Б Ъ Л Г А Р С К А А К А Д Е М И Я Н А Н А У К И Т Е

ЕДИНЕН ЦЕНТЪР ЗА НАУКА И ПОДГОТОВКА
НА КАДРИ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

К О М И Т Е Т З А Н А У К А, Т Е Х Н И Ч Е С К И П Р О Г Р Е С
И В И С Ш Е О Б Р А З О В А Н И Е

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ "ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ"

КРАСИМИР ДИМИТРОВ ТЪРКАЛАНОВ

ЧАСТИЧНА НАРЕДБА И АЛГОРИТМИЧНИ ПРОБЛЕМИ В ПОЛУГРУПИ И ГРУПИ

Д и с е р т а ц и я
за присъждане на научна степен
"Кандидат на математическите науки"

С О Ф И Я - 1977

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

В Ъ В Е Д Е Н И Е

В дисертацията са застъпени въпроси от алгебрата, асоциативните изчисления и теорията на езиците. Връзката между тях се осъществява чрез изучаване на частични наредби и решения на алгоритмични проблеми в полугрупи и групи. Полугрупата (групата) Γ се нарича частично наредена, ако в чея е зададена частична наредба, съгласувана с операцията, т.е. ако от $a \geq_\Gamma b$ следва $xay \geq_\Gamma xby$ за произволни $x, y \in \Gamma$.

Дисертацията е разделана на три глави.

В първата глава се разглеждат алгоритмични проблеми в крайно определени (кр.опр.) частично наредени (ч.н.) полугрупи [13]. Идеята за задаване на ч.н. групи с определящи неравенства принадлежи на Френкел [9]. Аналогично, ние разглеждаме ч.н. полугрупа Γ, $\Gamma = a_1, a_2, \dots, a_n; A_i \geq B_i / i = \overline{1,m} >$, зададена над азбуката $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ с определящи неравенства $A_i \geq B_i, i = \overline{1,m}$. Задаването на ч.н. полугрупи с неравенства е по-общ начин за задаване на полугрупи от задаването им с определящи равенства (освен полугрупа, се определя и частична наредба в нея).

В § 1 сме се стремили към примери на ч.н. полугрупи и групи, за които въпросът за обратимостта на определящите неравенства (за тривиалността на наредбата) се решава просто и непосредствено по тяхното задаване. За кр. опр. ч.н. полугрупи по естествен начин се обобщават и интерпретират [14], [15] понятията завой и определящи равенства без цикли [1]. В началото се получава, че в ч.н. полугрупа без цикли поне от едната страна обратими са точно онези определящи неравенства $A \geq B$, за които $B \geq A$ също е определящо неравенство (теорема 1.1). Както в 1 се доказва, че всяка ч.н. полугрупа без цикли е о-вложима (в смисъл на продължение на наредбата) в ч.н. група, зададена със същите определящи неравенства. Аналогично се решава и въпросът за обратимостта на определящите неравенства за ч.н. групи без цикли. Ще отбележим следствието за задаването на вложената полугрупа. Най-късите редици от елементарни преобразования в ч.н. полугрупа без цикли поне от едната страна са тези без завои. Доказва се, че, ако в полугрупа без цикли поне от едната страна е резрешим проблемът на тъждеството, то във всяка асоциирана към нея ч.н. полугрупа е разрешим проблемът на неравенството (по същество, за полугрупи без цикли се получава разрешимост на този проблем в някои нейни хомоморфни първообрази).

Проблемът на неравенството в кр.спр. ч.н. полугрупа $\Gamma = a_1, a_2, \dots, a_n; A_i \geq B_i / i = \overline{1,m} >$ се поставя по следния начин: за произволни две думи $X, Y \in \Gamma$ да се установи в сила ли е неравенството $X \geq_\Gamma Y$, т.е. изводима ли е Y от X чрез крайна редица от елементарни преобразования $A_i \to B_i$ в полусистемата на Туе. Известни са примери на ч.н. полугрупи с неразрешим проблем на неравенството. От разрешимостта на проблема на неравенството следва разрешимост на проблема на тъждеството.

В § 2 се обобщава метода на Осипова [5] за решаване проблема на тъждеството и се получава [16] широк клас $K_{\frac{1}{2}}$ ч.н. полугрупи с разрешим проблем на неравенството. За тази цел се отслабват условията на налагане на десните определящи думи. Такъв начин, естествеността на който се обосновава чрез интерпретацията на полусистемата на Туе като ч.н. полугрупа, е предложен от автора в [13]. Той се използва в по-непосредствени случай също в дисертацията [12] и следователно, въпросът за изводимостта в полусистеми на ТУЕ, е поставен върху обща основа. Някои произхождащи от това допълнителни затруднения, специфични за частичната наредба (максималността на нормалното начало не се запазва, поради несиметричност на условията), се преодоляват чрез разглеждане на съгласувани нормални представяния на две думи. Освен това, този метод притежава явни преимущества. Такива представяния, но за "основни думи" и при по-малка мярка на налягане, се използват при решаване на проблема на тъждеството в [8]. Доказва се, че в ч.н. полугрупа от класа $K_{\frac{1}{2}}$ две думи са сравними тогава и само тогава, когато те притежават съгласувани нормални представяния с изпълнени съответни неравенства. В основата на предложения от автора в [13] начин не се интересуваме от общите части на десните определящи думи. В случая, обаче, ограничението до изпълняващия известна гранична роля клас $K_{\frac{1}{2}}$ (което лесно отпада, предвид непосредствено произтичащата от забележката в началото на доказателството на лема 2.4 [16] възможност за съответно допълнение в определение 23) е без значение, тъй като това не оказва никакво влияние върху метода на съгласуваните нормални представяния.

В кр.опр. ч.н. полугрупа ние поставяме [17] проблема на начупената линия по следния начин: могат ли две произволни думи да се свържат в нея с крайна редица от последователно сменящи се неравенства? Тази релация е конгруентност, което показва, че проблемът възниква естествено. Доказва се неговата разрешимост в произволна ч.н. полугрупа V от подкласа $L_{\frac{1}{2}}$ (на класа $K_{\frac{1}{2}}$) ч.н. полугрупи, определящите неравенства на която удовлетворяват условията на Осипова (налагане и на десните определящи думи). Тези допълнителни условия позволяват изводи и в обратна посока, независимо от това, че преобразованията са едностранни. Според горното (като заменим определящите неравенства с равенства), формулировката съвпада с теоремата на Осипова, но отделеният тук основен резултат е точното пълно описание структурата на всички еквивалентни думи: доказва се, че типовете на максималните нормални представяния на думите, които могат да се свържат в ч.н. полугрупа V

с крайна начупена линия, съвпадат и, следователно, те са краен брой. По такъв начин методът на съгласуваните нормални представяния получава по-нататъшно развитие. Самата алгебрична интерпетация на проблема ни се струва интересна със специфичния за частичната наредба начин за получаване на хомоморфни образи.

В § 3 се изучават други свойства на класове кр.спр. ч.н. полугрупи с разрешим проблем на неравенството. В началото се изследват ч.н. полугрупи, в които със всяка дума са сравними краен брой думи. Във всяка от тях е разрешима произволна затворена формула на предикатното смятане с ограничени квантори. Доказва се, че частичната наредба в такава полугрупа е нелинейна и ненасочена. Проблемът на о-изоморфизма се поставя по следния начин: за произволни две ч.н. полугрупи да се установи съществува ли о-изоморфизъм (т.е. изоморфизъм, запазващ наредбата) на едната върху другата? Трудността на този проблем е общоизвестна. Конструира се алгоритъм за решаването му за произволни две кр. спр. ч.н. полугрупи с разрешим проблем на неравенството, във всяка от които образуващите елементи съдържат краен брой думи. В [17] резултатите са формулирани за конкретния подклас $K_{\frac{1}{2}}$, но доказателствата там се провеждат при посочените по-общи условия (без специални ограничения за мярката на налагане, т.е. включени са и ч.н. полугрупи, за които понятието нормална дума въобще няма смисъл). Други алгоритми за решаване проблема на о-изоморфизма са конструирани в [12].

В § 4 се установява връзка между някои свойства на регулярните езици и на (ч.н.) полугрупи от класа на Осипова [23]. Въз основа на това, че индексът на една конгруенция в полугрупата (лема 4.1), въведена аналогично на конгруенцията от теорема 2.1.5 [3], [6], е краен, се доказва, че всяка полугрупа от разглеждания клас притежава краен хомоморфен образ с нетривиална подполугрупа. В произволна полугрупа от класа се разглежда нейната подполугрупа на симетричните ѝ елементи (всички думи на които започват и завършват с нормални думи). В нея всички думи на произведение от елементи са произведения от думи на съответните множители. С помощта на това твърдение се доказва разрешимост на проблема на тъждеството в дефиниторната регулярна алгебра [7] над подполугрупата от симетричните елементи. Този проблем е по-общ от проблема на тъждеството. В случая, той се свежда (чрез разглеждане на пълни първообрази) към разрешимия проблем на тъждеството в регулярна алгебра над свободна полугрупа [4], [8]. Елементи на дефиниторната регулярна алгебра над дадена полугрупа са онези нейни подмножества, които могат да се получат от краен брой елементи чрез прилагане краен брой пъти на операциите обединение на подмножества, умножение на подмножества и итерация (пораждане на подполугрупа от подмножество елементи).

В глава 2 се изследват разрешимостта на проблема на делимостта, проблема на тъждеството и възможността за въвеждане на частична наредба в полугрупи с едно несъкратимо отляво определящо съотношение (гл.приложението).

В § 5 се изучават някои свойства на алгоритма за делимост и полугрупите, към които той се прилага (гл.приложението). В началото се доказва (гл.приложението), че ако никой общ край на двете определящи думи в полугрупа с несъкратимо отляво определящо съотношение не е начало на някоя от тях, то в нея е разрешим проблемът на тъждеството (без използуване на алгоритъма $\mathcal{D}$) [19]. Предлага се клас полугрупи, към които тази теорема е неприложима, но е разпознаваема приложимостта на $\mathcal{D}$,идеята за което е от [17]. Доказва се отразяващото важно свойство твърдение, че редицата от думите,получаващи се при неговото действие в случаите, когато той е приложим, е без завси [18]. С помощта на теорема 1.1 и следствие 1.2 се доказва, че във всяка полугрупа с едно несъкратимо съотношение, зададена над азбука, съдържаща не по-малко от три букви, може да се въведе частична наредба.

В § 6 се изследват полугрупи от типа $\langle a, b; a = b^{\ell_0} a b^{\ell_1} a \dots b^{\ell_p} a \rangle$. Доказва се разпознаваемост на приложимостта на алгоритъма за делимост в случаите, когато редицата $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p$ от показателите монотонно расте или намалява [18], в случайте, когато тя се състои от еднопосочни монотонни участъци (с допълнителни условия), в случаите, когато последния максимален показател се намира пред първия минимален [19]. В случаите, когато последния максимален показател се намира между първия и последния минимални, се поставят допълнителни ограничения [17]. Доказателствата се основават на известно изследване взаимодействието на конфигурациите, получаващи се при допълненията $[a] \to B$ на думата B с произведения от нейни максимални начала. Във връзка с голямата трудност на отдавна открития проблем на тъждеството в полугрупи с едно определящо съотношение, ще отбележим, че в § 5 и § 6 същевременно са получени нови класове полугрупи с едно (несъкратимо отляво) определящо съотношение с разрешим проблем на тъждеството (и на лявата делимост). Това е напълно достатъчно за обосноваване мястото на теоремите, условията на които по естествен начин отразяват в съответните термини дори прости примери, за които не са известни други теореми.

В глава 3 се изучават силните хомоморфизми на ч.н. групи и покритието на чисти подполугрупи в групи от контекстно свободни (к.с.) езици.

В § 7 се въвежда понятието силен хомоморфизъм на една ч.н. група върху друга [20]. Един хомоморфизъм на ч.н. група G върху ч.н. група G_1 се нарича силен, ако всеки строго положителен елемент на G_1 е образ (при този хомоморфизъм) само на строго положителни елементи от G. Силните хомоморфизми запазват наредбата в обратна посока [22] (слабите и монотонните [9], [11] я запазват в посоката на хомоморфизма). В първата теорема са формулирани условията за конструиране на (N,P^+) - силно хомоморфния образ на ч.н. група G, където N е нормален делител, а P^+ е чиста подполугрупа, състояща се само от строго положителни елементи, N и P^+ удовлетворяват условието $S_4 : Np \subseteq P^+$ за всяко $p, p \in P^+$. Както за монотонните хомоморфизми, трудността тук е при изучаването на случаи, когато е приложена теоремата. Описват се силно хомоморфните образи на една ч.н. група, свързани с една нейна чиста подполугрупа, състояща се само от строго положителни елементи. Доказва се, че (N,P^+) - образът на G остава монотонен по отношение на продължението $\bar{P}^+$ на наредбата P^+, ако $\bar{P}^+ = P^+ \cup N^+$, където N^+ е чиста подполугрупа на N, инвариантна в G [21]. За да бъде един монотонен хомоморфизъм силен, е необходимо и достатъчно произволен елемент на неговото ядро N да бъде по-малък от всеки елемент на чистата подполугрупа $P^+ \setminus P^+(N)$ [20]. Ще отбележим, че от доказателството на това твърдение може да се получи пълно абстрактно описание на всички частични наредби в групата, по отношение на които даден нормален делител в нея е изпъкнал.

В § 8 се изследва отношението на понятието силен хомоморфизъм към конструкцията директно произведение на групи. Ще формулираме две характерни теореми. Нека ч.н. група $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ (директното или пълното директно произведение на групите $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$) с наредба P^+ притежава (N,P^+) - образ. Ако $P^+_\lambda \neq \phi$, то ч.н. група A_λ с индуцирана наредба P^+_λ притежава (N_λ, P^+_λ)-образ. Доказва се, че, ако всички $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$, имат (N_λ, P^+_λ)-образи, то $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ има (N,P^+) - образ, където N е нормален делител на G, всеки елемент на който съдържа краен брой различни от единиците компоненти от N_λ, а в чистата подполугрупа P^+

различни от единиците са краен брой компоненти от P_λ^+ или N_λ и, при това, поне една от тях принадлежи на съответния конус на строго положителните елементи. С помощта на теорема 7.4 се доказва, че монотонността на хомоморфизмите се запазва. В § 8 се обобщават съответните резултати от [22]. Едновременно се разглеждат начини за построяване (благодарение на условието S_H) на нови типове породени наредби в директното (или пълното директно) произведение на групи.

В последния § 9 се изследва покритието на чисти подполугрупи в крайно породена група (чрез които се задават частичните наредби в нея) от к.с. езици над двойна азбука при естествения хомоморфизъм [23]. Покритието на някои други множества от елементи на групата като представяне на езици в полугрупи и автомати от определен вид е изучавано в [2]. Отначало, чрез конструиране на конкретни к.с. граматики, се доказва, че чистите подполугрупи с крайна база [9] се покриват слабо от к.с. езици. С помощта на лема 4.1 се доказва, че чистите подполугрупи на групата не могат да се покриват от регулярни езици (т.е. , че чрез тях не е изразима частичната наредба в групата). Ако една чиста подполугрупа на групата има база, всичките думи на която принадлежат на някой к.с. език, то тя притежава слабо хомоморфен образ с крайна база (на което ни се иска да обърнем внимание) на конуса на строго положителните му елементи.

Резултатите на дисертацията са докладвани на общи и алгебрични конференции на Пловдивския университет и БМД, на международна лятна школа по частично наредени алгебрични системи в УССР, на семинарите по алгебра в Киевския университет (ръководител проф. В.С. Чарин) и в МИ на АН на УССР (ръководител чл.-кор. на АН на УССР С.Н. Черников), на семинарите по теория на езиците и процесорите (ръководител проф. В.Н. Редько), по алгебра и математическа логика (ръководител проф. Л.А. Калужнин) в Киевския университет. След това са изложени на II национален колоквиум по алгебра.

Приложение. В своя спецкурс С.И. Адян съобщава за доказателството на сводимостта на проблема на тъждеството за полугрупи с едно определящо съотношение към такъв за полугрупи с едно несъкратимо поне от едната страна съотношение и предлага алгоритъма за делимост за решаване проблемите на делимостта и тождеството (в случаите на разпознаваемост на неговата приложимост) в такива полугрупи. От тези идеи ни е нужно следното твърдение (лема, § 1), използувано там в частния случай на едно съотношение: В полугрупа без цикли поне от едната страна всички редици без завои, привеждащи думата X в думата Y имат равни дължини (цитирайки, отбелязваме, че то е по-малко необходимо, отколкото ни се струваше порано). Трябва да формулираме и такова твърдение: Нека в съотношението $A=B$ няма дума, която да е общо начало и общ край на A и B. Нека $A=Du_1=v_1C$, $B=Du_2=v_2C$, където D е максималното общо начало, а C -максималният общ край, и $A=B$. Проблемът на тъждеството в полугрупа със съотношение се свежда към такъв за $u_1=u_2$ (термините са други). Ясно е, че към полугрупа с несъкратимо отляво съотношение такова твърдение е неприложимо. Обаче, при известно уточняване на условията, идеята за получаване на редица без завои след съкращаването се усилва и за съкращаване на по-дългата обща част (теорема 5.1). Следва изложение на алгоритъма за делимост $\mathcal{D}$ [18], прилаган към полугрупи от вида

$$\Pi=\langle a,b,\dots,c;A=B/A=aA',B=bB',a\neq b\rangle$$

за решаване на проблема на лявата делимост (и, следователно, на проблема на тъждеството) на дума X на буквата a в случаите на разпознаваемост на неговата приложимост.

Нека $N_1 \doteq B_1$ е максималното начало на B, което е едновременно начало и на X, т.е. $X \doteq B_1 X_1$. Ако такова начало няма или ако $X \doteq N_1, N_1 < B$, то $\mathcal{D}$ е дефинитно неприложим към X. Ако $B_1 \doteq B$, то $\mathcal{D}_1(X) \doteq A X_1$. Ако $B_1 < B$, нека N_2 е максимално начало на B или A, което е едновременно начало и на X_1, т.е. $X \doteq N_1 N_2 X_2$. Ако такова начало няма или ако $X \doteq N_1 N_2$, $N_1 < B$, $N_2 < C$ ($C \doteq A$ или $C \doteq B$), то $\mathcal{D}$ е дефинитно неприложим към X. В противния случай, нека N_3 е максималното начало на B или A, което е едновременно начало и на X_2, т.е. $X \doteq N_1 N_2 N_3 X_3$. Ако такова начало няма или ако $X \doteq N_1 N_2 N_3$, $N_1 < B$, $N_2 < C, N_3 < C$, то $\mathcal{D}$ е дефинитно неприложим към X и т.н., процесът на намиране на $\mathcal{N}$-разлагането продължава, докато не се получат два случая:

1) дефинитна неприложимост на $\mathcal{D}$;

2) $X \doteq N_1 N_2 \cdots N_k [C] X_{k+1}$, където $C \doteq A$ или $C \doteq B$;

$[C]$ се нарича глава, X_{k+1} - остатък. Тогава,

$$\mathcal{D}_1(X) \doteq N_1 N_2 \cdots N_k [\overline{C}] X_{k+1},$$

където $\overline{C} \doteq B$ или, съответно, $\overline{C} \doteq A$.

Към $\mathcal{D}_1(X)$ отново прилагаме процеса на намиране на $\mathcal{N}$-разлагането, в случая 2) намираме $\mathcal{D}_2(X) \doteq \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1(X))$ и т.н. Алгоритъмът $\mathcal{D}$ спира на n-тия ход, ако $\mathcal{D}_n(X) \doteq aT$ или ако $\mathcal{D}$ е дефинитно неприложим към $\mathcal{D}_n(X)$.

Задачата за изследването на случаи на разпознаваемост приложимостта на този алгоритъм (специално за полугрупи от типа $\langle a, b\, ;\, a = bab^{e_1}ab^{e_2}a \ldots b^{e_p}a \rangle$) е открита след 1960 г.

ГЛАВА 1

РЕШЕНИЕ НА НЯКОИ АЛГОРИТМИЧНИ ПРОБЛЕМИ В КРАЙНО ОПРЕДЕЛЕНИ ЧАСТИЧНО НАРЕДЕНИ ПОЛУГРУПИ

§ 1. Задаване на частично наредени полугрупи и групи чрез определящи неравенства без цикли.

Нека е дадена азбуката

$$\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}. \tag{1.1}$$

Дума в тази азбука се нарича всяка крайна редица от нейни букви. Празната дума ще означаваме с "Λ". Графическото съвпадение на две думи ще означаваме с "$\doteq$". Дължината на думата A, $A \doteq a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{\lambda_i}}$ ще означаваме с "$\partial(A)$", т.е. $\partial(A) = \lambda_i$. В множеството Σ^* от всички думи над азбуката Σ се въвежда асоциативна операция умножение: произведение на две думи L_1 и L_2, $L_1, L_2 \in \Sigma^*$, се нарича думата $L_1 L_2$, $L_1 L_2 \in \Sigma^*$, получена при последователното написване на L_1 и L_2.

Нека $\{(A_i, B_i) / i \in I\}$ е система наредени двойки различни думи от Σ^*. В Σ^* ще извършваме два типа елементарни преобразования на думите (полусистема на Туе):

1[c]. Тавталогическо преобразование, изразяващо се в подходящо прилагане на асоциативния закон на умножението към поддуми на дадена дума, с цел преминаване към елементарни преобразования от втория тип.

2°. Допустима замяна в дума при някоя отделена поддума $A_i, i \in I$, със схема

$XA_iY \longrightarrow XB_iY$ (думата XA_iY се заменя с думата XB_iY).

Аналогично на [9] , ние разглеждаме понятието частично наредена полугрупа, зададена със система образуващи и система определящи неравенства. Ще казваме, че $X \geqslant Y$, ако съществува крайна редица от елементарни преобразования, привеждаща думата X в думата Y . Ще казваме, че $X = Y$, ако $X \geqslant Y$ и $Y \geqslant X$. Равенството на думи е конгруентност в Σ^*. Фактор множеството $\langle \Gamma \rangle = \{[X]\}$ от всички класове $[X]$ равни думи е полугрупа по отношение на индуцираната операция умножение на класове. Като се вземе предвид и индуцираната в нея частична наредба на класовете се получава понятието частично наредена полугрупа Γ , зададена над азбуката (1.1) с определящи неравенства

$$A_i \geqslant B_i, i \in I. \qquad (1.2)$$

Крайно определената (кр.опр.) частично наредена (ч.н.) полугрупа Γ , зададена над азбуката (1.1) от n букви с m определящи неравенства (1.2), ще означаваме с

$$\Gamma = a_1, a_2, \dots, a_n; A_i \geqslant B_i / i = \overline{1,m} >. \qquad (1.3)$$

По такъв начин понятието полусистема на Туе получава алгебричен смисъл. Неравенството $X \geqslant Y$ в ч.н. полугрупа (1.3) ще означаваме с $X \geqslant_{\Gamma} Y$ (фактически, това е неравенство $[X] \geqslant_{\Gamma} [Y]$ между класовете равни думи, разглеждани като елементи на ч.н. полугрупа Γ).

Както в [9] се определят обратими и необратими определящи неравенства. Показва се, че задаването на полугрупи с определящи неравенства е по-общ начин за задаване на полугрупи от задаването им с определящи равенства, тъй като, освен полугрупа, се задава и частична наредба в нея. Всяка кр.спр. полугрупа

$$\Pi = \langle a_1, a_2, \dots, a_n ; A_i = B_i / i = \overline{1,m} \rangle \qquad (1.4)$$

може да бъде зададена като ч.н. полугрупа

$$\Pi = a_1, a_2, \dots, a_n ; A_i \geq B_i, B_i \geq A_i / i = \overline{1,m} \rangle$$

с тривиална наредба. Към всяка полугрупа (1.4) се асоциират 2^{2m} ч.н. полугрупи, съответствуващи на всичките 2^{2m} подсистеми определящи неравенства, получаващи се от нейните определящи равенства.

Ч.н. група

$$G = a_1, a_2, \dots, a_n ; R_i \geq 1 / i = \overline{1,m} \gg$$

може да се разглежда като ч.н. полугрупа

$$G = a_1, a_2, \dots, a_n, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1} ; R_i \geq 1, a_t^{\varepsilon} a_t^{-\varepsilon} \geq 1, 1 \geq a_t^{\varepsilon} a_t^{-\varepsilon} / \begin{matrix} i = \overline{1,m} \\ t = \overline{1,n} \\ \varepsilon = \pm 1 \end{matrix} \rangle.$$

В [9] се разкрива връзката между задаването на частична наредба в групата с определящи неравенства и задаването ѝ чрез положителен конус. За полугрупи такава връзка не можем да търсим, тъй като няма аналогичен начин за задаване на частични наредби в тях [11]. Все пак, посоченият начин за задаване на полугрупи е по-общ и представлява достатъчно голям интерес.

Първият естествено възникващ въпрос за кр. спр. ч.н. полугрупи и групи е въпросът за обратимостта на определящите неравенства, т.е. за тривиалността на задаваната от тях частична наредба. Тук ние сме се стремили към примери, за които той се решава просто и непосредствено по тяхното задаване. За кр. спр. ч. н. полугрупи по естествен начин се обобщават и интерпретират понятията завой и определящи съотношения без цикли [1]. В началото се получава, че в ч.н. полугрупа без цикли поне от едната страна обратими са точно онези определящи неравенства $A \geq B$, за които $B \geq A$ също е определящо неравенство. Както в [1] се доказва, че всяка ч.н. полугрупа без цикли е с-вложима (в смисъл на продължение на наредбата) в ч.н. група, зададена със същите определящи неравенства. Аналогично се решава и въпросът за обратимостта на определящите неравенства за ч.н. групи без цикли. Ще отбележим следствието за задаването на вложената полугрупа. Най-късите редици от елементарни преобразования в ч.н. полугрупа без цикли поне от едната страна са тези без завои. Доказва се, че, ако в полугрупа без цикли поне от едната страна е разрешим проблемът на тъждеството, то във всяка асоциирана към нея ч.н. полугрупа е разрешим проблемът на неравенството (по същество, за полугрупи без цикли се получава разрешимост на този проблем в някои нейни хомоморфни първообрази).

Нека $\Gamma = a_1, a_2, \dots, a_n; A_i \geqslant B_i / i = \overline{1,m}>$ е ч.н. полугрупа (1.3), зададена над крайната азбука $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ с краен брой определящи неравенства $A_i \geqslant B_i$, $i = \overline{1,m}$, където A_i, B_i са непразни думи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Ще казваме, че в редицата

$$X = X_0 \to X_1 \to \dots \to X_i \to \dots \to X_j \to \dots \to X_k = Y \quad (1.5)$$

от елементарни преобразования в ч.н. полугрупа Γ има завой, ако съществуват такива $i, j, 0 \leq i \leq j-1 < k$, че $X_i = U_i A V_i, X_{i+1} = U_i B V_i$, $X_{i+2} = U_{i+2} B V_{i+2}, \dots, X_{j-1} = U_{j-1} B V_{j-1}, X_j = U_{j-1} A V_{j-1}$, където $A \geqslant B$ и $B \geqslant A$ са определящи неравенства в Γ и думата B в частта $X_{i+1} \to \dots \to X_{j-1}$ не се засяга от елементарни преобразования.

Редицата (1.5) е редица без завой едновременно в Γ и в асоциираната полугрупа $\Pi = <a_1, a_2, \dots, a_n; A_i = B_i / i = \overline{1,m}>$.

Както в [1] се доказва следното

ТВЪРДЕНИЕ 1.1. Ако $X \geqslant_{\Gamma} Y$, то в Γ съществува редица без завси, привеждаща X в Y .

Лява наредена двойка (a_{j_i}, a_{t_i}) ,съответствуваща на определящото неравенство $A_i \geqslant B_i$ в Γ , ще наричаме наредената двойка, съставена от първите букви съответно на лявата и на дясната определящи думи в това неравенство. Аналогично се определя и дясна наредена двойка. Левите (десните) определящи двойки, съответствуващи на различни определящи неравенства, могат да съвпадат; ще считаме, че такива двойки имат различни индивидуалности, приписвайки на всяка от тях номера на определящото неравенство. Да разгледаме ориентирания граф, върховете на който са буквите от азбуката на Γ , а неговите ребра (звена) се определят от левите наредени двойки. Този граф ще наричаме ляв ориентиран граф на ч.н. полугрупа Γ . Аналогично се дефинира и десен ориентиран граф на Γ . Редицата

$$(a, a_{j_1}), (a_{j_1}, a_{j_2}), \dots, (a_{j_k}, b)$$

от ребра на ориентирания граф се нарича път, водещ от a в b . Пътят (a,a) се нарича елементарен цикъл. Път с дължина $\geqslant 2$, водещ от a в a , се нарича цикъл, ако всички междинни върхове са различни от a и ако първото и последното му ребра не съответствуват на две взаимно обратни определящи неравенства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Ще казваме, че Γ е ч.н. полугрупа без леви (десни) цикли, ако нейният ляв (десен) ориентиран граф не съдържа елементарни цикли и цикли с дължина $\geqslant 2$. Ако в Γ няма леви и десни цикли, ще казваме, че тя не съдържа цикли.

Полугрупата $\Pi = \langle a_1, a_2, \dots, a_n ; A_i = B_i / i = \overline{1, m} \rangle$ (определящите равенства на която не се повтарят) не съдържа цикли от едната страна тогава и само тогава, когато всичките 2^{2m} асоциирани към нея ч.н. полугрупи не съдържат цикли от същата страна. Както в [1] се доказва следното

ТВЪРДЕНИЕ 1.2. Ако в Γ няма леви цикли и $aX \geq_{\Gamma} aY$, то във всяка редица без завой, привеждаща думата aX в думата aY , първата буква a не се засяга от елементарните преобразования в нея. Аналогично - за случая, когато в Γ няма десни цикли.

От това твърдение следва, съответно, строга лява, дясна, двустранна съкратимост на неравенството в Γ .

ТЕОРЕМА 1.1. В ч.н. полугрупа Γ без цикли поне от едната страна обратими са точно онези определящи неравенства $A \geq B$, за които $B \geq A$ също е определящо неравенство.

Д о к а з а т е л с т в о . Нека $A \geq B$ е определящо неравенство в ч.н. полугрупа Γ без цикли поне от едната страна и $B \geq A$ не е в списъка определящите я неравенства. Ще покажем, че $A >_{\Gamma} B$, т.е. че $A \geq B$ е строго определящо неравенство. Да допуснем противното, т.е. че $B \geq_{\Gamma} A$ и нека

$$B \rightarrow \cdots \rightarrow A$$

е редица от елементарни преобразования в Γ , привеждаща B в A . В редицата

$$A \rightarrow B \rightarrow \cdots \rightarrow A$$

да разгледаме преобразуването на първата буква (в случая, когато в Γ няма леви цикли) или на последната (в случая, когато в Γ няма десни цикли). Тъй като $B \geq A$ не е определящо неравенство, се получава противоречие с условието, че Γ е ч.н. полугрупа без цикли от съответната страна.

Така, за ч.н. полугрупи без цикли поне от едната страна получаваме просто решение на въпроса за обратимостта на определящите неравенства, което по-нататък ще намери приложение.

Нека $\Gamma = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \, ; \, A_i \geq B_i \, / \, i = \overline{1,m} \rangle$ е ч.н. полугрупа без цикли и $G = \langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \, ; \, A_i \geq B_i \, / \, i = \overline{1,m} \rangle\rangle$ е ч.н. група, зададена над същата азбука със същите определящи неравенства. Както в [1] се доказва следната

ТЕОРЕМА 1.2. Ако X,Y са думи в ч.н. полугрупа Γ без цикли, то $X \geqslant_{\Gamma} Y \Longleftrightarrow X \geqslant_{G} Y$; т.е. Γ е с-вложима в G (в смисъл на продължение на наредбата).

За всички случаи, когато е вярна теорема 1.2 , получаваме

СЛЕДСТВИЕ 1.1 . $X >_{\Gamma} Y \Longleftrightarrow X >_{G} Y$, където X,Y са думи в ч.н. полугрупа Γ .

Оттук и от теорема 1.1 получаваме просто решение на въпроса за обратимостта на определящите нареванства в ч.н. група без цикли.

ТЕОРЕМА 1.3. В ч.н. група G без цикли обратими са точно онези определящи неравенства $A \geqslant B$, за които $B \geqslant A$ също е определящо неравенство.

В сила е следното важно

СЛЕДСТВИЕ 1.2 . Нека Γ е ч.н. полугрупа без цикли. Тогава, определящи равенства на полугрупата $\langle \Gamma \rangle$ са точно всички нейни обратими определящи неравенства (т.е. точно всички определящи неравенства $A \geqslant B$, за които $B \geqslant A$ също е определящо неравенство).

Д о к а з а т е л с т в о т о на следствието се провежда аналогично на доказателството на лема 1 [9] , съществено ползувайки се от запазването на строгото неравенство в Γ при умножение и от двете страни. Ще отбележим, че бихме могли да го формулираме след твърдение 1.2 и че то е в сила за всички ч.н. полугрупи, в които строгото неравенство се запазва при умножение на елементите.

Пример на ч.н. полугрупа или група с неразрешим проблем на обратимостта на определящите неравенства засега не е известен.

Нужна ни е следната

ЛЕМА . В полугрупа Π без цикли поне от едната страна всички редици без завои, привеждащи думата X в думата Y (без тавталогии) имат равни дължини.

Доказателство. Нека

$$X \doteq Z_0 \to Z_1 \to \dots \to Z_k \doteq Y \qquad \text{и} \tag{1.6}$$

$$X \doteq T_0 \to T_1 \to \dots \to T_\ell \doteq Y \tag{1.7}$$

са редици без завои в полугрупата Π без цикли поне от едната страна и $k<\ell$. Да разгледаме редицата

$$X \to Z_1 \to \dots \to Z_k \to T_{\ell-1} \to \dots \to T_1 \to X \tag{1.8}$$

с дължина $k+\ell>0$. Следователно, в (1.8) има завой (в противния случай тя ще бъде тавтологическа). Всеки завой в (1.8) започва преди думата Z_k и завършва след нея. Изключваме произволен такъв завой съгласно лема 1 [1]. Получава се редица (1.8'), с дължина $k+\ell-2$. Онази част от редицата (1.8'), върху която се трансформира частта $X \models Z_k$ на (1.8), не съдържа завои, тъй като, в противния случай, такива би съдържала (1.6). Аналогично - за частта $Z_k \models X$. Продължавайки да изключваме завоите не повече от k пъти, разпространявайки транзитивно трансформациите на цитираните части на (1.8), ще получим редица без завои и без тавталогии, привеждаща X в X . Това противоречи на лема 2[1]. Следователно, $k=\ell$.

СЛЕДСТВИЕ. Най-късите редици, привеждащи думата X в думата Y в полугрупа Π без цикли поне от едната страна, са редиците без завои.

СЛЕДСТВИЕ 1.3 . Ако полугрупата Π е без цикли поне от едната страна, то във всички асоциирани към нея ч.н. полугрупи всички редици без завои, привеждащи думата X в думата Y , имат равни дължини.

Действително, достатъчно е да се има предвид, че във всяка ч.н. полугрупа Γ , асоциирана към полугрупата Π , произволна редица от елементарни преобразования не съдържа завои едновременно в Γ и в Π .

Проблемът на неравенството в кр.спр. ч.н. полугрупа Γ се поставя по следния начин: да се построи алгоритъм, установяващ в сила ли е неравенството $X \geqslant_\Gamma Y$ за произволни две думи $X, Y \in \Gamma$, т.е. изводимо ли е Y от X в полусистемата на Туе .

Следващата теорема разглежда друга страна на задаването на ч.н. полугрупи с определящи неравенства без цикли.

ТЕОРЕМА 1.4 . Ако в полугрупата Π без цикли поне от едната страна е разрешим проблемът на тъждеството, то във всяка асоциирана към нея ч.н. полугрупа Γ е разрешим проблемът на неравенството.

Доказателство. Нека $X \geqslant_\Gamma Y$. Тогава, $X =_\Pi Y$. Нека $X =_\Pi Y$ и най-късата редица в Π , привеждаща без завои (следствието) X в Y , има дължина n . Получава се, че, ако $X \geqslant_\Gamma Y$, то в Γ съществува редица от елементарни преобразования със същата дължина n (следствието, следствие 1.3), привеждаща X в Y .

Струва ни се интересно да отбележим, че тази теорема твърди разрешимост на проблема на неравенството в някои хомоморфни първообрази (следствие 1.2) на полугрупа без цикли с разрешим проблем на тъждеството.

Очаква се, че теорема 1.4 е винаги вярна. От разрешимостта на проблема на неравенството не винаги следва разрешимост на проблема на тъждеството в асоциираната полугрупа. Например, съществува кр. спр. полугрупа с неразрешим проблем на тъждеството, определящите равенства на която имат вида $a_{i_r} a_{i_s} = a_{i_t}$. Едновременно, в ч.н. полугрупа, зададена с определящи неравенства $a_{i_r} a_{i_s} > a_{i_t}$ проблемът на неравенството е разрешим.

В сила е следното твърдение за хомоморфизмите:

ТВЪРДЕНИЕ 1.3 . Нека Γ е ч.н. полугрупа без цикли и Γ_1 е ч.н. полугрупа без цикли над същата азбука, получена от Γ чрез добавяне на определящи неравенства. Тогава, те са с-вложими в ч.н. групи G и G_1, зададени със същите (съответни) определящи неравенства. Твърди се, че хомоморфизмът $\varphi: X \to X$ е слаб хомоморфизъм на G върху G_1 и на Γ върху Γ_1 (т.е. хомоморфизъм, запазващ наредбата).

§ 2. Решение на проблема на неравенството в един клас частично наредени полугрупи по метода на Осипова. Начупената линия в подкласа с налагане и на десните определящи думи.

Проблемът на неравенството в кр. опр. ч.н. полугрупа $\Gamma = a_1, a_2, \dots, a_n; A_i \geqslant B_i / i = \overline{1,m}>$ се поставя, както посочихме, по следния начин: да се построи алгоритъм, установяващ в сила ли е неравенството $X \geqslant_\Gamma Y$ за произволни две думи $X, Y \in \Gamma$, т.е. в сила ли е изводимостта $X \vdash Y$ в полусистемата $\{a_1, a_2, \dots, a_n; A_i \to B_i / i = \overline{1,m}\}$ на Туе. От алгоритмическата разрешимост на проблема на неравенството в Γ следва разрешимост на проблема на тъждеството в нея, тъй като $X =_\Gamma Y \Longleftrightarrow (X \geqslant_\Gamma Y) \& (Y \geqslant_\Gamma X)$. Затова, проблемът на неравенството е по-общ от проблема на тъждеството. Има примери на ч.н. полугрупи (даже групи) [10] с разрешим проблем на тъждеството и неразрешим проблем на неравенството. В този параграф се обобщава метода на Осипова [5] за решаване проблема на тъждеството и се получава широк клас $K_{\frac{1}{2}}$ ч.н. полугрупи с разрешим проблем на неравенството. За тази цел се отслабват условията на налагане на десните определящи думи. Такъв начин, естествеността на който се обосновава чрез интерпретацията на полусистема на Туе като ч.н. полугрупа, е предложен от автора в [13]. Там е отбелязано, че той може да се използува за обобщаване на различни методи за решаване на проблема на тъждеството (действително, той е използуван в по-непосредствени случаи в [12]) и, по такъв начин, въпросът за изводимостта и полусистеми на Туе е поставен върху обща основа. Някои произхождащи от това допълнителни затруднения, специфични за частичната наредба (максималността на нормалното начало не се запазва, поради несимитричност на условията), се преодоляват чрез разглеждане на съгласувани нормални представяния на две думи. Освен това, този метод притежава явни преимущества. Такива представяния, но за "основни думи" и при по-малка мярка на налагане, се използуват при решаване проблема на тъждеството в [8]. Доказва се, че в ч.н. полугрупа от класа $K_{\frac{1}{2}}$ две думи са сравними тогава и само тогава, когато те притежават съгласувани нормални представяния с изпълнени съответни неравенства. В основата на предложения от автора в [13] начин не се интересуваме от общите части на десните определящи думи. В случая, обаче, ограничението до изпълняващия известна гранична роля клас $K_{\frac{1}{2}}$ (което лесно отпада, предвид непосредствено произтичащата от забележката в началото на доказателството на лема 2.4 [16] възможност за съответно допълнение в определение 2.3) е без значение, тъй като това не сказва никакво влияние върху метода на съгласуваните нормални представяния.

В кр. опр. ч.н. полугрупа ние поставяме проблема на начупената линия по следния начин: могат ли две произволни думи да се свържат в нея с крайна редица от последователно сменящи се неравенства? Тази релация е конгруентност, която показва, че проблемът възниква естествено. Доказва се неговата разрешимост в произволна ч.н. полугрупа V от подкласа $L_{\frac{1}{2}}$ (на класа $K_{\frac{1}{2}}$) ч.н. полугрупи, определящите неравенства на който удовлетворяват условията на Осипова (налагане и на десните определящи думи). Тези условия позволяват изводи и в обратна посока, независимо от това, че преобразованията са едностранни. Основният резултат е точното описание структурата на всички еквивалентни думи: типовете на максималните нормални представяния на думите, които могат да се свържат в ч.н. полугрупа V с крайна начупена линия, съвпадат и, следователно, те са краен брой. По такъв начин методът на съгласуваните нормални представяния получава по-нататъшно развитие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Ще казваме, че началото A (краят B) на думата AB в азбуката $\Sigma=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ е правилно начало (правилен край) на AB, ако $\partial(A)\geq\frac{1}{2}\partial(AB)$ (ако $\partial(B)\geq\frac{1}{2}\partial(AB)$) [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Ще казваме, че кр.опр. ч.н. полугрупа Γ (13) принадлежи на класа $K_{\frac{1}{2}}$, ако нейните определящи неравенства удовлетворяват следните условия:

1) а) a_1) Ако A_i и A_j са две леви определящи думи и $A_j=RPQ$, където P е правилно начало на A_i, то $R=1$;

a_2). Ако A_i и A_j са две леви определящи думи и $A_j=RPQ$, където P е правилен край на A_i, то $Q=1$;

б) $б_1$) Ако лява и дясна определящи думи A_i и B_j имат обща част, която е правилно начало на едната от тях, то тя е начало на другата;

$б_2$) Ако лява и дясна определящи думи A_i и B_j имат обща част, която е правилен край на едната от тях, то тя е край на другата;

2) Ако P е правилно начало на B_i и, едновременно, правилен край на B_j, то $P = B_i = B_j$.

ЛЕМА 2.1. Ако P е правилно начало на определящата дума C_i и, едновременно, е правилен край на определящата дума C_j, то $P = C_i = C_j$.

Действително, ако думите C_i и C_j (или едната от тях)са (е) леви определящи думи, твърдението следва от 1а) (или 1б)). Ако C_i и C_j са десни определящи думи - от условието 2). Тази лема се налага да изкажем поради несиметричността на условията.

Ще отбележим, че непосредствено от определение 2.2 се получава решение на въпроса за обратимостта на определящите неравенства в ч.н. полугрупа от разглежданния клас. Действително, ако в дясна определяща дума B влиза лява A, то $B = A$ и всяка редица от елементарни преобразования, започваща с определяща дума, се състои само от определящи думи, които са краен брой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Представянето (разлагането)

$$E = R_1 R_2 \dots R_k$$

на думата E над азбуката на ч.н. полугрупа Γ от класа $K_{\frac{1}{2}}$ се нарича нейно нормално представяне от ред k, ако R_i удовлетворяват следните условия:

I. Всяко R_i е част от някоя определяща дума C_i (A_j или B_j);

II. R_1 е правилно начало на C_1; R_k е правилен край на C_k;

III. За всяко $i, i<k$, R_i е правилен край на C_i или (ако това не е така) R_{i+1} е правилно начало на C_{i+1} ([5], като по-нататък ще отчитаме именно реда k на разлагането).

Дума, която има нормално разлагане, ще наричаме нормална дума.

ЛЕМА 2.2. Нека $E = R_1 R_2 \dots R_k$ е нормално разлагане на думата E. Тогава, $k \leq \partial(E)$ и
$$k \leq \sum_{i=1}^{k} \partial(R_i) = \partial(E) \leq kL, \text{ където } L = max(\partial(A_i), \partial(B_i)).$$

ЛЕМА 2.3. Всяка нормална дума има краен брой нормални представяния.

Твърдението следва от това, че всяка дума има краен брой представяния като произведение от части (те са краен брой) на определящите думи. Измежду тях отделяме нормалните (ако такива има).

ЛЕМА 2.4. Ако
$$PAQ = R_1 R_2 \cdots R_k \qquad (A \text{ е лява определяща дума})$$
е нормално разлагане на думата PAQ, то ние можем да намерим нейно нормално разлагане $PAQ = S_1 S_2 \dots S_k$ от същия ред така, че
$$P = S_1 S_2 \cdots S_{j-1},\ A = S_j,\ Q = S_{j+1} \cdots S_k. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л с т в о т о се провежда по образец на лема 1 [5] като използуваме формулираната тук лема 2.1 в случаите, когато правилен край на някоя определяща дума е едновременно правилно начало на друга. Нека в даденото разлагане R_i е първият множител, който има обща част с думата A, т.е. $R_i = R_i' A',\ A' \neq 1,\ A = A'A''$.

Случай 1. $R_i = R_i' A',\ \partial(A') \geq \frac{1}{2}\partial(A)$, т.е. A' е правилно начало на A. Тогава, $R_i' = 1$ и $R_i = A'$ е начало на C_i.

Ако $A'' = 1$, то $R_i = A$. В този случай полагаме $S_1 = R_1, S_2 = R_2, \dots, S_{i-1} = R_{i-1}, S_i = A, S_{i+1} = R_{i+1}, \dots, S_k = R_k$ и получаваме (2.1) за $j = i$.

Ако $A'' \neq 1$, то $R_i = A'$ и R_i не е правилен край на определяща дума. От условието III следва, че R_{i+1} е правилно начало. Ако $A'' = R_{i+1} Z_1$, то R_{i+1} е начало на A, което е невъзможно, тъй като $A' \neq 1$. Затова, $R_{i+1} = A'' R_{i+1}'',\ R_{i+1}'' \neq 1$.

Ако правилното начало R_{i+1} е и правилен край на някоя определяща дума (лема 2.1), то R_{i+1}'' също е правилен край на тази определяща дума. Полагаме $S_1 = R_1, \dots, S_{i-1} = R_{i-1}$, $S_i = A, S_{i+1} = R_{i+1}''$, $S_{i+2} = R_{i+2}, \dots, S_k = R_k$ и получаваме (2.1) за $j = i$.

Ако R_{i+1} не е правилен край, от условието III следва, че R_{i+2} е правилно начало. Извършваме същото полагане.

Случай 2. $R_i = R_i'A', \partial(A') < \frac{1}{2}\partial(A)$, т.е. A'' е правилен край на A. От $R_{i+1} = A''Z_2$ получаваме $Z_2 = 1$. Затова, $A'' = R_{i+1}Z_3$. Тъй като $A' \neq 1$, R_{i+1} не е правилно начало и от условието III следва, че R_i е правилен край и $R_i' \neq 1$.

Ако, освен това, R_i е правилно начало, то $R_i = C_i$ (лема 2.1) и R_i е правилно начало на C_i.

Ако, при това, R_{i+1} е правилен край, от $A'' = R_{i+1}Z_3$ следва $Z_3 = 1$. Тогава, полагаме $S_1 = R_1, \dots, S_{i-1} = R_{i-1}$, $S_i = R_i', S_{i+1} = A, S_{i+2} = R_{i+2}, \dots, S_k = R_k$ и получаваме (2.1) за $j = i+1$.

Ако R_i е едновременно правилен край и правилно начало, а R_{i+1} не е правилен край, то R_{i+2} е правилно начало. Ако $Z_3 = R_{i+2}Z_4$, то R_{i+2} трябва да бъде начало на A, но това е невъзможно. Следователно, $R_{i+2} = Z_3R_{i+2}'', R_{i+2}'' \neq 1$. Ако, освен това, R_{i+2} е и правилен край, то $R_{i+2} = C_{i+2}$ (лема 2.1) и R_{i+2}'' също е правилен край на C_{i+2}, тъй като, в противния случай ще получим, че Z_3 е правилно начало на C_{i+2}, откъдето следва, че Z_3 е начало на A. Това е невъзможно, тъй като $A' \neq 1$. В този случай полагаме $S_1 = R_1, \dots, S_{i-1} = R_{i-1}$, $S_i = R_i', S_{i+1} = A, S_{i+2} = R_{i+2}'', S_{i+3} = R_{i+3}, \dots, S_k = R_k$

и получаваме (2.1) за $j=i+1$.

Нека R_i е правилен край и правилно начало, R_{i+1} не е правилен край, R_{i+2} е правилно начало, но не и правилен край. Тогава полагаме $S_1=R_1, \dots, S_{i-1}=R_{i-1}, S_i=R_i'$, $S_{i+1}=A, S_{i+2}=R''_{i+2}, S_{i+3}=R_{i+3}, \dots, S_k=R_k$, където $S_{i+3}=R_{i+3}$ е правилно начало, и получаваме (2.1) за $j=i+1$.

Остава да разгледаме и неотбелязания в [5] основен подслучай, при който R_i е правилен край, но не и правилно начало. Тогава, R_{i-1} също е правилен край. Извършваме същите полагания, както и в съответните 4 подслучая по-горе, разглеждайки $R_i', R_i' \neq 1$, само като част на C_i.

От лема 2.4 получаваме лема 2.5.

ЛЕМА 2.5. Ако думата E има нормално разлагане от ред k и $E \to E'$ е елементарно преобразование в ч.н. полугрупа $\Gamma, \Gamma \in K_{\frac{1}{2}}$, то думата E' има нормално разлагане от същия ред.

ЛЕМА 2.6. Нека X е нормална дума. Тогава, множеството $\{Y\}$ от всички думи Y, за които $X \geqslant_\Gamma Y$, е крайно множество от нормални думи.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека

$$X=X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_s=Y$$

е редица от елементарни преобразования в Γ, привеждаща X в Y. Нека думата X има нормално разлагане от ред $x, x \leq \partial(X)$. Индуктивно по отношение дължината s на редицата, въз основа на леми 2.4 и 2.5, получаваме, че всяка дума Y има нормално разлагане от същия ред, откъдето следва (лема 2.2), че $\partial(Y) \leq xL$. Следователно, $\{Y\}$ е крайно множество от нормални думи. Последователно по отношение минималната от дължините на редиците от елементарни преобразования, преобразуващи (в ч.н. полугрупа Γ) думата X в дума Y, ние намираме всички думи Y; при това, повтарящите се изоставяме. Тъй като $\{Y\}$ е крайно множество, този процес е краен. Намираме всевъзможните нормални представяния на всяка дума Y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Ще казваме, че думите X и X' са изразени чрез съгласувани нормални представяния, ако

$$X = \prod_{j=1}^{\ell} F_j \llcorner P_j \lrcorner \cdot F_{e+1} \tag{2.2}$$

и

$$X' = \prod_{j=1}^{\ell} F_j \llcorner P_j' \lrcorner \cdot F_{e+1}, \tag{2.3}$$

където $\llcorner P_j \lrcorner$ и $\llcorner P_j' \lrcorner$ са техни отделени незастъпващи се нормални части (сравн. с определението от [8]).

Ще докажем основната лема.

ЛЕМА 2.7. Неравенството $X \geqslant_\Gamma X'$ в ч.н. полугрупа Γ, $\Gamma \in K_{\frac{1}{2}}$, е изпълнено тогава и само тогава, когато X и X' притежават съгласувани нормални представяния (2.2) и (2.3), за които са изпълнени неравенствата

$$P_j \geqslant_\Gamma P_j', \; j = \overline{1,\ell} \tag{2.4}$$

за отделените в тях съответни нормални части.

Д о к а з а т е л с т в о . Достатъчността е ясна. Необходимостта ще докажем индуктивно по отношение дължината r на някоя редица

$$X = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_r = X' \tag{2.5}$$

от елементарни преобразования в ч.н. полугрупа Γ, привеждаща думата X в думата X'.

Ако $r = 1$, т.е. X' се получава от X чрез едно елементарно преобразование $X = U_1 \llcorner A \lrcorner V_1 \to U_1 \llcorner B \lrcorner V_1 = X'$, твърдението е изпълнено за отделените нормални части $\llcorner A \lrcorner$ и $\llcorner B \lrcorner$, където $A \geqslant B$ е определящо неравенство.

Да допуснем, че твърдението е вярно за всички редици с дължина $r-1$. Ще докажем, че то е вярно за редицата (2.5) с дължина r . По индуктивното предположение, за думите $X = X_0$ и X_{r-1} съществуват съгласувани нормални представяния (2.2) и (2.3), за които са изпълнени съответните неравенства (2.4) . Нека в X_{r-1} е отделена лява определяща дума на ч.н. полугрупа Γ, която да означим с A_r , т.е. $X_{r-1} = U_r A_r V_r$ и $U_r A_r V_r \to U_r B_r V_r$ е последното елементарно преобразование в (2.5) . За разположението на A_r в нормалното представяне от вида (2.3) на думата X_{r-1} има следните възможности:

1. A_r започва в някой множител F_q .

1а) A_r се съдържа в F_q , т.е. $F_q = F_q' A_r F_q''$. Тогава,

$$X = \prod_{j=1}^{q-1} F_j \llcorner P_j \lrcorner \left(F_q' \llcorner A_r \lrcorner F_q''\right) \llcorner P_q \lrcorner \prod_{j=q+1}^{\ell} F_j \llcorner P_j \lrcorner . F_{\ell+1},$$

$$X_{r-1} = \prod_{j=1}^{q-1} F_j \llcorner Q_j \lrcorner \left(F_q' \llcorner A_r \lrcorner F_q''\right) \llcorner Q_q \lrcorner \prod_{j=q+1}^{\ell} F_j \llcorner Q_j \lrcorner . F_{\ell+1},$$

$$X_r = \prod_{j=1}^{q-1} F_j \llcorner Q_j \lrcorner \left(F_q' \llcorner B_r \lrcorner F_q''\right) \llcorner Q_q \lrcorner \prod_{j=q+1}^{\ell} F_j \llcorner Q_j \lrcorner . F_{\ell+1},$$

откъдето се вижда, че X и X', $X' = X_r$, имат съгласувани нормални представяния, за които са удовлетворени съответните неравенства (2.4) .

1б) A_r не се съдържа в F_q , т.е. $F_q = F_q' A_r'$, $A_r = A_r' A_r''$, $A_r' \neq \Lambda$, $A_r'' \neq \Lambda$. Нека $Q_q = R_1 R_2 \dots R_k$ е нормално разлагане на нормалната част Q_q . Ще докажем, че A_r'' не съдържа R_1 . Да допуснем противното, т.е. $A_r'' = R_1 Z_1$,
$A_r = A_r' A_r'' = A_r' R_1 Z_1$ и, тъй като R_1 е правилно начало, то $A_r' = \Lambda$, което противоречи на вече приетото условие $A_r' \neq \Lambda$.

Следователно, $R_1 = A_r'' Z_2, Z_2 \neq \Lambda$. Ще докажем, че A_r' е правилно начало на A_r . Да допуснем противното, т.е. A_r'' е правилен край на A_r . От $C_1 = R_1 T = A_r'' Z_2 T$ получаваме $Z_2 T = \Lambda$, което е в противоречие с това, че $Z_2 \neq \Lambda$. Следователно, A_r' е правилно начало на A_r . Тогава, представянето $A_r' Q_q = A_r' R_1 R_2 \dots R_k$ е нормално разлагане на думата $A_r' Q_q$.

Получаваме

$$X = \prod_{j=1}^{q-1} F_j \llcorner P_j \lrcorner \; (F_q' \llcorner A_r' P_q \lrcorner) \prod_{j=q+1}^{\ell} F_j \llcorner P_j \lrcorner \cdot F_{\ell+1},$$

$$X_{r-1} = \prod_{j=1}^{q-1} F_j \llcorner Q_j \lrcorner \; (F_q' \llcorner A_r' Q_q \lrcorner) \prod_{j=q+1}^{\ell} F_j \llcorner Q_j \lrcorner \cdot F_{\ell+1}.$$

Съгласно лема 2.5

$$X_r = \dots\dots\dots (F_q' \llcorner \overline{Q_q} \lrcorner) \dots\dots\dots\dots\dots ,$$

откъдето е видно, че X и X' имат съгласувани нормални представяния с изпълнени съответни неравенства (2.4) .

2. A_r започва в някоя нормална част Q_q .

2а) A_r се съдържа в Q_q , $Q_q = U_2 A_r V_2$.

$$X = \dots\dots\dots (F_q \llcorner P_q \lrcorner) \dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$X_{r-1} = \dots\dots\dots (F_q \llcorner U_2 A_r V_2 \lrcorner) \dots\dots\dots \text{(лема 2.4)},$$

$$X_r = \dots\dots\dots (F_q \llcorner U_2 B_r V_2 \lrcorner) \dots\dots\dots \text{(лема 2.5)}.$$

2б$_1$) A_r не се съдържа в Q_q , но се съдържа в $Q_q F_{q+1}$, $Q_q = Q_q' A_r'$, $A_r = A_r' A_r''$, $A_r' \neq \Lambda$, $A_r'' \neq \Lambda$, $F_{q+1} = A_r'' F_{q+1}''$.

Тогава, A_r' не покрива последния множител R_k в нормалното разлагане $Q_q = R_1 \dots R_k$ на Q_q и A_r'' е правилен край на A_r . В такъв случай

$$X = \dots\dots\dots (F_q \llcorner P_q A_r'' \lrcorner \, F_{q+1}'' \llcorner P_{q+1} \lrcorner) \dots\dots\dots ,$$

$$X_{r-1} = \dots\dots\dots (F_q \llcorner Q_q A_r'' \lrcorner \, F_{q+1}'' \llcorner Q_{q+1} \lrcorner) \dots\dots ,$$

$$X_r = \cdots\cdots\cdots (F_q \llcorner \overline{Q_q} \qquad \lrcorner F''_{q+1} \llcorner Q_{q+1} \lrcorner) \cdots\cdots.$$

Накрая,

2б2) $Q_q = Q'_q A'_r$; $A_r = A'_r A''_r$, $A'_r \neq \Lambda$, $A''_r \neq \Lambda$, $A''_r = F_{q+1} Z_3$, $Z_3 \neq \Lambda$. Тогава, Z_3 не покрива първия множител в нормалното разлагане на думата Q_{q+1}. Ако $Q_q = R_1 R_2 \dots R_k$ и $Q_{q+1} = R'_1 R'_2 \dots R'_{k'}$ са нормални разлагания на Q_q и Q_{q+1}, то

$$Q_q F_{q+1} Q_{q+1} = R_1 R_2 \dots R_k F_{q+1} R'_1 R'_2 \dots R'_{k'}.$$

е нормално разлагане на думата $Q_q F_{q+1} Q_{q+1}$. Имаме

$$X = \cdots\cdots\cdots (F_q \llcorner P_q F_{q+1} P_{q+1} \lrcorner F_{q+2}) \cdots\cdots,$$
$$X_{r-1} = \cdots\cdots\cdots (F_q \llcorner Q_q F_{q+1} Q_{q+1} \lrcorner F_{q+2}) \cdots\cdots,$$
$$X_r = \cdots\cdots\cdots (F_q \llcorner \overline{Q_q} \qquad \lrcorner F_{q+2}) \cdots\cdots.$$

ТЕОРЕМА 2.1. Във всяка ч.н. полугрупа Γ от класа $K_{\frac{1}{2}}$ проблемът на неравенството е разрешим.

Д о к а з а т е л с т в о . Съществуването на конкретен алгоритъм за решаване проблема на неравенството фактически е доказано в лема 2.7 . Даваме неговото описание (сравн. с алгоритъма от [8]).

1) Дадени са думите X и X'. Трябва да установим изпълнено ли е неравенството $X \geq_\Gamma X'$. Установяваме кои поддуми на X са нормални (лема 2.3) . Аналогично - за X'. По такъв начин отделяме всички нормални части на X и X'.

2) Намираме всички представяния на X с отделени незастъпващи се нормални части. За тази цел, нареждаме всички нейни нормални части относно началото им и, за дадено начало, относно техните краища в него. Представяме X последователно с една, две и т.н. отделени незастъпващи се нормални части, използувайки тяхната наредба. Аналогично - за X'.

3) Измежду всички представяния на думите X и X' с отделени незастъпващи се нормални части разглеждаме двойките съгласувани нормални представяния. Ако такива няма, то думите са несравними (лема 2.7) .

4) За всяка двойка съгласувани нормални представяния установяваме (лема 2.6) изпълнени ли са съответните неравенства (2.4) . Ако за някоя двойка те са изпълнени, то $X \geq_{\Gamma} X'$ (лема 2.7). В противния случай, неравенството не и изпълнено.

Така определеният клас ч.н. полугрупи с разрешим проблем на неравенството съдържа класа полугрупи на Осипова с разрешим проблем на тъждеството. Обратното не е вярно. Например, ч.н. полугрупа Γ , зададена над азбуката $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ с необратими определящи неравенства $a_1 a_2 a_4 \geq a_2 a_5 a_2 a_3$, $a_1 a_2 a_3 \geq a_4 a_2 a_5 a_6$, $a_4 a_2 a_4 \geq a_4 a_2 a_5 a_6$, принадлежи на този клас и определящите я думи не удовлетворяват условията на Осипова.

Ние поставяме проблема на начупената линия в кр. опр. ч.н. полугрупа V по следния начин: да се построи алгоритъм (или да се докаже, че такъв няма), установяващ за произволни две думи $X, Y \in V$, съществува ли крайна редица

$$X = X_0, X_1, X_2, \ldots, X_t = Y \tag{2.6}$$

от думи, такива, че $X_0 \geq_V X_1$, $X_1 \leq_V X_2$, $X_2 \geq_V X_3$ и т.н. - до Y или такива, че $X_0 \leq_V X_1$, $X_1 \geq_V X_2$, $X_2 \leq_V X_3$ и т.н. - до Y .

Редицата (2.6) от последователно сменящи се неравенства ще наричаме начупена линия, свързваща думата X с думата Y в ч.н. полугрупа V .

Ще разгледаме една алгебрична интерпретация на проблема на начупената линия, показваща, че тя възниква по естествен начин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5 . Ще казваме, че елементът X в ч.н. полугрупа A е в релация ω с нейния елемент Y тогава и само тогава, когато съществува крайна начупена линия, свързваща X с Y в нея.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Релацията ω е конгруентност в ч.н. полугрупа A. Тя поражда полугрупа, елементите на която са класовете на еквивалентност по отношение на ω.

Получената полугрупа е естествен хомоморфен образ на A. Всички елементи, които в A могат да се свържат с начупена линия, се изобразяват в един и същ елемент. В полугрупи с тривиална наредба не се получават нови образи. Подобни разсъждения са в сила и за ч.н. групи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Ще казваме, че кр.опр. ч.н. полугрупа V принадлежи на класа $L_{\frac{1}{2}}$ тогава и само тогава, когато нейните определящи думи удовлетворяват условията на Осипова:

1) Ако G_i и G са две определящи думи и $G=RPQ$, където P е правилно начало на G_i, то $R=\Lambda$;

2) Ако G_i и G са две определящи думи и $G=RPQ$, където P е правилен край на G_i, то $Q=\Lambda$.

В сравнение с определение 2.2 ние разпростираме условията на налагане и върху десните определящи думи. Ясно е, че $L_{\frac{1}{2}} \subset K_{\frac{1}{2}}$. Пример на ч.н. полугрупа от $L_{\frac{1}{2}}$ с нетривиална наредба (независимо от това, че нейните определящи думи удовлетворяват пълните условия на Осипова) е ч.н. полугрупа

$V_0 = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5;\ a_4 a_2 a_2 a_1 > a_4 a_3 a_1,\ a_4 a_3 a_5 a_2 a_5 \geq a_4 a_2 a_4 a_5 a_3 a_1 >$.

Наложените на десните определящи думи допълнителни условия позволяват изводи и в обратна посока (съответствуващи на лемите при доказателството на теорема 2.1), независимо от това, че елементарните преобразования са еднопосочни. Например,

ЛЕМА 2.5'. Ако думата E има нормално разлагане от ред k и $E \to E'$ е елементарно преобразование в ч.н. полугрупа V, $V \in L_{\frac{1}{2}}$, то думата E' има нормално разлагане от същия ред.

Обратно, ако E' има нормално разлагане от ред k, то и E има нормално разлагане от същия ред.

Индуктивно по отношение броя на елементарните преобразования се доказва

ЛЕМА 2.6'. В ч.н. полугрупа $V, V \in L_{\frac{1}{2}}$, за дадена нормална дума E съществуват крайни множества $\{E'\}$ и $\{E''\}$ от думи, такива че $E' \leq_v E \leq_v E''$. Броят на множителите в някое нормално разложение на една от думите E, E', E'' е равен на този в съответните нормални разлагания на другите.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Ще казваме, че думите X и X' са изразени чрез максимални нормални съгласувани представяния, ако

$$X = \prod_{j=1}^{\ell} F_j \llcorner P_j \lrcorner \cdot F_{\ell+1} \tag{2.7}$$

и

$$X' = \prod_{j=1}^{\ell} F_j \llcorner P_j' \lrcorner \cdot F_{\ell+1}, \tag{2.8}$$

където думите $F_j, j=\overline{2,\ell}$, са непразни, $F_j, j=\overline{1,\ell}, F_{\ell+1}$ не съдържат нормални поддуми и $\llcorner P_j \lrcorner, \llcorner P_j' \lrcorner$ са техни отделени максимални нормални части (сравн. с определение 2.4).

ЛЕМА 2.7'. Ако (2.7) е максимално нормално представяне на думата X и $X \geq_v X'$, то думата X' притежава максимално нормално представяне (2.8), съгласувано с (2.7). Обратно, ако (2.8) е максимално нормално представяне на думата X' и $X \geq_v X'$, то X притежава максимално нормално представяне (2.7), съгласувано с (2.8). Следователно, типовете (въвеждаме това понятие без специално определение) на максималните нормални представяния на сравнимите в ч.н. полугрупа V думи съвпадат. При това, в съгласуваните максимални нормални представяния са изпълнени съответни неравенства за отделните максимални нормални части.

Д о к а з а т е л с т в о . Аналогично на доказателството на лема 2.7 (но и в обратна посока, като случаите 1) и 2б) отпадат поради максималността на нормалното представяне) доказваме, че, ако лява или дясна определяща дума се съдържа в дума с дадено максимално нормално представяне, то тя се съдържа в една от нейните отделени максимални нормални части. За улеснение провеждаме кратко доказателство. Нека определящата дума C_i се съдържа в думата X с максимално нормално представяне (2.7). Тъй като F_q не съдържа нормални поддуми и $\llcorner P_{q+1} \lrcorner$ е максимална нормална част, получаваме, че C_i не може да започва в някое F_q. Остава случая, когато C_i започва в някое $\llcorner P_q \lrcorner$. Да допуснем противното, т.е. че част от C_i се намира надясно от $\llcorner P_q \lrcorner$. От максималността на тази нормална част се получава, че определящата дума не се съдържа в $\llcorner P_q \lrcorner F_{q+1}$ и че тя няма обща част и с $\llcorner P_{q+1} \lrcorner$. Доказателството на лемата се провежда индуктивно по отношение броя на елементарните преобразования въз основа на лема 2.5'. От лема 2.6' получаваме основния резултат.

ОСНОВЕН РЕЗУЛТАТ. Максималните нормални представяния на всяка дума X_s, $s = \overline{1,t}$, от редицата (2.6) имат тип, съвпадащ с типа на максималните нормални представяния на думата X и, следователно, множеството на думите, които могат да бъдат свързани с думата X чрез крайна начупена линия в ч.н. полугрупа V, $V \in L_{\frac{1}{2}}$, е крайно.

ТЕОРЕМА 2.1'. Във всяка ч.н. полугрупа V на класа $L_{\frac{1}{2}}$ проблемът на начупената линия е разрешим.

Съгласно предложение 2.1, простата формулировка на теорема 2.1' съвпада с формулировката на теоремата на Осипова (заменяме определящите неравенства с определящи равенства). Тук отделеният основен резултат, обаче, е точното, пълно описание структурата на всички еквивалентни думи, получено чрез по-нататъшно развитие на метода на съгласуваните нормални представяния. В полугрупа от класа $L_{\frac{1}{2}}$ проблемът на начупената линия и проблемът на неравенството са разрешими едновременно. В дадена ч.н. полугрупа проблемът на тъждеството и на начупената линия са различни. Засега не можем да посочим пример на ч.н. полугрупа (от $K_{\frac{1}{2}}$) с разрешим проблем на неравенството и неразрешим проблем на начупената линия. Самата алгебрична интерпретация на проблема на начупената линия ни се струва интересна със специфичния за частичната наредба начин за получаване на хомоморфни образи.

§ 3. Други свойства на класове частично наредени полугрупи с разрешим проблем на неравенството.

В началото на този параграф се изследват кр. спр. ч.н. полугрупи, в които със всяка дума са сравними краен брой думи. Във всяка от тях е разрешима произволна затворена формула на предикатното смятане с неравенство и ограничени квантори. Доказва се, че частичната наредба в такава полугрупа е нелинейна и ненасочена. Конструира се алгоритъм, решаващ проблема на с-изоморфизма за произволни две кр.спр. ч.н. полугрупи с разрешим проблем на неравенството, във всяка от които образуващите елементи съдържат краен брой думи.

Да означим с K класа кр. спр. ч.н. полугрупи, във всяка от които с дадена дума са сравними краен брой думи.

ТЕОРЕМА 3.1. Във всяка ч.н. полугрупа Γ от класа K е разрешима произволна затворена формула

$$(Q_1 x_1)_{x_1 \diamond W_1} (Q_2 x_2)_{x_2 \diamond W_2} \cdots (Q_s x_s)_{x_s \diamond W_s} \mathfrak{U}(x_1, x_2, \ldots, x_s)$$

на предикатното смятане с неравенство и ограничени квантори ($x \diamond W$ означава x е сравнимо с W), където $\mathcal{U}$ е безкваторна формула (термите се определят с помощта на една функционална буква, означаваща умножението в полугрупата).

Доказателството е непосредствено и се провежда индуктивно по отношение броя s на кванторите, като ограничения квантор за всеобщност се заменя с крайна конюнкция, а ограничения квантор за съществуване - с крайна дизюнкция.

ТЕОРЕМА 3.2 . Във всяка ч.н. полугрупа Γ от класа K наредбата е нелинейна и ненаситена.

Доказателство . а) Съгласно определението на класа K , за всяка дума X в ч.н. полугрупа Γ съществуват крайно множество $\{Y\}$ от думи Y , за които $X \geq_{\Gamma} Y$, и крайно множество $\{Z\}$ от думи Z , за които $Z \geq_{\Gamma} X$. Произволна дума T , различна от всичките думи Y и Z , е несравнима с X . Следователно, наредбата в Γ е нелинейна.

б) За произволна дума X съществува крайно множество $\{Y\}$ от думи Y , за които $Y \geq_{\Gamma} X$. Да разгледаме всички думи T , такива че $T \leq_{\Gamma} Y$ за някое Y . Множеството $\{T\}$ е крайно. Нека M е произволна дума , различна от всичките думи T . Тогава, за всяко Y не е изпълнено неравенството $Y \geq_{\Gamma} M$ и, още повече, не са изпълнени неравенствата $Y \geq_{\Gamma} X$ и $Y \geq_{\Gamma} M$. Следователно, частичната наредба в Γ не е наситена.

Проблемът на о-изоморфизма се поставя по следния начин: нека

$$\Gamma = a_1, a_2, \dots, a_n ; A_i \geq B_i / i = \overline{1,m} > \quad \text{и}$$

$$\Gamma' = b_1, b_2, \dots, b_p ; C_j \geq D_j / j = \overline{1,q} >$$

са две кр. спр. ч.н. полугрупи. Съществува ли о-изоморфизъм (т.е. изоморфизъм, запазващ наредбата) на първата върху втората? Трудността на този проблем е общоизвестна.

Да означим с K' класа кр. спр. ч.н. полугрупи с разрешим проблем на неравенството, във всяка от които образуващите елементи съдържат краен брой думи.

ТЕОРЕМА 3.3. За произволни две ч.н. полугрупи Γ и Γ' от класа K' проблемът на с-изоморфизма е разрешим.

Доказателство. Съответствието φ на полугрупата $<\Gamma>$ в полугрупата $<\Gamma'>$ се задава чрез образите $\varphi(a_i)$,

$$\varphi(a_i) = a_i', \ i=\overline{1,n}, \qquad (3.1)$$

на образуващите a_i, където a_i' са думи в полугрупата Γ', и условието

$$\varphi(XY) = \varphi(X)\varphi(Y). \qquad (3.2)$$

Доказателството разделяме на три части. Предварително си изясняваме, че за даден с-изоморфизъм посочените в тях условия за представителите на елементите са изпълнени.

а) Съществуват краен брой възможности за съответствие на полугрупата $<\Gamma>$ върху полугрупата $<\Gamma'>$.

Доказателството следва от условието (3.2) и от това, че всеки образуващ елемент $[b_j], j=\overline{1,p}$, на полугрупата $<\Gamma'>$ съдържа краен брой думи. Проверяваме при коя от възможностите (те са краен брой) за определяне образите на буквите a_i, $i=\overline{1,n}$, се получават представители на всички елементи $[b_j]$.

б) При фиксирани образи $\varphi(a_i) = a_i'$ на буквите $a_i, i=\overline{1,n}$, можем да установим дали съответствието φ е с-хомоморфизъм.

Затова, имайки предвид, че е изпълнено условието (3.2), доказваме следното твърдение:

$$(X \geq_{\Gamma} Y \Longrightarrow \varphi(X) \geq_{\Gamma'} \varphi(Y)) \Longleftrightarrow (\varphi(A_i) \geq_{\Gamma'} \varphi(B_i)).$$

Доказателството се провежда индуктивно по отношение броя на елементарните преобразования, привеждащи думата X в думата Y в ч.н. полугрупа Γ, използувайки условието (3.2) и предположената разрешимост на проблема на неравенството в Γ'.

в) Ч.н. полугрупи Γ и Γ' са с-изоморфни тогава и само тогава, когато съществува с-епиморфизъм φ на ч.н. полугрупа Γ върху ч.н. полугрупа Γ' и с-епиморфизъм ψ на ч.н. полугрупа Γ' върху ч.н. полугрупа Γ, който е обратно съответствие на съответствието φ (т.е. $\psi(\varphi([X])) = [X]$ за произволен елемент $[X], [X] \in \langle \Gamma \rangle$).

Чрез последователното прилагане трите части на това независимо доказателство получаваме алгоритъм за решаване проблема на с-изоморфизма за произволни две ч.н. полугрупи, удовлетворяващи условието на теоремата (в случай на положително решение се конструира и самият с-изоморфизъм). За такива ч.н. полугрупи решението на този проблем се изразява чрез вече известното решение на проблема на неравенството.

Ще отбележим, че, макар и в [17] теореми 3.2 и 3.3 да са формулирани за конкретния подклас $K_{\frac{1}{2}}$, доказателствата там се провеждат при формулираните по-общи условия. Не е трудно да се посочат примери на удовлетворяващи тези условия ч.н. полугрупи, определящите неравенства на които имат мярка на налагане 1 .

§ 4. Регулярните езици и някои свойства на полугрупите от класа на Осипова.

В този параграф се установява връзка между някои свойства на регулярните езици и на (ч.н.) полугрупите от класа на Осипова. Въз основа на това, че индексът на една конгруенция в полугрупата, въведена аналогично на конгруенцията от теорема 2.1.5 [3], [6], е краен, се доказва, че всяка полугрупа от разглеждания клас притежава краен хомоморфен образ с нетривиална подполугрупа. В произволна полугрупа от класа се разглежда нейната подполугрупа на симетричните ѝ елементи (всички думи на които започват и завършват с нормални думи). В нея всички думи на произведение от елементи са произведения от думи на съответните множители. С помощта на това твърдение се доказва разрешимост на проблема на тъждеството в дефиниторната регулярна алгебра [7] над подполугрупата от симетричните елементи. В случая, той се свежда (чрез разглеждане на пълни първообрази) към разрешимия проблем на тъждеството в регулярна алгебра над свободна полугрупа [4], [8]. Проблемът на тъждеството в регулярна алгебра над подполугрупи е по-общ от проблема на тъждеството в полугрупата.

Нека M е множество от елементи на полугрупата Π. Аналогично на релацията от теорема 2.1.5 [3] (гл. още [6]) определяме конгруенция $\approx$ в Π.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Ще казваме, че елементът $[x]$ е в релация $\approx$ с елемента $[y]$ в полугрупата Π и ще пишем $[x]\approx[y]$ тогава и само тогава, когато за произволни елементи $[w],[z]\in\Pi$ елементите $[w][x][z]$ и $[w][y][z]$ едновременно принадлежат или не принадлежат на множеството M.

Ще отбележим, че за произволно множество U от елементи на полугрупата Π ние можем да определим квазинаредба $\geqslant$ по

следния начин: $[x] \geq [y]$, ако за произволни елементи $[z],[w] \in \Pi$ от това, че $[z][x][w] \in U$, следва, че $[z][y][w] \in U$. Релация $=$ определяме по следния начин:
$[x]=[y] \Longleftrightarrow (([x] \geq [y]) \& ([y] \geq [x]))$. Тя е конгруенция в Π , класовете на еквивалентност по отношение на която образуват ч.н. полугрупа с естествено индуцирани операция и наредба.

Нека Π е полугрупа с крайно множество $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ образуващи и φ е естественият хомоморфизъм на свободната полугрупа Σ^* (с образуващи $a_1, a_2, \ldots, a_n$) върху Π .

ЛЕМА 4.1. Ако пълният първообраз $\varphi^{-1}(M)$ на множеството M при хомоморфизма φ е регулярен език в Σ^*, то конгруенцията $\approxeq$ има краен индекс в Π и M се състои от пълни класове еквивалентни елементи.

Д о к а з а т е л с т в о . Да разгледаме конгруенцията $\equiv$ в свободната полугрупа Σ^*, дефинирана по следния начин: $x \equiv y$, ако за произволни думи w и z , думите wxz и wyz едновременно принадлежат или не принадлежат на множеството $\varphi^{-1}(M)$. Съгласно цитираната теорема, тя има краен индекс. Тъй като ние разглеждаме пълния първообраз $\varphi^{-1}(M)$, на множеството M , релацията $\approxeq$ в полугрупата Π може да бъде зададена по следния начин: $\varphi(x) \approxeq \varphi(y)$, ако за произволни думи w и z , елементите $\varphi(wxz)$ и $\varphi(wyz)$ едновременно принадлежат или не принадлежат на множеството M . Сега твърдението на лемата следва от това, че конгруенцията $\equiv$ има краен индекс.

Следователно, естественият хомоморфен образ $\Pi/\approxeq$ на полугрупата Π по отношение на конгруенцията $\approxeq$ би бил крайна полугрупа. С помощта на тази лема, по-нататък ще получим някои приложения на теорема 2.1.5 [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Нормален елемент на полугрупата Π от класа $K_{\frac{1}{2}}$ (определение 2.2) ще наричаме всеки неин елемент, състоящ се от краен брой нормални думи (лема 2.6).

Нормалните елементи на дадена полугрупа Π от класа $K_{\frac{1}{2}}$ образуват в нея нетривиална подполугрупа N. Нейният пълен първообраз $\varphi^{-1}(N)$ при естествения хомоморфизъм φ на свободната полугрупа Σ^* върху полугрупата Π е подполугрупата на всички нормални думи.

ЛЕМА 4.2. $\varphi^{-1}(N)$ е регулярен език в Σ^*.

Доказателство. Нека $\{R_{\alpha'}/\alpha' \in A'\}$ е множеството от всички собствени правилни начала на определящите думи на (ч.н.) полугрупа $\Pi, \Pi \in K_{\frac{1}{2}}$, а $\{R_{\alpha''}/\alpha'' \in A''\}$ е множеството от всички определящи думи. Нека $\{R_\beta/\beta \in B\}$ е множеството от всички правилни краища и $\{R_\gamma/\gamma \in C\}$ - множеството от всички други части на определящите думи (които не са нито техни правилни начала, нито техни правилни краища). Тогава,

$$\{R_i/i \in I\} = \{R_{\alpha'}/\alpha' \in A'\} \cup \{R_\beta/\beta \in B\} \cup \{R_\gamma/\gamma \in C\}, I = A' \cup B \cup C,$$

е множеството от всички части на определящите думи. Всеки две от множествата $\{R_{\alpha'}\}$, $\{R_\beta\}$ и $\{R_\gamma\}$ нямат общи елементи. Да разгледаме дясно линейната граматика

$\mathcal{T}, \mathcal{T} = \{\Sigma \cup \{\nu_i/i \in I\} \cup \{\sigma\}, \Sigma, Q, \sigma\}$, където Q са следните правила за извод:

$$\sigma \longrightarrow R_\alpha \nu_\alpha, \alpha \in A, A = A' \cup A'' \quad ;$$

$$\nu_\beta \longrightarrow R_i \nu_i, \beta \in B, i \in I \quad ;$$

$$\nu_\delta \longrightarrow R_\tau \nu_\tau, \delta \in D, D = A' \cup C, \tau \in A \quad ;$$

$$\nu_\beta \longrightarrow \Lambda .$$

Доказва се, че породеният от нея език $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ съвпада с подполугрупата $\varphi^{-1}(N)$ на нормалните думи в Σ^*. Следователно, съгласно теорема 2.2.1 [3], множеството $\varphi^{-1}(N)$ е регулярно.

При доказване разрешимостта на проблема на (неравенството) тъждеството в полугрупите от разглеждания клас множеството на нормалните думи играе основна роля. Получихме, че то се намира на най-ниските етажи на рекурсивните множества и, едновременно с това, че подполугрупата N е регулярна в Π.

ТЕОРЕМА 4.1. Всяка полугрупа Π от класа $K_{\frac{1}{2}}$ притежава краен хомоморфен образ с нетривиална подполугрупа.

Д о к а з а т е л с т в о . Прилагаме леми 4.1 и 4.2 към конгруенцията $\approx$, която определяме с помощта на подполугрупата N на нормалните елементи в полугрупата Π.

Сега ще изучим по-детайлно някои свойства на операцията умножение в полугрупа от разглеждания клас.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Една дума в азбуката Σ на полугрупата Π от класа $K_{\frac{1}{2}}$ ще наричаме симетрична, ако тя започва и завършва с нормална дума.

ТВЪРДЕНИЕ 4.1. Всички думи, равни на симетрична дума в полугрупата $\Pi, \Pi \in K_{\frac{1}{2}}$, са симетрични. Симетричните елементи образуват подполугрупа H в Π.

Д о к а з а т е л с т в о т о се провежда индуктивно по отношение броя на елементарните преобразования в съответната редица въз основа на определенията на нормални и симетрични думи.

ЛЕМА 4.3. Нека симетричната дума S е произведение $S = S_1 S_2 \dots S_e$ на симетричните думи $S_1, S_2, \dots, S_e$ и (лявата) определящата дума C_i на полугрупата Π се съдържа в S. Тогава, C_i се съдържа в един от множителите $S_1, S_2, \dots, S_e$.

Д о к а з а т е л с т в о . Допускаме противното, т.е. C_i има обща част с две последователни думи S_j и $S_{j+1}, j = \overline{1, e-1}$. Отначало доказваме, че C_i не може да покрива последния множител в нормалния край на S_j и първия множител в нормалното начало на S_{j+1}. Определящата дума C_i се разделя на две части. От тях: или лявата е нейно правилно начало, или дясната - нейн правилен край. И в двата случая стигаме до противоречие. Подробното доказателство се основава на свойствата на нормалните думи.

Индуктивно по отношение броя на елементарните преобразования се доказва следното свойство на полугрупите от разглеждания клас:

ЛЕМА 4.4. Нека симетричният елемент $[S]$ на полугрупата Π е произведение $[S]=[S_1][S_2]\cdots[S_e]$ на симетричните елементи $[S_1],[S_2],\cdots,[S_e]$, т.е. $[S_1],[S_2],\ldots,[S_e],[S]\in H$. Тогава, множеството от всички думи на елемента $[S]$ е произведение на множеството от думите на $[S_1]$ по тези от $[S_2]$ и т.н. - по тези от $[S_e]$.

Това свойство ще използуваме в теорема 4.2. В общия случай, то не е изпълнено.

Понятието елемент на дефиниторната регулярна алгебра над подполугрупата H на полугрупата Π от класа $K_{\frac{1}{2}}$ се определя по следния начин: симетричен елемент на регулярната алгебра ще наричаме всяко подмножество на полугрупата H, което може да се получи от краен брой нейни елементи чрез прилагане краен брой пъти на операциите обединение на подмножества, умножение на подмножества и итерация (пораждане на подполугрупа от подмножество елементи) [7].

ТЕОРЕМА 4.2. Проблемът на тъждеството в дефиниторната регулярна алгебра над подполугрупата H на симетричните елементи в полугрупа Π от класа $K_{\frac{1}{2}}$ е разрешим.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ са елементи на регулярната алгебра над подполугрупата H, породени, съответно, от симетричните елементи $r_i, i=\overline{1,m}$, и $s_j, j=\overline{1,n}$, а $\mathcal{R}=R(r_1,r_2,\cdots,r_m)$ и $\mathcal{S}=S(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ са техните регулярни изрази. Очевидно, $\mathcal{R} = \mathcal{S} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathcal{R}) = \varphi^{-1}(\mathcal{S})$. Въз основа на лема 4.4 получаваме, че $\varphi^{-1}(\mathcal{R}) = R(\varphi^{-1}(r_1), \dots, \varphi^{-1}(r_m))$ и $\varphi^{-1}(\mathcal{S}) = S(\varphi^{-1}(s_1), \dots, \varphi^{-1}(s_n))$.

Тъй като $\varphi^{-1}(r_i)$ и $\varphi^{-1}(s_j)$ са регулярни (те са крайни множества от думи) в Σ^*, то $\varphi^{-1}(\mathcal{R})$ и $\varphi^{-1}(\mathcal{S})$ са регулярни множества от думи. От разрешимостта на проблема на тъждеството в регулярна алгебра над свободната полугрупа Σ^* [4], [3] (следствие 4.1.1) следва разрешимост на този проблем в дефиниторната регулярна алгебра над подполугрупата H.

В [5] е отбелязано, че, ако в определението на правилен край и правилно начало вместо нестрого неравенство се разреши строго неравенство, то в получаващия се клас съществуват примери на полугрупи с неразрешим проблем на тъждеството и, следователно, с неразрешим проблем на тъждеството в съответната регулярна алгебра. Във връзка с тази максималност се засилва интереса към изследванията на този проблем в дадения твърде широк клас.

Ще отбележим, че теорема 4.1. може (след съществено изследване на умножението) да се докаже още и като се определи използваната в нея конгруенция с помощта на произволна крайно породена подполугрупа на H. Нещо повече, може да се докаже, че съществува краен хомоморфен образ на Π с нетривиална подполугрупа, в която не се съдържа образът на произволен даден елемент.

Г Л А В А 2

КЪМ ПРОБЛЕМИТЕ НА ДЕЛИМОСТТА, ТЪЖДЕСТВОТО И НАРЕДБАТА ЗА ПОЛУГРУПИ С ЕДНО НЕСЪКРАТИМО ОТЛЯВО ОПРЕДЕЛЯЩО СЪОТНОШЕНИЕ

§ 5. Някои свойства на алгоритъма за делимост и на полугрупите, към които той се прилага.

В този параграф се доказва (гл.приложението), че, ако никой общ край на двете определящи думи в полугрупа с едно несъкратимо отляво определящо съотношение не е начало на някоя от тях, то в нея е разрешим проблемът на тъждеството (директно, без използуване на алгоритъма $\mathcal{D}$). Предлага се клас полугрупи, към които тази теорема е неприложима, но е разпознаваема приложимостта на $\mathcal{D}$. Доказва се отразяващото важно свойство твърдение, че редицата от думите, получаваща се при неговото действие в случаите, когато той е приложим, е без завои. С помощта на теорема 1.1 и следствие 1.2 се доказва, че във всяка полугрупа с едно несъкратимо съотношение, зададена в азбука, съдържаща не по-малко от три букви, може да се въведе частична наредба.

ТЕОРЕМА 5.1. Нека

$$\Pi_1 = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n ; A = B \rangle \tag{5.1}$$

е полугрупа с едно несъкратимо отляво определящо съотношение (т.е. A и B започват с различни букви), за което

(1) не съществува общ край на определящите думи A и B, който да е начало на едната от тях.

Тогава, в Π_1 е разрешим проблемът на тъждеството.

Доказателство. Нека $A \doteq A_1 S$, $B \doteq B_1 S$, където S е максималният общ край на A и B. От условието (1) следва, че $A_1 \not\doteq \Lambda$ и $B_1 \not\doteq \Lambda$. Нека $S \doteq S_1 S_2$, $S_2 \not\doteq \Lambda$. Ще докажем, че проблемът на тъждеството в (5.1) се свежда към този проблем в полугрупата

$$\Pi_2 = \langle a_1, a_2, \dots, a_n ;\ A_1 S_1 = B_1 S_1 \rangle, \tag{5.2}$$

откъдето, при $S_1 \doteq \Lambda$, се получава [1] твърдението на теоремата (за доказване на тази сводимост при $S_1 \doteq \Lambda$ може да не се използува несъкратимостта отляво на определящото съотношение). Нека X, Y са думи в азбуката $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Ще получим сводимост в следния смисъл: ако $X \neq_{\Pi_2} Y$, то $X \neq_{\Pi_1} Y$; ако $X =_{\Pi_2} Y$, то дължината на най-късата редица от елементарни преобразувания (ако такава съществува), привеждаща в Π_1 думата X в думата Y, е точно равна на дължината на най-късата редица от елементарни преобразувания, привеждаща X в Y в Π_2. Действително, нека $X =_{\Pi_1} Y$ и

$$X \doteq X_0 \to X_1 \to \dots \to X_k \doteq Y \tag{5.3}$$

е най-късата редица от елементарни преобразувания в Π_1, привеждаща X в Y (т.е. (5.3) не съдържа завои – § 1, цитираното следствие). От начина, по който полугрупата Π_2 се получава от полугрупата Π_1, е ясно, че (5.3) е редица (5.3') от елементарни преобразувания и в Π_2. Ще покажем, че (5.3') също не съдържа завои, с което сводимостта на проблема на тъждеството в (5.1) към този проблем в (5.2) в посочения смисъл ще бъде доказана (усилване на цитираната идея). Да допуснем противното и да отделим в (5.3') завой:

$$X_i = X_i^{(1)} C_2 S_2 X_i^{(2)} \to X_i^{(1)} \bar{C}_2 S_2 X_i^{(2)} \to \cdots \to X_j^{(1)} \bar{C}_2 S_2 X_j^{(2)} \to$$

$$\to X_j^{(1)} C_2 S_2 X_j^{(2)} = X_j \quad , \qquad (5.4)$$

където C_2 и $\bar{C}_2$ са определящите думи на (5.2).

Но в (5.3) отделената нейна част (5.4) не съдържа завои. Следователно, в тази отсечка на (5.3) S_2 се засяга от някое елементарно преобразование $C_1 \to \bar{C}_1$ в Π_1 (тъй като $\bar{C}_2$ не се засяга нито в (5.3'), нито в (5.3)). Получава се, че някой край на думата S_2 е начало на C_1, което противоречи на условието (1) на теоремата (имаме предвид връзката между редиците (5.3) и (5.3')). Следователно, в Π_1 е разрешим проблемът на тъждеството.

Тази теорема е приложима, например, към полугрупата $\Pi_1 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 ; a_1 a_2 a_3 a_4 = a_2 a_1 a_1 a_3 a_4 \rangle$. Тя е неприложима, например, към полугрупата $\Pi_1' = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 ; a_1 a_2 a_3 a_4 = a_4 a_1 a_4 a_3 a_4 \rangle$. В случай, че са налице нейните условия, прилагането на алгоритъма $\mathcal{D}$ за решаване проблема на тъждеството е ненужно. Ясно е, че те могат да бъдат удовлетворени при брой на образуващите не по-малък от три.

Ще отбележим, че, тъй като определящото съотношение е несъкратимо отляво, ако никой край на думата S_1 не е начало на A_1 или на B_1, то и в Π_2 е разрешим проблемът на тъждеството.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Ако никоя поддума на думата S не е начало на A или на B, то във всички полугрупи (5.2) проблемът на тъждеството е разрешим.

За полугрупи, които не принадлежат на класа от теорема 5.1 , засега трябва да изследваме приложимостта на алгоритъма $\mathcal{D}$.

ТЕОРЕМА 5.2. Нека за крайнопоредената полугрупа

$$\Pi = \langle a, b, \ldots, c \, ; \, aA' = bB' / a \neq b \rangle$$

с едно несъкратимо стляво определящо съотношение, в което $\partial(aA') \geq \partial(bB')$ са изпълнени следните условия:

1) Ако едната от определящите думи допълва не до края някое начало (свое или на другата определяща дума), то се поглъща нейно собствено начало, за което оставащият край е $\mathcal{N}$-неразложим.

2) Ако S е собствен край на aA' , за който $\mathcal{N}(S) = N_1 N_2 \ldots N_m [bB'], \, m \geq 1$, то aA' не допълва N_m до края (на определящата дума, на която е максимално начало в $\mathcal{N}(S)$).

Тогава, в Π е разпознаваема приложимостта на алгоритъма $\mathcal{D}$.

Д о к а з а т е л с т в о . От условието 1) следва, че в S от условието 2) bB' може да се намира само накрая. Да разгледаме първото нарастване на номера на главата при прилагането на $\mathcal{D}$ към думата X . При това, главата е преминала в определящата дума C , която не допълва намиращото се пред нея максимално начало до края и, съгласно 1) , от C остава неразложим край S . По-нататък са възможни следните два случая:

А. Ако $C \equiv bB'$, то алгоритъмът $\mathcal{D}$ спира действието си.

Б. Нека $C \equiv aA'$.

$Б_1$. Ако $\mathcal{D}$ е дефинитно неприложим към S , то той спира действието си.

Б$_2$. Ако $\mathcal{N}(S) = N_1 N_2 \cdots N_m [bB']$, където $m \geq 1$ (тъй като имаме нарастване на номера на главата), при следващия ход $[bB'] \to aA'$ на алгоритъма $\mathcal{D}$ са възможни следните подслучаи:

Б$_{2А}$. Определящата дума aA' не допълва N_m . Тогава, следващият ход на алгоритъма е обратния $[aA'] \to bB'$ и т.н. Следователно, в този случай $\mathcal{D}$ е неприложим към думата S . Оттук, той е неприложим и към X .

Б$_{2Б}$. aA' допълва N_m . Съгласно условието 2), N_m не се допълва до края. След това, думата X или Б2Б1. няма $\mathcal{N}$-разлагане с глава, или Б2Б2. започва второ нарастване на номера на главата (условието 2)).

По-нататък повтаряме всички разсъждения както при първото нарастване на номера на главата за случая Б . Ако повторим Б2, Б2Б, Б2Б2 не повече от $\partial(aA')$ пъти, то действието на алгоритъма $\mathcal{D}$ се зациклят. Тогава, $\mathcal{D}$ е неприложим към думата X .

Теоремата е доказана. Полугрупата

$$\Pi = \langle a, b, c, d \,;\, ababbaacbdab = baacbdab \rangle$$

удовлетворява нейните условия, но не удовлетворява тези от теорема 5.1 .

Сега ще докажем едно предложение, което по-нататък няма да използуваме, но което отразява едно важно свойство на редицата от елементарни преобразования, получаваща се при действието на $\mathcal{D}$ в полугрупа

$$\Pi = \langle a, b, \ldots, c \,;\, A = B \,/\, A = aA', B = bB', a \neq b \rangle \qquad (5.5)$$

с едно несъкратимо отляво определящо съотношение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Ако $\mathcal{D}$ е приложим към думата $X, X = bX'$, то редицата

$$\mathcal{D}_i(X) \to \mathcal{D}_{i+1}(X) \to \cdots \to \mathcal{D}_j(X), \; 0 \leq i < j, \qquad (5.6)$$

от елементарни преобразования в полугрупата (5.5) е редица без завси, т.е. тя е от най-късите редици, привеждащи думата $\mathcal{D}_i(X)$ в думата $\mathcal{D}_j(X)$.

Д о к а з а т е л с т в о . Нека
$\mathcal{N}(\mathcal{D}_{i+s-1}(X)) \doteq N_1 N_2 \dots N_k [C] X_{i+s-1}$. Тогава,
$\mathcal{D}_{i+s}(X) \doteq N_1 N_2 \dots N_k \bar{C} X_{i+s-1}$. Възможни са два случая:

1. При $\mathcal{N}$ -разлагането на $\mathcal{D}_{i+s}(X)$ множителят N_k не се удължава, т.е. първата буква на $\bar{C}$ е различна от нужната за удължаване. Тогава, $\mathcal{D}_{i+s+1}(X) \doteq \mathcal{D}_{i+s-1}(X)$, следващите ходове на $\mathcal{D}$ довеждат до безкрайно повтаряне на думите $\mathcal{D}_{i+s-1}(X)$ и $\mathcal{D}_{i+s}(X)$, т.е. $\mathcal{D}$ е неприложим към X , което противоречи на условието в предложението.

2. При намиране на $\mathcal{N}$ -разлагането на $\mathcal{D}_{i+s}(X)$ множителят N_k се удължава до множител $\overrightarrow{N_k}$.

2а). $\overrightarrow{N_k} \doteq A$ или $\overrightarrow{N_k} \doteq B$. Тогава, непразно начало $\bar{C}'$ на думата $\bar{C}$, където $\bar{C} \doteq \bar{C}'\bar{C}''$, $\bar{C}' \neq \Lambda$, се присъединява към N_k и, още при прехода $\mathcal{D}_{i+s}(X) \to \mathcal{D}_{i+s+1}(X)$, определящата дума $\bar{C}$ се засяга, т.е. , по определение 1.1 , в редицата (5.6) няма завси, свързани с елементарното преобразование $\mathcal{D}_{i+s-1}(X) \to \mathcal{D}_{i+s}(X)$.

2б). Част, която да означим пак с $\bar{C}'$, на думата $\bar{C}$, където $\bar{C} \doteq \bar{C}'\bar{C}''$, $\bar{C}' \neq \Lambda$, се присъединява към N_k , но $\overrightarrow{N_k}$ е собствено начало на A или на B . Тогава, $\mathcal{N}$ -разлагането на думата $\mathcal{D}_{i+s}(X)$ продължава надясно от $N_1 N_2 \dots N_{k-1} \overrightarrow{N_k}$ и, ако при по-нататъшното действие на $\mathcal{D}$ се засяга $\bar{C}$, то най-напред се засяга неговата част $\bar{C}''$ и, след това, възможно - $\bar{C}'$ (но като собствена част на $\overrightarrow{N_k}$), т.е. в (5.6) няма завси, свързани с елементарното преобразование $C \to \bar{C}$ при действието $\mathcal{D}_{i+s-1}(X) \to \mathcal{D}_{i+s}(X)$ на алгоритъма $\mathcal{D}$.

Предложението е доказано. От доказателството е ясно, че то може да се формулира по-точно така: ако $X = bX'$ (без изискването $\mathcal{D}$ да бъде приложим към X), то редицата (5.6) не съдържа завои, свързани с някое елементарно преобразование $C \to \bar{C}$ при действието $\mathcal{D}_{i+s-1}(X) \to \mathcal{D}_{i+s}(X)$ на $\mathcal{D}$, при което начало на думата $\bar{C}$ се присъединява към N_k при намиране $\mathcal{N}$ -разлагането на $\mathcal{D}_{i+s}(X)$.

В частност, ако $a/X,\ X = bX'$, ние разполагаме и с начина за построяване на най-късата редица от елементарни преобразования, установяваща тази делимост в полугрупа с едно несъкратимо отляво определящо съотношение.

За полугрупа

$$\Pi = \langle a, b\ ;\ A = B \,/\, A = aA',\ B = bB',\ a \neq b \rangle \qquad (5.7)$$

в двубуквена азбука дефинитна неприложимост на алгоритъма $\mathcal{D}$ към дадена дума имаме точно тогава, когато в нейното $\mathcal{N}$ -разлагане всички множители са собствени начала на определящите думи. При всеки ход на алгоритъма е удовлетворена уточнената формулировка на горното предложение, откъдето следва, че всяка част на редицата от елементарни преобразования в (5.7), получаваща се при неговото действие, не съдържа завои. В частност, това се отнася и за полугрупите от типа

$$\Pi = \langle a, b\ ;\ a = B \,/\, B = b^{\ell_0} a b^{\ell_1} a b^{\ell_2} a \ldots b^{\ell_q} a \rangle,$$

за които в следващият параграф ще изследваме случаи, когато приложимостта на $\mathcal{D}$ е разпознаваема.

ТЕОРЕМА 5.3. Във всяка полугрупа, зададена над азбука, съдържаща поне три букви, с едно несъкратимо определящо съотношение, може да бъде въведена частична наредба.

Д о к а з а т е л с т в о . Нека полугрупата

$$\Pi = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n ; A = B / A \equiv aA', B \equiv bB', A \equiv A''c, B \equiv B''d \rangle$$

където $a \neq b, c \neq d$, е зададена в азбука, съдържаща най-малко три букви (т.е. $n \geq 3$). Нека e е буква от тази азбука, различна от a и b , а f - различна от c и d , т.е. $e \neq a, b$, $f \neq c, d$. Да разгледаме ч.н. полугрупа

$$\Pi^* = a_1, a_2, \ldots, a_n ; A \geq B, B \geq A, C \geq D \rangle,$$

където $C \equiv eC', C \equiv C''f$. Тя не съдържа цикли и (съгласно теорема 1.1 и следствие 1.2) определящото неравенство $C \geq D$ е необратимо в нея (т.е. $C >_{\Pi^*} D$) и $\langle \Pi^* \rangle = \Pi$. Следователно, в полугрупата Π може да бъде въведена частична наредба. Твърдението е вярно и за съдържащата я група, зададена със същото определящо съотношение (и в двете е разрешим проблемът на тъждеството).

Ще отбележим, че аналогично твърдения може да се докаже и за някои полугрупи, зададени в двубуквена азбука.

§ 6. Към разпознаване приложимостта на алгоритъма за делимост за полугрупи от типа $\langle a, b ; a = b^{\ell_0} a b^{\ell_1} a b^{\ell_2} a \ldots b^{\ell_p} a \rangle$

В този параграф се изследват полугрупи от типа $\langle a, b ; a = b^{\ell_0} a b^{\ell_1} a b^{\ell_2} a \cdots b^{\ell_p} a \rangle$. Доказва се разпознаваемост на приложимостта на алгоритъма за делимост в случая, когато редицата $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p$ от показателите монотонно расте или намалява, в случайте, когато тя се състои от еднопосочни монотонни участъци (при допълнителни условия), в случая, когато последният максимален показател се намира пред първия минимален. В случая, когато последният максимален се намира между първия и последния минимални показатели, се поставят допълнителни ограничения. Доказателствата се основават на известно изследване взаимодействието на конфигурациите, получаващи се при допълненията $[a] \to B$ на думата B, с произведения от нейни максимални начала.

Въпросът за намирането на случаи, когато приложимостта на алгоритъма $\mathcal{D}$ е разпознаваема, може да се разглежда като представляващ самостоятелен интерес. При това, едновременно се решават проблемите на делимостта и тъждеството в полугрупа с едно несъкратимо отляво определящо съотношение. Задачата тук е да се изследват такива случаи за полугрупи от типа

$$\Pi = \langle a, b ; a = B / B = bab^{\ell_1}ab^{\ell_2}a \dots b^{\ell_p}a \rangle, \qquad (6.1)$$

откъдето се получават съответни случаи и когато $\ell_0 > 1$.

При намиране $\mathcal{N}$-разлагането на думата $X, X = bX'$, има две възможности:

$$\mathcal{N}(X) = \overline{B}_{i_1} \overline{B}_{i_2} \dots \overline{B}_{i_k} [B] X_{k+1} \qquad (6.2)$$

или

$$\mathcal{N}(X) = \overline{B}_{i_1} \overline{B}_{i_2} \dots \overline{B}'_{i_k} [a] X_{k+1}. \qquad (6.3)$$

В случая (6.2) $\overline{B}_{i_j} = bab^{\ell_1}a \dots b^{\ell_{s_j}}, 0 \le s_j \le p, j = \overline{1,k}$,

а в случая (6.3) $\overline{B}_{i_j} = bab^{\ell_1}a \dots b^{\ell_{s_j}}, 0 \le s_j \le p, j = \overline{1,k-1}$,

и $\overline{B}'_{i_k} = bab^{\ell_1}a \dots ab^{\ell'_{s_k}}, 0 < \ell'_{s_k} < \ell_{s_k}, s_k = \overline{1,p}$.

Ще започнем с анализ на действието на алгоритъма $\mathcal{D}$ в полугрупа от типа (6.1), който, по същество, ще представлява основа за доказване разпознаваемостта на неговата приложимост в посочените по-нататък случаи.

При прилагане на алгоритъма $\mathcal{D}$ към дума, започваща с буквата b, отначало е възможен (няколко пъти) ход $[B]\to a$ (при $\mathcal{N}$-разлагане (6.2)), след което се получава дума, започваща с a, дума, към която той е дефинитно неприложим, или дума bX', $\mathcal{N}$-разлагането на която има вида (6.3). Да означим последния (до главата $[a]$) множител в такова разлагане с B_i. Тогава, $B = B_i C_i$, където C_i започва с буквата b. След няколко хода $[a]\to B$, B_i ще се допълни до максимално начало $\overrightarrow{B_i}$. За $\mathcal{N}$-разлагането на думата C_i са възможни два случая:

$$C_i = B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_\ell}(a) \tag{6.4}$$

или

$$C_i = B_{i_1} B_{i_2} \dots B'_{i_\ell}[a]\widetilde{C_i}. \tag{6.5}$$

В случая (6.4) получаваме

$$\dots\dots \underbrace{B_i B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_\ell}(a)}_{\overrightarrow{B_i} = B} C_{i_\ell+1} C_{i_{\ell-1}+1} \dots C_{i_1+1} \dots\dots, \tag{6.6}$$

където $B = B_{i_t} a C_{i_t+1}$, $t = \overline{1,\ell}$, след което алгоритъмът $\mathcal{D}$ извършва ход $[B]\to a$. В случая (6.5) имаме

$$\dots\dots \underbrace{B_i B_{i_1} B_{i_2} \dots B'_{i_\ell}}_{\overrightarrow{B_i}} C'_{i_\ell} C_{i_{\ell-1}+1} \dots C_{i_1+1} \dots\dots, \tag{6.7}$$

където $B = B_{i_t} a C_{i_t+1}$, $t = \overline{1,\ell-1}$, $B = B'_{i_\ell} C'_{i_\ell}$, C'_{i_ℓ} започва с буквата b, $\overrightarrow{B_i}$ е собствено максимално начало на B в $\mathcal{N}$-разлагането на думата (6.7) и, следователно, започва нарастване на номера на главата. И в двата случая, без ограничение на общността, можем да считаме, че (I) броят на множителите b в началото на (6.4) и (6.5) е не по-голям от $\max\{G_j\} - \min\{G_j\}$,

$j=\overline{1,p}$. Произведенията

$$c_{i_e+1}\, c_{i_{e-1}+1} \cdots c_{i_1+1} \tag{6.8}$$

и

$$c_{i_e}'\, c_{i_{e-1}+1} \cdots c_{i_1+1} \tag{6.9}$$

от краища на B съответно в (6.6) и (6.7) ще наричаме допълващи конфигурации.

Да разгледаме всички произведения

$$B_{m_1} B_{m_2} \cdots B_{m_{|B|^2}}(a) \tag{6.10}$$

от по $|B|^2$ максимални начала на думата B , където $0 \le m_t \le p-1,\ t=\overline{1,|B|^2}$, и техните взаимодействия с намиращите се след тях допълващи конфигурации (6.8). Възможно е, няколко пъти начални части на тези конфигурации да допълват последователно до B множители от (6.10) и, след всяко такова допълнение, ще се извършва ход $[B]\to a$. Нашата цел е да се изясни какви краища на допълващите конфигурации могат да остават при действието на $\mathcal{D}$ след главата и, по такъв начин, да получим някои условия за B , при които приложимостта на алгоритъма $\mathcal{D}$ към произволна дума в полугрупа от типа (6.1) е разпознаваема.

Да разгледаме онези краища $З_1$ на конфигурациите (6.8), оставащи непопълнати (в (6.10) има $|B|^2$ множители) при всички такива взаимодействия. За $З_1$ има две възможности: или краят $З_{1\alpha}$ се намира след глава $[a]$ в $\mathcal{N}$-разлагането на думата, получаваща се при такова взаимодействие, или $\mathcal{N}$-разлагането продължава в края $З_{1\beta}$ (започващ с буквата b), от който започва следващият максимален множител в него (тук причисляваме и допълващите конфигурации (6.9)). В първия случай номерът на главата не нараства и започва ново допълнение, при което $З_{1\alpha}$ остава след получаващата се нова допълваща конфигурация.

Ще определим множествата $\{З_\alpha\}$ и $\{З_\beta\}$ от краища на допълващите конфигурации по следния начин:

от $З_{1\alpha}$ чрез посочените по-горе взаимодействия получаваме $З_{2\alpha}$ и $З_{2\beta}$;

от $З_{2\alpha}$ чрез посочените по-горе взаимодействия получаваме $З_{3\alpha}$ и $З_{3\beta}$;

....

Накрая получаваме $\{З_{s\alpha}\}$ и $\{З_{s\beta}\}$. Тогава,

$$\{З_\alpha\}=\{З_{1\alpha},З_{2\alpha},\dots,З_{s\alpha}\},\quad \{З_\beta\}=\{З_{1\beta},З_{2\beta},\dots,З_{s\beta}\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Ще казваме, че полугрупата Π от типа (6.1) принадлежи на класа π тогава и само тогава, когато определящата дума B е такава, че:

1) Всички $З_\beta$ имат $\mathcal{N}$-разлагания без глава (след възможните ходове $[B]\to a$), които ще означим с $\overline{З}_\beta$;

2) Всички $\overline{З}_\beta З_\alpha$ имат непразни $\mathcal{N}$-разлагания $\overrightarrow{\overline{З}_\beta З_\alpha}$. По-нататък, от последователно получаваните $\mathcal{N}$-разлагания отделяме последните не повече от $|B|^2$ множители $[\overrightarrow{\overline{З}_\beta З_\alpha}]$;

3) Имаме $\overrightarrow{[\overline{З}_\beta З_\alpha] З_\gamma}$

и т.н. (крайност на $\{З_\alpha\}$ и $|B|^2$).

ТВЪРДЕНИЕ 6.1.

$$\Pi=\langle a,b;\ a=bab^{l_1}ab^{l_2}a\dots b^{l_p}a \mid 0\le l_1\le\dots\le l_p\rangle\in\pi.$$

ТВЪРДЕНИЕ 6.2. Нека редицата $l_1,l_2,\dots,l_p$ от показателите в определящата дума B на полугрупа Π от типа (6.1) се състои от монотонно растящи участъци $l_{t,1},\dots,l_{t,q_t},\dots,l_{t,p_t}$, $t=\overline{1,s}$, удовлетворяващи следните условия:

1) $l_{t,1}=\dots=l_{t,q_t-1}<l_{t,q_t}\le\dots\le l_{t,p_t}$;

2) $l_{t,1}\ge l_{1,1}$;

3) $q_t<q_1$, $t=\overline{2,s}$;

4) l_{s,p_s} е максимален показател.

Тогава, Π принадлежи на класа π .

ТЕОРЕМА 6.1. За полугрупи от класа π приложимостта на алгоритъма $\mathcal{D}$ към произволна дума е разпознаваема. По-точно, $\mathcal{D}$ е приложим към всяка дума.

Доказателството провеждаме индуктивно по дължината на остатъка X_{k+1} в N-разлагането (6.2) или (6.3) на думата $X, X=bX'$ (във втория случай първоначално използуваме предположението (I)). Ако, при действието на $\mathcal{D}$, номерът на главата започне да нараства, то, съгласно определението на класа полугрупи π , N-разлагането преминава (за случая (6.3), във връзка с предположението, възможно, няколко пъти) през цялото получено дотогава произведение от α-краища на допълващите конфигурации. След това прилагаме индуктивното предположение.

В известен смисъл противоположни на класа π са класовете $\pi_i, i\in Z^+$, полугрупи от типа (6.1) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Ще казваме, че полугрупата Π от типа (6.1) принадлежи на класа $\pi_i, i\in Z^+$, тогава и само тогава, когато определящата дума B е такава, че всяко произведение $З_\beta З_{\alpha,1} З_{\alpha,2} \dots З_{\alpha,i}$ има N-разлагане с глава $[a]$ и всяко следващо отклонение вляно при по-нататъшното действие на $\mathcal{D}$ над такова произведение се съдържа в предишното отклонение.

ТВЪРДЕНИЕ 6.3.
$\Pi=\langle a,b;a=bab^{l_1}ab^{l_2}a\dots b^{l_p}a \mid l_1\geq l_2\geq\dots\geq l_p\geq 0\rangle\in\pi_0$.

ТВЪРДЕНИЕ 6.4. Нека редицата $l_1, l_2, \dots, l_p$ от показателите в определящата дума B на полугрупата Π от типа (6.1) се състои от монотонно намаляващи участъци $l_{t,1}, \dots, l_{t,q_t}, \dots, l_{t,p_t}$; $t=\overline{1,s}$, удовлетворяващи следните условия:

1) $l_{t,1}=\dots=l_{t,q_t-1}>l_{t,q_t}\geq\dots\geq l_{t,p_t}$;

2) $\ell_{1,1} \geqslant \ell_{t,1}$

3) $q_t < q_1,\ t=\overline{2,s}$;

4) ℓ_{s,p_s} е минимален показател.

Тогава, Π принадлежи на класа π_0 .

Твърдения 6.2 и 6.4 не са формулирани в [18].

ТЕОРЕМА 6.2. За полугрупите от класа $\pi_i,\ i\in Z^+$, приложимостта на $\mathcal{D}$ към произволна дума е разпознаваема.

Д о к а з а т е л с т в о . Ще отбележим, че благодарение на условията от определението на класа π_i , след краен брой отклонения вдясно, ние можем да разпознаем ще има ли зацикляне в действието на алгоритъма $\mathcal{D}$, ако при първото такова отклонение не се намали остатъка в първоначалното $\mathcal{N}$-разлагане.

ТЕОРЕМА 6.3. Нека в редицата $\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_p$ от показателите в определящата дума B на полугрупата Π от типа (6.1) отсечката, разположена между първия и последния максимални показатели, се намира пред отсечката, разположена между съответните минимални показатели. Тогава, за полугрупата Π приложимостта на алгоритъма $\mathcal{D}$ към произволна дума е разпознаваема.

Д о к а з а т е л с т в о . Прилагаме индукция по отношение дължината на остатъка X_{k+1} в $\mathcal{N}$-разлагането

$\mathcal{N}(X)\doteq\overline{B_{i_1}}\,\overline{B_{i_2}}\dots\overline{B_{i_k}}[C]X_{k+1}$, където $C\doteq B$ или $C\doteq a$, на дума X , започваща с буквата b .

I. Ако $C\doteq B$, то остатъкът в $\mathcal{N}$-разлагането намалява.

II. Нека $C\doteq a$ и $B\doteq\overline{B_{i_k}}\,\overline{C_{i_k}}$, където $\overline{C_{i_k}}$ започва с буквата b .

IIA. Нека $\overline{C_{i_k}}$ не се допълва докрая, т.е.

$\mathcal{N}(\overline{C_{i_k}})\doteq B_{i_1}\dots B'_{i_\ell}[a]\,\widetilde{C}$.

Всички множители $B_{i_1},\dots,B_{i_{\ell-1}}$ не съдържат буква b от групата на последния максимален показател, а B'_{i_e} може да съдържа нейна собствена начална част. В $C'_{i_e} (B = B'_{i_e} C'_{i_e})$ влиза изцяло групата на първия минимален показател. Тогава, C'_{i_e} също е недопълняема докрая и т.н. В този случай получаваме, че действието на алгоритъма $\mathcal{D}$ се зацикля, т.е. той е неприложим към думата X .

IIБ. Нека $\bar{C}_{i_k}$ се допълва докрая, т.е.

$$N(\bar{C}_{i_k}) = B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_e}(a).$$

$\bar{C}_{i_k}$ започва най-рано в групата на последния минимален показател (тогава, $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_e}$ не съдържат буква b от групата на първия максимален показател), тъй като, в противния случай се получава, че $\bar{C}_{i_k}$ е неразложим. Всички множители в съответната допълваща конфигурация $C_{i_e+1} C_{i_{e-1}+1} \dots C_{i_1+1}$ съдържат изцяло групата на първия максимален показател. При по-нататъшното действие на $\mathcal{D}$ тази конфигурация допълва произведението $\bar{B}_{i_1} \bar{B}_{i_2} \dots \bar{B}_{i_{k-1}}$.

IIБ1. Ако при това допълнение първият максимален показател на всички $C_{i_e+1}, C_{i_{e-1}+1}, \dots, C_{i_1+1}$ попада на своето място, то или $\mathcal{D}$ е приложим към X и a/X , или прилагаме индукция по отношение дължината на остатъка.

IIБ2. За някой от краищата $C_{i_e+1}, \dots, C_{i_1+1}$ участвуващият в него първи максимален показател не попада на своето място.

Ако той попада наляво от това място, започва нарастване на номера на главата, което довежда до случая IIА .

Ако той попада надясно от последния максимален показател, аналогично получаваме случай IIА .

Ако (за разглеждания край) първият максимален показател попада между първия и последния максимални показатели на съответнотс (максималнс) начало, имаме следните възможности:

Първият максимален показател попада на мястото на немаксимален. Тогава, веднага започва нарастване на номера на главата и, аналогично, получаваме случай IIA .

Първият максимален показател попада на мястото на максимален. Тогава, започва процес на допълване на максималното начало. При този процес имаме две възможности: а) Допълнението продължава след достигането на последния максимален показател. Ако до достигането на първия минимален показател се получи глава $[a]$ или започне нарастване на номера на главата, аналогично получаваме случай IIA . Ако допълнението достига до първия минимален показател, веднага започва нарастване на номера на главата и, отново, получаваме случай IIA . Аналогично се разглежда и случай б), когато допълнението не достига до последния максимален показател. При започващото допълнение веднага се получава зацикляне IIA на действието на алгоритъма $\mathcal{D}$.

ТЕОРЕМА 6.4. Нека определящата дума B , $B = bab^{l_1}ab^{l_2}a\ldots b^{l_p}a$, на полугрупата Π от типа (6.1) удовлетворява следните условия:

1) първият минимален показател l_t се намира между първия и последния максималени l_r и l_s , т.е. $r<t<s$, и последният минимален показател $l_{t'}$ се намира след последния максимален;

2) разстоянието от всеки максимален показател (след първия) до следващия го минимален е по-малко от разстоянието между първия максимален и първия минимален;

Тогава, за полугрупата Π приложимостта на алгоритъма $\mathcal{D}$ към произволна дума е разпознаваема.

Д о к а з а т е л с т в о . Ще посочим пример на полугрупа, удовлетворяваща условията на теоремата. Такава е полугрупата

$$\Pi = \langle a, b;\ a = bab^3ab^2ababab^2ab^3abab^3abab^2ab^2ab^2a \rangle.$$

Доказателството ще проведем индуктивно по отношение дължината на остатъка X_{k+1} в $\mathcal{N}$-разлагането,

$\mathcal{N}(X) = \overline{B}_{i_1}\overline{B}_{i_2}\ldots\overline{B}_{i_k}[C]X_{k+1}$, където $C = B$ или $C = a$, на дума X, започваща с буквата b.

Съществено ще използуваме, че 3) всеки край на думата B, започващ в група $b^{l_{i_k}}, t \le i_k < s$, е неразложим, за което в [17] не е отбелязано, че следва.

I. Ако $C = B$, остатъкът в $\mathcal{N}$-разлагането на думата $\mathcal{D}_1(X)$ намалява и ние използуваме индуктивното предположение.

II. Нека $C = a$ и $B = \overline{B}_{i_k}\overline{C}_{i_k}$, където $\overline{C}_{i_k}$ започва с буквата b.

IIА. $\overline{C}_{i_k}$ започва преди групата на първия минимален показател. В този случай се доказва, че действието на алгоритъма $\mathcal{D}$ се зацикля, т.е., че той е неприложим към думата X.

IIБ. $\overline{C}_{i_k}$ започва в или след групата на първия минимален показател.

IIБ1. $\overline{C}_{i_k}$ започва в група букви b, намираща се между първия минимален и последния максимален показатели, т.е. $t \le i_k < s$. Съгласно условието 2) (в $\overline{C}_{i_k}$ има и максимални, и минимални показатели), всеки множител в $\mathcal{N}(\overline{C}_{i_k})$, специално последният до главата $[a]$ (съгласно 3)), не достига до първия минимален показател. Следователно, както и в случая IIА, действието на алгоритъма $\mathcal{D}$ се зацикля и той е неприложим към думата X.

IIБ2. $\overline{C}_{i_k}$ започва в или след групата на последния максимален показател, т.е. $s \le i_k$. Ще разгледаме следните подслучаи:

IIБ2А. Краят $\overline{C_{i_k}}$ е неразложим. Доказателството се свежда към случая IIA . Получава се неприложимост на $\mathcal{D}$ към X. В частност, така се получава, когато $s \leq i_k < l_{t'}$.

IIБ2Б. Краят $\overline{C_{i_k}}$ е разложим. Нека $\mathcal{N}(\overline{C_{i_k}}) = B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_e}(a)$. Всички множители в това разлагане не достигат до групата на първия максимален показател. При по-нататъшното действие на алгоритъма $\mathcal{D}$ конфигурацията $C_{i_e+1} C_{i_{e-1}+1} \dots C_{i_1+1}$ допълва произведението $\overline{B_{i_1}}\,\overline{B_{i_2}} \dots \overline{B_{i_{k-1}}}$ от максимални начала в $\mathcal{N}$-разлагането на думата X . Ще разгледаме следните подслучаи:

IIБ2Б1. При това допълнение, първият максимален показател на всеки край попада на своето място. В този случай се получава, че или алгоритъмът $\mathcal{D}$ спира в началото на думата, т.е. a/X , или прилагаме индукция по дължината на остатъка в съответното $\mathcal{N}$-разлагане.

IIБ2Б2. За някой край $C_{i_e+1}, C_{i_{e-1}+1}, \dots, C_{i_1+1}$ намираща се в него група букви b на първия максимален показател не попада на своето място. Тогава, ако това бъде на мястото на немаксимален, то започва нарастване на номера на главата, което довежда до случая IIA; ако това бъде на мястото на максимален показател, то започва допълнение на съответното максимално начало, което е последен множител в $\mathcal{N}$-разлагането на думата X . Ще разгледаме отделно случаите а) и б) .

а) Посоченият максимален показател на допълващия край попада на мястото на максимален между първия максимален и първия минимален показатели. Тогава, при допълването, не се достига до първия минимален показател, влизащ в допълващия край. Ако започне нарастване на номера на главата, действието на $\mathcal{D}$ се свежда към случая IIA . Допълването на посоченото максимално начало до B

е невъзможно, тъй като нужният следващ минимален показател ще се появи по-рано от наличния в допълващия край и, ако допълнението достигне до необходимия първи минимален показател, ще започне вече разгледаното нарастване на номера на главата. Следователно, остава възможността за появяване на главата $[a]$ след първия максимален показател и преди първия минимален (в съответния допълнен множител в $\mathcal{N}$-разлагането на думата X). Понататъшното действие на $\mathfrak{D}$ отново довежда до случай IIA .

б) Посоченият максимален показател на допълващия край попада на мястото на максимален показател, намиращ се между първия минимален и последния максимален показатели (включително - на мястото на последния максимален). Тогава, започва допълване на съответния максимален множител в $\mathcal{N}$-разлагането на думата X. Съгласно условието 2), в допълването не се включва част от първия минимален показател, влизащ в допълващия край, и съответното допълнено максимално начало не достига до следващия минимален показател (в частност, не достига до последния минимален показател). Ако, при това, започне нарастване на номера на главата, то получаваме случай IIA . Ако се получи глава $[a]$ и е нужно допълване на някой край, то за него са налице случаите IIБ1. или IIБ2А . Получава се, че алгоритъмът $\mathfrak{D}$ е неприложим към думата X . Тук имаме предвид, че,ако допълването достигне до следващия минимален показател, то, поради неговата минималност и условието 2), следва, че започва нарастване на номера на главата.

Ще отбележим, че в доказателствата на теореми 6.3 и 6.4 ние не се спряхме специално на възможността за неучастие в допълването на първия максимален показател на някой край от допълващата конфигурация. Това може да се случи непосредствено след допълнена дума B (в този случай броят на множителите в $\mathcal{N}$-разлагането намалява) или след допълване до собствено максимално начало на B . Във втория случай има две възможности:

а) отклонение вдясно и зацикляне на действието на алгоритъма $\mathcal{D}$ (както в случая IIA);

б) появява се глава $[a]$. Тогава, ако допълващият край на думата B е неразложим, то действието на $\mathcal{D}$ се зациклят. Ако той е разложим, то броят на множителите в $\mathcal{N}$-разлагането на думата намалява и се натрупват краища на B от новата допълваща конфигурация, съдържащи първия максимален показател. По-нататък разсъжденията продължават аналогично, тъй като започва ново допълване на оставащото произведение от максимални начала. По този път са възможни и усъвършенствувания.

Ще отбележим, че, както се вижда от горното, това може да се отчете и като се разгледа по-сложен параметър, в който се включва и посочената индукция по броя на множителите в $\mathcal{N}$-разлагането. Основното, обаче, е да се изучи разгледаното в началото взаимодействие, което и довежда до нови случаи на разпознаваемост на приложимостта на алгоритъма за делимост на думите. Доказателствата на теореми 6.3 и 6.4 се провеждат независимо от тези на теореми 6.1 и 6.2, но може да се отбележи, че участвуващите в тях отклонения вдясно са от типа π_0 .

ТЕОРЕМА 6.5. Приложимостта на алгоритъма за делимост $\mathcal{D}$ е разпознаваема за случаите на полугрупи от типа

$$\Pi = \langle a, b\ ;\ a = B / B = b^{e_0} a\, b^{e_1} a\, b^{e_2} a \dots b^{e_p} a \rangle, \quad (6.11)$$

съответствуващи на разгледаните в предишните теореми случаи на разпознаваемост на неговата приложимост за полугрупи от типа (6.1)

Действително, изучавайки действието на алгоритъма, установяваме, че допълнително зацикляме на неговото действие за полугрупи от типа (6.11) поради появяването на допълняемо или разлагаемо количество b^{+}, b^{+f}, може да се установи не по-късно от онзи ход, на който може да се разпознае неговата приложимост за полугрупи от типа (6.1).

Във връзка с големия интерес и трудността на отдавна открития въпрос за разрешимостта на проблема на тъждеството за полугрупи с едно определящо съотношение, ще отбележим, че, едновременно с разгледаните в § 5 и § 6 случаи на разпознаваемост приложимостта на алгоритъма за делимост на думите, сме намерили нови класове такива полугрупи с разрешим проблем на тъждеството (гл. още теорема 5.1) и с разрешим проблем на лявата делимост. Това е достатъчно за обосноваване мястото на теоремите, условията на които по естествен начин отразяват в съответните термини дори прости примери, за които не са известни други теореми.

ГЛАВА 3

ХОМОМОРФИЗМИ И ЧАСТИЧНА НАРЕДБА В ГРУПИ

§ 7. Силни хомоморфизми

В този параграф се въвежда понятието силен хомоморфизъм на една ч.н. група върху друга. Един хомоморфизъм на ч.н. група G върху ч.н. група G_1 се нарича силен, ако всеки строго положителен елемент на G_1 е образ (при този хомоморфизъм) само на строго положителни елементи от G. Силните хомоморфизми запазват наредбата в обратна посока (слабите и монотонните я запазват в посоката на хомоморфизма). В първата теорема са формулирани условията за конструиране на (N, P^+)-силно хомоморфния образ на ч.н. група G, където N е нормален делител, а P^+ е чиста подполугрупа, състояща се само от строго положителни елементи, N и P^+ удовлетворяват условието $S_{\#}: Np \subseteq P^+$, за всяко $p, p \in P^+$. Както и за монотонните хомоморфизми, трудността тук е при изучаването на случаи, когато е приложена теоремата. Описват се силно хомоморфните образи на една ч.н. група, свързани с една нейна чиста подполугрупа, състояща се само от строго положителни елементи. Доказва се, че (N, P^+)-образът на G остава монотонен по отношение на продължението $\overline{P}^+$ на наредбата P^+, ако $\overline{P}^+ = P^+ \cup N^+$, където N^+ е чиста подполугрупа на N, инвариантна в G. За да бъде един монотонен хомоморфизъм силен, е необходимо и достатъчно произволен елемент на неговото ядро N да бъде по-малък от всеки елемент на чистата подполугрупа $P^+ \setminus P^+(N)$. Ще отбележим, че от доказателството на това твърдение може да се получи пълно абстрактно описание на всички частични наредби в групата, по отношение на които даден нормален делител в нея е изпъкнал.

Частичната наредба $\geqslant$ в групата ще предполагаме зададена чрез положителен конус. Елементът a на ч.н. група G се нарича положителен, ако $a \geqslant e$ и строго положителен, ако $a > e$. Множеството P от положителните елементи на G се нарича положителен конус на групата G. Както е известно [11], частичната наредба в групата еднозначно се определя чрез задаването на нейния положителен конус.

Нека G е ч.н. група с положителен конус $P = P^+ \cup 1$ и G_1 е ч.н. група с положителен конус $P_1 = P_1^+ \cup 1_1$, където P^+ и P_1^+ са чисти подполугрупи съответно в G и в G_1 (т.е. техни инвариантни подполугрупи, несъдържащи съответните единици).

ЛЕМА 7.1. Нека φ е хомоморфизъм на групата G върху групата G_1. Ще докажем, че пълният първообраз $P_0^+ = \varphi^{-1}(P_1^+)$ на чистата подполугрупа P_1^+ в G_1 при φ е чиста подполугрупа в G.

Доказателство. $P_0^+ = \varphi^{-1}(P_1^+)$ не съдържа единицата на групата G. Нека a и b са два елемента от P_0^+. Тогава, $\varphi(a) \in P_1^+, \varphi(b) \in P_1^+, \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in P_1^+$, откъдето получаваме, че $ab \in P_0^+$. Ако $a \in P_0^+$ и $x \in G$, то $\varphi(x)^{-1}\varphi(a)\varphi(x) = \varphi(x^{-1}ax) \in P_1^+$, т.е. $x^{-1}ax \in P_0^+$. Следователно, P_0^+ е чиста подполугрупа в G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Хомоморфизмът φ на ч.н. група G с наредба P^+ върху ч.н. група G_1 с наредба P_1^+ се нарича силен тогава и само тогава, когато чистата подполугрупа (лема 7.1) $P_0^+ = \varphi^{-1}(P_1^+)$ на G се съдържа в P^+, т.е. $P_0^+ = \varphi^{-1}(P_1^+) \subseteq P^+$.

Може да считаме, че лема 7.1 е един показател за богатството на въведеното понятие. Ще обърнем внимание на следния негов смисъл:

ТВЪРДЕНИЕ 7.1. Хомоморфизмът φ на ч.н. група G с наредба P^+ върху ч.н. група G_1 с наредба P_1^+ е силен тогава и само тогава, когато от строго неравенство $x_1 >_{G_1} y_1$ в G_1 следва строго неравенство $x >_G y$ в G за произволен първообраз x на елемента x_1 и произволен първообраз y на елемента y_1 при този хомоморфизъм.

Д о к а з а т е л с т в о . Нека хомоморфизмът φ е силен, т.е. $\varphi^{-1}(P_1^+) \subseteq P^+$ и $x_1 >_{G_1} y_1$. Тогава $x_1 y_1^{-1} >_{G_1} 1$, т.е. $x_1 y_1^{-1} \in P_1^+$ и (тъй като φ е силен) първообразът xy^{-1} на елемента $x_1 y_1^{-1}$ принадлежи на P^+, т.е. $xy^{-1} \in P^+$, откъдето $x >_G y$.

Нека, сега, от строго неравенство в G_1 следва строго неравенство на първообразите в G. Тогава, за всеки първообраз z на елемента $z_1, z_1 \in P_1^+$, при хомоморфизма φ е изпълнено неравенството $z >_G 1$, т.е. $\varphi^{-1}(P_1^+) \subseteq P^+$. Хомоморфизмът φ е силен.

Следователно, силният хомоморфизъм запазва строгото неравенство в обратна посока, което може да служи за негово определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Хомоморфизмът φ на ч.н. група G с наредба P върху ч.н. група G_1 с наредба P_1 се нарича силно монотонен тогава и само тогава, когато

1) той е монотонен, т.е. $\varphi(P)=P_1$ (ж) и

2) той е силен, т.е. $P_0^+=\varphi^{-1}(P_1^+)\subseteq P^+$ (следователно, $P_0^+=P^+$).

ТВЪРДЕНИЕ 7.2. Хомоморфизмът φ на ч.н. група G с наредба P^+ върху ч.н. група G_1 с наредба P_1^+ е силно монотонен тогава и само тогава, когато от неравенството $x >_G y$ в G следва неравенството $\varphi(x) >_{G_1} \varphi(y)$ в G_1 и, обратно, ако $x_1 >_{G_1} y_1$, то $x >_G y$ за произволен първообраз x на елемента x_1 и произволен първообраз y на елемента y_1 при този хомоморфизъм.

Ще отбележим, че о-изоморфизмът е силен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Ще казваме, че хомоморфизмът φ на ч.н. група G с наредба P върху ч.н. група G_1 с наредба P_1 има тип τ тогава и само тогава, когато P индуцира в неговото ядро $Ker\varphi$ тривиална наредба, т.е. когато $P(Ker\,\varphi)=1$.

ТВЪРДЕНИЕ 7.3. Хомоморфизмът φ на една ч.н. група върху друга е силно монотонен от типа τ тогава и само тогава, когато φ запазва строгото неравенство в двете посоки.

ТВЪРДЕНИЕ 7.4. Всеки силен хомоморфизъм на ч.н. група G върху ч.н. група G_1 остава силен при продължение на наредбата в G и запазване на наредбата в G_1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. Ще казваме, че нормалният делител N и чистата полуподгрупа $P_0^+, P_0^+\subseteq P^+$, на ч.н. група G с наредба P^+ удовлетворяват условието S_H тогава и само тогава, когато всички елементи на произволен съседен клас Np_0, където $p_0\in P_0^+$, принадлежат на P_0^+, т.е. когато $Np_0\subseteq P_0^+$

(ж) Условията $\varphi(P)\subset P_1^+$ и $P_0^+\subseteq P^+$ не могат да бъдат изпълнени едновременно, т.е. хомоморфизмът φ не може да бъде едновременно слаб и силен.

(от това следва, че N и P_0^+ нямат общи елементи, т.е. $N \cap P_0^+ = \phi$)

ТЕОРЕМА 7.1. Ч.н. група G с наредба P^+ притежава силно хомоморфен образ тогава и само тогава, когато съществуват нормален делител N и чиста подполугрупа $P_0^+, P_0^+ \subseteq P^+$, удовлетворяващи условието S_H .

Д о к а з а т е л с т в о . Необходимостта следва от определение 7.1 (на силен хомоморфизъм) и от лема 7.1, която формулирахме в началото, тъй като я цитирахме в него. Обратно, твърдим, че във факторгрупата $G_1 = G/N$ може да се въведе такава наредба $P_1 = P_1^+ \cup 1_1$, че естественият хомоморфизъм φ на групата G , определен от нормалния делител N , да бъде силен и $\varphi^{-1}(P_1^+) = P_0^+$. Действително, да означим с P_1^+ множеството на всички съседни класи $Np_0, p_0 \in P_0^+$ (тъй като N и P_0^+ удовлетворяват условието S_H , те се състоят само от елементи на P_0^+). От условието S_H вече без труд се извежда, че P_1 , където $P_1^+ = \varphi(P_0^+)$, е чиста подполугрупа на G_1 и че $\varphi^{-1}(P_1^+) = P_0^+$.

Както за монотонните хомоморфизми, трудността тук е не при доказателството на тази теорема, без която не може, а при изучаването на случаи, когато тя е приложена. С нейна помощ се доказва аналог на основната теорема за хомоморфизмите при силните хомоморфизми. Всеки силно хомоморфен образ на ч.н. група G с наредба P^+ се определя с точност до о-изоморфизъм от някой неин нормален делител N и някоя чиста подполугрупа P_0^+ , $P_0^+ \subseteq P^+$, удовлетворяващи условието S_H . Този образ ще наричаме (N, P_0^+)-образ на G . При разглеждането на този образ можем да предполагаме, че G е ч.н. група с наредба P_0^+ по отношение на която хомоморфизмът ще бъде силно монотонен от типа τ . Всички наредби в G , по отношение на които тя има

(N, P_0^+) -образ, са продължения на P_0^+. Такова разбиране на понятието силно хомоморфен образ се оказва удобно и полезно при по-нататъшните изследвания на силните хомоморфизми.

Ще приведем два примера за силни хомоморфизми на ч.н. групи върху техни факторгрупи. Ще се ползуваме от означенията в условието на теорема 7.1 и ще посочим само нормални делители и чисти подполугрупи, удовлетворяващи условието S_H. Хомоморфизмите ще бъдат естествените.

Пример 1 (силен немонотонен хомоморфизъм).

$G = A \times B$, където $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$ са безкрайни циклични групи, породени, съответно, от елементите a и b;
$P^+ = \{a^k b^j / k > 0\}$, $N = \{b^i / i \geqslant 1\}$, $P_0^+ = \{a^{2k} b^j / k > 0\}$.

Пример 2 (силно монотонен хомоморфизъм).

$G = A \times B$, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$; $P^+ = \{a^{2k} b^j / k > 0\}$, $N = \{b^i / i \geqslant 1\}$, $P_0^+ = P^+$.

ТВЪРДЕНИЕ 7.5. Ч.н. група $G = A \times B$, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, не притежава собствени силно хомоморфни образи по отношение на наредбата $P = \{a^k b^j / k \geqslant 0, j \geqslant 0\}$.

Д о к а з а т е л с т в о т о се провежда като разглеждаме всички случаи за показателите k и j на положителен елемент $a^k b^j$ от някой нормален делител N и фиксиран елемент $a^{k_0} b^{j_0}$, принадлежащ на дадена подполугрупа P_0^+, която, заедно с N, удовлетворява условието S_H. Да разгледаме, например, случая $k > 0, j > 0$. Съществува естествено число s, такова, че $(a^k b^j)^s > a^{k_0} b^{j_0}$, което противоречи на това, че N и P_0^+ удовлетворяват условието S_H.

Известни указания за намирането на нормален делител и чиста подполугрупа, удовлетворяващи условието S_H в групата ~~ни~~ ни дава лема 7.1. Например, ако N е нормален делитев в нея, S е нейна чиста подполугрупа и $N \cap S = \phi$, то N и P_0^+, където $P_0^+ = NS$, удовлетворяват това условие. То ни дава възможност да свържем с една и съща чиста подполугрупа, състояща се само от строго положителни елементи, различни нормални делители, по отношение на всеки от които тя се състои от пълни съседни класове елементи на групата.

Нека нормалният делител N и чистата подполугрупа P_0^+, $P_0^+ \subseteq P^+$, на ч.н. група G с наредба P^+ удовлетворяват условието S_H . Тогава, всеки неин нормален делител $M, M \subseteq N$, и P_0^+ също удовлетворяват условието S_H . Съгласно теорема 7.1.

1°. Естественият хомоморфизъм $\varphi_1 : g \to Mg, g \in G$, на ч.н. група G с наредба P^+ върху ч.н. група $G_1, G_1 = G/M$, с наредба $P_1^+, P_1^+ = \{Mp_0, p_0 \in P_0^+\}$, е силен.

2°. Естественият хомоморфизъм $\varphi_2 : g \to Ng, g \in G$, на ч.н. група G с наредба P^+ върху ч.н. група $G_2, G_2 = G/N$, с наредба $P_2^+, P_2^+ = \{Np_0, p_0 \in P_0^+\}$, е силен.

Нека N^* е образ на N при φ_1 .

ЛЕМА 7.2. Нормалният делител $N^*, N^* = \varphi_1(N)$, и чистата подполугрупа P_1^+ на ч.н. група G_1 удовлетворяват условието S_H .

Д о к а з а т е л с т в о . N^* се състои от всички съседни класове Mn , където $n \in N$. Трябва да покажем, че $(Mn)(Mp_0) = Mnp_0$, принадлежи на P_1^+ за всяко $n, n \in N$, и всяко $p_0, p_0 \in P_0^+$, което следва от това, че N и P_0^+ удовлетворяват условието S_H .

ЛЕМА 7.2' (обратна). Нека M и P_0^+ удовлетворяват условието S_H . Нека нормалният делител N^* и чистата подполугрупа P_1^+ на ч.н. група G_1 с наредба P_1^+ удовлетворяват условието S_H . Тогава, нормалният делител $N, N = \varphi^{-1}(N^*)$, и чистата подполугрупа P_0^+ на ч.н. група G удовлетворяват условието S_H .

Доказателство. N съдържа M. Трябва да установим, че всеки съседен клас $Np_0, p_0 \in P_0^+$, се състои само от елементи на P_0^+. По условие е изпълнено неравенството $Mp_0 n >_{G_1} 1_1 = M$ за всеки елемент $n, n \in N$, и всеки елемент $p_0, p_0 \in P_0^+$. Следователно, съседният клас $Mp_0 n$ съдържа елемент p_0' от P_0^+ и, тъй като M и P_0^+ удовлетворяват условието S_H, всички елементи на съседния клас $Mp_0' = Mp_0 n$ принадлежат на P_0^+. Специално, $p_0 n \in P_0^+$, откъдето $p_0 N = Np_0 \subseteq P_0^+$.

3^0. Естественият хомоморфизъм $\varphi_3 : Mg \to (N^*)Mg$, $Mg \in G_1, g \in G$, на ч.н. група G_1 с наредба P_1^+ върху ч.н. група $F, F = G_1/N^*$, с наредба $P^+(F)$, $P^+(F) = \{(N^*)Mp_0 / p_0 \in P_0^+\}$, е (съгласно лема 7.2 и теорема 7.1) силен (от типа τ).

От леми 7.2 и 7.2' получаваме следната теорема.

ТЕОРЕМА 7.2. Ако φ_1 е силен, то φ_2 и φ_3 са едновременно силни хомоморфизми.

ТЕОРЕМА 7.3. Силно хомоморфният образ G_2 на ч.н. група G е монотонно изоморфен на силно монотонно хомоморфния образ F от типа τ на ч.н. група G_1.

Доказателство. Ще докажем, че изоморфизмът

$$\theta : Ng \longleftrightarrow (N^*)Mg, g \in G,$$

на групите G_2 и F, е монотонен, ако ги разглеждаме като ч.н. групи с наредби, съответно, $P_2, P_2 = P_2^+ \cup 1_2$, и $P(F) = P^+(F) \cup N^*$ (т.е. трябва да докажем, че $\theta(P_2) = P(F)$). Нека Np_0 е положителен елемент на G_2, където $p_0 \in P_0^+$. Тогава,

$\theta(Np_0) = (N^*)Mp_0$, където $Mp_0 \in P_1^+$.

Следователно, $N p_0$ и $(N^*) M p_0$ са едновременно положителни елементи съответно в ч.н. група G_2 и в ч.н. група F.

Да разгледаме множеството от всички силно хомоморфни образи на ч.н. група G, свързани с нейната чиста подполугрупа P_0^+, т.е. да разгледаме множеството от всички нормални делители $N_i, N_i \neq 1, i \in I$, на групата G, удовлетворяващи, заедно с P_0^+, условието S_H, и всички съответни (N_i, P_0^+)-образи. Нека сечението $T = \bigcap_{i \in I} N_i \neq 1$ е нееднично. Пример за такава група може да се конструира аналогично на горните примери като един от множителите в директното произведение се вземе крайна група от ред степен на просто число. Като следствие от теорема 7.3 получаваме:

Всеки силно хомоморфен образ на ч.н. група G, свързан с нейната чиста подполугрупа P_0^+, е монотонно изоморфен на силно монотонно хомоморфен образ от типа τ на нейния силно хомоморфен образ $\overline{G} = G/T$.

$\overline{G}$ е, така да се каже, максимален силно хомоморфен образ на G, свързан с P_0^+. Всички останали нейни такива силно хомоморфни образи може да се разглеждат като негови, при това монотонни, силно хомоморфни образи от типа τ.

Аналогично, можем да разглеждаме и минимален силно хомоморфен образ на една ч.н. група, свързан с нейна чиста подполугрупа, състояща се само от строго положителни елементи.

Както се вижда, поради известна замяна на условието за изпъкналост на ядрото с условието S_H, силните хомоморфизми имат редица свойства, аналогични на свойствата на монотонните хомоморфизми. Има и желателна разлика - силните хомоморфизми остават силни при всяко продължение на наредбата (твърдение 7.4).

Възниква следният интересен въпрос за силните и монотонните хомоморфизми: какво трябва да бъде продължението на наредбата

P_0^+ , за да остава (N,P_0^+)-образът на ч.н. група G монотонен. Ще отбележим, че, по същество, се изучават всички продължения на наредбата P_0^+ , по отношение на които N е изпъкнал нормален делител в G , индуциращи във факторгрупата $G_1, G_1=G/N$, същата наредба.

ТЕОРЕМА 7.4. Нека G е ч.н. група с наредба P^+ и N е неин нормален делител, удовлетворяващ, заедно с P^+ , условието S_H . За да остава (N,P^+)-образът на G монотонен по отношение на продължението $\bar{P}^+$ на наредбата P^+ , е необходимо и достатъчно $\bar{P}^+$ да има вида

$$\bar{P}^+=P^+\cup N^+,$$

където N^+ е чиста подполугрупа на N , инвариантна в G .

Д о к а з а т е л с т в о . Необходимост. Нека (N,P^+)-образът на ч.н. група G остава монотонен (той остава силен) при някое продължение $\bar{P}^+$ на наредбата P^+ в G . Тогава, той е о-изоморфен, от една страна, на ч.н. група $G_1, G_1=G/N$, с наредба $P_1^+, P_1^+=\{Np^+/p^+\in P^+\}$ (тъй като той е силен), а от друга - на ч.н. група G_1 с наредба $\bar{P}_1^+, \bar{P}_1^+=\{N\bar{p}^+/\bar{p}^+\in\bar{P}^+, \bar{p}^+\notin N\}$ (тъй като той е монотонен; N е изпъкнал по отношение на $\bar{P}^+$), където $\bar{P}^+\supseteq P^+$. Следователно (определение 7.2), $\bar{P}_1^+=P_1^+$. Всеки съседен клас $N\bar{p}^+$ съвпада с някой Np^+, ~~където~~ $Np^+\subseteq P^+$, откъдето получаваме, че $\bar{p}^+\in P^+$. Да разгледаме останалите елементи на $\bar{P}^+$. Очевидно, те принадлежат на N . Да означим тяхното множество с $N^+, N^+=\{n^+\}$. Тъй като $N^+=N\cap\bar{P}^+$, то N^+ е подполугрупа на N (и на G).

От инвариантността на N и $\bar{P}^+$ следва инвариантност на N^+ в G . Тъй като N^+ не съдържа единицата, тя е чиста подполугрупа на N , инвариантна в G . Следователно, всяко продължение $\bar{P}^+$ на наредбата P^+ , по отношение на което (N,P^+)-об-

разът на ч.н. група G с наредба P^+ остава монотонен, има вида
$$\overline{P}^+ = P^+ \cup N^+,$$
където N^+ е чиста подполугрупа на N, инвариантна в G.

Достатъчност. Нека N^+ е чиста подполугрупа на N, инвариантна в G. Да разгледаме множеството $\overline{P}^+, \overline{P}^+ = P^+ \cup N^+$. От това, че N и P^+ са подполугрупи, удовлетворяващи условието S_H, и от това, че P^+ и N^+ са инвариантни следва, че $\overline{P}^+$ е инвариантна подполугрупа. Тя не съдържа единицата. Следователно, $\overline{P}^+$ е чиста подполугрупа на G. Наредбата $\overline{P}^+$ на групата G индуцира в N наредба N^+.

Нека n^+ е произволен елемент на N^+ и $\bar{p}^+$, $\bar{p}^+ \in \overline{P}^+$, е положителен елемент, за който $n^+ > p^+ > 1$. От това, че N и P^+ удовлетворяват условието S_H, получаваме, че $\bar{p}^+ \in N^+$, т.е., че по отношение на наредбата $\overline{P}^+$, нормалният делител N е изпъкнал.

Остава да разгледаме ч.н. групи G_1, $G_1 = G/N$, с наредба $P_1^+, P_1^+ = \{Np^+ / p^+ \in P^+\}$ и G_1 с наредба $\overline{P}_1^+$, $\overline{P}_1^+ = \{N\bar{p}^+ / \bar{p}^+ \in \overline{P}^+, \bar{p}^+ \notin N\}$. Ясно е, че $\overline{P}_1^+ = P_1^+$. Тогава, ч.н. група G_1 с наредба P_1^+ е (N, P^+)-силно монотонно хомоморфен образ на ч.н. група G с наредба $\overline{P}^+$, определен с точност до о-изоморфизъм. Теоремата е доказана. (N, P^+)-образът на G с наредба $\overline{P}^+$ ще бъде силно монотонно хомоморфен, но вече не от типа τ, тъй като $\overline{P}^+$ индуцира в N нетривиална наредба N^+.

Теоремата, точно в такава формулировка, ще използваме при по-нататъшните изследвания на силните хомоморфизми. Следващото твърдение решава въпроса кога един монотонен хомоморфизъм е силен. Без да го считаме по-малко важно от теорема 7.4, ще го формулираме като предложение, тъй като доказателството му е независимо и в следващия параграф то не се използва.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Монотонният хомоморфизъм φ на ч.н. група G с наредба P^+ върху ч.н. група G_1 с наредба P_1^+ е силен тогава и само тогава, когато произволен елемент на неговото ядро N е по-малък от всеки елемент на чистата подполугрупа $P_0^+, P_0^+ = P^+ \setminus P^+(N)$.

Доказателство. Необходимост. Нека φ е силно монотонен хомоморфизъм. Твърдението следва от равенството $P_0^+ = \varphi^{-1}(P_1^+) = P^+ \setminus P^+(N)$ и от включванията $Np_0 \subseteq P_0^+$, изпълнени за всеки елемент $p_0, p_0 \in P_0^+$.

Достатъчност. Нека φ е монотонен хомоморфизъм. Тогава, множеството $P_0^+, P_0^+ = P^+ \setminus P^+(N)$, от елементи на G е чиста подполугрупа в нея. Действително, нека $\pi_1 \in P_0^+, \pi_2 \in P_0^+$. Тогава, $\pi_1\pi_2 \in P^+$, но $\pi_1\pi_2 \notin P^+(N)$, тъй като, в противния случай, от изпъкналостта на $P^+(N)$ следва, че $\pi_1 \in P^+(N)$ и $\pi_2 \in P^+(N)$. Следователно, P_0^+ е подполугрупа в G . Очевидно, $x^{-1}\pi x \in P^+$ за всяко $x, x \in G$, и всяко $\pi, \pi \in P_0^+$. Ако $x^{-1}\pi x = \pi' \in P^+(N)$, то $\pi = x\pi' x^{-1} \in P^+(N)$, тъй като $P^+(N)$ е чиста подполугрупа в G. Следователно, $x^{-1}\pi x \in P_0^+$ и P_0^+ е чиста подполугрупа на G . Всеки елемент $p_1, p_1 \in P_1^+$, е образ на поне един елемент $p_{01}, p_{01} \in P_0^+$, при хомоморфизма φ . По условие, за всяко $n, n \in N$, и всяко $p_0, p_0 \in P_0^+$, е изпълнено неравенството $p_0 > n^{-1}$. Следователно, $np_{01} > 1$ за всяко $n, n \in N$, т.е. p_1 е образ при φ само на строго положителни елементи от G. Хомоморфизмът φ е силно монотонен и $\varphi^{-1}(P_1^+) = P^+ \setminus P^+(N)$.

Ще отбележим, че по такъв начин може да се получи още и следното абстрактно описание на всички частични наредби на групата G, по отношение на които N е изпъкнал нормален делител.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. N е изпъкнал нормален делител по отношение на наредбата P^+ на ч.н. група G тогава и само тогава, когато P^+ има вида $P^+ = N^+ \cup S^+$, където 1) $N^+ = \{n^+\}$ е чиста подполугрупа на N, инвариантна в G; 2) $S^+=\{s^+\}$ е чиста подполугрупа на G; 3) $N \cap S^+=\phi$ и 4) $n^+s^+\in S^+$, $s^+n^+\in S^+$ за произволни $n^+, n^+\in N^+$, и $s^+, s^+\in S^+$.

§ 8. <u>Силно хомоморфни образи на частично нареденото директно произведение на групи.</u>

Безспорно, важен е въпросът за отношението на понятието силен хомоморфизъм към основната конструкция директно и пълно директно произведение в теорията на групите. Получените резултати, в известен, посочен в условията на теоремите, смисъл, са следните:

1) Ако директното или пълното директно произведение притежава силно хомоморфен образ, то такива образи притежават и множителите в него (теорема 8.1).

2) Ако всички ч.н. групи от дадено множество притежават силно хомоморфни образи, то такъв образ притежава и тяхното директно (и пълното директно) произведение (теорема 8.3).

Понятието силен хомоморфизъм притежава приетото и важно свойство "инвариантност" по отношение на тези конструкции. При това, важно е, че силният хомоморфизъм запазва и свойството монотонност (теореми 8.2 и 8.5). Това се доказва с помощта на теорема 7.4.

В теоремите на настоящия параграф се изучават структурни отношения между някои нормални делители и подполугрупи в директното или пълното директно произведение на групи. Те разглеждат начини за построяване на някои нови типове породени наредби в тях, които се конструират благодарение на условието S_H с помощта на наредбите в множителите. Посочени са примери на други твърдения, които могат да се докажат по аналогичен начин.

Нека групата $G, G=\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{<\ldots, a_\lambda, \ldots> / a_\lambda \in A_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$, е директно или пълно директно произведение на своите подгрупи $A_\lambda, \lambda\in\Lambda$. Нека P^+ е частична наредба в нея. Да означим с P_λ^+ индуцираната от P^+ частична наредба в A_λ, т.е.
$P_\lambda^+ = \{a_\lambda^+ / a_\lambda^+ \in A_\lambda, <\ldots, 1, 1, \ldots, 1, a_\lambda^+, 1, \ldots, 1, 1, \ldots> \in P^+\}$. Нека N е нормален делител в G. С N_λ ще означим множеството от всички елементи на A_λ, които принадлежат на N, т.е.
$N_\lambda = \{n_\lambda / n_\lambda \in A_\lambda, <\ldots, 1, 1, \ldots, 1, n_\lambda, 1, \ldots, 1, 1, \ldots> \in N\}$.
N_λ е нормален делител в A_λ.

ТЕОРЕМА 8.1. Нека ч.н. група $G, G=\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, с наредба P^+ притежава (N,P^+)-силно хомоморфен образ. Ако $P_\lambda^+ \neq \emptyset$, то ч.н. група A_λ с индуцирана наредба P_λ^+ притежава (N_λ, P_λ^+)-силно хомоморфен образ.

Д о к а з а т е л с т в о . Ще докажем, че N_λ и P_λ^+ удовлетворяват условието S_H, т.е. ще докажем, че $N_\lambda a_\lambda^+ \subseteq P_\lambda^+$ за всяко $a_\lambda^+, a_\lambda^+ \in P_\lambda^+$. $N_\lambda a_\lambda^+$ се състои само от елементи на A_λ, $N_\lambda a_\lambda^+ \subseteq N a_\lambda^+$, тъй като $N_\lambda \subseteq N$, и $N a_\lambda^+ \subseteq P^+$, тъй като $a_\lambda^+ \in P^+$, а N и P^+ удовлетворяват условието S_H. Следователно, $N_\lambda a_\lambda^+ \subseteq P_\lambda^+$.

Ако $N_\lambda = 1_\lambda$, то (N_λ, P_λ^+)-образът на ч.н. група A_λ ще бъде с-изоморфен с нея.

ТЕОРЕМА 8.2. Ако $(N,\bar{P}^+)$-образът на ч.н. група $G, G=\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, с наредба $\bar{P}^+$ е монотонен, то (N_λ, P_λ^+)-образът на ч.н. група A_λ с индуцирана наредба $\bar{P}_\lambda^+$ също е монотонен.

Д о к а з а т е л с т в о . Съгласно теорема 7.4, $\bar{P}^+$ има вида $\bar{P}^+ = P^+ \cup N^+$, където N^+ е чиста подполугрупа на N

инвариантна в G. Трябва да докажем, че индуцираната в A_λ наредба $\bar{P}_\lambda^+$ има вида $\bar{P}_\lambda^+ = P_\lambda^+ \cup N_\lambda^+$, където N_λ^+ е чиста подполугрупа на N_λ, инвариантна в A_λ (ако $N_\lambda^+ \neq \emptyset$) или $\bar{P}_\lambda^+ = P_\lambda^+$. Действително, да означим с N_λ^+ индуцираната от наредбата N^+(в N) наредба в N_λ, т.е.

$$N_\lambda^+ = \{n_\lambda^+ / n_\lambda^+ \in A_\lambda, \langle \cdots, 1, 1, \cdots, 1, n_\lambda^+, 1, 1, \cdots, 1, \cdots \rangle \in N^+\}.$$

Ясно е, че $\bar{P}_\lambda^+ = P_\lambda^+ \cup N_\lambda^+$. Остава да докажем, че N_λ^+ е инвариантна в A_λ. Действително, $a_\lambda^{-1} n_\lambda^+ a_\lambda$ е елемент на A_λ, принадлежащ на N^+ (тъй като $n_\lambda^+ \in N^+$, N^+ е инвариантна в G подполугрупа), т.е. $a_\lambda^{-1} n_\lambda^+ a_\lambda \in N_\lambda^+$ за всяко n_λ^+, $n_\lambda^+ \in N_\lambda^+$, и всяко $a_\lambda, a_\lambda \in A_\lambda$.

Нека $A_\lambda = \{a_\lambda\}$ е ч.н. група с наредба $P_\lambda^+ = \{a_\lambda^+\}$ и $N_\lambda = \{n_\lambda\}$ е неин нормален делител, където $\lambda \in \Lambda$. В директното (или пълното директно) произведение $G, G = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, да разгледаме множества N и P^+ от елементи. N определяме като множеството от всички елементи на G, във всеки от които от единиците на съответните групи са различни краен брой негови компоненти и, ако компонента с индекс λ е различна от единица, то тя принадлежи на N_λ. P^+ определяме като множеството от всички елементи на G, във всеки от които от единиците на съответните групи са различни краен брой негови компоненти и, ако компонента с индекс λ е различна от единица, то тя принадлежи на P_λ^+ или на N_λ и, при това, поне една от тях принадлежи на съответния конус на строго положителните елементи. N е минималният нормален делител на G, съдържащ всички нормални делители N_λ на съответните подгрупи $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$.

ТЕОРЕМА 8.3. Ако всички ч.н. групи $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$, имат (N_λ, P_λ^+)-образи, то ч.н. група $G, G = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, с наредба P^+ има (N, P^+)-образ.

Д о к а з а т е л с т в о. Трябва да докажем, че P^+ е чиста подполугрупа на G, удовлетворяваща, заедно с нормалният делител N, условието S_H.

I. 1°. Ще докажем, че P^+ е подполугрупа на G. Нека $<\ldots, a_\lambda', \ldots> \in P^+$ и $<\ldots, a_\lambda'', \ldots> \in P^+$. Ще докажем, че $<\ldots, a_\lambda' a_\lambda'', \ldots> \in P^+$. Да разгледаме всички възможни случаи за a_λ' и a_λ'':

$a_\lambda' = 1_\lambda, \; a_\lambda'' = 1_\lambda$; (8.1)

$a_\lambda' = 1_\lambda, \; a_\lambda'' = a_\lambda^+$ или $a_\lambda'' = n_\lambda$; (8.2)

$a_\lambda' = a_\lambda^+$ или $a_\lambda' = n_\lambda, \; a_\lambda'' = 1_\lambda$; (8.3)

$a_\lambda' = (a_\lambda^+)', \; a_\lambda'' = (a_\lambda^+)''$; (8.4)

$a_\lambda' = a_\lambda^+, \; a_\lambda'' = n_\lambda$; (8.5)

$a_\lambda' = n_\lambda, \; a_\lambda'' = a_\lambda^+$; (8.6)

$a_\lambda' = n_\lambda', \; a_\lambda'' = n_\lambda''$. (8.7)

Имаме, съответно

$a_\lambda' a_\lambda'' = 1_\lambda$; (8.1)

$a_\lambda' a_\lambda'' = a_\lambda^+$ или $a_\lambda' a_\lambda'' = n_\lambda$; (8.2)

$a_\lambda' a_\lambda'' = a_\lambda^+$ или $a_\lambda' a_\lambda'' = n_\lambda$; (8.3)

$a_\lambda' a_\lambda'' = (a_\lambda^+)'(a_\lambda^+)'' = (a_\lambda^+)'''$; (8.4)

$a_\lambda' a_\lambda'' = a_\lambda^+ n_\lambda = (n_\lambda^*) a_\lambda^+ = (a_\lambda^+)^*$. (8.5)

Второто равенство в (8.5) е изпълнено за някое $n_\lambda^*, n_\lambda^* \in N_\lambda$, тъй като N_λ е нормален делител в A_λ. Третото равенство – за някое $(a_\lambda^+)^*, (a_\lambda^+)^* \in P_\lambda^+$, тъй като N_λ и P_λ^+ удовлетворяват условието S_H. За останалите произведения ще напишем само съответните равенства (за всеки от случаите индексите ще бъдат самостоятелни):

$a_\lambda' a_\lambda'' = n_\lambda a_\lambda^+ = (a_\lambda^+)'$; (8.6)

$a_\lambda' a_\lambda'' = n_\lambda' n_\lambda'' = n_\lambda'''$. (8.7)

Следователно, произведението на всеки два елемента от P^+ е елемент на P^+, т.е. P^+ е подполугрупа на G. При това (в случаите (8.2)-(8.6)) имаме предвид, че в произведението на два елемента поне едната от компонентите принадлежи на съответния конус на строго положителните елементи.

2^0. P^+ е инвариантна в G, тъй като P_λ^+ е инвариантна в A_λ и N_λ е нормален делител в A_λ за всяко $\lambda, \lambda\in\Lambda$.

3^0. P^+ не съдържа единицата на групата G.

Следователно, P^+ е чиста подполугрупа на G.

II. Трябва да докажем, че N и P^+ удовлетворяват условието S_H. Ще отбележим, че това също можем да получим като разгледаме всевъзможните случаи при умножението на компонентите с един и същи индекс и от определенията на N и P^+.

Следователно, ч.н. група G с наредба P^+ притежава (N,P^+)-силно хомоморфен образ.

N и P^+ имат твърде желателни свойства в G, смисълът на които се изяснява, като имаме предвид теорема 8.1, забележката за N и следната теорема.

ТЕОРЕМА 8.4. P^+ е минималната наредба в G, удовлетворяваща, заедно с N, условието S_H и индуцираща в A_λ наредба P_λ^+ за всяко $\lambda, \lambda\in\Lambda$.

Д о к а з а т е л с т в о. P^+ индуцира в A_λ наредба P_λ^+. Доказателството на това, че тя е минималната наредба на групата G с посочените свойства, се получава от включванията $P_\lambda^+\subseteq P^+, \lambda\in\Lambda$, и от това, че N и P^+ трябва да удовлетворяват условието S_H.

Естествено, интересен е въпросът за съществуването на продължение на наредбата P^+ на групата G, по отношение на което (N,P^+)-образът на G да остава монотонен. Оказва се, че ако аналогични продължения на наредбите P_λ^+ в A_λ съществуват, то съществува такова продължение и на наредбата P^+ в G .

ТЕОРЕМА 8.5. Нека (N_λ, P^+_λ)-образът на $A_\lambda, \lambda\in\Lambda$, остава монотонен по отношение на продължението $\overline{P}^+_\lambda$, $\overline{P}^+_\lambda = P^+_\lambda \cup N^+_\lambda$, на наредбата P^+_λ . Тогава, (N,P^+)-образът на G остава монотонен по отношение на продължението $\overline{P}^+$ на наредбата P^+ , където $\overline{P}^+ = P^+ \cup N^+$, N^+ е множеството от всички елементи на G , във всеки от които от единиците на съответните групи са задължително различни краен брой негови компоненти и всички те принадлежат на съответните N^+_λ.

Д о к а з а т е л с т в о . Съгласно теорема 7.4, N^+_λ е чиста подполугрупа на N_λ , инвариантна в A_λ , $\lambda\in\Lambda$. Оттук се получава, че N^+ е чиста подполугрупа на N , инвариантна в G. Съгласно цитираната теорема, (N,P^+)-образът на G остава монотонен по отношение на продължението $\overline{P}^+$ на наредбата P^+ .

ТЕОРЕМА 8.6. Наредбата $\overline{P}^+$ е минималното продължение на наредбата P^+ на групата G , индуциращо в A_λ наредба $\overline{P}^+_\lambda$, по отношение на което (N,P^+)-образът на G остава монотонен.

Оказва се, че,освен P^+, в G съществуват и други частични наредби, породени от наредбите P^+_λ в A_λ , по отношение на които G притежава силно хомоморфни образи. Останалите желателни свойства (теорема 8.4), обаче, те не притежават. Като се ръководим от доказаните теореми, можем да докажем и други такива твърдения, например

ТВЪРДЕНИЕ 8.1. Нека $A_{\lambda_0}, \lambda_0\in\Lambda$, има $(N_{\lambda_0}, P^+_{\lambda_0})$-образ. Тогава, G притежава $(N_{\lambda_0}, P^+_{\lambda_0})$-образ.

ТВЪРДЕНИЕ 8.2. Нека е изпълнено условието на теорема 8.3. Тогава, G притежава (N, P^+_0)-образ, където наредбата P^+_0 е множеството от всички нейни елементи, във всеки от които всички компоненти принадлежат на съответните конуси P^+_λ на строго положителните елементи на групите A_λ .

ТВЪРДЕНИЕ 8.3. $(N_{\lambda_0}, P^+_{\lambda_0})$-образът на G от твърдение 8.1 е монотонен по отношение на продължението $\overline{P}^+_{\lambda_0}$, $\overline{P}^+_{\lambda_0} = P^+_{\lambda_0} \cup N^+_{\lambda_0}$, на наредбата $P^+_{\lambda_0}$, където $N^+_{\lambda_0}$ е чиста подполугрупа на N_{λ_0}, инвариантна в A_{λ_0}.

ТВЪРДЕНИЕ 8.4. (N, P^+_0)-образът на G от твърдение 8.2 остава монотонен по отношение на продължението $\overline{P}^+_0$, $\overline{P}^+_0 = P^+_0 \cup N^+_1$ на наредбата P^+_0 в G, където N^+_1 е множеството от всички елементи на G, във всеки от които всички компоненти принадлежат на съответните N^+_λ, където N^+_λ е чиста подполугрупа на N_λ, инвариантна в A_λ.

§ 9. Покритие на чисти подполугрупи в групата от контекстно свободни езици.

В този параграф се изследва покритието при естествения хомоморфизъм на чисти подполугрупи в групата (чрез които се задават частичните наредби в нея) от контекстно свободни (к.с.) езици над двойна азбука. Отначало се доказва, че чистите подполугрупи с крайна база се покриват слабо от к.с. езици. С помощта на лема 4.1 се доказва, че чистите подполугрупи не могат да се покриват от регулярни езици (т.е. чрез тях не е изразима частичната наредба в крайнопородена ч.н. група). Ако чиста подполугрупа на групата има база, всички думи на която са от даден к.с. език, то съответната ч.н. група притежава слабо хомоморфен образ с крайна база на конуса от строго положителните му елементи.

Нека G е крайно породена група с образуващи $x_1, x_2, \dots, x_n$ и Σ, $\Sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_n; x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}\}$, е двойна азбука. G е естествено хомоморфен образ на свободната полугрупа Σ^* с образуващи $x_1, x_2, \dots, x_n; x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}$ при хомоморфизма φ, където $\varphi(x_i) = x_i$, $\varphi(x_i^{-1}) = x_i^{-1}$. Нека G е ч.н. група с наредба P^+, където P^+ е чистата подполугрупа, състояща се от строго положителните ѝ елементи. Тогава, езикът $\varphi^{-1}(P^+)$ (който е пълният първообраз на P^+ при φ) притежава следните свойства (сравн. с лема 7.1):

1) $\varphi^{-1}(P^+) \cap Ker\,\varphi = \Lambda$;

2) $\varphi^{-1}(P^+)$ е подполугрупа на Σ^* ;

3) за всяко $\pi, \pi \in \varphi^{-1}(P^+)$, и всяко $X, X \in \Sigma^*$, $\overline{X}\pi X \in \varphi^{-1}(P^+)$, където, ако $X = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_t}^{\varepsilon_t}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = \overline{1,t}$, то $\overline{X} = x_{i_t}^{-\varepsilon_t} x_{i_{t-1}}^{-\varepsilon_{t-1}} \dots x_{i_1}^{-\varepsilon_1}$ и $\overline{X}X \in \mathcal{D}_{2n}$ ($\mathcal{D}_{2n}$ е езикът на Дик [3]).

Обратно, образът на всеки език в Σ^*, притежаващ тези свойства, ще бъде чиста подполугрупа на G и, следователно, ще определя някаква частична наредба в нея.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. За всяка чиста подполугрупа с крайна база в групата G съществува слабо покриващ я к.с. език в Σ^*, притежаващ свойствата 1), 2), 3).

Д о к а з а т е л с т в о . Нека чистата подполугрупа P^+ на групата G има крайна база [9] $p_1, p_2, \dots, p_k$, $p_i \in P^+$, $i = \overline{1,k}$, т.е. $P^+ = \{(g_1^{-1} p_{i_1} g_1)(g_2^{-1} p_{i_2} g_2) \cdots (g_\ell^{-1} p_{i_\ell} g_\ell)\}$, където $\ell \in Z^+$; $g_i \in G$, $i_1, i_2, \dots, i_\ell \in [1,k]$. Нека $P_1, P_2, \dots, P_k \in \Sigma^*$ са първообрази (при φ) на елементите $p_1, p_2, \dots, p_k$. Езикът

$$\Pi^+ = \{(\overline{X}_1 P_{i_1} X_1)(\overline{X}_2 P_{i_2} X_2) \cdots (\overline{X}_\ell P_{i_\ell} X_\ell) / X_i \in \Sigma^*, \overline{X}_i X_i \in \mathcal{D}_{2n}\}$$

има посочените свойства и покрива P^+ слабо (т.е. $\varphi(\Pi^+)=P^+$).
Да разгледаме к.с. граматика [3], [6] $\mathcal{T}=\{\Sigma\cup\{\sigma,\eta,\zeta\},\Sigma,Q,\sigma\}$, където Q е следното множество от правила за извод:

$$\sigma\to\eta\zeta \quad ; \qquad (9.1)$$

$$\eta\to x_i^{-1}\eta x_i,\ i=\overline{1,n} \quad ; \qquad (9.2)$$

$$\eta\to x_i\eta x_i^{-1},\ i=\overline{1,n} \quad ; \qquad (9.3)$$

$$\eta\to P_j,\ j=\overline{1,k} \quad ; \qquad (9.4)$$

$$\zeta\to\eta\zeta \quad ; \qquad (9.5)$$

$$\zeta\to\Lambda. \quad ; \qquad (9.6)$$

Ще докажем, че породеният от тази граматика език $\mathcal{Z}(\mathcal{T})$ съвпада с езика Π^+ в Σ^*.

I. Ще докажем, че $\Pi^+\subseteq\mathcal{Z}(\mathcal{T})$. Нека $(\overline{X_1}P_{i_1}X_1)(\overline{X_2}P_{i_2}X_2)\cdots(\overline{X_e}P_{i_e}X_e)\in\Pi^+$. За да докажем, че тази дума принадлежи на $\mathcal{Z}(\mathcal{T})$, след правилото (9.1) прилагаме $l-1$ пъти (9.5), един път - (9.6) и, за всяко участие на буквата η - съответните правила (9.2), (9.3) и (9.4).

II. Ще докажем, че $\mathcal{Z}(\mathcal{T})\subseteq\Pi^+$. Доказателството провеждаме индуктивно по отношение броя на участията на преобразованието (9.5) в извода на дадена дума в граматиката $\mathcal{T}$. Ако при този извод преобразованието (9.5) не се използва, то тя има вида $\overline{X}P_jX$ и $\overline{X}P_jX\in\Pi^+$. Да допуснем, че всяка дума от $\mathcal{Z}(\mathcal{T})$, при извода на която от началния символ σ в граматиката $\mathcal{T}$ правилото (9.5) се използва не повече от k пъти, принадлежи на Π^+. Нека $\sigma\overset{\mathcal{T}}{\Rightarrow}x$ и при този извод правилото (9.5) се използва $k+1$ пъти. Да разгледаме първото му приложение. До тогава, изводът на думата x е имал следния вид:

$$\underset{(9.1)}{\sigma\to\eta\zeta},\ \underset{(9.2),(9.3),(9.4)}{\cdots\cdots\cdots\cdots},\ \overline{X_1}\eta X_1\zeta,\ \underset{(9.5)}{\overline{X_1}\eta X_1\eta\zeta}.$$

Буквите η запазват своите индивидуалности, тъй като те участвуват само в преобразованията (9.2),(9.3),(9.4). Затова, по-нататък лявата част $\overline{X}_1\eta X_1$ и дясната част $\eta\zeta$ се преобразуват независимо една от друга: първата-в $\overline{X}_1' P_{j_1} X_1'$, а втората, по индуктивното предположение - в елемент на Π^+. Последната дума x в дадения извод е тяхно произведение и, следователно, $x \in \Pi^+$. Езикът Π^+, покриващ слабо чистата подполугрупа P^+ с крайна база в групата G, е контекстно свободен.

Аналогично, може да се докаже, че нормалният делител N с крайна база в групата G се покрива слабо от к.с. език. Действително, нека N се поражда от елементите $a_1, a_2, \dots, a_k$, $a_i \in G$, $i = \overline{1,k}$, т.е.

$N = \{(g_1^{-1} a_{i_1}^{\varepsilon_1} g_1)(g_2^{-1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} g_2) \dots (g_\ell^{-1} a_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell} g_\ell)\}$, където $\ell \in Z^+, g_j \in G$, $j = \overline{1,\ell}$, $i_j = \overline{1,k}$, $\varepsilon_j = \pm 1$. Тогава, N се покрива слабо от к.с. език $\mathcal{N}$ (т.е. $\varphi(\mathcal{N}) = N$), породен от к.с. граматика с правила за извод:

$$\sigma \to \eta\zeta \quad ;$$
$$\eta \to x_i^{-1}\eta x_i, \; i = \overline{1,n} \quad ;$$
$$\eta \to x_i \eta x_i^{-1}, \; i = \overline{1,n} \quad ;$$
$$\eta \to A_j, \; \varphi(A_j) = a_j, \; j = \overline{1,k} \quad ;$$
$$\eta \to \overline{A}_j, \; \varphi(\overline{A}_j) = a_j^{-1}, \; j = \overline{1,k} \quad ;$$
$$\zeta \to \eta\zeta \quad ;$$
$$\zeta \to 1 \quad .$$

Нека N е нормален делител с крайна база, P^+ е чиста подполугрупа с крайна база в групата G и $N \cap P^+ = \phi$. Тогава, N и P^+ се покриват слабо съответно от к.с. езици $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$. Следователно, нормалният делител N и чистата подполугрупа P_0^+ , където $P_0^+ = NP^+$, удовлетворяващи условието S_H (определение 7.4), се покриват слабо от к.с. езици N и $N\mathcal{P}$ (теорема 1.7.2 [3]). По N и P_0^+ се построява (N,P_0^+)-силно хомоморфен образ на G.

Съществуването на к.с. език в Σ^*, покриващ слабо чистата подполугрупа P^+ в групата G, не означава, че и нейният пълен първообраз $\varphi^{-1}(P^+)$ е к.с. език. Действително, да разгледаме кр. спр. ч.н. група от [10], § 1, с едно строго определящо неравенство, с неразрешим проблем на (строгото) неравенство и с разрешим проблем на тъждеството. Чистата подполугрупа на нейните строго положителни елементи има база от един елемент. Нейният пълен първообраз, обаче, не е к.с. (даже рекурсивен) език, тъй като, в противния случай, в ч.н. група проблемът на неравенството би бил разрешим. Свойството на пълния първообраз на чиста подполугрупа да бъде к.с. език не зависи от представянето на групата (т.е. то е абстрактно свойство), но неговото описание засега не е получено. Ние можем да докажем, обаче, че той е нерегулярен.

ТЕОРЕМА 9.1. Пълният първообраз $\varphi^{-1}(P^+)$ на чистата подполугрупа P^+ на групата G не е регулярен език в Σ^*.

Д о к а з а т е л с т в о . Допускаме противното. Определяме конгруенция $\approx$ в групата G с помощта на чистата подполугрупа P^+ (определение 4.1). Съгласно лема 4.1, тази релация има краен индекс в G и P^+ се състои от нейна пълни класове на еквивалентност. Множеството от всички класове на еквивалентност по отношение на конгруенцията $\approx$ образува крайна група G_1 с единица $|[1]|_{\approx}$, в която елементът $|[x]|_{\approx}^{-1} = |[x]^{-1}|_{\approx}$ е обратен на елемента $|[x]|_{\approx}$. Тази група е естествен хомоморфен образ на групата G при хомоморфизма ψ, където $\psi([x])=|[x]|_{\approx}$. Образът $\psi(P^+)$ на чистата подполугрупа P^+ на групата G е чиста подполугрупа в G_1. Получаваме, че в G_1 може да се въведе частична наредба, което противоречи на това, че тя е крайна.

Следователно, понятието частична наредба в групата не може да се изрази чрез регулярните езици (т.е. най-ниските етажи на рекурсивните множества не са достатъчни за това).

ТЕОРЕМА 9.2. Нека ч.н. група G се задава ([9] и § 1) с образуващи елементи $x_1, x_2, \dots, x_n$, определящи равенства $\varphi_i = 1, i \in I$, и строги определящи неравенства $\psi_j > 1, j \in J$, където $\psi_j \in L$, а L е к.с. език в Σ^*. Тогава, G притежава слабо хомоморфен образ с крайна база на чистата подполугрупа на строго положителните му елементи.

Д о к а з а т е л с т в о . Съгласно лема 3.1.1 [3], съществуват естествени числа p и q (съответствуващи на пораждащата L к.с. граматика), такива, че всяка дума $z, z \in L$, за която $\partial(z) > p$, може да бъде представена във вида $z \equiv xuwvy$, така че $uv \neq \Lambda, \partial(uwv) \leq q$, и за всяко $k, k \geq 0, xu^k wv^k y \in L$. Да разгледаме множествата $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ от преобразования на думите, където $\mathcal{P}_1 = \{ r \longrightarrow \Lambda / \partial(r) \leq p, r \in L \}$ и

$\mathcal{P}_2 = \{ uwv \longrightarrow w / \partial(uwv) \leq q ; uv \neq \Lambda \}$. Всяка дума от L се преобразува с помощта на тези еднопосочни преобразования в празната дума Λ . Такива преобразования, но симетрично и за ядрото на к.с. група, използува А.В. Анисимов в [2]. Да разгледаме ч.н. група G_1 , зададена със същите образуващи елементи $x_1, x_2, \dots, x_n$ и с определящи неравенства $\varphi_i = 1, r \geq 1, uwv \geq w$. Ще докажем, че тя е слабо хомоморфен образ на ч.н. група G . Групата G_1 е хомоморфен образ на групата G (по теоремата на Дик от теорията на групите). Нека $\alpha \geq_G 1$. Трябва да докажем, че $\alpha \geq_{G_1} 1_1$. Действително, това следва от факта, че всички думи ψ_j се преобразуват с помощта на преобразованията $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ в празната дума, т.е. от $\psi_j >_G 1$ следва, че $\psi_j \geq_{G_1} 1_1$. Следователно, ч.н. група G_1 е слабо хомоморфен образ на ч.н. група G с крайна (на което ни се иска да обърнем внимание) база на чистата подполугрупа на всите строго положителни елементи.

Ще отбележим, че по аналогичен начин можем да получим следното твърдение: ако всички определящи неравенства (обратими и необратими) на ч.н. група G принадлежат на някой к.с. език в Σ^*, то тя притежава крайно определен слабо хомоморфен образ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Адян С.И., Вложимость полугрупп в группы, Труды мат. инст. им. Стеклова, 85 (1966), 40-56.

2. Анисимов А.В., Диссертация, К., 1972.

3. Гинзбург С., Математическая теория контекстно-свободных языков, изд-во "Мир", М., 1970.

4. Глушков В.М., Абстрактная теория автоматов, УМН, 16, № 5, (1961), 3-62.

5. Осипова В.А., К проблеме тождества для конечно определенных полугрупп, ДАН СССР, 178, № 5 (1968), 1017-1020.

6. Рабин М.О. и Скот Д., Конечные автоматы и задачи их разрешения, Киб.сб., ИЛ , вып.4 (1962), 58-91.

7. Редько В.Н., Дефиниторные алгебры и алгебры языков, Кибернетика, № 4 (1973), 57-63.

8. Тартаковский В.А. и Стендер П.В., К проблеме тождества в полугруппах, Мат. сб., 75, 1 (1968), 15-38.

9. Френкель В.И., О задании частично упорядоченных групп определяющими неравенствами, УМН, 20, 6 (1965), 164-168.

10. Френкель В.И., Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем в группах, заданных системой образующих и определяющими неравенствами, СМЖ, VI, 5 (1965), 1144-1162.

11. Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, изд-во "Мир", М., 1965.

12. Желева, С.Д., Дисертация, С. 1977.

13. Тыркаланов К.Д., Один класс частично упорядоченных полугрупп с разрешимой проблемой неравенства, Докл. БАН, 23, № 2 (1970), 129-132.

14. Тыркаланов К.Д., О частично упорядоченных полугруппах и группах, заданных определяющими неравенствами без циклов. Math.Balkanica, 4.116 (1974), 601-604.

15. Търкаланов Кр.Д., За частично наредените полугрупи и групи, зададени с определящи неравенства без цикли, Сб.труд. на млад.научни раб. и студ., Пловд.у-тет, № 2(1974), 203-206.

16. Тыркаланов К.Д., Решение проблемы неравенства в одном классе частично упорядоченных полугрупп по методу Осиповой, Научни трудове на ВПИ - Пловдив, 9, 2 (1971), 37-43.

17. Тыркаланов К.Д., К проблемам с-изоморфизма, ломанной и применимости алгоритма делимости, Доклады АН УССР, А,№ 6(1976), 502-505.

18. Търкаланов Кр.Д., Към разпознаване приложимостта на един алгоритъм за делимост, Научни трудове на Пловд.у-тет, 12, 1, ~~1~~ (1974), 163-168.

19. Търкаланов Кр.Д., Към проблемите на делимостта и тождеството за полугрупи с едно несъкратимо отляво определящо съотношение, Сб. Мат.и матем.образ., Докл. на трета прол.конф. на БМД, С. БАН(1976), 282-285.

20. Търкаланов Кр.Д., Силен хомоморфизъм на една частично наредена група върху друга, Научни трудове на ВПИ-Пловдив, 6, 1 (1968), 27-32.

21. Тыркаланов К.Д., О сильно монотонно гомоморфных образах одной частично упорядоченной группы, Natura-Plovdiv, III, 1 (1970), 13-16.

22. Тыркаланов К.Д., Сильно гомоморфные образы частично упорядоченного прямого произведения двух групп, Научни трудове на ВПИ-Пловдив, 8, 1 (1970), 25-31.

23. Тыркаланов К.Д., Контекстно свободные языки и некоторые вопросы теории полугрупп и групп, Сб.Теория языков и процессоров, К., ИК АН УССР (в печати).