиномна функция. Да разгледаме m -слоен полиномен КНМ с клетки $C^l(i)$ (подредени в едномерна решетка във всеки слой) приемаме, че има взаимодействие само между съседни слоеве със следното уравнение на състоянието:

$$\dot{x}_i^l(t) = f^l(x_i^1, \dots, x_i^l, \dots, x_i^m) + \sum_{i_1=-1}^1 \dots \sum_{i_n=-1}^1 x_{i+i_n}^l a_{i_n}, \quad (4.56)$$

където $l = 1, \dots, m, i_j$ е j -тия компонент на индексния вектор i ($i_j \in \{-1, 0, 1\} \forall j \in \mathbf{N}$), i е вектор с пространствените координати и a_{i_n} са елементите на следния A- темплет:

$$a_{i_n} = \begin{cases} -2n & i_1 = i_2 = \dots = i_n = 0 \\ 1 & \sum_{j=1}^n |i_j| = 1 \\ 0 & \sum_{j=1}^n |i_j| > 1 \end{cases}$$

За целите на моделирането е необходимо конкретно представяне на $f^l(\cdot)$, което да обхваща широк клас от възможни функции. Да разгледаме следното опростено представяне на $f^l(\cdot)$

$$f^l(x_i^1, \dots, x_i^m) = P_{l,l}(x_i^l) + P_{l,l-1}(x_i^{l-1}) + P_{l,l+1}(x_i^{l+1}), \quad (4.57)$$

с функция $P_{l,l}(\cdot)$ дефинирана със следния полином

$$P_{l,l}(x_i^{l'}) = \sum_{k=0}^K b_{l,l}^k (x_i^{l'})^k$$

За системата на Lotka-Volterra (4.55), съответния полиномен КНМ модел може да бъде описан със следната система:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i^1}{dt} &= f^1(x_i^1, x_i^2, x_i^3) + r^1 x_i^1 \\ \frac{dx_i^2}{dt} &= f^2(x_i^1, x_i^2, x_i^3) + r^2 x_i^2 \\ \frac{dx_i^3}{dt} &= f^3(x_i^1, x_i^2, x_i^3) + r^3 x_i^3 \end{aligned} \quad (4.58)$$

където променливите x_1, x_2 и x_3 от (4.55) са свързани с КНМ на реакция-дифузия чрез полином от втори ред и състоянията на клетките x_i^1, x_i^2, x_i^3 представят решенията x_1, x_2 и x_3 водещи до уравнение на състоянието показано в (4.58).

Развитието по Тейлор на функциите

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1(-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_2(-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - a_{33}x_3) \end{aligned}$$

е следното:

$$\begin{aligned} f^1(x_i^1, x_i^2, x_i^3) &= b_{11}^{(1)}(x_i^1) + b_{11}^{(2)}(x_i^1)^2 + b_{12}^{(1)}(x_i^2) + b_{12}^{(2)}(x_i^2)^2 + b_{13}^{(1)}(x_i^3) + b_{13}^{(2)}(x_i^3)^2 + y^1 \\ f^2(x_i^1, x_i^2, x_i^3) &= b_{22}^{(1)}(x_i^2) + b_{22}^{(2)}(x_i^2)^2 + b_{23}^{(1)}(x_i^3) + b_{23}^{(2)}(x_i^3)^2 + b_{21}^{(1)}(x_i^1) + b_{21}^{(2)}(x_i^1)^2 + y^2 \\ f^3(x_i^1, x_i^2, x_i^3) &= b_{33}^{(1)}(x_i^3) + b_{33}^{(2)}(x_i^3)^2 + b_{31}^{(1)}(x_i^1) + b_{31}^{(2)}(x_i^1)^2 + b_{32}^{(1)}(x_i^2) + b_{32}^{(2)}(x_i^2)^2 + y^3 \end{aligned}$$

4.3.2 Динамика на Lotka-Volterra КНМ модела

Прилагаме следният конструктивен алгоритъм:

1. Извършваме следната дискретизация на системата на Lotka-Volterra съответстваща на уравненията на Lotka-Volterra КНМ модела:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i^1}{dt} &= f^1(x_i^1, x_i^2, x_i^3) + r^1 x_i^1 = F^1 \\ \frac{dx_i^2}{dt} &= f^2(x_i^1, x_i^2, x_i^3) + r^2 x_i^2 = F^2 \\ \frac{dx_i^3}{dt} &= f^3(x_i^1, x_i^2, x_i^3) + r^3 x_i^3 = F^3\end{aligned} \quad (4.59)$$

където f^1, f^2 и f^3 са развитието в ред на Taylor съответно на функциите f_1, f_2 и f_3 . За да се представи Lotka-Volterra КНМ модела като решение на (4.55), използвайки PCNN модел (4.59) коефициентите $b_{ll}^{(k)}$ трябва да се установят чрез оптимизационен процес (Tetzlaff & Gollas, Modeling complex systems by reaction- diffusion Cellular Nonlinear Networks with polynomial Weight-Functions, 2005).

2. Намираме равновесните точки на (4.59). За Lotka-Volterra КНМ модела (4.59) равновесните точки се определят по следния начин. Нека да напишем (4.59) във векторна форма:

$$\frac{dX}{dt} = X(R - AX) = F \quad (4.60)$$

където

$$X = \text{col}(x_i^1, x_i^2, x_i^3), R = (r^1, r^2, r^3), A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогава равновесните точки X_e са такива че:

$$X_e(R - AX_e) = 0 \quad (4.61)$$

Има поне две равновесни точки $X_e^1 = (0,0,0)$ и $X_e^2 = RA^{-1}$ ако A^{-1} съществува.

3. Изчисляваме клетъчните коефициенти от Якобиана на (4.61) за всяка равновесна точка на системата $X_e^j, j=1,2$:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \frac{\partial f^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \frac{\partial f^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial f^3}{\partial x^1} & \frac{\partial f^3}{\partial x^2} & \frac{\partial f^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \Big|_{(x^1, x^2, x^3) = X_e^j, j=1,2}$$

$$= \begin{bmatrix} f_e^{11} & f_e^{12} & f_e^{13} \\ f_e^{21} & f_e^{22} & f_e^{23} \\ f_e^{31} & f_e^{32} & f_e^{33} \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

4. Изчисляваме следата $\text{Tr}(X_e^j)$ и детерминантата $\Delta(X_e^j)$ на Якобиана (4.62) за всяка равновесна точка :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(X_e^j) &= f_e^{11} + f_e^{22} + f_e^{33} \\ \Delta(X_e^j) &= f_e^{11} f_e^{22} f_e^{33} + f_e^{12} f_e^{23} f_e^{31} \\ &+ f_e^{13} f_e^{21} f_e^{31} - f_e^{13} f_e^{22} f_e^{31} \\ &- f_e^{11} f_e^{23} f_e^{32} - f_e^{12} f_e^{21} f_e^{33}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Определение 4.1: Устойчив и локално активен регион $\text{SLAR}(X_e^j)$ в равновесната точка X_e^j на Lotka-Volterra КНМ модела (4.59) е такъв регион, за който $\text{Tr} < 0$ и $\Delta > 0$.

Приемаме за равновесна точка $X_e = (1,1,1)$ (Roska, Chua, Wolf, Kozek, Tetzlaff, & Puffer, Simulating nonlinear waves and partial differential equations via CNN- Part I: Basic techniques, 1995). В този случай горните условия могат да се запишат по следния начин:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(X_e = (1,1,1)) &= r^1 - 2a_{11} + r^2 - 2a_{22} + r^3 - 2a_{33} < 0 \quad (4.64) \\ \Delta(X_e = (1,1,1)) &= (r^1 - 2a_{11})(r^2 - 2a_{22})(r^3 - 2a_{33}) - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- (r^1 - 2a_{11})a_{23}a_{32} - (r^2 - 2a_{22})a_{13}a_{32} - (r^3 - 2a_{33})a_{12}a_{21} > 0 \end{aligned}$$

4.3.3 Граница на хаоса.

В литературата (Chua, Local activity is the origin of complexity, Nov. 2005) така наречената "граница на хаоса" (EC) означава област в параметричното пространство на динамична система, където поведението е сложно и дава възможност за информационна обработка. Ще се опитаме да дефинираме по-точно този феномен досега известен само чрез емпирични примери. Освен това ще представим алгоритъм за определяне на граница на хаоса за КНМ на реакция-дифузия, като Lotka-Volterra КНМ модела (4.59). Нека приемем $R=0$ в равновесното уравнение (4.61) т.е.

$$\begin{aligned} f^1(x_e^1, x_e^2, x_e^3) &= 0 \quad (4.65) \\ f^2(x_e^1, x_e^2, x_e^3) &= 0 \\ f^3(x_e^1, x_e^2, x_e^3) &= 0 \end{aligned}$$

За Lotka-Volterra KHM модела (4.58) приемаме за равновесна точка $X_e = (1,1,1)$ (Roska, Chua, Wolf, Kozek, Tetzlaff, & Puffer, Simulating nonlinear waves and partial differential equations via CNN- Part I: Basic techniques, 1995). Следващата ни стъпка е да изчислим локалните клетъчни коефициенти $f_e^{11}, f_e^{12}, f_e^{13}, f_e^{21}, f_e^{22}, f_e^{23}, f_e^{31}, f_e^{32}, f_e^{33}$ от (4.62) за равновесната точка X_e . Ще определим локално активния регион и устойчиво локално активния регион за точка в параметричното пространство на клетката чрез (4.64). Ще определим областта на границата на хаоса EC в параметричното пространство на клетките използвайки следното определение (Chua, Local activity is the origin of complexity, Nov. 2005):

Определение 4.2: Lotka-Volterra KHM модела се нарича управляем в областта на граница на хаоса тогава и само тогава, когато съществува поне една равновесна точка X_e , която е едновременно локално и устойчиво активна в X_e , при съществуване на A^{-1} и $R=0$.

В сила е следната теорема:

Теорема 4.4 Полиномният KHM модел на системата на Lotka-Volterra (4.55) работи в режим на граница на хаоса ако :

- (i) A^{-1} съществува и
- (ii) $2(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{13}a_{32} + a_{33}a_{12}a_{21}) > (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$.

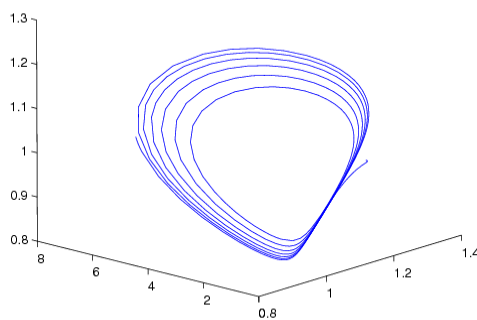
За тези стойности на параметъра съществува поне една равновесна точка, която е едновременно локално активна и устойчива.

Доказателство: Според Определение 4.1 $SLAR(X_e)$ е такъв, че $Tr < 0$ и $\Delta > 0$. Нека $R=0$, тогава от (4.64) получаваме

$$Tr(X_e = (1,1,1)) = -2a_{11} - 2a_{22} - 2a_{33} < 0$$

и $\Delta(X_e = (1,1,1)) = -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + 2a_{11}a_{23}a_{32} + 2a_{22}a_{13}a_{32} + 2a_{33}a_{12}a_{21} > 0,$

ако условие (ii) е изпълнено. В този случай намерихме поне една равновесна точка X_e , която е едновременно локално активна и устойчива следователно нашият PCNN Lotka-Volterra модел работи в режим граница на хаоса.



Фигура 4.1

Областта на граница на хаоса за Lotka-Volterra КНМ модела е даден на фигура 4.8

5 ГЛАВА 5. РАЗПРОСТРАНЕНИЕ НА ВЪЛНИ В КНМ С ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕКОЛОГИЯТА

5.1 Решения на КНМ от вида на бягащи вълни

Ще изучаваме структурата на решенията от вида “бягащи вълни” за автономни КНМ. Има много източници в литературата, в които са изучавани такива решения на дискретни в пространството и също така едновременно дискретни в пространството и времето системи (Mallet-Paret, Spatial patterns, spatial chaos and travelling waves in lattice of differential equations, in: Stochastic and Spatial Structure of Dynamical Systems., 1996), (Hsu & Lin, 1998).

Да разгледаме следната едномерна автономна КНМ:

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + af(x_i) + \beta f(x_i + 1), i \in \mathbb{Z}, \quad (5.1)$$

където a, β са константи и f е изходна функция. Първо приемаме, че

$f = f_1$, където f_1 е като в (5.2) и $a > 0, \beta > 0, a + \beta > 1$.

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{ако } x \geq \varepsilon, \\ \frac{x}{\varepsilon} & \text{ако } |x| \leq \varepsilon, \\ -1 & \text{ако } x \leq -\varepsilon, \end{cases} \quad (5.2)$$

Тогава (5.1) има три пространствено хомогенни стационарни решения $x^- < x^0 < x^+$, където

$$x^+ = a + \beta, \quad x^0 = 0 \quad \text{и} \quad x^- = -a - \beta, \quad (5.3)$$

и е от бистабилен тип.

Предполагаме, че $x_i(t) = \phi(i - ct; c)$ е решение от тип бягаща вълна на (5.1) при $\phi \in C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$. Тогава c и $\phi(s; c)$ удовлетворява

$$-c\phi'(s; c) = -\phi(s, c) + af(\phi(s; c)) + \beta f(\phi(s + 1; c)). \quad (5.4)$$

Ще изследваме основните свойства на решенията на (5.4) при $c < 0$ и

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s; c) = x^+. \quad (5.5)$$

5.2 Моделиране на екологични задачи с КНМ

В теорията за точно предсказване на цунами вълни е подчертано, че най-важното е да се направи модел на тези мощни вълни. Често в литературата се посочва, че цунамито се предизвиква от достатъчно голям солитон. Солитоните възникват като специално решение на широко разпространен клас слаби нелинейни дисперсни частно диференциални уравнения (ЧДУ) моделиращи водните вълни като Korteweg–de Vries (KdV) или Camassa–Holm уравнение, описващи водни вълни в плитководен режим.

Целта ни е да опишем как първоначалните вълнения прерастват в цунами вълна. Нека h е средната дълбочина на водата, λ е типичната дължина на вълната, и a е типичната амплитуда. Съществуват два важни параметъра $\epsilon = a/h$, наречен амплитуден параметър и параметър за плитчината $\delta = h/\lambda$. Според тези параметри е получена класификация, която се среща при моделирането на двумерни водни вълни (Alvarez-Samaniego & Lannes, 2008):

1.) вълна в плитка вода, голяма амплитуда ($\delta \ll 1$, $\epsilon \sim 1$), водещо първоначално до уравненията на вълна в плитка вода и след това до Green-Naghdi модел (Green & Naghdi, 1976);

2.) вълна в плитка вода, режим със средна амплитуда ($\delta \ll 1$, $\epsilon \sim \delta$), водещо до уравненията на Serr (Johnson, 1997) и до уравнението на Camassa-Holm (Camassa & Holm, 1993);

3.) вълна в плитка вода, малка амплитуда или режим на дълга вълна ($\delta \ll 1$, $\epsilon \sim \delta^2$), водещо първоначално до линейно вълново уравнение

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} = 0 \quad (5.23)$$

с общо решение

$$\varphi(x, t) = \varphi_+(x - t) + \varphi_-(x + t), \quad (5.24)$$

където знаците плюс минус се отнасят до профила на движението на вълната φ_{+-} с непроменена форма надясно/наляво с постоянна скорост. Малките ефекти, които бяха пренебрегнати първоначално (малка амплитуда, дълга вълна) за дълго време/пространствена скала започват да имат значителен кумулативен нелинеен ефект, такъв че в дългосрочен план всяка от вълните, която прави (5.24) решение на (5.23) удовлетворява уравнението KdV (Drazin & Johnson, 1989).

Разглеждаме следната динамична система:

$$\varphi_{tt} + \varphi_{xx} = -f(\varphi), \quad (5.25)$$

$$f(\varphi) = \begin{cases} \varphi - \varphi|\varphi|^{-\frac{1}{2}} & \text{ако } \varphi \neq 0 \\ 0 & \text{ако } \varphi = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

5.2.1 КНМ модел и неговата динамика

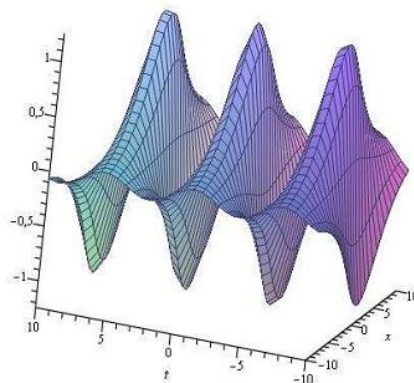
КНМ модела на нашата система (5.25), (5.26) ще бъде следният:

$$\begin{aligned} \frac{dv_j}{dt} &= A_1 * u_j + f(u_j), \\ \frac{du_j}{dt} &= v_j, \quad 1 \leq j \leq N \end{aligned} \quad (5.27)$$

Теорема 5.6. КНМ модел (5.27) представляващ затворена верига от N идентични клетки, има периодично решение на състоянието $u_j(t), v_j(t)$ с ограничен набор от пространствени честоти

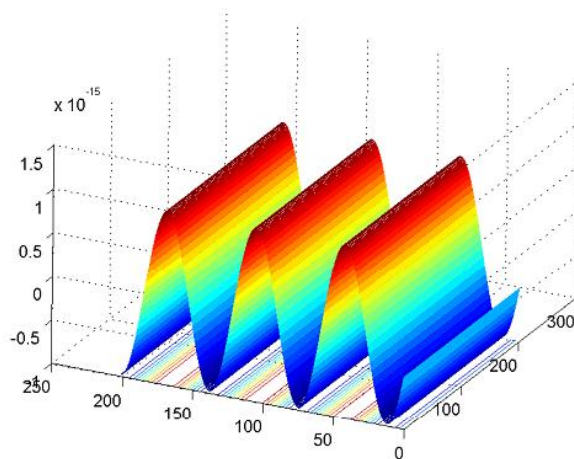
$$\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N}, \quad 0 \leq k \leq N - 1.$$

След симулацията на нашия КНМ модел (5.27) получаваме следните резултати:



Фигура 5.1 Периодично вълново решение на КНМ модел (5.27)

Стойностите на мрежовите параметри на КНМ модела, описан чрез динамичната система (5.27), са определени чрез оптимизация. По време на оптимизационния процес средноквадратичната грешка е минимизирана чрез използването на Powell метод (Tetzlaff & Gollas, Modeling complex systems by reaction-diffusion Cellular Nonlinear Networks with polynomial Weight-Functions, 2005). Резултатите са получени чрез MATLAB.



Фигура 5.2 Симулация на КНМ модел (5.27) след оптимизационния процес

5.2.2 Бягащи вълни в КНМ модел

Целта ни е изучаване структурата на решенията на бягащи вълни в КНМ модел (5.27). Съществуват много изучавания на решенията на бягащи вълни с пространствена дискретизация или с пространствено-времева дискретизация (Roska, Chua, Wolf, Kozek, Tetzlaff, & Puffer, Simulating nonlinear waves and partial differential equations via CNN- Part I: Basic techniques, 1995), (Slavova, Cellular Neural Networks: Dynamics and Modelling, 2003). Изучаването на решенията на бягащи вълни може да стане по следния начин. Разглеждаме решението на (5.27) в следната форма:

$$z_j = \Phi(j - ct), \quad (5.33)$$

$z_j = \text{col}(u_j, v_j)$ за непрекъснатата функция $\Phi: \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$ и за някакво неизвестно реално число c . Означаваме $s = j - ct$. Нека да заместим (5.33) в нашия КНМ модел (5.27). Тогава $\Phi(s)$ и c удовлетворяват системата от следния вид:

$$-c\Phi'(s) = G(\Phi(s + r_0), \Phi(s + r_1), \dots, \Phi(s + r_n)) + F(\Phi(s + r_0)) = 0 \quad (5.34)$$

където $r_0 = 0, r_i$ са реални числа за $i = 1$ до N . Уравнение (5.34) се нарича бистабилно, защото има три пространствени хомогенни решения

$$\Phi(s) = z^-, z^0, z^+ \text{ удовлетворяващи } z^- < z^0 < z^+ \text{ и}$$

$$\begin{aligned} G(z, z, \dots, z) &> 0 \text{ за } z \in (-\infty, z^-) \cup (z^0, z^+), \\ G(z, z, \dots, z) &< 0 \text{ за } z \in (z^-, z^0) \cup (z^+, \infty), \end{aligned}$$

Наскоро Mallet-Paret (Mallet-Paret, Spatial patterns, spatial chaos and travelling waves in lattice of differential equations, in: Stochastic and Spatial Structure of Dynamical Systems, 1996) показва, че (5.34) има единствено монотонно решение удовлетворяващо граничните условия:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s) = z^- \quad \text{и} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(s) = z^+. \quad (5.35)$$

По точно, доказано е че при някои допускания, съществува единствено c^* , такова че (5.34) има монотонно решение удовлетворяващо (5.35) ако $c = c^*$, и такова решение е също единствено до изместване на фазата ако $c = c^* \neq 0$. В действителност, решението $\Phi(s)$ на (5.34) и може да се представи като

$$\Phi(s) = z^+ - \gamma e^{\sigma s} - \tilde{\Phi}(s) e^{2\sigma s},$$

за $s \gg 1$, $\sigma < 0$, $\gamma > 0$, $\tilde{\Phi}(s)$ е ограничено и C^1 -функция.

Приемаме, че нашия КНМ модел (5.27) е ограничена непрекъсната верига от $L = N \cdot N$ клетки. За този случай ние имаме ограничен набор от честоти (Slavova, Cellular Neural Networks: Dynamics and Modelling, 2003):

$$\Omega = \frac{2\pi k}{L}, \quad 0 \leq k \leq L - 1. \quad (5.36)$$

Тогаво важи следната теорема:

Теорема 5.7: Приемаме, че $z_j(t) = \Phi(j - ct)$ е решение от тип бягаща вълна в КНМ модела (5.27) с $\Phi \in C^1(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$ и $\Omega = \frac{2\pi k}{L}$, $0 \leq k \leq L - 1$. Тогаво съществува константа $c_* < c^* < 0$ такава че:

- (i) Ако $c \leq c_*$ тогава $\Phi(s; c)$ е намаляваща и удовлетворява $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s) = z^0$ и $\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(s) = z^+$; (5.37)
- (ii) Ако $c = c^* > c_*$ тогава $\Phi(s; c)$ е намаляваща и удовлетворява (5.35)
- (iii) Ако $c^* < c < 0$, тогава $\Phi(s; c)$ е намаляваща и неограничена.

5.3 Взаимодействие на вълни и тяхната КНМ реализация

Разглеждаме взаимодействието на физическия обект - квант от магнитен поток, наречен флуксон. Флуксоните са устойчиви в смисъл, че те могат да се запазят, когато тяхната посока се променя и те могат да се свързват с електрически устройства.

При изследването на флуксоните се използва известното уравнение на Sine-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \sin \varphi, \quad (5.42)$$

уравнение (5.42) може да се запише в следния вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \alpha(1 + \varepsilon \cos \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sin \varphi - \gamma, \quad (5.44)$$

където γ , $\Gamma \equiv G_0 \left(\frac{\Phi_0}{2\pi I_0 c} \right)^{\frac{1}{2}} = \text{const} > 0$, $0 < \varepsilon \equiv \frac{G_1}{G_0} \ll 1$, $\alpha \in [10^{-2}, 10^{-4}]$. Ако α е много малко уравнение (5.44) е еквивалентно на (5.42). Уравнение (5.44) в същност описва разсейването в уравнението на Josephson. От гледна точка на анализа ще бъде по-лесно да приемем, че $G_0 = g_0(v)$ и $G_1 = g_1(v)$, $g_0, g_1 = \text{const}$, за да бъде в квадратична форма.

5.3.1 Флуксон решения на модифицираното уравнение на sine-Gordon и техните взаимодействия

Р. Парментие показва в (Lonngren, Scott, & Eds., 1978), че уравнение (5.44) има две различни от физическа гледна точка решения – плазмена вълна съответстваща на амплитудата на люлеене на махало и флуксон вълна съответстваща на въртенето на махало. Търсим решения за бягаща вълна с постоянна скорост $c^2 < 1$. По този начин от (5.44) при $\varepsilon = 0$ получаваме:

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \alpha \frac{c^2}{1-c^2} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 = \frac{\sin \varphi - \gamma}{1-c^2}. \quad (5.45)$$

Стандартната замяна на $\frac{d\varphi}{d\xi} = p(\varphi)$ в (5.45) води до:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} (p^2) - \alpha \frac{c^2}{1-c^2} p^2 = \frac{\sin \varphi - \gamma}{1-c^2}$$

т.е. получаваме линейно обикновено диференциално уравнение (ОДУ) от първи ред по отношение на p^2 и с независима променлива φ . Тогава трябва да решим ОДУ с разделени променливи $\left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 = F(\varphi)$ и т.н. Получаваме решението на модифицираното Sine-Gordon уравнение (5.44):

$$\varphi = \arcsin \gamma_0 + 2 \arcsin \left(\text{cn} \left(\frac{1}{k} \left(\frac{\gamma_0}{2\Gamma c^2} \right)^{\frac{1}{2}} (\xi - \xi_0), k \right) \right),$$

където $k = \left(\frac{2\gamma_0}{\gamma + \gamma_0} \right)^{\frac{1}{2}}$, $\gamma_0 = \frac{2\Gamma c^2}{((1-c^2)^2 + 4\Gamma^2 c^2)^{1/2}}$.

Следващата ни стъпка е да обсъдим взаимодействието флуксон-антифлуксон от физическа гледна точка. Интересува ни намирането на решение на (5.44) записано във форма (Lamb, 1971):

$$\psi = f(x)g(t) = \text{tg} \frac{\varphi}{4}, \quad (5.46)$$

т.е. $\varphi = 4 \arctg(f(x)g(t))$. Тогава решението на нашето модифицирано уравнение на Sine-Gordon е:

$$\psi_{\alpha} \approx \frac{1}{c} \begin{cases} -e^{\frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}}}, & x \rightarrow -\infty, \text{ (IV)} \\ e^{-\frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}}}, & x \rightarrow \infty, \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\psi_{\beta} \approx \frac{1}{c} \begin{cases} e^{\frac{x+ct}{\sqrt{1-c^2}}}, & x \rightarrow -\infty, \text{ (I)} \\ -e^{-\frac{x+ct}{\sqrt{1-c^2}}}, & x \rightarrow \infty, \text{ (III)}. \end{cases}$$

Антифлуксоните са монотонно намаляващи и са отбелязани с II и IV. Съответно, флуксоните I и III са монотонно нарастващи.

Ще обсъдим накратко взаимодействието на двойка флуксони удовлетворяващи (5.44). Съответното решение $\varphi(t, x)$ е дадено със следната формула:

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} \frac{1-ABC}{B+C} = 4 \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{BC} - A}{\frac{1}{B} + \frac{1}{C}}, \text{ където}$$

$$A = \frac{1-c_1c_2-\sqrt{1-c_1^2}\sqrt{1-c_2^2}}{1+c_1c_2+\sqrt{1-c_1^2}\sqrt{1-c_2^2}}, \quad 0 < c_1, c_2 < 1, \quad B = e^{\frac{x-x_1-c_1t}{\sqrt{1-c_1^2}}}, \quad C = e^{-\frac{x-x_2-c_2t}{\sqrt{1-c_2^2}}}.$$

След колизията с втория флуксон, първият приема отрицателна посока. Следователно побавният флуксон движещ се напред със скорост $c_1 > 0$ се премества допълнително назад. По тази причина правим заключение, че след колизията вторият флуксон приема положителна посока. Ето защо, по-бързият флуксон движещ се напред със скорост $c_2 > c_1 > 0$ се премества допълнително напред.

5.3.2 Изчисляване на взаимодействията на флуксони с клетъчно невронни мрежи

Ще приложим пространствена дискретизация за решаването на модифицираното уравнение на Sine-Gordon (5.44). Уравнението е трансформирано в система от обикновени диференциални уравнения, които са определени като уравнения на състоянието на Клетъчно невронна мрежа с подходящ темплет. Изобразяваме $\varphi(t, x)$ в слой на клетъчно невронна мрежа, такъв че напрежението на състоянието на КНМ клетката в пресечните точки да е u_j . Нека разгледаме едномерна клетъчно невронна мрежа, където клетките се състоят от линеен кондензатор успоредно свързан с нелинеен индуктор, описана чрез следното уравнение:

$$i_j = f(\varphi_j) = \alpha(1 + \varepsilon \cos \varphi_j)u_j - \sin \varphi_j$$

и където клетките се свързват по между си чрез линейни индуктори с индуктивност L .

В терминологията на клетъчно невронно мрежовата верижна топология можем да идентифицираме следните елементи съответно:

1) Динамика на клетъчно невронно мрежовата клетка:

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{1}{C} [I_j - f(\varphi_j)], \quad (5.47)$$

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = u_j, \quad 1 \leq j \leq N; \quad (5.48)$$

2) Синаптичен закон на клетъчно невронната мрежа

$$I_j = i_{L_j} - i_{L_{j+1}} = \frac{1}{L} (\varphi_{j-1} - 2\varphi_j + \varphi_{j+1}), \quad (5.49)$$

където $\varphi_j(t) = \int_{-\infty}^t u_j(\tau) d\tau$ е свързването на потоците във възел j . Забележете, че синаптичният закон (5.50) е дискретен Лапласиан $A=[1,-2,1]$ на свързването на потоците φ_j .

Нека да напишем динамиката на нашия клетъчно невронно мрежови модел (5.47), (5.48),(5.49) в следната форма:

$$\frac{du_j}{dt} = (\varphi_{j-1} - 2\varphi_j + \varphi_{j+1}) - \alpha(1 + \varepsilon \cos \varphi_j)u_j - \sin \varphi_j \quad (5.50)$$

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = u_j, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Търсим възможни решения с периодични състояния на система (5.50) във вид (Slavova, Cellular Neural Networks: Dynamics and Modelling, 2003):

$$\varphi_{\Omega_0}(\omega_0) = \varphi_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0). \quad (5.51)$$

Тъй като нашия клетъчно невронно мрежови модел (5.50) е ограничен затворен масив от N клетки имаме ограничен набор от пространствени честоти:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N}, \quad 0 \leq k \leq N - 1. \quad (5.52)$$

5.3.3 Симулации и обсъждане

Правейки симулация на нашия клетъчно невронно мрежови модел (5.50) получихме следните резултати. Решенията:

$$\varphi_{\pm} = \pm 4 \operatorname{arctg} e^{\pm \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{1-c^2}}} \quad (5.53)$$

описват геометрично цикъл ξ вариращ от $\xi = -\infty$ до $\xi = +\infty$. Ако вземем и в двата случая знак „+“ получаваме положителен цикъл, т.е. $\xi \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow \varphi \in (0, 2\pi)$, а ако вземем и в двата случая знак “-“ получаваме положителен цикъл, но $\xi \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow \varphi \in (-2\pi, 0)$.

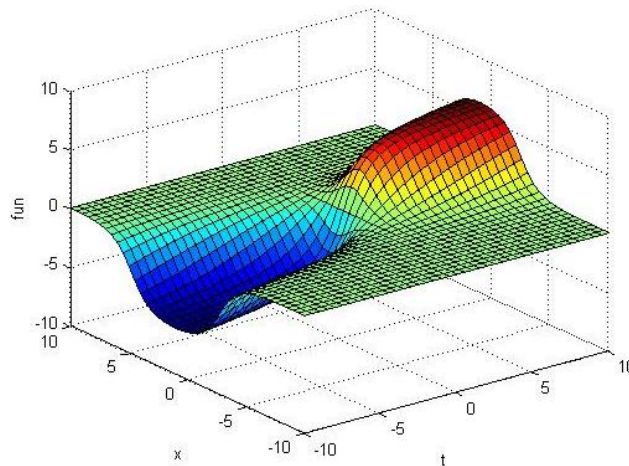
Противоположните знаци водят до отрицателни цикли. Използвайки терминология от физиката: положителните цикли са флуксони, а отрицателните са антифлуксони.

Когато двойка флуксони взаимодействат те преминават в „двойни решения“ (виж фиг.5.11)

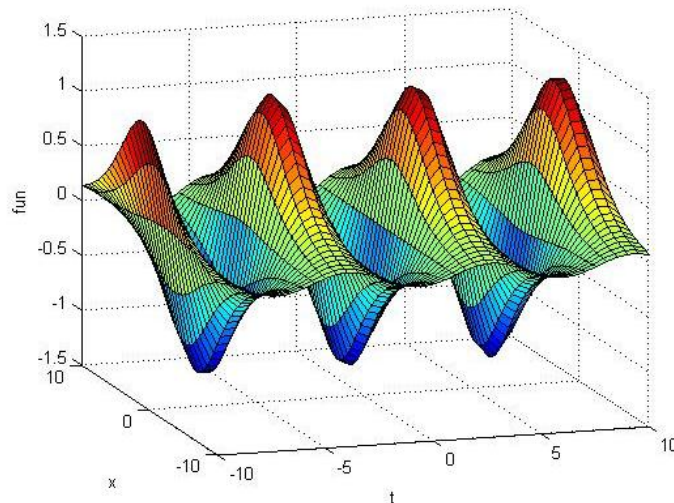
$$\varphi_D = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \left[\frac{u(t-t_0)}{\sqrt{1-u^2}} \right]}{\operatorname{uch} \left[\frac{x-x_0}{\sqrt{1-u^2}} \right]} \right\}, \quad (5.54)$$

или могат да се свързват в „бредон“ (breathon) имащ формата показана на фиг.5.12

$$\varphi_B = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{tg} v \sin[(\cos v)(t-t_0)]}{\operatorname{ch}[(\sin v)(x-x_0)]} \right\} \quad (5.55)$$



Фигура 5.3 Взаимодействие на двойка флуксони - „двойни решения“



Фигура 5.4 Взаимодействие на двойка флуксони - „бредон“ (breathon)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основните приноси в дисертацията са:

1). Моделирани са рецепторни КНМ, които описват морфогенеза и са предимно модели на реакция-дифузия предполагайки наличието на дифузионна субстанция. Тъй като някои от молекулите, които вземат участие в морфогенетичния процес, например рецептори или клетки не дифузират, са разгледани системи на реакция-дифузия в съчетание с обикновени диференциални уравнения. Именно такива системи се изучават в дисертацията от гледна точка на съществуване на решенията. Дефинирани са три класа решения - класически, "меки" (mild) и слаби решения. За прост модел описващ лиган-рецепторен комплекс, описан от динамична система състояща се от три уравнения, се построява КНМ (глава 2). Нейната динамика се изследва с метода на описващите функции. Показано е съществуване на периодични решения на КНМ модела и са направени компютърни симулации.

2). Изучени са рецепторни КНМ модели с хистерезис. В дисертацията е направен подробен анализ на явлениято хистерезис. Изучени са математическите модели на основните хистерезисни оператори. Разгледан е рецепторен модел с хистерезис, в който производството на лигани и използването на ензими е представено чрез допълнително обикновено диференциално уравнение (ОДУ) с хистерезис (глава 3). Построен е КНМ модел за тази задача и е изучена неговата динамика с метода на описващите функции. Направени са компютърни симулации, показващи, че можем да имаме градиенто-подобно решение за плътността на свободните рецептори (стоящи вълни), което е стабилно във времето или пространствено-времево решение осцилиращо във времето.

3). В дисертацията се изучават КНМ модели с приложения в биологията. Представени са биологични модели за едновидови популации, модели на системи хищник-жертва и уравненията на Lotka-Volterra (глава 4). Разгледана е система на Lotka-Volterra, която моделира общност от три взаимодействащи популации. За нея е построена полиномиална КНМ и е построен конструктивен алгоритъм за определяне на областта наречена граница на хаоса. Направена е и компютърна симулация на тази област.

4). Изследва се разпространението на вълни в КНМ с приложения в екологията. Изучена е структурата на решенията от типа бягащи вълни на КНМ с приложения в екологията. Изучени са бягащи вълни в КНМ с частично линеен изход и в КНМ с идеализиран изход. Построен е модел с КНМ на вълна цунами и е изследвана неговата динамика с цел предсказване на това природно явление (глава 5). Предложеният модел е на движението на водата преди пристигането на цунами вълната. Построени са решения на този модел от типа бягащи вълни. Направени са компютърни симулации на модела, които показват зараждането и разпространението на вълни от такъв вид.

5). Разглежда се взаимодействието на физическия обект - квант от магнитен поток, наречен флуксон. Изследва се модифицираното уравнение на Sine-Gordon и за него се построява КНМ архитектура (глава 5). Изучава се взаимодействието на флуксон-антифлуксон и два

флуксона. Направена е компютърна симулация на двата вида взаимодействие, която потвърждава получените теоретични резултати.

6). Описани са основните уравнения на КНМ на реакция-дифузия. Представен е механизъм за моделиране на уравненията на реакция-дифузия с КНМ, като са показани КНМ модели на четири добре познати ЧДУ на реакция-дифузия- FitzHugh-Nagumo ЧДУ, Brusselator ЧДУ, Meinhardt-Gierer ЧДУ, Oregonator ЧДУ (глава 1). Представени са уравненията, описващи полиномиални КНМ, които се прилагат в дисертацията за моделиране на някои уравнения възникващи в биологията.

7). Подробно е изучен метода на локалната активност (глава 1), който по-нататък в дисертацията се използва за изследване на динамиката на съответните модели.

СПИСЪК НА ПУБЛИКАЦИИТЕ

Markova, M., & Slavova, A. (2010). Modeling tsunami waves via CNN approach. *Proc. BGSIAM*.

Markova, M., Slavova, A., & Zecca, P. (2011). Wave propagation of Cellular Neural Network model . От *Recent advances in dynamics and control of neural networks*. Cambridge Scientific Publishers.

Slavova A., Tetzlaff R., & Markova, M. (2011). CNN computing of the interaction of fluxons. *Proceedings of the General Assembly of URSI*. Istanbul.

Slavova, A., & Markova, M. (2005). Receptor-based Cellular Neural Networks. *WSEAS Trans. on Mathematics 3, 4*, pp. 212-217.

Slavova, A., & Markova, M. (2006). Receptor-based CNN model with hysteresis for pattern formation. *Proc. IEEE, CNNA 2006*, (стр. pp. 241-244).

Slavova, A., & Markova, M. (2007). Polynomial Lotka Volterra CNN model. *Dynamics and Complexity. C.R.Bulg.Acad.Sci vol.60, No.12*, pp.1271-1276.

Slavova, A., & Markova, M. (2008). Receptor based Cellular Neural Network Models. *International Journal of Neural Networks and Applications*, vol.1, No.1, pp. 1-8.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Alvarez-Samaniego, B., & Lannes, D. (2008). Large time existence for 3D water-waves and asymptotics. *Invent. Math.*, 171, 485-541.
- [2]. Anderson, B., & Vongpanitlerd, S. (1973). Network Analysis and Synthesis: A Modern Systems Theory Approach. *Prentice-Hall Electrical Engineering Series. Prentice-Hall Networks Series.*
- [3]. Babuska, I. (1959). The nonlinear theory of internal friction. *Appl. Mat.*, 4, 303-321.
- [4]. Ball, J. (1977). Strongly continuous semigroups, weak solutions and the variation of constants formula. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 63:370-373.
- [5]. Bouc, R. (1966). Solution periodique de l'equation de la "ferro-resonance" avec hysteresis. *Comptes Rendus Acad. Hebd. Seances*, A263, 497-499.
- [6]. Bouc, R. (1971). Modele mathematique d'hysteresis. In *Acustica*, 24 (pp. 16-25).
- [7]. Britton, N. (1986). *Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology*. Academic Press.
- [8]. Camassa, R., & Holm, D. (1993). An integrable shallow water equation with peaked solutions. *Phys. Rev. Letters*, vol. 71, pp. 1661-1664.
- [9]. Chua, L. (1997). CNN: A vision of complexity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 7, no. 10, 2219-2426.
- [10]. Chua, L. (1998). *CNN: a Paradigm for Complexity*. World Scientific.
- [11]. Chua, L. (Nov. 2005). Local activity is the origin of complexity. *Int.J. of Bifurcations and Chaos*.
- [12]. Chua, L., & Roska, T. (1992). Cellular Neural Networks with Nonlinear and Delay-Type Template Elements and Non-Uniform Grids". *International Journal on Circuits theory and Applications*, vol. 20, 449-451.
- [13]. Chua, L., & Yang, L. (1988, Oct.). Cellular Neural Network: Theory and Applications. *IEEE Trans. CAS*, vol. 35, pp. 1257-1290.
- [14]. Chua, L., Hasler, M., Moschytz, G., & Neirynsk, J. (Oct. 1995). Autonomous cellular neural networks: a unified paradigm for pattern formation and active wave propagation. *IEEE Trans. CAS-I*, vol. 42, N 10, 559-577.
- [15]. Dogaru, R., & Chua, L. (1998). Edge of chaos and local activity domain of FitzHugh-Nagumo equation. *Int. J. Bifurc. Chaos in Appl. Sci. Eng.*, vol. 8, no. 2, 211-257.
- [16]. Drazin, P., & Johnson, R. (1989). *Solitons: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [17]. Duhem, P. (1897). Die dauernden Aenderungen und die Thermodynamik. *Z. Phys. Chem.*, 22, 543-589.
- [18]. Engel, K. a. (2000). *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. New York: Springer-Verlag.
- [19]. Fiedler, B., & Scheel, A. (2002). Spatio-temporal dynamics of reaction-diffusion patterns. In e. Kirkilionis et al., *Trends in Nonlinear Analysis*. Heidelberg: Springer-Verlag.
- [20]. Fife, P. (1979). *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*. Berlin: Springer-Verlag.
- [21]. Genesio, R., Tesi, A., & Villoresi, F. (1993, Nov.). A frequency approach for analyzing and controlling chaos in nonlinear circuits. *IEEE Trans. CAS-I*, vol. 40, N 11, pp. 819-827.
- [22]. Gierer, A., Berking, S., Bode, H., David, C., Flick, K., Hansmann, G., et al. (1972). Regeneration of hydra from reaggregated cells. *Nat. new Biol.*, 239:98-101.
- [23]. Green, A., & Naghdi, P. (1976). A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *J. Fluid Mech.*, pp. 237-246.
- [24]. Grindrod, P. (1991). *Patterns and Waves*. Oxford: Clarendon Press.
- [25]. Heinze, S., & Schweizer, B. (2005). Creeping fronts in degenerate reaction-diffusion systems. *Nonlinearity* v.18, 2455-2476.
- [26]. Henry, D. (1981). *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Berlin: Springer-Verlag.
- [27]. Hofbauer, J., & Sigmund, K. (1988). The theory of evolution and dynamical systems. *Mathematical Aspects of Selection. London Math. Soc. Student Texts*, vol. 7.

- [28].Hsu, C. H., & Lin, S. S. (1998). *Travelling waves in lattice dynamical system with applications to cellular neural networks*. preprint.
- [29].Johnson, R. (1997). *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [30].Kapral, R., Showalter, K., & Eds. (1995). *Chemical Waves and Patterns. Understanding Chemical Reactivity Series* (p. vol.10). Dordrecht, The Netherlands/Boston, MA: Kluwer Academic.
- [31].Krasnosel'skii, M., & Pokrovskii, A. (1983,1989). *Systems with hysteresis* (Vol. English translation of *Sistemy s Gistereziom*). Berlin, New York.: Springer-Verlag.
- [32].Krinsky, V. (1984). Autowaves: Results, Problems, Outlooks. In *Self-Organization: Autowaves and Structures Far from Equilibrium* (pp. 9-18). Berlin: Springer-Verlag.
- [33].Kromker, S. (1997). *Model and Analysis of Heterogeneous Catalysis with Phase Transition, PhD thesis*. University of Heidelberg.
- [34].Laiho, M., Paasio, A., & Halonen, K. (May 2000). Structure of CNN Cell with Linear and Second Order Polynomial Feedback Terms. *IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and Their Applications*, (pp. 401-405). Catania.
- [35].Lamb, G. (1971). Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium. *Rev. Mod. Phys.*, vol. 43, 99–124.
- [36].Lonngren, K., Scott, A., & Eds. (1978). *Solitons in action*. Academic Press.
- [37].Maini, P. (1999). Some mathematical models for biological pattern formation. In M. Chaplain, & G. a. Singh, *Growth and Form. Spatio-temporal pattern formation in Biology* (pp. 111-128). New York: Wiley.
- [38].Mallet-Paret, J. (1996). Spatial patterns, spatial chaos and travelling waves in lattice of differential equations, in: *Stochastic and Spatial Structure of Dynamical Systems*. (S. a. van Strien, Ed.) 105-129.
- [39].Manneville, P. (1990). *Dissipative Structures and Weak Turbulence*. Boston: MA: Academic.
- [40].Mees, A. (1981). *Dynamics of Feedback Systems*. London, England: Wiley.
- [41].Murray, J. (1989). *Mathematical Biology*. Berlin: Springer-Verlag.
- [42].Nicolis, G., & Prigogine, I. (1989). *Exploring Comlexity: An Introduction*. New York: Freeman.
- [43].Noda, K. (1971). Reconstitution of dissociated cells of hydra. *Zool. Mag.*, 80:99-101.
- [44].Preisach, F. (1935). Über die magnetische Nachwirkung. *Zeit. Phys.*,94, 277-302.
- [45].Roska, T., Chua, L., Wolf, D., Kozek, T., Tetzlaff, R., & Puffer, F. (1995, Oct.). Simulating nonlinear waves and partial differential equations via CNN - Part I: Basic techniques. *IEEE Trans. CAS-I*, vol. 42, N 10, pp. 807-815.
- [46].Rothe, F. (1984). *Global solutions of Reaction-Diffusion Systems*. Berlin: Springer-Verlag.
- [47].Slavova, A. (2003). *Cellular Neural Networks: Dynamics and Modelling*. Kluwer Academic Publishers.
- [48].Smoller, J. (1994). *Shock-Waves and Reaction-Diffusion Equations*. New York, 2nd edition: Springer-Verlag.
- [49].Stein, D., & Ed. (1989). *Lectures in the Sciences of Complexity. Proc. 1988 Complex Systems Summer School held June/July 1988 in Santa Fe, New Mexico*. Redwood City: CA: Addison-Wesley, Advanced Book Program.
- [50].Terzlaff, R., Kunz, R., Ames, C., & Wolf, D. (1999). Analysis of Brain Electrical Activity in Epilepsy with Cellular Neural Networks. *ECCTD'99 - Proc. of the European Conference on Circuit Theory and Design*, (pp. 1007-1010). Stresa (Italy).
- [51].Tetzlaff, R., & Gollas, F. (2005). Modeling complex systems by reaction- diffusion Cellular Nonlinear Networks with polynomial Weight-Functions. *Proc. IEEE CNNA2005*.
- [52].Turing, A. (1952). The chemical basis of morphogenesis. *Phil. Trans. Roy. Soc. B*, 237:37-73.
- [53].Walgraef, D. (1997). *Spatio-Temporal Pattern Formation: With Examples from Physics, Chemistry and Materials Science*. New York: Springer, Partially Ordered Systems Series.