ЕДИНЕН ЦЕНТЪР ЗА НАУКА И ПОДГОТОВКА НА КАДРИ ПО МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

Сектор "ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА"

Апостол Обретенов Апостолов

СТОХАСТИЧНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ НА НАДЕДНОСТ В ТЕХНИКАТА

Дисертационен труд за присъждане на научната степен
"доктор на математическите науки"

София 1974

СТОХАСТИЧНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ НА НАДЕЖДНОСТ В ТЕХНИКАТА

У В О Д

Специалните задачи и методи, които се прилагат при решаването на въпроси, свързани с различни изисквания към надеждността на изработените изделия и по време на тяхната експлоатация, определят съдържанието на теорията на надеждността. Въпросите, разработени в настоящата дисертация са от областта на теорията на надеждността. Подходът при третирането на тези въпроси е вероятностен, следователно и методите при решаването им са вероятностни. Получените резултати имат както чисто теоретично значение, така и приложно.

Съдържанието е разделено на две глави обединяващи въпросите по тяхната близост. Може да се каже, че първата глава има по-теоретичен характер, тъй като резултатите, дадени в нея са не само специфични за теорията на надеждността, а са и от общ теоретико-вероятностен характер.

В първата глава се разглеждат вероятностни характеристики за надеждност, които се използуват във втората глава при изследване надеждност на системи. Определенията за функция на надеждност, опасност за отказ и функция на интензивност на отказите са общоприетите в теорията на надеждността. Всички вероятностни характеристики за надеждност зависят и се определят в последна сметка от функцията на разпределение на продължителността на живот на работещия елемент /или система/. На практика са интересни такива разпределения $F(x)$, за които функцията на интензивност на отказите е монотонна, поради това и специално внимание е отделено при изучаването на свойствата на тези разпределения /РФИ - разпределения/.

В раздел I, гл. I се дават някои основни и елементарни свойства на едно РФИ-разпределение. Раздел 2 третира свойства на така наречените от автора итерационни разпределения. Първото итерационно разпределение се среща и играе роля при рекурентни потоци със закъснение и като стационарно разпределение на остатъчните времена. В следващите три раздела /3, 4 и 5/ са получени различни оценки за скоростта на сходимост на една редица от итерационни функции на разпределение, когато изходната функция на разпределение е РФИ-разпределение и за функцията на възстановяване при РФИ-разпределение. Теоретично и практично значение имат и оценките за отклонението на едно РФИ-разпределение от експоненциалното.

Мястото на получените в глава I резултати в теорията на надеждността може да се види в книгата "Математическа теория на надеждността" [1]. Резултатите, които се дават в тази глава са предварително отпечатани в работите [2], [3], [4], [5].

Глава втора е посветена на изследването на вероятностните характеристики на работещи системи. Отначало е разгледана подробно най-простата система: един елемент. При това разглеждане е залегнал и методът, чрез който се третират по-нататък нещата. Основното в излагания метод е свеждането на един полумарковски процес към марковски /лема 5, гл II /. Марковските процеси по своето си същество дават по-добри възможности за третиране на задачите.

В раздел 2, глава II е разгледан случаят на експоненциална продължителност на живот. Този случай е най-често срещаният на практика. Освен това разглеждането му е едно естествено въвеждане на метода за свеждането на общия случай, когато времето на работа е произволно разпределено към експоненциалния аналог.

В раздел 3 на тази глава се изследват системи с възстановяване, т.е. с отчитане на времената за ремонт на отказалите елементи. Разгледан е най-общият случай - не се правят ограничения относно разпределенията на времената на живот и ремонт. Получени са и интересуващите ни на практика стационарни характеристики. За приложенията е от значение и граничната теорема

7 . В раздел 4 се разглеждат системи от типа " k от n " т.е. системи, които работят когато поне k от елементите им не са отказали. Случаят е по-общ от този в раздел 3, но за сметка на това продължителността на живот се предполага експоненциално разпределена.

Последният раздел от тази глава има повечето теоретичен характер, отколкото първите четири раздела. Дава се вероятностно описание на системи от работещи елементи чрез един полумарковски процес. Въвежда се понятието асоцииран марковски процес към дадено състояние. Равенството (39), 3.гл.II , дава възможност известните резултати за един полумарковски процес да се използват за намирането на вероятностни характеристики на работещата система. Обратно, някои резултати, които се получават при разглеждането на тези системи се явяват нови, чисто теоретични, за полумарковските процеси.

Резултатите дадени във втората глава са отпечатани в работите [6], [7], [8].

ГЛАВА ПЪРВА
ВЕРОЯТНОСТНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗА НАДЕЖДНОСТТА

1. Основни понятия

Основните понятия в теорията на надеждността са надеждност, отказ, продължителност на живот и други специални количествени характеристики. Под надеждност в говоримия език се разбира надеждността на изделия, което се състои в запазване на техните качества в процеса на експлоатация и съхраняване. Качество на едно изделие е неопределяемо понятие и се дава описателно с изброяване на отделните изисквания, които се предявяват към изделието. Тук под изделие ще разбираме продукт, плод на човешката дейност, а за нашите цели, в по-тесен смисъл,изделието ще е някакъв елемент или система от елементи.

Надеждността на едно изделие се измерва в интервалите от време на неговата експлоатация или съхраняване, през което изделието с определена вероятност запазва качествата си. Някои изделия извършват работа, която може да се определи количествено. За такива изделия надеждността може да се изрази чрез количеството работа или чрез вероятността за запазване на качествата им. Ако при експлоатацията изделието подлежи на ремонт, запазването на качествата му се нарича дълготрайност на изделието.

С течение на времето изделието може да загуби част от своите качества или всички необходими качества за използването му /или правилното му функциониране/. В първия случай на намалено качество изделието се смята частично отказало, а във втория случай качеството е загубено, изделието е напълно отказало. Способността на изделието да запазва качествата си и да няма откази определя понятието безотказност или работоспособност на изделието. При някои изделия понятието отказ е доста относително. Така при обикновената електрическа крушка отказ означава несветене поради изгаряне или счупване и той е напълно определен. Някои изделия пък имат качеството да работят при наличие на определено електрическо съпротивление, менящо се в определени граници. За известни цели такова изделие може да е отказало, но за други, при които се изисква по-малко съпротивление, изделието е още работоспособно. И тъй понятието отказ може да бъде относително, но разглеждано в определена ситуация, то е полезна съдържателна характеристика за надеждност. В теорията на надеждността се изучава събитието, заключаващо се в запазване на дадено качество на изделието или, с други думи, събитието, състоящо се в отсъствие на откази от произволно естество, които могат да настъпят в изделието. Експериментално се намират вероятностите да настъпи това събитие по време на експлоатацията /или работата/ на изделието /или елемента/ и се определя надеждността на елемента.

Надеждността е свързана със свойствата, които изделието има в момента на неговото изготвяне или при проверката пред експлоатацията му или които то въобще трябва да има. Не може да се говори за надеждност относно свойствата на изделието, които не са предвидени при неговото изработване.

Друго важно понятие в теорията на надеждността е дълготрайност. Под дълготрайност на едно изделие се разбира неговата способност да бъде използвано продължително време, макар то и да губи част от свойствата си по време на експлоатация, стига те да се възобновяват чрез ремонт. В някои случаи понятията дълготрайност и безотказност могат да съвпаднат, но в общия случай дълготрайността е някакъв брой от цикли на зеботказна работа или обем на извършена работа. За някои изделия е възможно да се поддържа тяхната работоспособност посредством възстановителни операции /ремонт/, за други след загубването на основното качество това не е възможно. Тази възможност определя едно друго качество на изделията - годност за ремонт. Последната се характеризира със загуба на труд, време и средства за ремонт. Така че понятието надеждност по-подробно се описва от съвкупността на три понятия: безотказност, дълготрайност и годност за ремонт.

В повечето работи и книги по теорията на надеждността под понятието надеждност се разбира вероятността за безотказна работа в даден интервал от време. В горното определение безотказната работа се отнася до изследвания обект, който може да бъде едно изделие, състоящо се от един детайл /елемент/, част от система или цяла функционираща система. Освен горното определение на термина надеждност се употребяват и други негови тълкувания.

Например като количествена характеристика за надеждност на дадено изделие някои разглеждат средната продължителност на безотказна работа в даден интервал. Други пък взимат вероятността за готовност за работа и други. Някои от определенията, срещащи се в литературата са неточни.

Да разгледаме обобщена количествена характеристика, чрез която ще дадем основните количествени показатели на надеждност. Да предположим, че състоянието на изследваното изделие /елемент или система/ в момента t се определя от случайния вектор $X(t)=\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$ т.е. компонентите $X_k(t)$, $k=1,2,\dots,n$ са случайни величини.

Например $X(t)$ може да е едномерен вектор /случайна величина/, който приема само две стойности:

1, ако системата работи в момента t, и 0, ако системата не работи. Компонентите $X_k(t)$ може да означават състояние на различни параметри на системата. Векторът $X(t)$ се смята определен /даден/, ако се знае съвместното разпределение на величините $X_k(t)$ т.е. вероятността

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = P(X_1 < y_1, X_2 < y_2, \dots, X_n < y_n).$$

На всяко състояние на системата, определено от стойностите $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ на величините $X_1, X_2, \dots, X_n$ при фиксирано t може да се съпоставят някои числови функции $f(y) = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ Наборът от числа $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ се нарича реализация на случайните величини $X_1, X_2, \dots, X_n$ или на вектора X в момента t. При фиксирано t съвкупността от реализациите принадлежи на n -мерното реално пространство $R^{(n)}$. Когато t се мени, се получава фамилия от вектори $X(t)$. Величината $f[X(t)]$ е също случайна и може да вземем средна стойност при фиксирано t.

$$(1) \quad G(t) = Ef[X(t)] = \int\int \cdots \int f(y_1, y_2, \dots, y_n)\, dF(y_1, \dots, y_n),$$

която зависи от t. Интегрирането на дясната страна на (1) е по цялото пространство $R^{(n)}$. Функцията $G(t)$ от (1) също може да се усредни относно времето t в даден интервал (a, b) с помощта на някаква функция-тегло $K(t)$:

$$(2) \qquad S(a, b) = \int_a^b G(t)\, dK(t).$$

От функциите (1) и (2) като частни случаи се получават различни количествени показатели, които се използуват в теорията на надеждността.

Надеждност или вероятност за безотказна работа. Това е вероятността елементът /устройството или системата/ да работи през даден интервал от време.

Обикновено се разглежда интервалът от време $(0, t)$. Нека вземем вектора $X(t)$ определен така:

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{ако в момента } t \text{ елементът работи,} \\ 0, & \text{ако в момента } t \text{ елементът не работи.} \end{cases}$$

От (1) за $G(t)$ имаме

$$(3) \qquad G(t) = Ef(X) = P(X(t)=1), \quad f(x) = x$$

т.е. $G(t)$ е равна на вероятността устройството да функционира в интервала $(0,t)$, ако работата в момент t означава, че то е работило и преди t.

Ако се знае разпределението $F(t)$ на величината τ – продължителността на безотказаната работа, надеждността на елемента по определение е

$$1-F(t) = P(\tau \geq t)$$

<u>Нестационарен коефициент на готовност $k(t)$</u>. Така се нарича вероятността устройството да работи в даден момент. Очевидно, ако се предположи, че работа на елемента в момента t не означава, че той е работил преди този момент, $k(t)$ ще се дава с (3).

<u>Стационарен коефициент на готовност k</u>. Границата

$$\lim_{t\to\infty} S(0,t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t G(u)\,du = \lim_{t\to\infty} \int_0^t P(X(u)=1)\,du$$

се нарича коефициент на готовност. Това е средното време, през което елементът изобщо работи, или усредненото математическо очакване $G(t)$ в безкраен интервал от време.

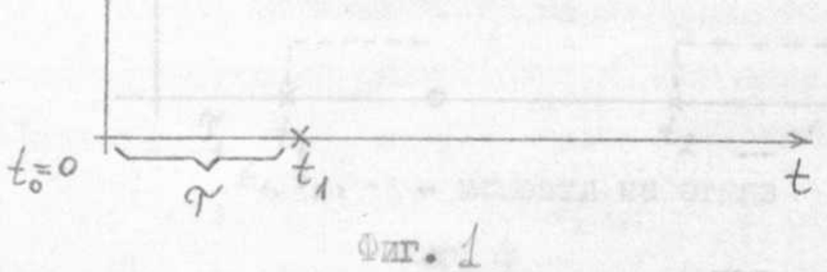
<u>Структура на изследваните обекти</u>. Структурната схема на дадено устройство се определя от зависимостта и работата на отделните елементи. Най-прости са схемите на устройства, които се състоят от един единствен елемент. И в този най-прост случай обаче са възможни различни правила на работа. Може да се отчита времето за ремонт на елемента, ако той е възстановим, или пък да се ограничим и да го разглеждаме само до момента на отказ. Когато елементите в системата са повече от един, разнообразието на възможните структурни схеми на действие е голямо. Това разнообразие се определя не само от големия брой елементи, но и

от правилата на взаимната им връзка и функциониране.

Усложняването на съвременните технически системи доведе до описване на качеството им на функциониране с помощта на сложни показатели. Изборът на подходящ показател за надеждност зависи от разглежданата система и от нейното предназначение. Например нека имаме една информационна мрежа, съдържаща голям брой възли и връзки, които ги съединяват, като от всеки възел постъпват повиквания в другите възли. Повикванията изискват определено време за обслужване по линиите на свързване. Задачата се състои в определянето на вида на показателя, който по най-добър начин ще характеризира надеждността на функциониране на тази свързочна мрежа. Ако мрежата е предназначена за свързване на равноправни абонати, може да се избере показател на надеждност, който да характеризира: I/ връзката между два произволно избрани възела, 2/ връзката на произволен възел с всички останали и 3/ връзката между всички възли едновременно. Даже при сравнително просто разположение на мрежата необходимите вероятности, които трябва да бъдат зададени, изискват възможност за предварително опитно провеждане и получаване на изходни данни по отделните компоненти на мрежата. При това задаването на количествените норми за надеждност трябва да бъде обективно и да се основава на предварителни ориентировъчни пресмятания. Подобни пресмятания за произволен показател на надеждност представляват сложни аналитични задачи.

В повечето случаи представлява интерес не само дали дадена система работи или не, а още и как работи. Възниква въпросът за изисквания относно ефективността на функциониране, като се отчита надеждността. За случая на информационна мрежа това е свързано с предаването на определено количество информация от възел на възел. То се определя от пропускателната способност на каналите на мрежата. Оценяването на такива показатели за надеждност с отчитане на пропускателната способност и други характеристики води до задачи, за решаването на които се използуват методи от различни математически дисциплини /теория на информацията, теория на графите/. Дори и в тези случаи, когато се търсят обикновени показатели за надеждност, се прави предварителна оценка с използуване на съвременен математически апарат.

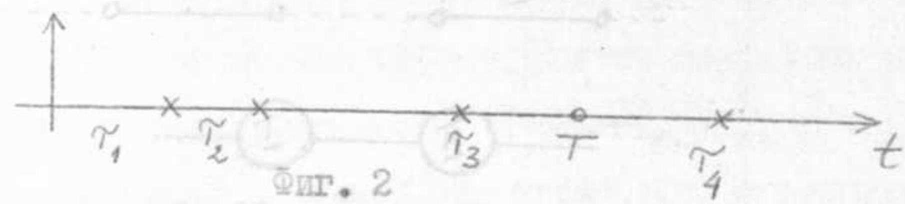
Сложността на структурата и алгоритъмът на функциониране на системата водят до използуването на съответни математически похвати и методи. При анализа на надеждността на дадена система често се използува така наречената структурна схема на надеждност, която се различава от функционалната схема. Това се прави с цел да се опростят нещата и да се математизират. Понякога разликата е голямо, особено за системи, които съдържат елементи с различен тип откази. Затова задачата, която стои пред специалиста, анализиращ надеждността на такава система, е да намери подходяща структурна схема, близка до принципната /функциониращата/. В тези случаи обикновено се използува разлагане на схемата на по-прости звена и последователно се анализира надеждността на отделните звена по правилата, разработени вече за такива звена. Понякога анализът може да бъде опростен чрез преобразуване на реалните схеми в други, еквивалентни на тях по надеждност. Най-простата функционираща система очевидно е тази, която се състои от един елемент. При функционирането ѝ са възможни следните схеми:



Фиг. 1

I. Елементът работи, докато откаже /развали се, загуби основните си качества/. Такъв прост пример е една обикновена електрическа крушка. Главната характеристика в този случай е колко време елементът може да работи. Схематично времето може да се представи с една отсечка по числовата ос t, изобразяваща продължителността на живот /фиг. I/. Началото на отмерване на времето е или моментът, от който елементът започва да функционира, или този, от който започва наблюдението.

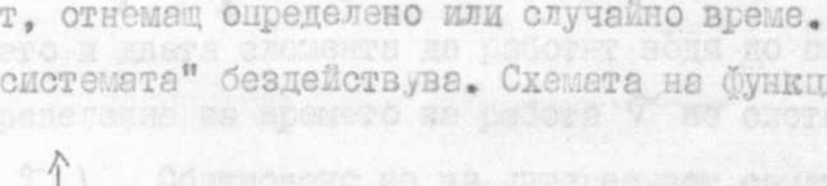
2. Следващата по сложност система пак се състои от един елемент, но той подлежи на мигновена замяна с нов, еднотипен на него. В този случай системата принципно работи неогра-



Фиг. 2

ничено време. От интерес в случая е броят на моментите за определен интервал от време, в които става замяната. Ако τ_1, τ_2 са времената на работа съответно на първия, втория и т.н. елементи, то, нанесени по оста на времето t, можем да ги представим схематично като на фиг. 2. При произволен интервал обикновено се интересуваме от броя на замените в $(0,T)$. На фиг.2 този брой е три.

3. Нека е даден един елемент, който след отказ подлежи на ремонт, отнемащ определено или случайно време. По време на ремонт "системата" бездействува. Схемата на функциониране на та-



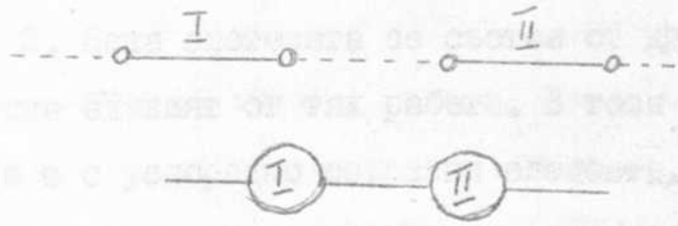
$t_1, t_2, \ldots$ - моменти на отказ

Фиг. 3

кава едноелементна система във времето е представена на фигура 3. Интервалите, ограничени с пунктир, са периодите от време, през които системата не работи.

В случая на един елемент са възможни и други начини на функциониране. Тези, които споменахме, а също и други ще бъдат подробно разгледани в § 1 гл. II .

Ако елементите са повече от два, това е вече "истинска" система. При нея възможностите и за най-простите схеми на функциониране са повече. Те се увеличават от различните начини на "свързване" на елементите помежду им и от наличието или отсъствието на смяна или ремонт. Главните типове по отношение на



I, II - елементи

Фиг. 4

свързването са:

1. За да работи системата, трябва и двата елемента да работят. Това схематично съответствува на последователно свързване. За простота разглеждаме случая само на два елемента, което не е принципно ограничение по отношение на броя на елементите. На фиг. 4 е дадена последователно функционираща система.

Ако τ_1 и τ_2 са времената на работа на елементите, изискването и двата елемента да работят води до следното аналитично определение на времето на работа τ на системата: $\tau = \min(\tau_1, \tau_2)$. Обикновено не ни интересуват самите времена, а техните вероятностни разпределения. Ако смятаме τ_1 и τ_2 за дадени независими случайни величини с функции на разпределение

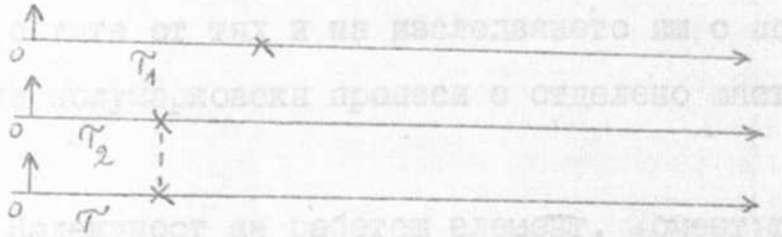
$$F_1(x) = P(\tau_1 < x) \quad , \quad F_2(x) = P(\tau_2 < x) \, ,$$

то функцията на разпределение $F(x)$ на τ се изразява чрез F_1 и F_2

така:

$$1-F(x)=P(\min(\tau_1,\tau_2)<x)=[1-F_1(x)][1-F_2(x)]$$

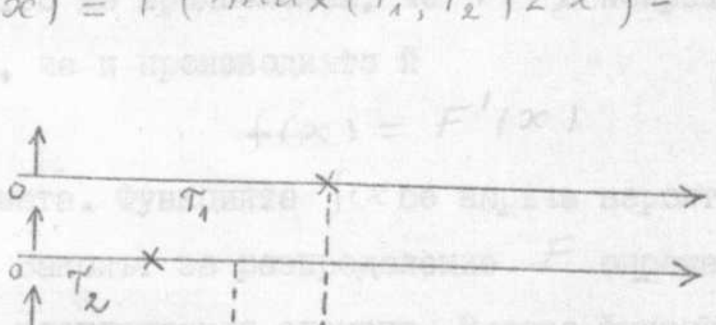
Ако нанесем времената τ_1 и τ_2 на две успоредни оси на времето с проективно съвпадащи начала, а това на системата – на трета, времената схематично ще се изразят, както е показано на фиг.5.



Фиг. 5

2. Нека системата се състои от два елемента и работи, когато поне единият от тях работи. В този случай казваме, че системата е с успоредно свързани елементи. Ако, както преди, τ_1, τ_2 и τ са съответно времената на елементите и системата, аналитично те са свързани със зависимостта $\tau=\max(\tau_1,\tau_2)$. На фиг. 6 на три оси на времето са дадени времената τ_1, τ_2 и τ. При дадени разпределения F_1 и F_2 на τ_1 и τ_2 и ако елементите са независими, за разпределението F на τ, ще имаме

$$F(x)=P(\max(\tau_1,\tau_2)<x)=F_1(x)F_2(x)$$



Фиг. 6

3. Една последователна или успоредно свързана система се усложнява, ако разглеждаме нейната работа при замяна на еле-

ментите ѝ с нови или с отделяне на време за ремонт. По-подробно описание на такива системи и намирането на характеристиките им за надеждност е дадено в §3, II.

4. Сложни системи имаме при наличие на разнообразни връзки между елементите, както по отношение на продължителността им на работа, така и по отношение на свързването помежду им. На най-простите от тях и на изследването им с помощта на марковски или полумарковски процеси е отделено място в §5, II.

Надеждност на работещ елемент. Моментът на започване на работа за даден елемент ще приемем за начален /нулев/ момент на времето t. Ако елементът работи /живее/ време τ, моментът $t=\tau$ се нарича момент на отказ, а изтеклото време τ - продължителност на живот на елемента. В общия случай τ зависи от много условия и можем да приемем, че τ е случайна величина. В теорията на вероятностите всяка случайна величина τ се смята зададена, когато се знае за всяко x функцията

$$F(x) = P(\tau < x)$$

т.е. вероятността $P(\tau < x)$ за отказ до момента x. Естествено е за удобство да предположим, че $F(x)$ е непрекъсната функция и освен това, че и производната ѝ

$$f(x) = F'(x)$$

е непрекъсната. Функцията $f(x)$ се нарича вероятностна плътност на отказа. Законът за разпределение F определя напълно надеждността на разглеждания елемент. Вместо функцията F често се разглежда допълнителната ѝ до единица функция

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x),$$

която дава вероятността продължителността на живот τ да надхвърли време x, т.е. вероятността за безотказна работа на елемента в продължение на време x. Функцията $\overline{F}$ се нарича функция на надеждност. Понеже е допълнителна на F до единица, понякога ще я бележим по-просто така:

$$P = \bar{F}(x) = 1 - F(x)$$

От известните свойства на една функция на разпределение за функцията P ще имаме: $P(x)$ монотонно намалява, $P(0)=1$, $P(t) \to 0$, когато $t \to 0$.

Опасност за отказ. Функцията на надеждност $P(x)$ изцяло характеризира вероятностната природа на продължителността на живот на даден елемент. Чрез нея се намират и характеристиките средна и дисперсия. Сега ще изразим функцията $P(t)$ чрез друга функция, наречена опасност за отказ. За тази цел да решим следната задача:

Ако даден елемент е работил до момента t, каква е вероятността да работи след t поне още време x, т.е. в интервала $(t, t+x)$ да няма отказ.

Нека търсената вероятност да означим с $R(x)$. Ако A е събитието - да няма отказ в $(0,t)$, а B - да няма в $(t, t+x)$, то вероятността $R(x)$ ще е условната вероятност

$$R(x) = P(B|A) = P(AB)/P(A) \tag{4}$$

$P(AB)$ е вероятността да няма отказ както в интервала $(0,t)$, така и в $(t, t+x)$, т.е. да няма отказ в $(0, t+x)$, следователно $P(AB) = P(t+x)$ и за $R(x)$ от (4) ще получим

$$R(x) = P(t+x)/P(t)$$

Вероятността за отказ в интервала $(t, t+x)$ ще е

$$Q(t,x) = 1 - R(x) = \frac{P(t) - P(t+x)}{P(t)}$$

и за малки стойности на x

$$Q(t,x) = -P'(t)/P(t) + o(x)$$

т.е. вероятността за отказ след време t в интервал с дължина

x се характеризира от отношението

(5) $$\lambda(t) = -P'(t)/P(t)$$

Функцията $\lambda(t)$, определена от (5), се нарича опасност за отказ.

От (5) е ясно, че $\lambda(t)$ е плътността на условната вероятност за отказ в момента t, при условие, че до този момент елементът е работил безотказно. Решавайки (5) относно $P(t)$ получаваме

(6) $$P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(u)\,du\right].$$

Формулата (6) е важна. Тя ни дава функцията на надеждност чрез опасността за отказ. Замествайки $P(t)$ от (6) в (4), намираме вероятността за безотказна работа в интервала $(t, t+x)$

$$R(x) = \exp\left[-\int_t^{t+x} \lambda(u)\,du\right].$$

Опасността за отказ $\lambda(t)$ може да бъде определена приблизително /статистически/ по опитните резултати. Ако сме подложили на изпитание N елемента и ако $n(t)$ е броят на тези, които работят /не са отказали/ до момента t, то при достатъчно голямо N и малко x ще имаме

$$\lambda(t) = -P'(t)/P(t) \approx \frac{P(t) - P(t+x)}{x\,P(t)} = \frac{[n(t) - n(t+x)]/N}{x\,n(t)/N} = \frac{\Delta n}{x\,n(t)}$$

или

$$\lambda(t) \approx \frac{\Delta n}{x\,n(t)}.$$

При много от проведените на практика опити функцията се изменя във времето по специален начин: отначало бързо намалява, след това е сравнително постоянна и после расте. Тези три характерни периода са лесно обясними. През първия от тях $\lambda(t)$ има големи стойности, понеже в партидата съществуват елементи със скрити дефекти, които се проявяват още в началото. След това следва периодът на нормална работа на останалите елементи. Третият период отговаря на износването на елементите, когато дефектите зачестяват отново поради "стареенето". През този период опасността за отказ е по-голяма и $\lambda(t)$ расте.

Горната картина на изменение на $\lambda(t)$ не е задължителна за всички случаи. При някои елементи първият период може да не е добре изразен, ако няма много дефектни изделия. При повечето елементи обаче има продължителен период, през който $\lambda(t)$ е практически постоянна величина.

Функцията $\lambda(t)$ характеризира честотата /интензивността/ на отказите, затова се нарича и още функция на интензивност на отказите. Тази функция играе важна роля не само в теорията на надеждността, но и в други приложения, във всяко от които тя има различно име. Използува се в демографията при съставяне на таблици на смъртност; в статистиката и в теорията на екстремните стойности $\lambda(t)$ е известна като "отношение на Милс".

<u>Интензивност на отказите</u>. Вероятността за отказ Q в продължение на време x /при условие, че възрастта на елемента е t/, изразена чрез разпределението F на времето на живот τ, ще се запише /формула (4_1)/ като:

$$(7) \qquad Q(t,x) = \frac{F(t+x) - F(t)}{\overline{F}(t)}$$

Вероятността (7) се получава от (4_1), като заместим P с $\overline{F}$. Ако разделим (7) на x и оставим $x \to 0$, ще получим (5). Следователно отношението (7) характеризира /при фиксирано t/ честотата на отказите. Затова Q се нарича още функция на интензивността на отказите.

На практика са интересни такива разпределения $F(x)$, за които при фиксирано $x^{(?)}$ е монотонна функция на t. Ако Q расте при t растящо, разпределението $F(x)$ се нарича разпределение с растяща функция на интензивност или накратко РФИ-разпределение. Тъй като интензивността на отказите при едно РФИ-разпределение расте с времето, то се нарича още и стареещо разпределение. Много от наблюдаваните на практика елементи /материали, структури и устройства/ с течение на времето се износват, "стареят", така че е естествено да се разглеждат и РФИ-разпределения.

Експоненциално разпределение. Измежду всички възможни разпределения $F(x)$ за продължителност на живот най-важно по теоретични и практически съображения е експоненциалното. При разглеждане на един елемент казахме, че през нормалния период на работа опасността за отказ $\lambda(t)$ е почти постоянна величина. По това съображение за широк клас от елементи може да приемем

$$\lambda(t) = \lambda = \text{константа.}$$

Наистина такъв елемент с постоянна интензивност на откази ще бъде нестареещ, което практически не е достоверно, но все пак този случай играе основна роля. Причината за това е, че при някои доста общи и приемливи предположения разпределението на времето между отказите на системите се приближава към експоненциалното, отговарящо на случая $\lambda(t)=\lambda$.

2. Разпределения с растяща функция на интензивност /РФИ-разпределения/

В този раздел ще разгледаме класа на разпределенията $F(x)$, при които интензивността на отказите $\lambda(t)$ е монотонна. В същност този клас се състои от два подкласа: РФИ-разпределения и НФИ-разпределения, отговарящи съответно на растяща и намаляваща интензивност на отказите.

Класът на РФИ-разпределенията представлява особен интерес, понеже повечето елементи, структури и устройства с времето се износват - "стареят". Същото се отнася и за класа на НФИ-разпределенията, при които интензивността на отказите е намаляваща. Такава интензивност наистина се наблюдава и е свързана със заздравяването на някои материали и с така нареченото нарастване на сложни системи.

Едно РФИ-разпределение се определя от това, дали вероятността

$$Q(t,x)$$

е растяща относно t при фиксирано x.

Понякога е полезно да характеризираме РФИ-разпределението чрез функцията $\lambda(t)$ - опасност за отказ.

Ще покажем, че ако разпределението $F(t)$ има плътност $f(t)$ и $F(0-)=0$, то F е РФИ-разпределение тогава и само тогава, когато $\lambda(t)$ е растяща /намаляваща/.

Нека $\lambda(t)$ е растяща функция. Тогава за $t_1<t_2$ имаме

$$\lambda(t_1) \leqq \lambda(t_2)$$

/или обратното неравенство при намаляваща $\lambda(t)$/, следователно

$$\int_0^x \lambda(t+t_1)\,dt \leqq \int_0^x \lambda(t+t_2)\,dt$$

/или обратното неравенство/, откъдето

$$\exp\left(-\int_{t_2}^{t_2+x} \lambda(t)\,dt\right) \leqq \exp\left(-\int_{t_1}^{t_1+x} \lambda(t)\,dt\right)$$

/или $\geqq$ /. От представянето $(6),1$ на $P(t)$, понеже $F(t)=1-P(t)$, ще намерим неравенството

$$(8) \qquad \frac{F(t_2+x)-F(t_2)}{\bar F(t_2)} \geqq \frac{F(t_1+x)-F(t_1)}{\bar F(t_1)}$$

/или обратното неравенство/, т.е. $Q(t_1) \leq Q(t_2)$. Обратно, ако (8) е изпълнено, то разделяйки го на x, при $x \to 0$ ще получим $\lambda(t_1) \leqq \lambda(t_2)$.

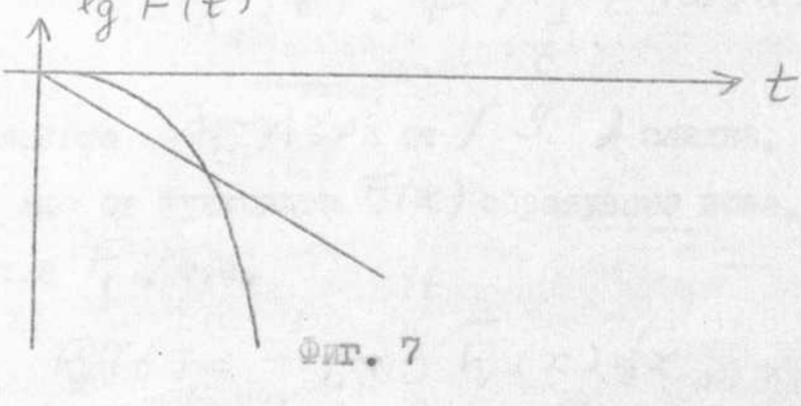
Ето едно необходимо и достатъчно условие едно разпределение да бъде РФИ:

Разпределението F е РФИ, ако функцията $\lg \bar F(t)$ е вдлъбната* /изпъкнала/ за всички $t \geqq 0$, за които $F(t) < 1$. И обратно, от вдлъбната /изпъкнала/ $\lg \bar F(t)$ следва, че F е РФИ-разпределение.

Наистина нека F е РФИ-разпределение. Да положим $\lg \bar F = -R$, където R е отрицателна функция. Тогава

$$Q(t,x) = \frac{F(t+x)-F(t)}{\bar F(t)} = 1 - \exp\{-[R(t+x)-R(t)]\}$$

и Q ще расте /намалява/ едновременно с разликата $R(t+x)-R(t)$ за всяко x. Но ако тази разлика расте /намалява/, като разделим на x и оставим $x \to 0$, ще получим, че R' също расте /намалява/. Следователно F е РФИ /или НФИ/ разпределение тогава и само тогава, когато $R(t)$ е вдлъбната /изпъкнала/.



Фиг. 7

---

* Ако за една функция φ съществува втора производна и $\varphi'' \leqq 0$ $(\geqq 0)$, тя е вдлъбната /изпъкнала/.

Итерационни РФИ-разпределения.

1. Ако $F(x)$ е РФИ-разпределение, то и функцията на разпределение

$$F_1(t) = \mu_1^{-1} \int_0^t F(x)\,dx ,$$

където μ_1, е средната относно F, т.е. $\mu_1 = \int_0^\infty x\,dF(x)$, е РФИ разпределение.

Доказателство. Трябва да докажем, че производната на

$$\lambda_1(t) = F_1'/F_1 = F(t) / \int_0^\infty F(x)\,dx$$

е неотрицателна, откъдето ще следва, че опасността за отказ $\lambda_1(t)$ за F_1 е растяща. Имаме

$$\lambda_1'(t) = \left[\bar{F}' \int_t^\infty \bar{F}(x)\,dx + F^2\right] / \left[\int_t^\infty F(x)\,dx\right]^2$$

и за отношението на λ_1' към λ_1 намираме

(9) $$\lambda_1' / \lambda_1 = \lambda_1(t) - \lambda(t),$$

където $\lambda(t) = F'/\bar{F}$. По условие $\lambda(t)$ расте и следователно

$$\bar{F}_1(t) = \int_t^\infty \bar{F}(x)\,\lambda(x)\,dx \geq \lambda(t) \int_t^\infty \bar{F}(x)\,dx$$

или

$$\lambda_1(t) = \bar{F} / \int_t^\infty \bar{F}(x)\,dx \geq \lambda(t)$$

т.е. разликата $\lambda_1 - \lambda \geq 0$ и от (9) следва, че и $\lambda_1' \geq 0$.

Ако от функцията $F_1(x)$ образуваме нова, както от F определихме F_1, т.е.

$$F_2(t) = \frac{1}{\alpha_1^{(1)}} \int_0^t \bar{F}_1(x)\,dx , \quad \alpha_1^{(1)} = \int_0^\infty \bar{F}_1\,dx ,$$

то според доказаното тя ще е пак РФИ-разпределение. По същия начин може да определим $F_3(t)$:

$$F_3(t) = \frac{1}{\alpha_1^{(2)}} \int_0^t \bar{F}_2(x)\,dx$$

и т.н. Образуваме редица $F_1, F_2, \dots$ от функции на разпределение с общ член

$$(10) \qquad F_n(t) = \frac{1}{\alpha_1^{(n-1)}} \int_0^t \overline{F}_{n-1}(x)\,dx, \; n \geq 1, \; F_0 = F,$$

където $\alpha_1^{(n-1)}$ е средната относно F_{n-1}, т.е.

$$\alpha_1^{(n-1)} = \int_0^\infty \overline{F}_{n-1}(x)\,dx.$$

От свойство 1. следва следното твърдение:

Ако изходната функция F е РФИ-разпределение, то всички функции F_n, определени чрез /10/, са РФИ-разпределения. Едно разпределение от вида /10/ ще наричаме итерационно РФИ-разпределение на $F(x)$.

Функциите от вида /10/ играят роля при намирането на граничните разпределения на някои величини, когато се изследва надеждността при възстановяем елемент.

Известно е, че за едно РФИ-разпределение $F(x)$ съществуват моменти от произволен ред. Нека

$$\mu_k = \int_0^\infty x^k\,dF(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

За $F_n(x)$, определена чрез рекурентното равенство /10/, ще съществуват всички моменти, понеже е РФИ-разпределение. Да означим с $\alpha_k^{(j)}$ k-тия момент за j-тата рекурентна функция /10/:

$$\alpha_k^{(j)} = \int_0^\infty x^k\,dF_j(x).$$

При тези означения за моментите на $F(x)$ имаме

$$\alpha_k^{(0)} = \mu_k.$$

Ще докажем някои полезни неравенства между моментите $\alpha_k^{(j)}$, $k = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$ които се използват при оценка на отклонението на РФИ-разпределението от експоненциалното.

2. Ако $F(x)$ е РФИ-разпределение /или НФИ-разпределение/ и μ_k са последователни моменти на F, то за всички цели неот-

рицателни стойности на j са изпълнени неравенствата

$$(10_0) \qquad \frac{\mu_{j+1}}{(j+1)!}\,\frac{\mu_{j-1}}{(j-1)!} \leq \left[\frac{\mu_j}{j!}\right]^2$$

/или обратното неравенство при НФИ-разпределение/.

Доказателство. Да разгледаме редицата от функции на разпределение, определени с (10). Знаем, че $F_{\mathfrak{n}}(x)$ е РФИ-разпределение. Нека

$$\alpha_k^{(j)} = \int_0^\infty x^k \, dF_j(x)$$

е k-тият момент на F_j. От рекурентната връзка (10) получаваме и връзка между моментите на две последователни функции $F_j(x)$ и $F_{j-1}(x)$:

$$(11) \qquad \alpha_k^{(j)} = \frac{\alpha_{k+1}^{(j-1)}}{(k+1)\alpha_1^{(j-1)}}$$

или като приложим (11) последователно j пъти:

$$(12) \qquad \alpha_k^{(j)} = \frac{\alpha_{k+j}^{(0)}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+j)\,\alpha_1^{(j-1)}\,\alpha_2^{(j-2)}\ldots\alpha_1^{(0)}},$$

където $\alpha_k^{(0)}$ са моментите на F_0. От неравенството (10_0) за $\alpha_1^{(1)}$ и от (12) имаме

$$\alpha_1^{(1)} \leq \alpha_2^{(0)} / 2\alpha_1^{(0)} \leq \alpha_1^{(0)}$$

или

$$\alpha_1^{(1)} \leq \alpha_1^{(0)}.$$

Понеже $F_1(x)$ е също РФИ-разпределение, то аналогично неравенството ще бъде вярно и за първите моменти на F_1 и F_2, т.е. $\alpha_1^{(2)} \leq \alpha_1^{(1)}$ и т.н.

Изобщо ще имаме

$$(13) \qquad \alpha_1^{(j)} \leq \alpha_1^{(j-1)} \quad \text{за всяко } j = 1, 2, \ldots .$$

Неравенството (13), приложено за $\alpha_1^{(j)}$ и $\alpha_1^{(j-1)}$ от (12) /при $k=1$/, има вида

$$\frac{\alpha_{j+1}^{(0)}}{(j+1)!\,\alpha_1^{(j-1)}\cdots\alpha_1^{(0)}} \leqq \frac{\alpha_j^{(0)}}{j!\,\alpha_1^{(j-2)}\cdots\alpha_1^{(0)}}$$

или като заместим пак $\alpha_1^{(j-1)}$ от (12) в горното неравенство, получаваме

$$(14)\qquad \frac{\alpha_{j+1}^{(0)}}{(j+1)!\,\alpha_1^{(j-2)}\alpha_1^{(j-3)}\cdots\alpha_1^{(0)}} \leqq \left[\frac{\alpha_j^{(0)}}{j!\,\alpha_1^{(j-2)}\alpha_1^{(j-3)}\cdots\alpha_1^{(0)}}\right]^2.$$

От (12) при $k=0$, понеже $\alpha_0^{(j)}=1$, и ако вместо j пишем $j-1$, ще намерим

$$(15)\qquad \alpha_1^{(j-2)}\alpha_1^{(j-3)}\cdots\alpha_1^{(0)} = \alpha_{j-1}^{(0)}/(j-1)!\,.$$

Като заместим произведението (15) в (14) ще получим (10_0).

Неравенството (10_0) ни показва, че редицата с общ член $a_k = \lg\frac{\mu_k}{k!}$ е изпъкнала. Наистина, като логаритмуваме (10_0) намираме

$$a_k \geqq \frac{a_{k+1}+a_{k-1}}{2}$$

т.е. всеки член не е по-малък от средното аритметично на съседните си два.

От неравенствата (10_0) следва, че редицата с общ член

$$\alpha_n = \mu_{n+1}/(n+1)\mu_n$$

е монотонно намаляваща, понеже непосредствено от (10_0) получаваме $\alpha_j \geqq \alpha_{j+1}$. Тъй като $\alpha_n \geqq 0$, то винаги съществува границата

$$(16)\qquad \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\mu_{n+1}/(n+1)\mu_n = \alpha \geqq 0$$

когато μ_k са моменти на РФИ-разпределение.

3. Ако $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, то $\mu_n = n!\,\lambda^{-n}$ и за експоненциалното разпределение границата (16) ще е $\alpha=\lambda^{-1}=\mu_1$. Да намерим (16) когато F е композиция на две експоненциални разпределения с

параметри λ_1 и λ_2, т.е.

$$F(x) = \lambda_2 \int_0^x (1 - e^{-\lambda_1 (x-t)}) e^{-\lambda_2 t} dt .$$

Ако ξ е случайна величина с разпределение F, а ξ_1 и ξ_2 са независими и разпределени експоненциално, съответно с параметри λ_1 и λ_2, то n-тият момент на F е

$$\mu_n = E\xi^n = E(\xi_1 + \xi_2)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} E\xi_1^j E\xi_2^{n-j}$$

Понеже $E\xi_1^j = j!\lambda_1^{-j}$ и $E\xi_2^{n-j} = (n-j)!\lambda_2^{-(n-j)}$,

то

$$\mu_n = \sum_{j=0}^{n} n! \lambda_1^{-j} \lambda_2^{-(n-j)} = n! \frac{\mu_{11}^{n+1} - \mu_{12}^{n+1}}{\mu_{11} - \mu_{12}}, \quad \mu_{11} = \lambda_1^{-1}, \mu_{12} = \lambda_2^{-1},$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

и $\mu_n = (n+1)!\lambda^{-n}$, при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

За α_n при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ получаваме

$$\alpha_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_n} = \frac{\mu_{11}^{n+2} - \mu_{12}^{n+2}}{\mu_{11}^{n+1} - \mu_{12}^{n+1}} .$$

Да предположим $\lambda_1 < \lambda_2$, тогава $q = \mu_{12}/\mu_{11}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lambda_1^{-1} \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q^{n+1}} = \lambda_1^{-1}$$

т.е.

(17) $$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \max(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}).$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\alpha_n = \lambda^{-1}$ и следователно пак границата на α_n е равна на $\max(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1})$.

Аналогично може да се докаже следното твърдение:

У. Ако $F(x)$ е разпределение на случайна величина, която е сума от n независими и експоненциално разпределени величини съответно с параметрите $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то

(18) $$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \max(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}), \quad \alpha_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_n}.$$

където μ_n е n-тият момент на $F(x)$.

Да отбележим, че λ_k^{-1} е средната стойност на експоненциално разпределена с параметър λ_k случайна величина, така че границата (18) е максималната средна на величините, които събираме.

3. Оценка за скоростта на сходимост на една редица от итерационни функции на разпределение към експоненциалното

Някои свойства на редица от итерационни разпределения са изследвани в § 2 , ~~където е показана и сходимост към експоненциалното разпределение~~. В настоящия раздел се изследва сходимостта на редицата от итерационните разпределения $F_n(x)$ получени последователно по (10) , като се намира главния остатъчен член. По-точно доказва се следната теорема.

Теорема 1. Нека $F(x)$ е РФИ-разпределение, а

$$(19) \qquad F_n(x) = \frac{1}{\mu_1^{(n-1)}} \int_0^x \left[1 - F_{n-1}(t)\right] dt, \quad F_0 = F,$$

където $\mu_1^{(n)}$ е първият момент на F_n .

Тогава, ако $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_n} \neq 0$, $\mu_n = \int_0^\infty x^n dF(x)$, то

$$(20) \qquad F_n\left[\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_n} x\right] = 1 - e^{-x} + \frac{1-x}{n} e^{-x} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказателство. Тъй като $F_n(x)$ е РФИ-разпределение, то съществуват моменти от всеки ред. Да означим с $\mu_k^{(n)}$ k-тия момент на $F_n(x)$

$$\mu_k^{(n)} = \int_0^\infty x^k dF_n(x)$$

От рекурентната връзка (19) получаваме

$$(21) \qquad \mu_k^{(n)} = \int_0^\infty x^k dF_n(x) = \binom{n+k}{k}^{-1} \frac{\mu_{n+k}}{\mu_n}.$$

Като използуваме (21), моментите

$$a_k^{(n)} = \int_0^\infty x^k dF_n\left(\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_n} x\right)$$

на нормираното разпределение (20) ще са

$$(22) \qquad a_k^{(n)} = \left[\frac{(n+1)\mu_n}{\mu_{n+1}}\right]^k \mu_k^{(n)} = \binom{n+k}{k}^{-1} (n+1)^k \frac{\mu_{n+k}}{\mu_n} \left(\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\right)^k.$$

За по-кратко да означим с $\pi_n(k)$ израза

$$(23) \qquad \pi_n(k) = \frac{\mu_{n+k}}{\mu_n} \left(\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\right)^k$$

или

$$\pi_n(k) = \prod_{\nu=1}^{k} \tau_n(\nu),$$

където

$$(24) \qquad \tau_n(\nu) = \mu_{n+\nu}\mu_n / \mu_{n+\nu-1}\mu_{n+1}.$$

С тези означения $a_k^{(n)}$ от (22) се записва така

$$(25) \qquad a_k^{(n)} = \binom{n+k}{k}^{-1} (n+1)^k \pi_n(k).$$

Нека $b_n = \binom{n+k}{k}^{-1} (n+1)^k$, тогава

$$(26) \qquad \lim_{n\to\infty} n\left[b_n - k!\right] = -k! \frac{k(k+1)}{2}.$$

Наистина

$$b_n - k! = k! \frac{1 - \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \lg\left(1+\frac{i}{n+1}\right)\right)}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n+1}\right)}$$

$$= -k! \frac{k(k+1)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ще докажем, че

$$(27) \qquad \lim_{n\to\infty} n\left[\pi_n(k) - 1\right] = \frac{k(k-1)}{2}.$$

За множителите $\tau_n(\nu)$ от определението (6) на $\pi_n(k)$ ще покажем, че

$$(28) \qquad \tau_n(\nu) = 1 + \frac{\nu-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказателството на (28) ще проведем индуктивно. За тази цел ще използуваме, че

$$(29) \qquad \begin{aligned} \tau_n(1) &= 1 \\ \tau_n(\nu+1) &= \tau_n(\nu)\,\delta_{n+\nu-1}, \end{aligned}$$

където

$$\delta_{n+\nu-1} = \frac{\mu_{n+\nu+1}\,\mu_{n+\nu-1}}{\mu_{n+\nu}^2}.$$

Представянето (29) следва от израза (24) за $\tau_n(\nu)$.

При $\nu = 2$

$$\tau_n(2) = \delta_{n+1}$$

и за да установим (28) при $\nu = 2$ ще трябва да покажем, че

$$(30) \qquad \lim_{n\to\infty} n\left(\delta_{n+1} - 1\right) = 1.$$

Тъй като $F(x)$ е РФИ-разпределение, то редицата с общ член $\mu_n/n!$ е логаритмично изпъкнала, т.е.

$$(31) \qquad \frac{\mu_{n+2}}{(n+2)!}\,\frac{\mu_n}{n!} \leqq \left[\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)!}\right]^2.$$

От (31) следва

$$\delta_{n+1} = \frac{\mu_{n+2}\,\mu_n}{\mu_{n+1}^2} \leqq \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

или

$$(32) \qquad \delta_{n+1} = 1 + \frac{\theta_n}{n+1}, \quad 0 \leqq \theta_n \leqq 1^{*)}.$$

По условие границата $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ е различна от нула, където с α_n сме означили отношението

$$\alpha_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_n}.$$

Лесно се проверява, че

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{n+1}{n+2}\,\delta_{n+1}$$

или

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \left[\frac{1-\theta_n}{n+1} + \frac{\theta_n}{(n+1)^2}\right]\alpha_n .$$

Понеже $\alpha_n - \alpha_{n+1} \geqq 0$ и $\alpha_n \to \alpha \neq 0$, то от сходимостта на реда

$$\sum (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = \alpha,$$

следва $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 1$, което използувано в (32) ни дава (30). Следователно (28) е вярно при $\nu = 2$.

Нека (28) е вярно при някое ν. Тогава от (29) имаме

$$n[r_n(\nu+1) - 1] = n[r_n(\nu) - 1]\,\delta_{n+\nu-1} + n[\delta_{n+\nu-1} - 1]$$

и от горното равенство, като използваме (28), по индукция получаваме (28) за всяко $\nu \geqq 1$.

От (28) граничното съотношение (27) вече следва лесно. Наистина, имаме

$$n[r_n(k) - 1] = n\left[\prod_{\nu=1}^{k} r_n(\nu) - 1\right] = n\left\{\exp\left[\sum_{\nu=1}^{k} \lg\left(1 + \frac{\nu-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] - 1\right\}.$$

---

*) $\theta_n \geqq 0$ следва от неравенството на Коши-Буняковски.

Ако k е фиксирано, а n - достатъчно голямо, то

$$\lg\left(1+\frac{\nu-1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{\nu-1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

и от горното равенство получаваме

$$n\left[\pi_n(k)-1\right]=n\left[\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\nu-1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{k(k-1)}{2}+O(1)$$

т.е. (27).

Сега ще покажем, че моментите (25) имат следното асимптотично представяне

(33) $$a_k^{(n)}=k!\left[1-\frac{k}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

За да получим (33) ще използуваме, че

$$a_k^{(n)}=b_n\pi_n(k).$$

Като вземем предвид (26) и (27), имаме

$$a_k^{(n)}-k!=b_n\pi_n(k)-k!=k!\left[1-\frac{k(k+1)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\times$$

$$\left[1+\frac{k(k-1)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]-k!=k!\left[1-\frac{k}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

От (33) с умножаване на $(-S)^k$ намираме

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a_k^{(n)}(-S)^k-\frac{1}{1+S}=-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}k(-S)^k+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

или

(34) $$f_n(S)-\frac{1}{1+S}=\frac{S}{n(1+S)^2}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

където $f_n(S)$ е Лаплас-Стилтесовата трансформация на $F_n(\alpha_n x)$.

Равенството (34) ни дава (20).

За едно РФИ-разпределение F видяхме, че итерационните функции, определени от равенството

$$(35)\qquad F_n(x) = \frac{1}{\alpha_1^{(n-1)}} \int_0^x \overline{F}_{n-1}(t)\,dt, \quad n \geqq 1$$

са също РФИ-разпределения. Освен това опасностите за отказ $\lambda_1(t)$ и $\lambda(t)$ /съответно при F_1 и $F_0 = F$ /удовлетворяват неравенството $\lambda_1(t) \geqq \lambda(t)$ за всяко $t \geqq 0$.

Опасността за отказ $\lambda_1(t)$ при първото итерирано РФИ-разпределение е

$$\lambda_1(t) = \overline{F} / \int_t^\infty \overline{F}\,dx.$$

Полезно е да намерим една оценка отгоре за $\lambda_1(t)$. В сила е следната теорема.

Теорема 2. Ако $F(x)$ е РФИ-разпределение, за всяко $t \geqq 0$ и $k = 1, 2, \ldots$ е вярно неравенството

$$(36)\qquad \lambda_k(t) = \overline{F}_k / \int_t^\infty \overline{F}_k(x)\,dx \leqq \alpha^{-1},$$

където $\alpha = \lim \mu_{n+1} / (n+1)\mu_n$ и μ_n е n-тият момент на F.

Доказателство. Знаем, че щом F е РФИ-разпределение и функцията F_1, определена от (35), е РФИ-разпределение, за опасността за отказ $\lambda_2(t)$ на $F_2(x)$ ще имаме $\lambda_2(t) \geqq \lambda_1(t)$ по същите съображения, поради които $\lambda_1(t) \geqq \lambda(t)$. Изобщо

$$\lambda_n(t) \geqq \lambda_{n-1}(t) \geqq \ldots \geqq \lambda_1(t),$$

където всяко $\lambda_k(t)$ е ненамаляваща функция на t като опасност за отказ при стареещо разпределение $F_k(t)$. Функцията $\lambda_n(t)$ чрез съответното итерационно разпределение е

$$(37)\qquad \lambda_n(t) = \overline{F}_n(t) / \int_t^\infty \overline{F}_n(x)\,dx.$$

Според теорема 2 функцията

$$C_n(t) = F_n(\alpha_n t), \quad \alpha_n = \mu_{n+1} / (n+1)\mu_n$$

клони към $1-e^{-t}$, когато $n\to\infty$. При това, ако $\beta_n\to\beta$, то $C_n(\beta_n t)\to 1-e^{-t}$. Тъй като $\alpha_n\geqq\alpha_{n+1}$, то $\alpha_n t/\alpha_{n+1}\geqq t$ и поради монотонността на λ_n ще имаме

$$\lambda_n\left(\frac{\alpha_n t}{\alpha_{n+1}}\right)\geqq\lambda_n(t)$$

или

$$(38_0)\qquad \lambda_n\left(\frac{\alpha_n t}{\alpha_{n+1}}\right)\geqq\lambda_1(t)$$

Да вземем $\beta_n=1/\alpha_{n+1}$. Тогава

$$(38)\qquad \bar{C}_n(\beta_n t)=\bar{F}_n\left(\frac{\alpha_n t}{\alpha_{n+1}}\right)\to e^{-t/\alpha},\quad n\to\infty$$

и за интеграла

$$J_n(t)=\int_{\alpha_n t/\alpha_{n+1}}^{\infty}\bar{F}_n(x)\,dx=\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\int_t^{\infty}\bar{F}_n\left(\frac{\alpha_n x}{\alpha_{n+1}}\right)dx$$

ще имаме границата

$$(39)\qquad \lim_{n\to\infty}J_n(t)=\lim_{n\to\infty}\int_t^{\infty}\bar{C}_n(\beta_n u)\,du=\int_t^{\infty}e^{-u/\alpha}\,du=e^{-t/\alpha}.$$

В (39) сме използували граничен преход под интеграла и трябва да го обосновем. Тъй като $F_n(t)$ е РФИ-разпределение, то и $F_n\left(\frac{\alpha_n t}{\alpha_{n+1}}\right)=C_n(\beta_n t)$ ще е РФИ-разпределение. Според доказаното свойство 1, [1] на РФИ-разпределение за всяко $u>t$ имаме

$$(40)\qquad C_n(\beta_n u)\leqq\left[C_n(\beta_n t)\right]^{u/t}.$$

Нека t е фиксирано. Да изберем такова число $\varepsilon>0$, че $q=\varepsilon+e^{-t/\alpha}<1$. Тогава при всички достатъчно големи $n>n_0$ ще имаме $C_n(\beta_n t)<e^{-t/\alpha}+\varepsilon=q$ поради граничното съотношение (38). Неравенството (40) ще ни даде

$$(41)\qquad C_n(\beta_n u)<q^{u/t}$$

за всички $n>n_0$ и за всяко u, по-голямо от t. Тъй като

$q<1$, то (41) ни показва, че $C_n(\beta_n u)$ са равномерно ограничени относно n в $(0,\infty)$ от интегруема функция.

От (39) и (37) следва

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n\left(\frac{\alpha_n t}{\alpha_{n+1}}\right) = \alpha^{-1}$$

и като оставим $n\to\infty$ в неравенството (38_0), получаваме $\lambda_1(t)\leqq\alpha^{-1}$. Понеже при $n>k$ имаме $\lambda_n\geqq\lambda_k$, то същите неравенства остават верни и при всяко k.

Нека един елемент започва работа в момент $t=0$ и работи случайно време τ_1, след което излиза от строя. В случайния момент $t_1=\tau_1$ го заменяме с друг от същия тип, който работи също случайно време τ_2. В момента $t_2=\tau_2$ той се заменя с друг и т.н. Този процес може да продължава неограничено време. Естествено е да предположим, че времената на живот

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \dots,\ \tau_n,\ \dots$$

за отделните елементи са независими случайни величини с една и съща функция на разпределение $F(t)$:

$$F(t)=P(\tau_k<t),\quad k=1,2,\dots$$

Моментите на отказ /или възстановяване/ образуват един случаен процес

$$t_1=\tau_1,\quad t_2=\tau_1+\tau_2,\ \dots,\ t_n=\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_n,\ \dots$$

който се нарича случаен процес на възстановяване /казваме също, че моментите t_n образуват случаен поток/.

Тъй като такъв процес е от особен интерес за теорията на надеждността и е възникнал при разглеждането на въпроси от практиката на изследване характеристиките за надеждност, ще отделим повече внимание за неговото разглеждане.

Нека $t\geqq 0$ е произволно число. Дефинираме случайната величина N_t с равенството

$$N_t=\max(n: t_n<t),$$

т.е. N_t е най-голямото естествено число n, за което е изпълнено неравенството $\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_n<t$. Числото N_t за фиксирано t ще бъде различно при различни реализации на процеса $\{t_n\}$, но винаги

$$\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_{N_t}<t\ ,\quad \tau_1+\tau_2+\dots+\tau_{N_t+1}\geqq t.$$

Ясно е, че N_t представлява един случаен процес, дефиниран при $t\geq 0$ и приемащ само целочислени стойности /при фиксирано t е някое от числата 0, I, 2, .../. При избрано t величината N_t дава броя на възстановяванията, които могат да се случат до момента t.

Да означим с

$$P_n(t)=P(N_t=n)$$

вероятността в интервала $[0,t)$ да има точно n възстановявания на процеса $\{t_n\}$. Ще докажем, че $P_n(t)$ удовлетворяват рекурентните съотношения

$$(42)\qquad \begin{aligned} &P_0(t)=1-F(t)\\ &P_n(t)=\int_0^t P_{n-1}(t-x)\,dF(x). \end{aligned}$$

Първото равенство в (42) е очевидно. При доказателството на второто ще забележим, че за да има в $[0,t)$ точно n възстановявания, е необходимо и достатъчно първото възстановяване да се е случило в кой да е момент x между 0 и t и за останалото време $t-x$ да настъпят точно $n-1$ възстановявания. Вероятността на едно съставящо елементарно събитие е $P_{n-1}(t-x)\,dF(x)$ и (42) следва от формулата за пълната вероятност след сумиране на всички елементарни събития за x от 0 до t.

Ако $t_1<t_2$ са две стойности на t, очевидно разликата $N_{t_2}-N_{t_1}$ дава броя на възстановяванията в интервала $[t_1,t_2)$. Всяка траектория на N_t е растяща стъпаловидна функция на t.

Функция на възстановяването $H(t)$. Средната стойност на случайния процес N_t

$$(43_0)\qquad H(t) = EN_t = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(N_t = k)$$

се нарича функция на възстановяването. Тя дава средния /очакван/ брой възстановявания /замени/ за време t и затова е от особен интерес. Повечето от приложенията на теорията на възстановяването са свързани с функцията $H(t)$.

<u>Бъдещо остатъчно време V_t</u>. Дефинира се с равенството

$$V_t = t_{N_t+1} - t$$

и дава времето от t до момента на първата замяна след t. Понякога V_t се нарича остатъчно време на живот на елемента, работещ в момента.

Разпределение на остатъчното време V_t. Функцията на разпределение на случайната величина V_t може да бъде изразена чрез дадената функция на разпределение $F(x)$. Разпределението е следното:

$$(43)\qquad P(V_t < x) = F(t+x) - F(t) + \int_{0-}^{\infty} [F(t-u+x) - F(t-u)]\, dH(u)$$

Доказателство. Разпределението се намира непосредствено от дефиницията на величината V_t. Събитието $\{V_t < x\}$ може да се осъществи по два взаимно изключващи се начина:

1/ $t \leqq \tau_1 < t + x$ т.е. в интервала $[t, t+x)$ има едно възстановяване;

2/ в момента $\tau < t$ има възстановяване; времето до следващото възстановяване е в интервала от $t-\tau$ до $t-\tau+x$.

Като имаме пред вид събитията от 1/ и 2/, по формулата за пълната вероятност получаваме (43).

4. ОЦЕНКИ ЗА ФУНКЦИЯТА НА ВЪЗСТАНОВЯВАНЕ ПРИ РФИ-РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

Определянето на $H(t)$ от уравнението на възстановяване не винаги е лесно; затова и има асимптотично приближение на $H(t)$ при голямо t.

Понякога са полезни и оценки за $H(t)$, верни за всички стойности на t. Ще изведем някои от тях, които играят роля при надеждностните характеристики и се отнасят предимно за стареещи разпределения.

Теорема 3. Нека $F(x)$ е произволно РФИ-разпределение, μ_n – n-тият момент и $H(t)$ е функцията на възстановяване за $F(t)$. Тогава за всяко $t \geqq 0$

$$0 \leqq \frac{t}{\mu_1} - H(t) \leqq 1 - \alpha/\mu_1, \tag{44}$$

където

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \mu_{n+1}/(n+1)\mu_n$$

Доказателство. Тъй като $F(x)$ е РФИ-разпределение, функцията

$$Q(t,x) = \frac{F(t+x) - F(t)}{\bar{F}(t)}$$

е ненамаляваща относно t при фиксирано $x \geqq 0$. Нека N_t е броят на възстановяванията в $[0,t)$ за процес на възстановяване, определен чрез $F(x)$. Случайната величина $V_t = t_{N_t+1} - t$, където t_{N_t+1} е първият отказ след t, има разпределение

$$P(V_t < x) = F(t+x) - F(t) + \int_{0-}^{t} [F(t-u+x) - F(t-u)]\,dH(u) \tag{45}$$

От (45), понеже $Q(t,x)$ не намалява по t, получаваме

$$P(V_t < x) \leqq Q(t,x) \int_{0-}^{t} \bar{F}(t-u)\,dH(u) + Q(t,x)\bar{F}(t) = Q(t,x) \tag{46}$$

От определението на случайната величина V_t и тъждеството на Валд имаме

$$EV_t = \mu_1[EN_t + 1] - t$$

или

$$\frac{t}{\mu_1} - H(t) = 1 - \mu_1^{-1} EV_t, \quad EN_t = H(t). \tag{47}$$

Ще оценим средната стойност на V_t. Като използуваме неравенството (46), за EV_t получаваме оценка отдолу

$$EV_t = \int_0^\infty [1 - P(V_t < x)]\,dx \geq \int_0^\infty [1 - Q(t,x)]\,dx$$

Интегралът от дясната страна на горното неравенство е

$$\int_0^\infty [1 - Q(t,x)]\,dx = \bar{F}^{-1}(t) \int_0^\infty [\bar{F}(t) - F(t+x) + F(t)]\,dx$$

$$= \bar{F}^{-1}(t) \int_t^\infty \bar{F}(x)\,dx$$

Следователно

(48) $$EV_t \geq \int_t^\infty \bar{F}(x)\,dx \,/\, \bar{F}(t)$$

и според доказаното неравенство за опасностите за отказ при итерационните РФИ-разпределения на F отношението в дясната част на (48) надхвърля $\alpha = \lim_{n\to\infty} \mu_{n+1}/(n+1)\mu_n$. Така че

(49) $$EV_t \geq \alpha$$

Неравенството (49), използувано в (47), ни дава търсената отгоре оценка (44). Това, че оценката отдолу е нула, се вижда по следния начин:

Тъй като $F(x)$ е РФИ-разпределение, то и функцията

$$F_1(t) = \mu_1^{-1} \int_0^t \bar{F}(x)\,dx$$

е РФИ-разпределение /свойство на РФИ-разпределението/ и в такъв случай ще бъде изпълнено неравенството

(50) $$F_1(t) = \mu_1^{-1} \int_0^t \bar{F}(x)\,dx \geq F(t)$$

Ако $H_1(t)$ е функцията на възстановяване за процеса $\{t_n^{(1)}\}$ с ф.р. $F_1(x)$, т.е. $H_1(t) = F_1 + F_*^{(2)} + F_*^{(3)} + \cdots$, то от неравенството (50) следва

(51) $$H_1(t) = F_1 + F_*^{(2)} + \cdots \geq F + F_*^{(2)} + \cdots = H(t)$$

Функцията $H_1(t)$ е t/μ_1, понеже уравнението

$$H_1(t) = F_1(t) + H_1(t) * F(t)$$

решено чрез лапласовите трансформации $h_1(s)$ и $f_1(s)$ на H_1 и

F_1 . дава

$$h_1(s) = \frac{f_1(s)}{1-f(s)} = \frac{1}{s\mu_1}$$

Тук сме използували, че $f_1 = (s\mu_1)^{-1}(1-f)$, където $f(s)$ е лапласовата трансформация на $F(x)$. Неравенството (51) дава $\frac{t}{\mu_1} = H_1(t) \geq H(t)$ т.е. лявата страна на (44).

Следващата теорема дава една оценка на отклонението на функцията $H(t)$ от $\frac{t}{\mu_1}$ чрез първите два момента на F , μ_1, μ_2.

Теорема V . Ако $F(x)$ е РФИ-разпределение, а $H(t)$ съответната й функция на възстановяване (43_0), то

$$(52)\qquad \sup_{t\geq 0}\left(\frac{t}{\mu_1} - H(t)\right) \leq 1 - \frac{\sigma}{\mu_1}\,,\quad \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2,$$

където μ_1 и μ_2 са първия и втория момент на F . Оценката (52) е точна и равенството се достига при разпределението

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq \mu_1 - \sigma \\ 1 - \exp\{-(x-\mu_1+\sigma)/\sigma\}, & x > \mu_1 - \sigma \end{cases}$$

Доказателство. Нека $F \in R$ и $X_1, X_2, \dots$ са независими и еднакво разпределени случайни величини с функция на разпределение $F(x)$.Да разгледаме случайната величина

$$(53)\qquad V_t = t_{N_t+1} - t \qquad t \geq 0 ,$$

където $N_t = \max\{n : t_n = X_1 + \dots + X_n < t\}$. Величината V_t се ~~нарича~~ те бъдещо остатъчно време. По тъждеството на Валд от (53), като вземем предвид $EN_t = H(t)$, следва

$$(54)\qquad \frac{t}{\mu_1} - H(t) = 1 - \frac{EV_t}{\mu_1}.$$

Тъй като $\frac{t}{\mu_1} - H(t) \geq 0$, когато $F \in R$,/вж. теорема 3 /, то от равенството (54) се вижда, че за да докажем (52) достатъчно е да намерим $\inf_{t\geq 0} EV_t$. Ще докажем че

$$(55)\qquad \inf_{t\geq 0} EV_t = \sqrt{\mu_2 - \mu_1^2}.$$

---

*) R означава съвкупността от РФИ-разпределения

За тази цел да означим с $P_t^k(x)$ вероятността за точно k възстановявания в интервала $(t, t+x)$ за процеса $\{X_n\}$. По формулата за пълната вероятност имаме

$$(56)\qquad P_t^k(x) = \int_0^x P(N_t = k-1)\, dV_t(x), \quad V_t(x) = P(V_t < x)$$

От (56) получаваме

$$(57)\qquad \int_0^\infty e^{-sx} P_t^k(x)\, dx = v_t(s) \frac{1-f(s)}{s} f^{k-1}(s),$$

където $f(s)$ и $v_t(s)$ са Лаплас-стилтесовите трансформации

$$(58)\qquad f(s) = \mathcal{L}(s, F) = \int_0 e^{-sx} dF(x)$$

$$v_t(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dV_t(x).$$

Известно е [ ], че за Лаплас-Стилтесовата трансформация $\mathcal{L}(s, F)$ на произволно разпределение $F \in R$ е изпълнено неравенството

$$(59)\qquad \mathcal{L}(s, F) \geqq \frac{1}{\mu_1 s + 1}$$

Горното неравенство показва, че (58) има екстремна стойност относно функциите $F(x) \in R$, с фиксиран първи момент μ_1, и тя се достига когато $F(x)$ е експоненциално разпределение със средно μ_1. Този факт и ще използуваме.

Очевидно $$\sum_{k=0}^\infty k\, P_t^{(k)}(x) = H(t+x) - H(t)$$

и от (57) със сумиране по k следва

$$\int_0^\infty e^{-sx} H(x+t)\, dx - s^{-1} H(t) = v_t(s) \frac{1}{s(1-f(s))}$$

или

$$(60)\qquad v_t(s) = [1-f(s)] \int_0^\infty e^{-sx} dH(x+t).$$

Търсенето на оценка отдолу за EV_t отговаря на оценка отгоре за $v_t(s)$ или както следва от (60) последното е равносилно на намиране на оценка отгоре на

$$\mathcal{J}(H,t) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dH(x+t).$$

От (43_0) се вижда, че с растенето на

$$(61) \qquad G(F,t) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x+t)$$

и $\mathcal{J}(H,t)$ расте. Така че всичко се свежда до намирането на екстремума на функционала $G(F,t)$, $F\in R$, $t\geq 0$. Съвкупността $\mathcal{R}$ ще стесним като фиксираме двата първи момента на $F(x)$. По точно: разглеждаме съвкупността $\mathcal{R}_0$ на тези $F\in R$ за които μ_1 и μ_2 са едни и същи. Нека $F\in R_0$ и X е случайна величина имаща разпределение $F(x)$. Да определим величината Y_t по следния начин:

$$Y_t = \begin{cases} X-t, & X\geq t \\ 0, & X<t. \end{cases}$$

Лаплас-Стилтесовата трансформация на Y_t е

$$(62) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\, dP(Y_t<x) = \bar{F}(t)\int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x+t) + F(t)$$

Лесно се проверява, че разпределението на Y_t принадлежи на $\mathcal{R}$ и следователно лявата страна на (62) ще е максимална когато

$$(63) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\, dP(Y_t<x) = \frac{1}{sEY_t+1}.$$

Чрез (62) непосредствено се проверява, че имаме равенството (63) когато разпределението на Y_t е

$$(64) \qquad F_0(x) = \begin{cases} 0, & x\leq t \\ 1-\exp\{-(x-t)/EY_t\}, & x>t. \end{cases}$$

Освен това при $F=F_0$ равенството (62) е

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, dP(Y_t<x) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF_0(x+t) = G(F_0,t)$$

и следователно

$$\bar{F}(t)G(F,t) + F(t) \leq G(F_0,t).$$

Тъй като $G(F,t) \leq 1$, от последното неравенство получаваме

$$(65) \qquad \sup_{F \in R} G(F,t) = G(F_0,t).$$

Да стесним съвкупността R до R_0 като фиксираме μ_1 и μ_2 . Тогава от уравненията

$$-\mathcal{L}'(0,F_0) = \mu_1$$
$$\mathcal{L}''(0,F_0) = \mu_2$$

получаваме

$$EY_t + t = \mu_1$$
$$2(EY_t)^2 + 2tEY_t + t^2 = \mu_2$$

и от тях определяме t и EY_t

$$t = \mu - \sigma$$
$$EY_t = \sigma.$$

Да означим с t_0 разликата $t_0 = \mu - \sigma$. От (65) имаме

$$\sup_{F \in R_0} G(F,t) = G(F_0,t)$$

и следователно, ако H_0 е функцията на възстановяване, получена за F_0 , то ще имаме и

$$(66) \qquad \sup_{F \in R_0} \mathcal{J}(H,t) = \mathcal{J}(H_0,t)$$

Тогава от (60) и (66) получаваме

$$(67) \quad V_t(s) = [1-f(s)]\,\mathcal{J}(H,t) \leq [1-f(s)]\,\mathcal{J}(H_0,t_0).$$

Непосредствено се пресмята, че

$$\mathcal{J}(H_0,t_0) = (\sigma s+1)^{-1}\left[\mu_1 s + \mu_2 \frac{s^2}{2} + o(s^2)\right].$$

Тъй като $V_t(s)$ и $\dfrac{1-f(s)}{s\mu_1}$ са трансформации на функции на разпределение, то от (67) следва

$$\lim_{s\downarrow 0}\frac{V_t(s)-1}{s}=\lim_{s\downarrow 0}\left[\frac{1-f(s)}{s\mu_1}-1\right]s^{-1}+\lim_{s\downarrow 0}\frac{s\mu_1 J(H,t)-1}{s}$$

което взето в предвид ни дава, като използуваме неравенството (67), оценката

$$(68)\qquad V_t'(0)\leq\lim_{s\downarrow 0}\left[\frac{1-f(s)}{s\mu_1}-1\right]s^{-1}+\lim_{s\downarrow 0}\frac{s\mu_1 J(H_0,t_0)-1}{s}$$

Двете граници от дясната страна на (68) са

$$\lim_{s\downarrow 0}\left[\frac{1-f(s)}{s\mu_1}-1\right]s^{-1}=-\frac{\mu_2}{2\mu_1}$$

$$\lim_{s\downarrow 0}\left[s\mu J(H_0,t_0)-1\right]s^{-1}=-\sigma+\frac{\mu_2}{2\mu_1}.$$

Така че от (68) получаваме окончателно

$$EV_t=-V_t'(0)\geq\sigma$$

т.е. оценката (55). Тази оценка заместена в (54) ни дава (52).

От самото доказателство на (52) се вижда, че в (52) имаме равенство когато $H=H_0$ или все едно, когато $F=F_0$. Да отбележим, че при стесняването на съвкупността $\mathcal{R}$ като фиксираме три последователни първи момента на $F(x)$ не може да се получи друга по-добра оценка от намерената. Добавянето на още едно ограничение /фиксирането и на третия момент/ води до неопределеност при определянето на параметрите на разпределението на съответната величина Y_t, за което разпределение ще искаме (63) да е максимално. Освен това, вижда се че и границата на $[V_t(s)-1]s^{-1}$ зависи само от μ_1 и μ_2. Така че третият момент не играе роля.

Да отбележим, че при доказателството на горната теорема получихме и следния сам по себе си интересен факт:

Следствие: Ако V_t е бъдещо остатъчно време при процес на възстановяване определен от РФИ-разпределение, то средната стойност на V_t удовлетворява неравенството

$$\sigma \leqq E V_t \leqq \mu_1$$

5. Оценки за отклонението на РФИ-разпределение от експоненциалното

В този раздел ще намерим оценки на максималната разлика между едно стареещо разпределение $F(x)$ и експоненциалното.

Теорема 5. Нека $F(x)$ е РФИ-разпределение и μ_n, $n \geqq 1$, са последователните моменти на $F(x)$; тогава

$$\sup_{x \geqq 0} \left| \bar{F}(x) - e^{-x/\mu_1} \right| \leqq 1 - \alpha/\mu_1, \tag{69}$$

където $\alpha = \lim_{n \to \infty} \mu_{n+1}/(n+1)\mu_n$. Оценката се достига за експоненциално разпределение със средна μ_1.

Доказателство. Границата α винаги съществува, щом $F(x)$ е стареещо разпределение. Това показахме в 3. Първо ще оценим разликата между $F(x)$ и първото итерационно РФИ-разпределение $F_1(x)$ на $F(x)$, т.е.

$$\Delta_1(x) = F_1(x) - F(x), \qquad F_1(x) = \mu_1^{-1} \int_0^x \bar{F}(t)\,dt.$$

Функцията $\Delta_1(x)$ е неотрицателна за всяко $x \geqq 0$. Наистина $F_1(x)$ е РФИ-разпределение и опасността за отказ

$$\lambda_1(t) = \bar{F}(t) \Big/ \int_t^\infty \bar{F}(x)\,dx$$

при продължителност на живот, разпределена $F_1(x)$ е намаляваща. Следователно $\lambda_1(t) \geqq \lambda_1(0)$ или

$$\mu_1^{-1} \int_0^x \bar{F}(t)\,dt \geqq F(x).$$

Нека $H(t)$ е функцията на възстановяване, определена от $F(x)$, т.е. определена от уравнението

$$H(t) = F(t) + H(t) * F(t) \tag{70}$$

Лесно се проверява тъждеството

$$\mu_1^{-1} t = F_1(t) + F(t) * (\mu_1^{-1} t). \tag{71}$$

Ако от (71) извадим съответните страни на (70), получаваме, че разликата $\Delta_1(t)$ удовлетворява уравнението

$$\frac{t}{\mu_1} - H(t) = \Delta_1(t) + F(t) * \Delta(t), \qquad \Delta(t) = \frac{t}{\mu_1} - H(t)$$

и понеже $\frac{t}{\mu_1} - H(t) \geqq 0$, то от горното уравнение следва

$$(72) \qquad \sup_{t\geqq 0} \Delta_1(t) \leqq \sup_{t \geqq 0}\left[\frac{t}{\mu_1} - H(t)\right]$$

Да оценим сега разликата $\Delta(t) = E(t) - F(t)$, където $E(t) = 1 - \exp(-\frac{t}{\mu_1})$. Тъй като

$$E + E * t/\mu_1 = F_1 + F * t/\mu_1$$

/понеже и двете суми са равни на t/μ_1/, то $\Delta(t)$ ще удовлетворява уравнението

$$(73) \qquad \Delta(t) + \mu_1^{-1}\int_0^t \Delta(x)\,dx = F_1(t) - F(t).$$

Знаем от [ ], че за всяко РФИ-разпределение функцията $\lg \bar{F}(t)$ е изпъкнала /отгоре/. Затова $\Delta(t)$ ще пресича абцисата само един път, и то отгоре надолу. Ако t_0 е точката на пресичане, при $t \leqq t_0$ имаме $\Delta(t) \geqq 0$ и от (69) получаваме

$$(74) \qquad \Delta(t) \leqq F_1 - F = \Delta_1(t), \quad t \leqq t_0$$

Като използваме (72) и (74), горното неравенство ни дава

$$(75) \qquad \sup_{0 \leqq t \leqq t_0} \Delta(t) \leqq \sup_{t \geqq 0} \Delta_1(t) \leqq 1 - \alpha\mu_1^{-1}$$

Да разгледаме стойностите на t, по-големи от t_0. Тъй като след t_0 функцията $\Delta(t)$ е отрицателна то

$$(76) \qquad 0 \leqq \int_0^t \Delta(x)\,dx \leqq \int_0^{t_0} \Delta(x)\,dx.$$

Стойността на интеграла от $\Delta(x)$ е винаги неотрицателна, защото $\int^{\infty} \Delta(x)\,dx = 0$ и отначало $\Delta(x)$ е положителна, а после отрицателна функция.

От уравнението (73), понеже $F_1 - F \geqq 0$, следва за $t > t_0$ неравенството

$$-\Delta(t) \leqq \mu_1^{-1} \int_0^t \Delta(x)\,dx$$

и като използуваме (76),

(77) $$-\Delta(t) \leqq \mu_1^{-1} \int_0^{t_0} \Delta(x)\,dx\,, \quad t > t_0\,.$$

Но за $x \in (0, t_0)$ според (74) $\Delta(x) \leqq \Delta_1(x)$. Да заменим подинтегралната функция $\Delta(x)$ отдясно на неравенството (77) с $\Delta_1(x)$. Тогава

(78) $$-\Delta(t) \leqq \mu_1^{-1} \int_0^{t_0} \Delta_1(x)\,dx \leqq \mu_1^{-1} \int_0^{\infty} \Delta_1(x)\,dx = 1 - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\,.$$

От друга страна, от граничното съотношение

$$\lim_{t \to \infty} \left[\frac{t}{\mu_1} - H(t)\right] = 1 - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}$$

и от (78) следва, че

(79) $$-\Delta(t) \leqq \sup_{t \geqq 0} \left[\frac{t}{\mu_1} - H(t)\right], \quad t > t_0\,.$$

Неравенствата (75) и (79) ни дават

(80) $$\sup_{t \geqq 0} |\Delta(t)| \leqq \sup_{t \geqq 0} \left[\frac{t}{\mu_1} - H(t)\right]$$

Дясната страна на горното неравенство според (74) не превишава $1 - \alpha\mu_1^{-1}$.

Ако $F(x)$ е несобственото разпределение, съсредоточено в μ_1, то $\mu_n = \mu_1^n$, $\alpha_n = 1/(n+1)\mu_1$, за α получаваме $\alpha = 0$ и дясната страна на (69) е равна на I. В този случай $H(t)$ е стъпаловидна функция с точки на растеж, кратни на μ_1, и скокове, равни на единица. В точките $t = k\mu_1$ разликата $\frac{t}{\mu_1} - H(t)$ е също I.

Неравенството (80) и теорема 4 ни дават възможност да формулираме като следствие от тях и следната теорема.

Теорема 6 . Нека $F(x)$ е РФИ-разпределение и μ_1 , μ_2 са съответно първият и вторият моменти на $F(x)$. Тогава

$$(81) \qquad \sup_{x \geq 0} \left| \bar{F}(x) - e^{-\frac{x}{\mu_1}} \right| \leqq 1 - \frac{\sigma}{\mu_1}$$

Резултатът (81) ми бе съобщен от А.Д. Соловьев, като получен в отговор на поставен преди това от него въпрос за оценка на разликата $\bar{F} - e^{-x/\mu_1}$. Оценката (81) се използува при доказване на асимптотична експоненциалност на времената за достигане на дадено състояние при работещи системи със зависими елементи. По-подробно това ще видим в следващата глава.

Г Л А В А II

Н А Д Е Ж Д Н О С Т Н А С И С Т Е М И

I. ЕДИН РАБОТЕЩ ЕЛЕМЕНТ. ХАРАКТЕРИСТИКА. Проста замяна на един елемент. Нека след отказа на един елемент да го заменим с нов, еднотипен на него. Предполагаме, че при замяната времето, което губим, е пренебрежимо малко в сравнение с продължителността на живот С други думи, ще предполагаме, че замяната става мигновено. Елементът, с който го заменяме, може и да не е нов, но е бил подложен на такъв ремонт, при който смятаме, че всички негови първоначални свойства са възстановени и може да го смятаме като нов. Смисълът на това е, че продължителността на живот на такъв един елемент има същата вероятностна закономерност, както на един нов от същия тип.

Нека елементът започва работа в момента $t=0$ и след като е работил случайно време τ_1, се заменя с нов, който, работейки време τ_2, отказва и се заменя пак с нов и т.н. Този процес може да продължава неограничено. Според нашите приемания естествено е да предположим, че случайните величини τ_1, $\tau_2, \dots, \tau_n, \dots$, са независими и еднакво разпределени с функция на разпределение $F(t)$:

$$F(t) = P(\tau_k < t), \quad k=1,2,\dots$$

Предполагаме, че $F(t)$ има непрекъсната производна $f(t)=F'(t)$ и че съществуват средната продължителност на живот и дисперсията

$$a = E\tau_k = \int_0^\infty \bar{F}(t)\,dt$$

$$\sigma^2 = D\tau_k = 2\int_0^\infty t\,\bar{F}(t)\,dt.$$

Важна характеристика на процеса на възстановяване, образуван от моментите на отказ, е броят на отказите N_t в интервал $[0,t)$. Знаем, че

$$P(N_t \geqq n) = F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-x)\,dF(x) \quad , \; F_1 = F.$$

Средната стойност на N_t е функцията на възстановяване за $F(x)$ /сравни с / 43. I, 14. I //

$$EN_t = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) = H(t),$$

която удовлетворява уравнението на възстановяване / 40 /.

Познаването на вероятностите $P(N_t \geqq n)$ е полезно например за намиране на най-малкия брой запасни елементи n, които със зададена вероятност да са достатъчни за време t. Нека да търсим n, така че с вероятност, по-голяма от $1-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, броят на отказите да не надхвърля n, т.е.

$$P(N_t < n) \geqq 1-\varepsilon$$

или $P(N_t \geqq n) < \varepsilon$. Понеже $P(N_t \geqq n) = F_n$, като знаем F, намираме n-кратната ѝ композиция F_n и от $F_n < \varepsilon$ определяме n.

Надеждност при възстановяване на елемент в даден интервал от време. Да разгледаме следната важна задача:

Каква е вероятността за това, един елемент /от поредицата заменени/ да работи безотказно в даден интервал от време $[t, t+\tau)$.

Нека $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$,са продължителностите на живот, а $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ са моментите, в които стават замените. Вероятността, която търсим, нека означим с $P_t(\tau)$. Да разгледаме несъвместимите събития

$$A_0 = \{t+\tau < \tau_1\}, \; A_n = \{t_n < t < t+\tau < t_n + \tau_{n+1}\}, \; n \geqq 1$$

Събитието A_n означава, че до момента t има точно n

отказа $(t_n < t)$ и в интервала $(t, t+\tau)$ няма откази $(t+\tau < t_n + \tau_{n-1})$. Тогава събитието B /безотказна работа в интервала $(t, t+\tau)$/ е сума на събитията A_n

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n .$$

Понеже A_n са несъвместими, то

$$P_t(\tau) = P(B) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$$

и за да намерим търсената вероятност, трябва да пресметнем вероятностите $P(A_n)$. Ако $F(x)$ е общото разпределение на величините τ_k, по формулата за пълната вероятност имаме

$$(1) \quad P(A_n) = \int_0^t P\{x \le t_n < x+dx\} P(\tau_{n+1} > t+\tau-x)$$

$$= \int_0^t [1 - F(t+\tau-x)] f_n(x) dx ,$$

което се получава, като вземем условните вероятности на A_n, при условие, че $t_n = x$, т.е. t_n взема стойност в интервала $(x, x+dx)$, вероятността за което е $f_n(x)$, $f_n = F_n'$.

Като вземем пред вид, че $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n'(x)$, $h(x)$ е производната на функцията $H(x)$ (43_0), която означихме с $h(x)$, ще получим, като сумираме

$$(2) \quad P_t(\tau) = P(A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 1 - F(t+\tau)$$

$$+ \int_0^t [1 - F(t+\tau-x)] h(x) dx .$$

Формулата (2) не е удобна за практически пресмятания. Ако предположим, че процесът на замяна на елементите е бил осъществяван дълго време преди момента t, след който ни интересува дали един елемент ще работи още време τ, то можем да оставим $t \to \infty$. При $t \to \infty$ от (2) ще получим стационарната вероятност за $P_t(\tau)$, която вече не зависи от времето t. Първото събираемо $F(t+\tau)$ от (2) ще клони към нула с неограниченото растене на t, а за да намерим границата на

$$\int_0^t [1-F(t+\tau-x)]\, h(x)\,dx$$

ще използуваме възловата теорема на възстановяването при

$$Q = 1 - F(x+\tau)$$

Тогава при $t \to \infty$

$$P_\infty(\tau) = \lim_{t\to\infty} P_t(\tau) = a^{-1}\int_0^\infty Q(x+\tau)\,dx = a^{-1}\int_\tau^\infty F(x)\,dx$$

В елементи от теорията на възстановяването разгледахме величината $V_t = t_{N_t+1} - t$ т.нар. бъдещо остатъчно време. Ако сравним разпределението на V_t с вероятността $P_t(\tau)$ по формула (2), виждаме, че те съвпадат. Това показва, че времето, протичащо от момента t до следващия отказ, което е остатъчно време на живот на елемента, е равно на V_t, т.е.

$$P(V_t \geq \tau) = P_t(\tau)$$

Съществуването на стационарната вероятност на $P_t(\tau)$ показва, че при растенето на t величината V_t се стреми към някоя стационарна величина ξ, разпределението на която е

$$P(\xi \geq \tau) = a^{-1}\int_\tau^\infty F(x)\,dx$$

До сега предполагахме, че замяната на един елемент с друг /т.е. възстановяването на един елемент/ става мигновено. На практика това не е така. Дори при замяната на елемента с нов, еднотипен с него, се губи известно време, което не е равно на нула. Тук ще разгледаме надеждността на един елемент, когато за възстановяването му е необходимо случайно време. В това време може да бъдат включени времената за откриването на неизправния елемент, за неговия ремонт /ако се ремонтира/ и за монтирането. Времето за възстановяване ще разглеждаме като едно цяло, без да се интересуваме от частите, от които то е съставено. Редуването на състоянията работа и ремонт на един елемент определя режима на изследване. За да е напълно определена вероятностната постановка, достатъчно е да знаем:

а/ продължителностите на живот /или работа/

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$$

на елемента, където τ_1 е времето на работа, изтекло от началния момент до първия отказ, τ_2 – това след първия ремонт и отново включване на елемента до следващия отказ и т.н.

б/ времетраенията на ремонтите

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots,$$

където ζ_1 е времето, необходимо за ремонт след първия отказ, ζ_2 – времето за ремонт след втория отказ и т.н. Приемаме, че след изтичане на времето за ремонт елементът започва веднага да работи.

Ако предположим, че след ремонт качествата на елемента се възобновяват напълно, естествено е да предположим, че $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ са независими и еднакво разпределени. Ще приемем също така, че и величините ζ_k са независими и еднакво разпределени. При тези предположения вероятностният режим работа-ремонт ще се определя изцяло от две функции на разпределение $F(x)$ и $G(x)$ съответно за величините τ_k и ζ_k.

Изразът

$$t_n = \tau_1 + \zeta_1 + \tau_2 + \zeta_2 + \dots + \tau_{n-1} + \zeta_{n-1} + \tau_n$$

ще ни дава моментите t_n на отказите, а

$$\tilde{t}_n = \tau_1 + \zeta_1 + \tau_2 + \zeta_2 + \dots + \tau_n + \zeta_n$$

– моментите на възстановяване /когато елементът започва отново да работи/. Процесът, определен чрез t_n и $\tilde{t}_n$, ще наричаме процес на възстановяване с крайно време на възстановяване.

Една от основните характеристика на този процес е така нареченият коефициент на готовност. Това е вероятността, че в даден момент t елементът работи. За да пресметнем тази вероятност, да определим събитията:

$$A_n = \{\tilde{t}_n < t < t_n\}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Събитието A_n означава, че до момента t сме имали точно n ремонта и в момента t елементът работи. Тогава събитието $B = \{$ в момента t елементът работи $\}$ е сума от събитията A_n:

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

и коефициентът на готовност $k(t)$ по определение е

$$k(t) = P(B) = \sum P(A_n) \qquad (3)$$

За да намерим $k(t)$, трябва да знаем вероятностите $P(A_n)$. За тази цел да разгледаме сумите от независимите случайни величини τ_k и ξ_k:

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$$

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

Функциите на разпределение на T_n и S_n са съответно

$$F_n(x) = P(T_n < x) = \int_0^x F_{n-1}(x-t)\,dF(x), \quad F_1 = F,$$

$$G_n(x) = P(S_n < x) = \int_0^x G_{n-1}(x-t)\,dG(x), \quad G_1 = G,$$

а на величината $\tilde{t}_n = T_n + S_n$ функцията на разпределение $\Phi_n(x)$ е композицията на F_n и G_n:

$$P(\tilde{t}_n < t) = \Phi_n(t) = \int_0^t F_n(t-x)\, d\,G_n(x).$$

По формулата за пълната вероятност ще имаме

$$P(A_n) = P(\tilde{t}_n < t < \tilde{t}_n + \tau_n) = \int_0^t P(t_n > t-x)\, d\,\Phi_n(x)$$
$$= \int_0^t [1 - F(t-x)]\, d\,\Phi_n(x).$$

Като заместим горния израз за $P(A_n)$ в (3), за $k(t)$ намираме

$$(4) \qquad k(t) = \int_0^t [1 - F(t-x)\, d\,H_2(x)$$

където $H_2(x)$ е функцията на възстановяване за процеса, определен от $\{\tilde{t}_n\}$. В същност $H_2(x)$ се определя от разпределението $F * G$ на величините ~~$F * G$~~ $\{\tau_k + \xi_k\}$.

Формулата (4) е неудобна за практическо използуване. Обикновено вместо коефициента на готовност $k(t)$ за всеки момент t се използува неговата гранична стойност при $t \to \infty$. Границата на $k(t)$ при $t \to \infty$ се нарича стационарен коефициент на готовност. Да намерим

$$(5) \qquad k = \lim_{t\to\infty} k(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t [1 - F(x-t)]\, d\,H_2(t).$$

Границата (5) се определя веднага, като използуваме възловата теорема на Смит при $Q = 1 - F(t)$ и вземем пред вид, че $H_2(t) \sim t / E(\tau_1 + \xi_1)$.

Тогава

$$k = \frac{1}{a_1 + b_1} \int_0^\infty \bar{F}(x)\, dx = \frac{a_1}{a_1 + b_1},$$

където $a_1 = E\tau_1$ е средната продължителност на живот /или работа/, а $b_1 = E\xi_1$ - средната продължителност на ремонт /или възстановяване/. От израза за k се вижда, че стационарният коефициент на готовност е средното време, през което възстановяваният елемент работи.

По подобен начин се намира и вероятността за безотказна работа в даден интервал от време след момента t. Нека $P_t(\tau)$ е вероятността елементът да работи в интервала $(t, t+\tau)$. Тогава

$$(6)\quad P_t(\tau) = 1 - F(t+\tau) + \int_0^t [1 - F(t+\tau-x)]\, dH_2(x).$$

По същия начин, както за $\lim_{t\to\infty} k(t)$, по възловата теорема от /6/ следва

$$p(\tau) = \lim_{t\to\infty} P_t(\tau) = \frac{1}{a_1 + b_1} \int_\tau^\infty [1 - F(x)]\, dx$$

или

$$(7)\quad p(\tau) = k a_1^{-1} \int_\tau^\infty \bar{F}(x)\, dx.$$

Формулата /7/ ни дава, че вероятността $p(\tau)$ за безотказна работа през време τ е произведение от вероятностите k /да заварим елементът да работи в началния момент/ и вероятността $a_1^{-1} \int_\tau^\infty \bar{F}(x)\, dx$ елементът да работи още време τ /вж. (43)/.

На практика често се оказва, че продължителността на живот на работещия елемент е разпределена експоненциално. Затова ще разгледаме по-подробно и по друг начин вероятностните характеристики на режима работа-ремонт-работа в експоненциалния случай.

2. <u>Експоненциална продължителност на живот на работещ елемент и произволно разпределено време за ремонт.</u> В този раздел ние ще предполагаме, че продължителностите на живот /или работа/ на елемента $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ са еднак-

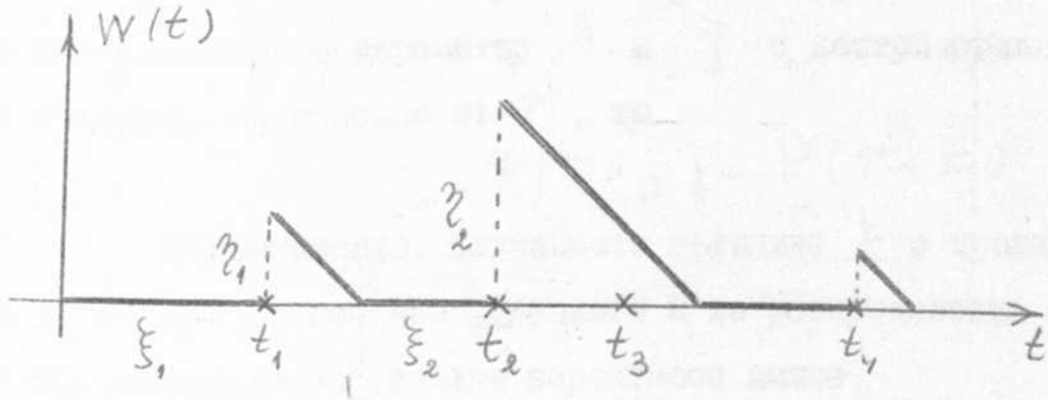
во разпределени с функция на разпределение

$$F(x) = P(\tau_k < x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad k = 1, 2, \dots ,$$

а времетраенията на ремонта /или възстановяването/ $\eta_1, \eta_2, \dots$ $\eta_n, \dots$, са също еднакво разпределени с произволна функция на разпределение

$$G(x) = P(\eta_k < x), \quad k = 1, 2, \dots ,$$

която предполагаме непрекъсната и за която $G(0) = 0$



Фиг. 8

Да нанесем моментите на отказ

$$t_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$$

по оста t /фиг. 8 /. След това в точката $t_1 = \tau_1$ нанасяме вертикално отсечка с дължина η_1 и се спускаме под ъгъл 45^0 до пресичане с оста t , после вървим по оста до първата срещната точка t_k . Нанасяме пак вертикално η_2 и т.н. Получената графика е една реализация на случаен процес, който означаваме с $W(t)$ /вж. фиг. 8 /.

Вместо продължителностите на живот $\tau_1, \tau_2, \dots$ - разглеждаме величините

$$(8) \qquad \xi_1 = \tau_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \dots$$

големините на които са последователните части на графиката на $W(t)$, съвпадащи с оста t . Тези величини са независими помежду си, тъй като τ_k и ξ_k са такива. Процесът $W(t)$ може да се запише аналитично в зависимост от t, τ_k и ξ_k, но това тук не е необходимо. По-важно е да покажем, че вместо с експоненциалните продължителности на живот τ_k може да работим с величините ξ_k. За тази цел ще се убедим, че величините ξ_k са също експоненциално разпределени. Това ни осигурява следната лема.

Лема 1. Ако случайната величина τ има експоненциално разпределение с параметър λ и ξ е неотрицателна случайна величина, независима от τ, то

$$P(\tau-\xi<t \mid \tau>\xi)=P(\tau<t) \tag{9}$$

Доказателство. Случайната величина ξ е произволно разпределена. Да означим функцията й на разпределение с $L(x)$. От определението на условна вероятност имаме

$$P(\tau-\xi<t \mid \tau>\xi)=\frac{P(\tau-\xi<t,\ \tau>\xi)}{P(\tau>\xi)}. \tag{10}$$

Числителят и знаменателят в (10) по формулата за пълната вероятност са

$$P(\tau-\xi<t,\tau>\xi)=\int_0^\infty P(x<\tau<t+x)\,dL(x)$$

$$=\int_0^\infty\left[e^{-\lambda x}-e^{-\lambda(t+x)}\right]dL(x)$$

$$P(\tau>\xi)=\int_0^\infty P(\tau>x)\,dL(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dL(x)$$

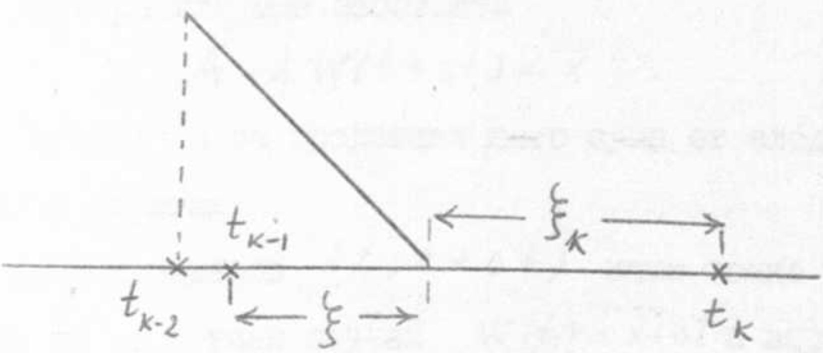
като ги заместим в (9), получаваме

$$P(\tau-\xi<t \mid \tau>\xi)=1-e^{-\lambda t}=P(\tau<t)$$

т.е. (9).

При $\tau=$ константа това свойство е познато като "липса на последействие" при поасоновия процес.

Да използуваме лема 1 , за да покажем, че процесът $W(t)$ не изменя вероятностния режим работа-ремонт, който разгледахме преди като процес на възстановяване. Нека ролята на τ играе кое да е τ_k и случайната величина ξ да е допълнителната стойност за една от величините ξ_k от (8) до съответното τ_k ,т.е. $\tau_k - \xi = \xi_k$ /вж. фиг. 9 /.



Фиг. 9

Тогава според лема 1 величините ξ_k ще са разпределени, както τ_k и процесът $W(t)$ ще описва вероятностно еквивалентно процеса на възстановяване с крайно време на възстановяване.

Да разгледаме функцията на разпределение на $W(t)$:

$$(11) \qquad F(t,x) = P(W(t) \leqq x)$$

При фиксиране t (11) е функция на разпределение относно x . От определението на $W(t)$ е ясно, че $F(t,+0)$ е вероятността елементът да работи в момента t . Понеже в началния момент $t_0 = 0$, предполагаме, че елементът работи, то $W(0+) = 0$ и $F(0,x) = 1$ за всяко $x \geqq 0$. Ще докажем следната теорема.

Теорема 1 . Функцията $F(t,x)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$(12) \qquad \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} - \lambda F(t,+0)\left[1 - G(x)\right]$$

при гранично условие $F(0,x)=1$, $x \geq 0$.

Доказателство. Ще разгледаме възможните състояние на елемента в интервала от време $(t, t+\Delta t)$, където t е произволен момент. Вероятностите ще записваме с точност до $o(\Delta t)$.

Нека разгледаме събитието

$$A = \{ W(t+\Delta t) < x \} .$$

То може да се представи като сума от следните четири несъвместими събития:

1. В интервала $(t, t+\Delta t)$ няма точка на отказ, т.е. няма точка t_k . В този случай $W(t) < x+\Delta t$ и вероятността за това е $[1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)]\,P(W(t) < x+\Delta t)$.

2. В интервала $(t, t+\Delta t)$ има само една точка t_k и $W(t)$ прави скок, не по-голям от x . Вероятността е $\lambda\Delta t\, F(t,+0)\, G(x)$.

3. В същия интервал има точка t_k , но $W(t)$ не прави скок. Вероятността е $\lambda\Delta t\,[F(t,x) - F(t,+0)]$

4. В интервала има повече от една точка t_k . Вероятността за това е от порядъка на $o(\Delta t)$, тъй като процесът е поасонов и следователно ординарен.

Понеже $P(A) = F(t+\Delta t, x)$, получаваме

$$(13) \quad F(t+\Delta t, x) = F(t, x+\Delta t)\left[1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)\right] + \lambda\Delta t\, F(t,+0)\,G(x) + \lambda\Delta t\left[F(t,x) - F(t,+0)\right].$$

Може да се докаже, че $F(t,x)$ е непрекъсната и диференцируема по x , с изключение на $x=0$. Тогава ~~от~~ по теоремата за крайните нараствания ще имаме

$$(14)\quad F(t,x+\Delta t)=F(t,x)+\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\Delta t+o(\Delta t)$$

Като разделим (13) на Δt и оставим $\Delta t \to 0$, получаваме диференциалното уравнение (12).

Ако въведем лаплас-стилтесовата трансформация на $F(t,x)$ относно x

$$f(t,s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dF(t,x)$$

от уравнението (12) получаваме:

$$(15)\quad \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}=s\,f(t,s)-F(t,+0)\left[s+\lambda(1-g(s))\right],$$

където

$$g(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dG(x)$$

Да приемем, че $F(t,+0)$ е позната. В такъв случай уравнението (15) е линейно диференциално уравнение относно t и може да бъде решено. Намираме

$$(16)\quad f(t,s)=e^{st}\left\{1-[s+\lambda(1-g(s))]\int_0^t e^{-su}F(u,+0)\,du\right\}$$

и следователно $f(t,s)$ е еднозначно определена, ако знаем $F(t,+0)$. Да видим как може да намерим функцията $F(t,+0)$. За тази цел ще намерим трансофрмацията на Лаплас на $F(t,+0)$. От (16) намираме

$$(17)\quad \int_0^t e^{-su}F(u,+0)\,du=\frac{1-f(t,s)e^{-st}}{s+\lambda[1-g(s)]}$$

Но $f(t,s)\leqq 1$ като характеристична функция. Тогава при $t\to\infty$ от (17) следва

$$\int_0^\infty e^{-sx}F(x,+0)\,dx=1/\left\{s+\lambda[1-g(s)]\right\}$$

или като се върнем към праобразите на съответните трансформации,

$$(18)\qquad F(t,+0)=1-\lambda\int_0^t F(t-x,0)\left[1-G(x)\right]dx$$

Уравнението (18) напълно определя $F(t,+0)$. Тъй като $F(t,+0)$ е вероятността в момента t елементът да работи, то по определението на стационарния коефициент на готовност k /вж. (5) / ще имаме $K=\lim\limits_{t\to\infty}F(t,+0)$.

Уравнението (18) е интегрално уравнение на Волтера. По една известна теорема на Винер, тъй като $1-g(s)\neq -1$, ще имаме

$$(18_1)\qquad K=\lim_{t\to\infty}F(t,+0)=\frac{1}{1+\lambda b_1}=\frac{a_1}{a_1+b_1},\quad a_1=\lambda^{-1},$$

където b_1 е средната на G. Същия резултат получихме и преди(вж. (5)).

Да намерим стационарното разпределение на процеса $W(t)$ т.е. границата

$$\lim_{t\to\infty}F(t,x)=\lim_{t\to\infty}P\left[W(t)<x\right].$$

Граничното разпределение ще означим с $\tilde{F}(x)$ и ще покажем, че

$$(19_0)\qquad \tilde{F}(x)=\frac{1}{1+\lambda b_1}\left\{1+\lambda\int_0^x\overline{G}(u)\,du\right\}.$$

Ще намерим границата на $f(t,s)$ от (16). Чрез двукратно прилагане на правилото на Лопитал получаваме

$$(19)\qquad \lim_{t\to\infty}f(t,s)=\frac{s+\lambda\left[1-g(s)\right]}{s(1+\lambda b_1)}=\tilde{f}(s)$$

т.е. за всяко s границата (19) съществува. С непосредствена проверка се вижда, че (19) е лаплас-стилтесова трансформация на $\tilde{F}(x)$. Тъй като $\tilde{F}(x)$ е функция на разпределение, по теоремата за непрекъснатост на Леви-Хинчин следва

$$\lim_{t\to\infty}F(t,x)=\tilde{F}(x).$$

Функцията $\tilde{F}(x)$ може да се получи формално, ако в уравнението (16) приравним $\partial f/\partial t$ на нула. Сега ще докажем едно твърдение, което до известна степен характеризира скоростта, с която се достига стационарният режим.

Теорема 2 . Ако при експоненциална продължителност на живот с параметър λ разпределението на времето за ремонт $G(x)$ има краен втори момент b_2 и $F(t,+0)$ е вероятността елементът да работи в момент t , то

$$(20) \qquad \lim_{x\to\infty}\left[\int_0^x F(t,+0)\,dt - \frac{x}{1+\lambda b_1}\right] = \frac{\lambda b_2}{2(1+\lambda b_1)^2}.$$

За да докажем горната теорема, първо ще докажем следната лема.

Лема 2. Нека $A(x)$ е функция, която удовлетворява уравнение от вида

$$(21) \qquad A(x) = -\lambda\int_0^x A(x-t)\,B(t)\,dt + R(x),$$

където $R(x)\to 0$, $x\to\infty$ и $B(x)$ е функция за която

$$(22) \qquad \lambda\int_0^\infty e^{-sx}B(x)\,dx \neq -1.$$

Тогава

$$\lim_{x\to\infty} A(x) = 0$$

Доказателство. Твърдението следва от една теорема на Палей-Винер [3] (теорема XVIII, 94) . Наистина, решението на интегралното уравнение (21) , което е от волтеров тип, е

$$(23) \qquad A(x) = \int_0^x R(x-t)\,\phi(t)\,dt + R(x),$$

където $\phi(t)$ е резолвентата

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\lambda^n B_*^{(n)}.$$

Тъй като $\phi(t)$ от своя страна също удовлетворява едно интегрално уравнение от волтеров тип, именно

$$\phi(t) = -\lambda B(t) - \lambda \int_0^x \phi(x-t) B(t)\,dt ,$$

то по споменатата теорема на Палей-Винер $\phi(t)$ е абсолютно интегруема на $(0,\infty)$, поради условието /22/. Абсолютната интегруемост на ϕ осигурява граничния преход под интеграла в /23/, даващ и $\lim_{x\to\infty} A(x) = 0$.

Доказателство на теорема 2. Ще използваме лема 2 като ще докажем, че при подходящ избор на константата C функцията

$$\varphi(x) = \int_0^x \left[F(t,+0) - \frac{1}{1+\lambda b_1} \right] dt - C$$

клони към нула за $x \to \infty$.

Като вземем пред вид, че $F(t,+0)$ удовлетворява (18) за $\varphi(x)$ получаваме уравнението

$$\varphi(x) = -\lambda \int_0^x \varphi(x-t)\,\bar{G}(t)\,dt + R(x),$$

където

$$R(x) = \frac{\lambda b_1 x}{1+\lambda b_1} - C - \frac{\lambda}{1+\lambda b_1} \int_0^x \int_0^t \bar{G}(u)\,du - \lambda C \int_0^x \bar{G}(u)\,du$$

Да определим C по такъв начин, че $R(x) \to 0,\ x \to \infty$.
С несложни пресмятания се получава

$$C = \frac{\lambda b_2}{2(1+\lambda b_1)^2}$$

Следователно $\varphi(x)$ удовлетворява уравнение от вида /(21)/, и съгласно лема 2 ще имаме $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$, което е равносилно на /20/.

Доказаната теорема 2 ни дава възможност да намерим граничната стойност на средната на процеса $W(t)$, т.е.

$$M(t) = \int_0^\infty x\, dF(t,x).$$

Наистина, тъй като $M(t) = -f'_s(t,0)$, от израза за $f(t;s)$ / 16 / намираме

$$M(t) = \left\{ \int_0^t F(x,+0)\, dx - \frac{t}{1+\lambda b_1} \right\} (1+\lambda b_1).$$

Границата на израза в големите скоби вече е известна и за граничната стойност на $M(t)$ получаваме

$$(24) \qquad \lim_{t\to\infty} M(t) = \frac{\lambda b_2}{2(1+\lambda b_1)}.$$

Стойността / 24 / съвпада с тази на средната на стационарното разпределение (19_0). Тя лесно се пресмята, като използуваме вида на $\tilde{F}(x)$.

Средно работно време и среден брой откази.

Да намерим средната стойност на времето, когато елементът работи в интервал от време $(0,T)$. Интервалите от време $(0,T)$, когато елементът работи, се запълват от тези стойности на t, за които процесът $W(t) = 0$. Да определим функцията

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{за} \quad x > 0 \end{cases}$$

и да образуваме процеса $U(-W)$. Той приема стойности, равни на I в тези моменти от време t, в които елементът работи. Тогава

$$EU(-W) = F(t,+0),$$

тъй като $F(t,+0)$ е вероятността в момента t елементът да работи. За да намерим средното работно време в / $0,T$ / ще трябва да "интегрираме" всички единици на $U(x)$. Затова да разгледаме случайната величина

$$\tau(T) = \int_0^T U[-w(t)]\,dt,$$

която очевидно ни дава цялото време на работа в интервала $/0,T/$. Средната на $\tau(T)$ ще е и търсеното средно работно време в $/0,T/$:

$$E\tau(T) = \int_0^T F(t,+0)\,dt \tag{25}$$

Средното време за ремонт в $/0,T/$, ще бъде допълнителното до T. То е $T - E\tau(T)$.

Нека определим средния брой откази $m(T)$ в интервала $(0,T)$. Този брой е равен на средния брой от интервалите на работа за време T. Да образуваме сумата $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, където ξ_k, $k=1,2,\dots$ са дължините на интервалите, за които $W(t) = 0$. Според лема 1 те са експоненциално разпределени с параметър λ. Нека N_T е случайната величина, равна на най-големия индекс n, за който е изпълнено неравенството $S_n \leqq \tau(T)$. Условното средно на N_T относно $\tau(T)$ е

$$E(N_T \mid \tau(T)) = \lambda\tau(T)$$

тъй като при експоненциалното разпределение функцията на възстановяване е равна на произведението на λ и дължината на интервала. Безусловното средно EN_T е

$$EN_T = E[E(N_T \mid \tau(T))] = \lambda E\tau(T)$$

и от / 25 / следва

$$EN_T = \lambda\int_0^T F(t,+0)\,dt. \tag{26}$$

Равенството / 26 / дава средния брой откази в интервал $/0,T/$, но за практически пресмятания то не е удобно. За големи стойности на T за EN_T съгласно граничното съотношение / 18. / може да вземем приближението

$$EN_T \sim \frac{a_1 T}{a_1 + b_1}, \quad T \to \infty, \quad a_1 = \lambda^{-1}. \tag{27}$$

Ако $G(x)$ има краен втори момент b_2, вместо /27/ въз основа на /20/ за EN_T може да вземем по-точното приближение

$$EN_T \approx \frac{a_1 T}{a_1 + b_1} + \frac{a_1 b_2}{2(a_1 + b_1)^2}.$$

3. СИСТЕМИ С ВЪЗСТАНОВЯВАНЕ. ПРОИЗВОЛНО РАЗПРЕДЕЛЕНИ ВРЕМЕНА НА ЖИВОТ И РЕМОНТ

Изводите, които направихме в случай на експоненциална продължителност на живот, остават верни и при произволно разпределение.

Нека продължителностите на живот $\tau_1, \tau_2, \dots$ са еднакво разпределени с произволна функция на разпределение $F(x)$. Времената за ремонт $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ също предполагаме произволно разпределени $G(x)$. Величините τ_k и ζ_k са независими помежду си.

Да определим процеса $W^*(t)$ по следния начин

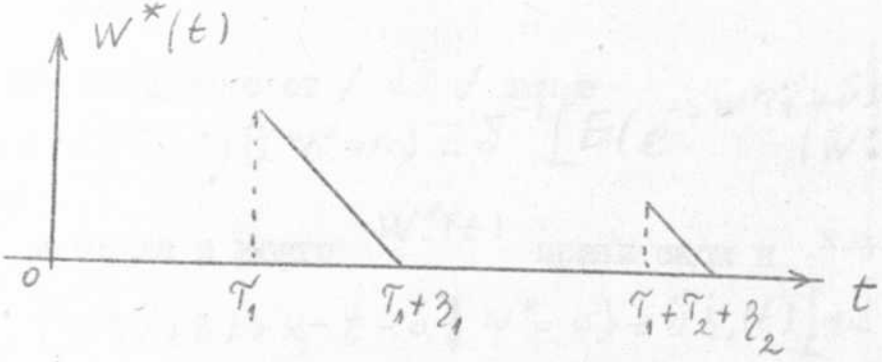
$$W^*(t) = X_i(t), \quad t \in I_i = \left[\sum_{k=1}^{i}(\tau_k + \zeta_k), \sum_{k=1}^{i+1}(\tau_k + \zeta_k)\right],$$

$$I_0 = [0, \tau_1 + \zeta_1],$$

където всяко $X_i(t)$ е цикъл от вида

$$X(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \tau \\ \tau + \zeta - t, & \tau \le t < \tau + \zeta \end{cases}$$

на съответния интервал I. Една реализация на $W^*(t)$ е дадена на фиг 10.



Фиг. 10

Нашата цел е да намерим вероятността

$$F^*(t,x) = P(w^*(t) < x)$$

Ще докажем следната теорема.

Теорема 3. Ако за функцията на разпределение $F * G$ съществува плътност на възстановяване $h_1(t)$, то Лаплас-Стилтесовата трансформация $f^*(t,s)$ на разпределението $F^*(t,x)$ удовлетворява диференциалното уравнение:

$$(28) \qquad \frac{\partial f^*(t,s)}{\partial t} = s\, f^*(t,s) - s\left\{F^*(t,+0) + [1-g(s)]\, h_1(t)\right\}.$$

Доказателство. Нека $\delta > 0$ и $\Delta(t)$ е случайната величина

$$\Delta(t) = \delta^{-1}\left\{ e^{-sw^*(t+\delta)} - e^{-sw^*(t)} \right\}$$

За средната стойност на $\Delta(t)$ имаме

$$(29) \quad E\Delta(t) = E(\Delta(t) \mid w^* \neq 0)\, P(w^* \neq 0) + E(\Delta(t) \mid w^* = 0)\, P(w^* = 0).$$

Когато $w^* \neq 0$ тогава $w(t+\delta) = w(t) - \delta$ за всяко достатъчно малко $\delta > 0$. В такъв случай за първото събираемо от дясната страна на (29) ще получим:

$$E(\Delta(t) \mid w^* \neq 0)\, P(w^* \neq 0) = s\, E(e^{-sw^*} \mid w^* \neq 0)\, P(w^* \neq 0)$$

$$+ o(1) = s\, E e^{-sw^*(t)} - s\, P(w^* = 0) + o(1)$$

и при $\delta \to 0$

*) Уравнението (28) върнато към оригинала $F^*(t,x)$ е

$$(28_0) \qquad \frac{\partial F^*(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial F^*(t,x)}{\partial x} - h_1(t)\,[1 - G(x)]$$

$$(30)\quad \lim_{\delta\to 0} E(\Delta(t)\,|\,W^*(t)\neq 0) = s f(t,s) - s P(W^*(t)=0).$$

За второто събираемо от / 29 / имаме

$$E(\Delta(t)\,|\,W^*=0)P(W^*=0) = \delta^{-1}\left[E\left(e^{-sW^*(t+\delta)}\,|\,W^*=0\right) - 1\right]P(W^*=0)$$

Нека t е точка в която $W^*(t)$ прави скок и $x \geq t$. Тогава

$$(31)\quad P(W^*(t+\delta) > x-t-\delta \,|\, W^*=0) = \delta h_1(t)\left[1 - G(x-t-\delta)\right] + o(\delta)$$

Наистина, тъй като $W^*(t+\delta) > x-t-\delta$, то процесът на възстановяване $T_1, T_1+\xi_1, T_2+\xi_2, \ldots$ трябва да има възстановяване и съответната величина ξ на която W^* скача трябва да е по-голяма от $x-t-\delta$. От (31) следва

$$\lim_{\delta\to 0} E(\Delta(t)\,|\,W^*(t)=0)P(W^*=0) = -h_1(t)\int_t^\infty e^{-s(x-t)}\,d_x\left[1-G(x-t)\right].$$

От $/ \frac{\partial f^*}{\partial t}, 31 /$ и от факта, че $E\Delta(t)$ при $\delta\to 0$ клони към $\frac{\partial f^*}{\partial t}$ следва / 28 /.

Да предположим, че функцията $F^*(t,+0)$ ни е известна. Тогава решавайки / 28 / относно $f(t,s)$, получаваме

$$f^*(t,s) = e^{st}\left[1 - s\int_0^t e^{-su}F^*(u,+0)\,du - (1-g(s))\int_0^t e^{-su}h_1(u)\,du\right]$$

Тъй като $|f^*| \leq 1$, то от горното равенство при $t\to\infty$ намираме

$$(32)\quad s\,\mathcal{L}(F^*(\cdot,+0)) + (1-g(s))\,\mathcal{L}(h_1) = 1,$$

където $\mathcal{L}$ е Лаплас-Стилтесовият оператор. По-нататък, понеже $\mathcal{L}(h_1)$ е

$$\mathcal{L}(h_1) = \frac{\mathcal{L}(F)}{1-\mathcal{L}(G)\mathcal{L}(F)},$$

то от (32) се получава

$$(33)\quad \int_0^\infty e^{-su}F^*(u,+0)\,du = s^{-1}\left\{1 + h(s)(1-g(s))\right\}^{-1},$$

където

$$h(s) = \frac{f(s)}{1 - f(s)}.$$

Да положим

(32,) $$\varphi(t) = \int_0^t h(u)\left[1 - G(t-u)\right]du, \quad h(u) = \mathcal{L}^{-1}(h(s)).$$

Лесно може да се получи от равенството / 33 / чрез обръщане на съответните Лаплас-Стилтесови трансформации следното уравнение за функцията $F^*(t,+0)$

(33₀) $$F^*(t,+0) + \int_0^t F^*(t-u,+0)\, d\varphi(u) = 1.$$

По една известна теорема на Смит [12] следва $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = b_1/a_1$ и тогава по теоремата на Палей-Винер /т. XVIII, 94 [13]/ ще имаме

(34) $$\lim_{t \to \infty} F^*(t,+0) = \left(1 + \int_0^\infty \varphi'(u)\,du\right)^{-1} = \frac{a_1}{a_1 + b_1},$$

където a_1 и b_1 са средните съответно на $F(x)$ и $G(x)$.

Границата / 34 / е известна като стационарен коефициент на готовност. Ние я получихме по начин, който дава възможност да се направи една оценка за скоростта на сходимост. Следната теорема ни дава това.

Теорема 4. Нека $F(x)$ и $G(x)$ са нерешетъчни разпределения. Тогава

(35) $$\lim_{x \to \infty} \left[\int_0^x F^*(t,+0)\,dt - \frac{x a_1}{a_1 + b_1}\right] = \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2 + 2a_1 b_1}{2(a_1 + b_1)^2},$$

където a_2 и b_2 са вторите моменти на F и G.

Доказателство. Границата / 35 / е получена от Барлоу /вж. [15] /, обаче при предположение за съществуване на третите моменти на F и G. Тук ние предполагаме съществуването само на вторите моменти.

Да означим с $N(x)$ функцията

$$N(x) = \int_0^x F^*(t,+0) - Cx\,, \quad C = (a_1+b_1)^{-1}a_1 .$$

От равенството / 33_0 / получаваме с интегриране и след съответните алгебрични преобразувания

$$(36) \qquad N(x) = \int_0^x N(x-u)\,d\varphi(u) = D(x),$$

където

$$D(x) = x(1-c) - c\int_0^x (x-u)\,d\varphi(u)$$

и $\varphi(u)$ е дефинирана чрез / 32, /.

Дясната страна на / 36 / клони към определена граница при $x \Rightarrow \infty$. За да се убедим в това да означим с $S(u)$ израза

$$S(u) = \int_0^u \bar{G}(u-y)\,d\left[H(y) - \frac{y}{a_1}\right]$$

$H(y)$ е функцията на възстановяване

$$H(y) = F + F_*^{(2)} + F_*^{(3)} + \dots$$

Тъй като a_2 съществува и F не е решетъчно разпределение, то от известното гранично съотношение

$$(37) \qquad H(y) - a_1^{-1}y \rightarrow d = (a_2 - 2a_1^2)/2a_1^2\,, \; y \to \infty,$$

следва $\lim\limits_{u\to\infty} S(u) = 0$

От друга страна, понеже $b_2 < \infty$, изразът

$$R(x) = x(1-c) - ca_1^{-1}\int_0^x (x-u)\,\bar{G}(u)\,du,$$

както е лесно да се намери, има следната граница

$$(38) \qquad \lim_{x\to\infty} R(x) = c\,a_1^{-1}b_2/2 .$$

Функцията $D(x)$ от дясно на / 36 / с горните означения е

$$D(x) = R(x) - c\int_0^x (x-u)\,dS(u)$$

и тъй като интегралът

$$J(x) = \int_0^x (x-u)\,dS(u) = \int_0^x \left[\int_0^{x-u} \bar{G}(z)\,dz\right] d\left[H(u) - \frac{u}{a_1}\right]$$

има граница, която е

$$\lim_{x\to\infty} J(x) = b_1 d\,,$$

то за $D(x)$, използувайки / 38 / ще получим

$$\lim_{x\to\infty} D(x) = c a_1^{-1} b_2/2 - c b_1 d\,.$$

Ние се интересуваме в последна сметка от границата на $N(x)$. Функцията $N(x)$ удовлетворява уравнението / 36 / и по използуваната вече веднаж теорема на Палей-Винер следва

$$\lim_{x\to\infty} N(x) = c \lim_{x\to\infty} D(x)$$

което дава / 35 /.

Стационарно решение на уравнението / 28 /. От равенството / 28 / по правилото на Лопитал получаваме

$$\lim_{t\to\infty} f^{*}(t,s) = \lim_{t\to\infty}\left[F^{*}(t,+0) + (1-g(s))\,h_1(t)\right].$$

Обаче $h_1(t) \to (a_1+b_1)^{-1}$, $t\to\infty$ и като използуваме и ~~$\lim h_1$~~ (34) намираме

$$\lim_{t\to\infty} f(t,s) = (a_1+b_1)^{-1} a_1 \left[1 + a_1^{-1}(1-g(s))\right] \stackrel{def.}{=} \tilde{f}(s)\,.$$

Непосредствена проверка дава, че $\tilde{f}(s)$ допуска представянето

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,d\tilde{F}(x)\,,$$

където

(38$_0$) $$\tilde{F}(x) = (a_1+b_1)^{-1} a_1 \left[1 + a_1^{-1}\int_0^x \bar{G}(u)\,du\right].$$

Вижда се, че $\tilde{F}(x)$ е една функция на разпределение, така че по теоремата на Леви-Хинчин за непрекъснатост може да твърдим, че

$$\lim_{t \to \infty} P(W^*(t) < x) = \tilde{F}(x).$$

<u>Заместване на процеса $W^*(t)$ с еквивалентен на него марковски процес</u>. Да разгледаме поасоновия поток, за който вероятността за точно k попадения в интервала $(x_1, x_2]$ е равна на

$$(k!)^{-1} \Lambda^k(x_1, x_2) \exp[-\Lambda(x_1, x_2)],$$

където моментната интензивност $\lambda(u)$ е

(38$_1$) $$\lambda(u) = h_1(u) / F^*(u, +0),$$

а функцията $F^*(u, +0)$ се определя от / 33$_0$ /. Така, че

$$\Lambda(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda(u) du.$$

Нека $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ е една реализация на моментите на попадения за горния поасонов поток и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ да са реализациите на времената за ремонт, които предполагаме независими от потока. Дефинираме случайния процес $W(t)$ по следния начин:

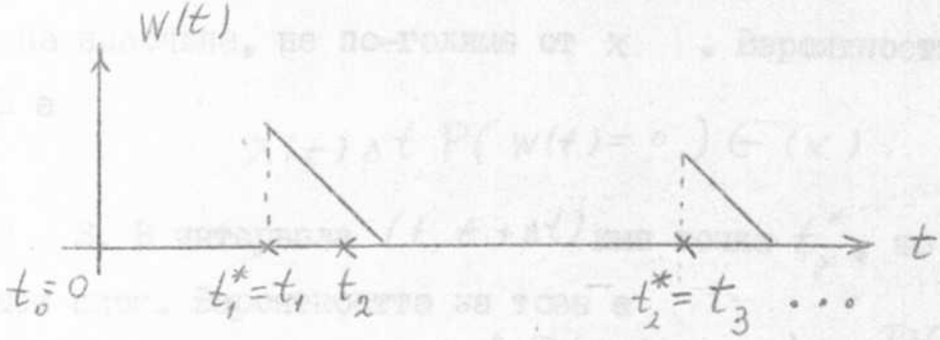
$$t_1^* = t_1, \quad t_n^* = \min_\nu \{ t_\nu \geq t_{n-1}^* + \xi_{n-1} \}, \; n > 1$$

(39$_0$) $$W(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_1^* \\ \max[\xi_{n-1} - (t - t_{n-1}^*), 0], & t_{n-1}^* < t \leq t_n^*, \; n > 1 \end{cases}$$

Една реализация на $W(t)$ е дадена на фиг. 11 .

Определянето на $W(t)$ е аналогично на случая, който разгледахме при експоненциално разпределена продължителност на живот.

Процесът $W(t)$ е нула в началния момент $t_0 = 0$ до t_1^*. В t_1^* графиката на $W(t)$ скача на височина η_1 и след това върви към оста t под наклон 45^0 до пресичане с t. После $W(t)$ е нула до първата срещната точка t_k на поасоновия поток, отново скача на височина η_2 и т.н.



Фиг. 11

Процесът $W(t)$ ще разглеждаме като "виртуално" състояние на един елемент в момента t. В точките t_k за които $W(t_k - 0) > 0$ имаме фиктивен отказ, а в тези за които $W(t_k^* - 0) = 0$ имаме фактически отказ. Очевидно, че процесът $W(t)$ е марковски. Следващата теорема е от основно значение за по-нататъшните разглеждания. Тя ни дава вероятностната еквивалентност на процесите $W^*(t)$ и $W(t)$.

Теорема 5. За всяко $t \geq 0$ и $x \geq 0$:

$$(39) \qquad P(W(t) \leq x) = P(W^*(t) \leq x)$$

т.е. функциите на разпределение на процесите W и W^* съвпадат.

Доказателство. Ще покажем, че функцията

$$F(t, x) = P(W(t) \leq x)$$

удовлетворява уравнението / 28 /, което и доказва твърдението на теоремата. За тази цел да разгледаме събитието което разлагаме на сума от следните несъвместими събития:

I. В интервала $(t, t+\Delta t)$ няма точки t_ν^*. Тогава $w(t+\Delta t) = w(t) - \Delta t$ /вж. фиг. 11 /. Вероятността за това е $[1-\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)]\, P(w(t) \leq x+\Delta t)$

2. В интервала $(t, t+\Delta t)$ има точка t_ν^*. В момента t елементът работи и в точката t_ν^*, графиката на $W(t)$ скача на височина, не по-голяма от x. Вероятността в този случай е

$$\lambda(t)\Delta t\, P(w(t)=0)\, G(x).$$

3. В интервала $(t, t+\Delta t)$ има точка t_ν^*, но $W(t)$ не прави скок. Вероятността за това е

$$\lambda(t)\Delta t\, [P(W(t)\leq x) - P(w(t)=0)].$$

4. В интервала $(t, t+\Delta t)$ има повече от една точка t_ν^*. Вероятността в този случай е от порядъка на $o(\Delta t)$, тъй като процесът $\{t_\nu\}$ е нестационарен, поасонов и следователно ординарен.

От вероятностите в точките от I до 4 получаваме

$$(40)\quad F(t+\Delta t, x) = F(t, x+\Delta t)[1-\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)]$$
$$+\lambda(t)\Delta t\, F(t,+0)G(x) + \lambda(t)\Delta t\,[F(t,x) - F(t,+0)] + o(\Delta t)$$

По теоремата за крайните нараствания да заместим в /40/ $F(t, x+\Delta t)$ с

$$F(t, x+\Delta t) = F(t,x) + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\Delta t + o(\Delta t),$$

което е възможно поради диференцируемостта на F относно x. След това да оставим в /40/ $\Delta t \to 0$. Получаваме диференциалното уравнение

$$(41)\quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda(t) F(t,+0)[1-G(x)].$$

Тъй като $\lambda(t)=h_1(t)/F^*(t,+0)$, уравнението / 28_0 / е

$$\frac{\partial F^*}{\partial t}=\frac{\partial F^*}{\partial x}-\lambda(t)F^*(t,0)[1-G(x)]. \tag{42}$$

Понеже / 41 / и / 42 / формално са еднакви, за лапласовата трансформация на $F(t,+0)$ и $F^*(t,+0)$ получаваме един и същ вид уравнение:

$$s\int_0^\infty e^{-su}\varphi(u)du+[1-g(s)]\int_0^\infty e^{-su}\lambda(u)\varphi(u)du=1, \tag{43}$$

където $\varphi(u)$ е или $F^*(t,+0)$, или $F(t,+0)$. Ако означим с $q(t)$ разликата

$$q(t)=F(t,+0)-F^*(t,+0)$$

и извадим почленно равенствата / 43 /, взети при $\varphi=F$, и при $\varphi=F^*$, ще получим за $q(t)$

$$\int_0^\infty e^{-su}q(u)du+s^{-1}(1-g)\int_0^\infty e^{-su}\lambda(u)q(u)du=0$$

или

$$q(u)=-\int_0^u[1-G(u-x)]\lambda(x)q(x)dx. \tag{44}$$

Тъй като $|q(t)|\leq 1$ (като разлика на две вероятности F и F^*) и $\lambda(x)\to a_1^{-1}$ при $x\to\infty$, то $|\lambda(x)q(x)|\leq C$ за всяко $x\geq 0$. В такъв случай от / 44 / следва $|q(u)|\leq Cu$. От / 44 / по тази оценка за $q(u)$ получаваме $|q(u)|\leq C\frac{u^2}{2}$. Като продължаваме по същия начин, ще имаме $|q(u)|\leq C\, u^n/n!$ за всяко $n>1$. Следователно $q(u)\equiv 0$, т.е. $F=F^*$ и диференциалните уравнения / 41 / и / 42 / определят една и съща функция $F(t,x)=F^*(t,x)$ поради граничните условия $F(0,x)=1$ и $F(t,-0)=0$. С това теорема 5. е доказана.

Разглеждането на процеса $W(t)$ вместо $W^*(t)$ ни дава известни предимства, тъй като $W(t)$ е марковски, а $W^*(t)$ полумарковски с две състояния, като вероятността за преход от едното състояние в другото е равна на единица. В случай че

$F(x)=1-e^{-\lambda x}$, отношението $h_1(u)/F^*(u,+0)=\lambda$ и нестационарният поасонов процес $\{t_n\}$ е обикновен поасонов. Може да се покаже, че е вярно и обратното: ако отношението $h_1(u)/F^*(u,+0)$ е константа, $F(x)$ е експоненциалното разпределение с параметър, равен на тази константа.

Лема 3. Необходимо и достатъчно условие за $\lambda(t)=const.$ е: разпределението на времето на живот на един елемент да е експоненциално.

Доказателство. Нека $\lambda(t)=\lambda$ не зависи от t. Тогава $H_1'(t)=\lambda F(t,+0)$ и с умножаване на e^{-st} и интегриране следва

$$(45)\qquad h_1(s)=\lambda\int_0^\infty e^{-st}F(t,+0)\,dt .$$

Тъй като от друга страна $h_1(s)=f(s)/[1-g(s)f(s)]$, а,

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t,+0)\,dt=[1-f(s)]/[1-g(s)f(s)]s,$$

то сравняването на горните две равенства с / 45 / води до $f(s)=\lambda/(\lambda+s)$. Следователно $F(x)$ е експоненциалното разпределение.

Обратно, ако $f(s)=\lambda/(\lambda+s)$, то $h(s)=\lambda/s$, $h(s)=\mathcal{L}(H)$ и от / 32 / получаваме, че

$$\lambda\mathcal{L}(F(u,+0))=\frac{\lambda}{s+\lambda(1-g(s))}=h_1(s)$$

т.е. отношението

$$H_1'(t)/F(t,+0)=\lambda$$

не зависи от t. Следователно $\lambda(t)=\lambda$.

В следващите две точки ще разгледаме работещи системи като функционирането на един елемент, включващо циклите работа-ремонт, ще описваме вероятностно чрез процесът $W(t)$. Право за това ни дава доказаното в теорема 5.

Система от n елемента, работеща когато поне един от елементите работи.

Ще разгледаме система с паралелно свързани елементи. Предполагаме, че системата се състои от n независими елемента, всеки от които работи в началния момент $t_0 = 0$. Продължителността на живот на k-тия елемент е разпределена произволно с функция на разпределение $F_k(x)$. След всеки отказ на елемент от системата той се ремонтира и времето, необходимо за ремонт е случайна величина с функция на разпределение $G_k(x)$ за k-тия елемент. Предполагаме още, че времето на работа на елементите и времената за ремонт са независими и че съществуват моментите

$$a_{1k} = \int_0^\infty x \, dF_k(x) \; ; \quad b_{1k} = \int_0^\infty x \, dG_k(x) .$$

Вероятностното състояние на k-тия елемент се определя от процес $W_k(t)$, който определихме в . За системата ще разгледаме вероятностни характеристики като: състоянието ѝ в произволен момент t, брой на отказите в даден интервал, разпределението на времената за ремонт и на работа /в отделен момент и стационарните при $t \to \infty$ /, средните стойности на тези величини и други.

Посредством процесите $W_k(t)$ да определим процеса

$$W(t) = \min [W_1, W_2, \dots, W_n] . \qquad (46)$$

Лесно се проверява, че необходимото и достатъчно условие системата да работи в момента t е $W(t)=0$. Ако $W \neq 0$, системата не работи. Тъй като функциите F_k и G_k са дадени, разпределението $F_k(t,x) = P(W_k \leq x)$ е напълно определено от диференциално уравнение от вида / 41 /. По такъв начин ние разполагаме с функциите $F_1(t,x), F_2(t,x), \dots, F_n(t,x)$. Тогава и разпределението на $W(t)$

ще ни е известно. То е разпределението на минимума на n случайни величини:

$$(46_1)\quad \tilde{F}_n(t,x) = P\left[W(t) < x\right] = 1 - \prod_{k=1}^{n}\left[1 - F_k(t,x)\right]$$

Тук $\tilde{F}_n(t,+0)$ ни дава вероятността системата да работи в момента t, а $1-\tilde{F}_n(t,+0)$ – да не работи. Като сумираме тези вероятности по t, ще получим средното време за работа на системата в интервал от време $/ 0, T /$:

$$(47)\quad R(T) = \int_0^T \tilde{F}_n(t,+0)\,dt$$

и

$$(48)\quad \Pi(T) = \int_0^T \left[1 - \tilde{F}_n(t,+0)\right]dt$$

– средното време на престой на системата в $/ 0, T /$.

На практика не е удобно да се работи с точните изрази за / 47 / и / 48 /. При големи стойности на T можем да вземем приближения за / 47 / и / 48 /. Знаем, че

$$\lim_{t\to\infty} F_k(t,+0) = \frac{a_{1k}}{a_{1k}+b_{1k}}$$

/стационарен коефициент на готовност за k-тия елемент/. Тогава от / 47 / и / 48 / при достатъчно голямо T следва

$$(48_1)\quad \begin{aligned} R(T)/T &\approx \prod_{k=1}^{n}\frac{a_{1k}}{a_{1k}+b_{1k}} \\ \Pi(T)/T &\approx \prod_{k=1}^{n}\frac{b_{1k}}{a_{1k}+b_{1k}} \end{aligned}$$

За да намерим средния брой откази на системата в даден интервал от време, първо ще намерим разпределението на времето на престой за системата.

Разпределение на времето на престой на система с паралелно свързани елементи.

Разпределението на времето на престоя на системата в момент t означаваме с $G_n(t,x)$. Това е вероятността в даден момент t престоят /или ремонтът/ на системата да не надминава x. За да намерим $G_n(t,x)$, да разгледаме събитието $B_n(t,\delta)=\{W(t_0)>0$ за t_0 от интервала $(t,t+\delta)$ и условната вероятност

$$G_{n,\delta}(t,x)=P(W(t)<x \mid B_n), \tag{49}$$

която е вероятността ремонтът на системата в момент t да не надминава x. Следователно

$$G_n(t,x)=\lim_{\delta\to 0} G_{n,\delta}(t,x)$$

Разпределението $G_n(t,x)$ не е удобно за практически цели поради сложния си вид. Освен това в повечето случаи ни интересува стационарното разпределение. Ще намерим $G_n(t,x)$ с цел да получим $\lim_{t\to\infty} G_n(t,x)=G(x)$. Ще докажем следната теорема.

Теорема 6. Стационарното разпределение $G(x)$ на времето на престой на система от n паралелно свързани елемента е

$$G(x)=1+\frac{(b_1 b_2 \dots b_n)^{-1}}{b_1^{-1}+b_2^{-1}+\dots+b_n^{-1}}\frac{d}{dx}\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(b_k-\int_0^x[1-G_k(t)]\,dt\right)\right\}, \tag{50}$$

където

$$b_k=\int_0^\infty x\,dG_k(x)$$

са средните на времето за ремонт на отделните елементи.

Доказателство. Първо ще трябва да намерим $G_n(t,x)$. Условната вероятност /49/ е

$$1-G_{n,\delta}(t,x)=\frac{P[\{\tilde{W}_n(t+\delta)\geq x\cap B_n]}{P(B_n)}.$$

Събитието $\{\tilde{W}_n(t+\delta)\geq x\}\cap B_n$ може да се разложи на следните несъвместими събития:

а/ В точката t имаме $\tilde{W}_{n-1}(t)>x+\delta$; в интервала $(t,t+\delta)$ отказва n-тият елемент и времето му за ремонт е по-голямо от $x+\delta$ /Тук $\tilde{W}_{n-1}(t)$ има същия смисъл, както $\tilde{W}_n(t)$ /. Вероятността за това е

$$[1-\tilde{F}_n(t,x+\delta)]F_n(t,+0)\lambda_n(t)\delta[1-G_n(t+\delta)]+o(\delta)$$

б/ В точката t имаме $\tilde{W}_n(t)>x+\delta$, в интервала $(t,t+\delta)$ отказва системата на първите $n-1$ елемента и тя се ремонтира за време, по-дълго от $x+\delta$. Вероятността за това е

$$[1-F_n(t,x+\delta)]P(B_{n-1})[1-G_n(t+\delta,x+\delta)]+o(\delta).$$

в/ В интервала $(t,t+\delta)$ отказва както n-тият елемент, така и системата от първите $n-1$ елемента. Вероятността за това е от порядъка на $o(\delta)$.

Да означим с $S_k(t)$ границата

$$S_k(t)=\lim_{\delta\to 0}\delta^{-1}P(B_k(t,\delta)),\quad 1\leq k\leq n,$$

тогава от вероятностите а/, б/ и в/ получаваме

$$(51)\quad 1-G_n(t,x)=S_n(t)[1-\tilde{F}_n(t,x)]\lambda_n(t)F_n(t,+0)$$
$$+[1-F_n(t,x)]S_{n-1}(t)[1-G_{n-1}(t,x)].$$

Като разложим събитието $B_k(t,\delta)$ на несъвместими събития, подобни на тези в а/, б/ и в/, получаваме

$$(52)\quad S_k(t)=[1-\tilde{F}_k(t,+0)]\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(t)\frac{F_i(t,+0)}{1-F_i(t,+0)}$$

Като вземем пред вид, че $\lambda_i(t) \to a_i^{-1}$ при $t \to \infty$, рекурентната формула (51) и съотношението (52) ни водят след несложни пресмятания до (50).

С помощта на (50) можем да пресметнем средното /стационарното/ време на престой на системата. Да го означим с β_n т.е.

(53) $$\beta_n = \int_0^\infty x\,dG(x) = \left[\sum_{k=1}^{n} b_k^{-1}\right]^{-1}.$$

Средното време, през което системата работи, можем да изчислим от (53). Ако разглеждаме системата в стационарното й състояние, по (50) времето за ремонт ще е разпределено по $G(x)$, а времето от включването й до последвал нов отказ ще има разпределение със средна стойност, равна на α_n. Тогава стационарният коефициент на отказ на системата ще е

(54) $$k = \frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n}.$$

От друга страна, вероятността един елемент, например i-тият, да откаже се дава от неговия коефициент на отказ k_i и произведението $k_1 k_2 \ldots k_n$ ни дава вероятността за отказ на системата. Следователно

(55) $$k = k_1 k_2 \ldots k_n$$

Като приравним (54) и (55) и вземем пред вид, че $k_i = a_i/(a_i + b_i)$ ще получим

$$\frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i},$$

откъдето, решавайки спрямо α_n, определяме средното време на работа за системата

(56) $$\alpha_n = \frac{1 - \prod_{k=1}^{n} b_k/(a_k + b_k)}{(b_1^{-1} + b_2^{-1} + \cdots + b_n^{-1}) \prod_{k=1}^{n} b_k/(a_k + b_k)}.$$

Ако елементите са еднотипни и времената за ремонт на всеки един от тях са еднакво разпределени, т.е. $F_1 = F_2 = \dots = F_n$ и $G_1 = G_2 = \dots = G_n$, то формулите (53) и (56) приемат по-простия вид

$$\beta_n = b/n$$
$$(57) \qquad \alpha_n = n\, b^{-1}\left[(1+\rho)^n - 1\right], \quad \rho = a/b,$$

където a е средното време на работа за един елемент, а b - средното време за неговия ремонт.

От (53) се вижда, че средното време β_n на престоя на системата намалява с увеличаването на броя на елементите; а от израза за α_n - че средното време α_n, през което системата работи, ще расте, ако или броят на елементите n расте, или средното време b за ремонт на един елемент намалява. Това можехме да предвидим и предварително, но изразите (53)(56) ни дават точната зависимост между количествените характеристики a, b и n.

Среден брой откази в $(0,T)$. Средният брой откази на системата можем да намерим, като знаем средното сумарно време на престой $\Pi(T)$ на системата в $(0,T)$ и средното време на възстановяване β_n от (53). Тогава по елементарната теорема на възстановяване средният брой откази $m(T)$ на системата в интервал от време $(0,T)$ при големи стойности на T е

$$(58) \qquad m(T) \sim \Pi(T)/\beta_n$$

Асимптотичното приближение (58), като вземем предвид асимптотиката (48,) за $\Pi(T)$ и стойността на β_n, се свежда до

$$(59) \qquad m(T) \sim T\left[\sum_{k=1}^{n} b_k^{-1}\right] \prod_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k + b_k}$$

Ако елементите са еднотипни, изразът (59) приема много прост вид

$$m(T) \sim n\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^n T\, b^{-1}, \quad \rho = a/b,$$

където a е средната продължителност на живот на един елемент, а b - средното му време, необходимо за ремонт.

Пример. Експоненциално разпределена надеждност и време за ремонт на елементите. Да предположим, че системата се състои от n паралелно свързани независими елемента. Продължителността на живот на всеки един от тях нека има разпределение

$$F_i(x) = 1 - e^{-\lambda_i x}, \quad \lambda_i > 0, \quad x \geq 0.$$

Времената за ремонт предполагаме също експоненциално разпределени, т.е. функциите на разпределение $G_i(x)$ са

$$G_i(x) = 1 - e^{-\mu_i x}, \quad \mu_i > 0, \quad x \geq 0.$$

В този случай ~~видяхме~~ намираме, от (18), че вероятността k-тият елемент на системата да работи в момент t е

$$F_k(t, +0) = \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} + \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} e^{-(\lambda_k + \mu_k)t}$$

За $F_k(t, x)$ от уравнението (41) намираме

$$(57) \qquad F_k(t, x) = 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} e^{-\mu_k x}\left[1 - e^{-(\lambda_k + \mu_k)t}\right].$$

$F_k(t,x)$ ни дава вероятността k-тият елемент да работи отново, не по-късно от момента $t + x$. От (46_1) и (57) определяме

$$(58) \qquad 1 - \tilde{F}_n(t, x) = e^{-\sum \mu_k x} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}\left[1 - e^{-(\lambda_k + \mu_k)t}\right].$$

При $x = 0$ (58) е вероятността за това, че в момента t системата не работи.

При експоненциални F_i и G_i лесно се намира и $G_n(t, x)$ от рекурентното равенство (51). Получаваме

$$(59) \qquad 1 - G_n(t, x) = \exp\left[-\sum_{k=1}^{n} \mu_k x\right]$$

т.е. вероятността след момента t системата да бездействува още време, не по-малко от x, не зависи от t и е експоненциална.

Това се дължи на факта, че при експоненциално разпределени надеждност на елемент и ремонт потокът от отказите е прост стационарен поток. Следователно времето, от което започваме да наблюдаваме функционирането на системата, не влияе на вероятностния режим. От (59) следва, че $G_n(t,x)$ съвпада с $G(x)$ от (50), тъй като $G(x)$ е границата на $G_n(t,x)$ за $t \to \infty$. Не е такъв случаят с разпределението $\tilde{F}_n(t,x)$. Стационарното разпределение на $\tilde{F}_n(t,x)$ е от експоненциален тип със скок в началото. То се получава от (46) при $t \to \infty$

$$(60) \quad \lim_{t\to\infty} \tilde{F}_n(t,x) = 1 - f_n \exp\left[-\sum_{k=1}^{n} \mu_k x\right], \quad x \geq 0$$

където $f_n = \prod \lambda_k/(\mu_k+\lambda_k)$. За границата (60) трябва да се има пред вид, че $\lim\limits_{t\to\infty} \tilde{F}_n(t,-0)=0$ т.е. в началото е съсредоточена маса, равна на $1-f_n$. Ще докажем, че при известни условия стационарното разпределение на времето на работа на системата до първия отказ е приблизително експоненциално, макар F_i и G_i, $i=1,2,\dots,n$, да са произволни разпределения.

Лема 4. Нека $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ са точки от поасонов поток с водеща функция

$$\Lambda(x_1,x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda(x)\,dx,$$

където $\lambda(x) \to a$, $x \to \infty$

Тогава

$$(61) \quad \lim_{t\to\infty} P(t_{n+1}-t_n > x \mid t_n = t) = e^{-ax}.$$

Доказателство: Наистина събитието $t_{n+1}-t_n > x$, при условие $t_n = t$, означава, че в интервала $(t,t+x)$ няма точка от поасоновия поток. Вероятността $P_0(t)$ за това се получава от формулата

$$P_n(t) = (n!)^{-1} \Lambda^n(t, t+x) \exp[-\Lambda(t, t+x)]$$

при $n=0$. Следователно

$$P(t_{n+1} - t_n > x \mid t_n = t) = P_0(t) = \exp\left[-\int_t^{t+x} \lambda(u)\,du\right]$$

и при $t \to \infty$ следва (61) .

Лема 5 . Нека ξ и ζ са независими случайни величини и B някое събитие, независимо от ζ .

Ако разпределението G на ζ се мени така, че

$$\lim_G P(\xi < \zeta \mid B) = 0, \tag{62}$$

то

$$\lim_G P(\xi - \zeta > x \mid B) = \lim_G P(\xi - \zeta > x \mid \xi > \zeta, B). \tag{63}$$

Твърдението следва веднага от формулата за пълната вероятност. Да означим с A и C събитията

$$A = \{\xi - \zeta > x\}$$

$$C = \{\xi \geqq \zeta\},$$

тогава

$$P(A|B) = P(C|B)P(A|BC) + P(\bar{C}|B)P(A|B\bar{C}) \tag{64}$$

Тъй като по условие $P(\bar{C}|B) \to 0$, то от (64) следва (63) .

Горните две леми ще използуваме при доказателството на следната теорема

Теорема 7 . Нека $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ са точки от поасонов поток с водеща функция

$$\Lambda(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda(x)\,dx, \quad \lambda(x) \to a, \ x \to \infty$$

и ζ случайна величина независима от $\xi_n = t_{n+1} - t_n$.

Ако разпределението $G(x)$ на ζ се изменя така, че

$$(65) \qquad \int_0^\infty x\, dG(x) \to 0 ,$$

то

$$(66) \qquad \lim_G \lim_t P(\xi_n - \zeta > x \mid t_n = t) = e^{-ax} .$$

Доказателство. Да означим с B събитието $t_n = t$. Ще докажем, че условието (62) от лема 5 е изпълнено за стационарните вероятности:

$$\lim_t P(\xi_n < \zeta \mid t_n = t)$$

Наистина от неравенството

$$(67) \qquad \lim_t P(\xi_n < \zeta \mid t_n = t) = 1 - \lim_t \int_0^\infty \exp\left[-\int_t^{t+x} \lambda(u)\,du\right] dG$$

$$= \int_0^\infty [1 - \exp(-ax)]\, dG(x) \leq a \int_0^\infty x\, dG(x)$$

и условието (65) следва

$$\lim_G \lim_t P(\xi_n < \zeta \mid B) = 0$$

Тогава последното гранично съотношение според лема 5 ни дава

$$(68) \qquad \lim_G \lim_t P(\xi_n - \zeta > x \mid B) = \lim_G \lim_t P(\xi_n - \zeta > x \mid \xi_n \geq \zeta, B)$$

Да намерим границата на дясната страна на (68).

Имаме

$$P(\xi_n - \zeta > x \mid \xi_n \geq \zeta, B) = \frac{P(\xi_n - \zeta > x, \xi_n \geq \zeta \mid B)}{P(\xi_n \geq \zeta \mid B)}$$

$$= \int_0^\infty P(\xi_n > y + x, \xi_n \geq y \mid B)\, dG(y) \Big/ \int_0^\infty P(\xi_n \geq y \mid B)\, dG(y)$$

$$= \int_0^\infty P(\xi_n \geq y + x \mid B)\, dG(y) \Big/ \int_0^\infty P(\xi_n \geq y \mid B)\, dG(y)$$

и при $t \to \infty$ прилагайки лема Y получаваме

$$(69) \qquad \lim_{t} P(\xi_n - \zeta > x \mid \xi_n > \zeta, B) = e^{-ax}$$

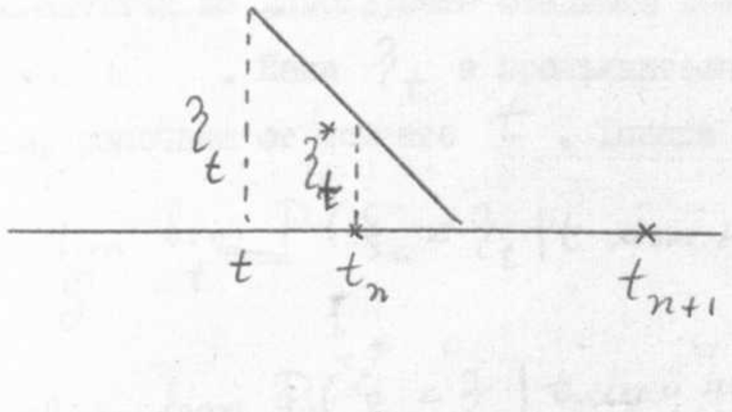
Граничните съотношения (68) и (69) ни дават (66).

Нека ζ_t е времето на ремонт за системата, като t е момент на отказ на системата. Разпределението на случайната величина ζ_t е $G_n(t,x)$ определено чрез (51).

На i-ия елемент на системата отговаря съответен поасонов поток $\{t_n^{(i)}\}$ с мигновена интензивност $\lambda_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$. Нека $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ е сумарният поток получен от тези n на брой потока. Тъй като те са поасонови, то и полученият ще е поасонов с мигновена интензивност $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \cdots + \lambda_n(t).$$

Нека t_n е най-голямото t_i, $i=1,2,\ldots,n$ за което $t \leq t_n < \zeta_t + t$ /вж. фиг. 12 /.



Фиг. 12

и нека $T \geq t$. Да означим с ζ_t^* случайната величина $t + \zeta_t - t_n$.

Както до сега нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са първите моменти на функциите на разпределение $F_1, F_2, \dots, F_n$ на продължителностите на работа съответно на първия, втория и т.н. елементи, а $b_1, b_2, \dots, b_n$ първите моменти на разпределенията $G_1, G_2, \dots, G_n$ на времената за ремонт. Ще предполагаме, че съвкупността

$$\mathcal{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$$

от разпределения се мени така, че

$$(70) \qquad a = \min(a_1, a_2, \dots, a_n) \to \infty$$

или пък се менят разпределенията

$$\mathcal{G} = (G_1, G_2, \dots, G_n)$$

по такъв начин, че

$$(71) \qquad b = \max(b_1, b_2, \dots, b_n) \to 0.$$

Ще означаваме с $\lim\limits_{\mathcal{F}}$ граница, взета по такова менене на разпределенията $\mathcal{F}$ при което е изпълнено (70). Аналогично $\lim\limits_{\mathcal{G}}$ означава граница по разпределенията $\mathcal{G}$ като е изпълнено (71).

По-нататък ще използуваме следната лема:

Лема 6. Нека ζ_t е продължителността на ремонт за системата, започващ от момента t. Тогава

$$\lim_{\mathcal{G}} \lim_{t} P(\xi_n < \zeta_t \mid t \text{ мом. на отказ}) = 0$$

$$(71)$$

$$\lim_{\mathcal{F}} \lim_{t} P(\xi_n < \zeta_t \mid t \text{ мом. на отказ}) = 0,$$

където $\xi_n = t_{n+1} - t_n$.

Доказателство. Граничните съотношения (71) са аналогични на условието (62) от лема 5. Да използваме неравенството (67), като вместо $G(u)$ ще имаме $G_n(t,u)$ и вземем предвид, че при $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} G_n(t,x) = G(x)$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}$$

ще получим

$$\lim_{t\to\infty} P(\xi_n < \zeta_t \,|\, t \text{ мом. на отказ}) \le (a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}) \int_0^\infty x\, dG(x). \tag{72}$$

Тъй като средната на $G(x)$ по (53) е $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{-1}\right)^{-1}$, то неравенството (72) ни дава съотношенията (71).

Лема 7. Ако ζ_t^* е случайната величина

$$\zeta_t^* = \zeta_t + t - t_n,$$

където t е момент на отказ, $t \le t_n$, то

$$\lim_{g}\lim_{t\to\infty} P(\xi_n < \zeta_t^* \,|\, t \text{ мом. на отказ}) = 0$$

$$\lim_{F}\lim_{t\to\infty} P(\xi_n < \zeta_t^* \,|\, t \text{ мом. на отказ}) = 0. \tag{73}$$

Доказателство. Съотношенията (73) са аналог на тези от (71), като вместо ξ_t фигурира ξ_t^*. Поради това доказателството не ще се различава от проведеното в лема 6, ако покажем, че

$$\int_0^\infty x\,dG^*(x) \leq \int_0^\infty x\,dG(x) \tag{74}$$

където $G^*(x)$, е стационарното разпределение на ξ_t^*.

За да докажем (74) ще намерим стационарното разпределение на ξ_t^*. Нека

$$G^*(t,y) = P(\xi_t^* < y).$$

Ако t е момент на отказ, то имайки предвид, че $\xi_t^* \leq \xi_t$ ще имаме

$$G^*(t,y) = \int_y^\infty P(\xi_t^* < y \mid \xi_t = x)\,dG(t,x) + \int_0^y P(\xi_t^* < y \mid \xi_t = x)\,dG(t,x) \tag{75}$$

От определението на ξ_t^* /за по-нагледно вж. фиг. 12/ е ясно, че при $x \geq y$ вероятността

$$P(\xi_t^* < y \mid \xi_t = x) \tag{76}$$

е разпределението на минало остатъчно време относно момента на нестационарния поасонов поток с параметър $\lambda(\tau)$, $t \leq \tau \leq t_n$. Следователно

$$\lim_{t\to\infty} P(\xi_t^* < y \mid \xi_t = x) = 1 - e^{-ay},$$

където $a = \sum_{k=1}^{n} a_k^{-1}$.

Тъй като при $x < y$ вероятността (76) е единица, то от (75) като преминем в граница при $t \to \infty$, получаваме

$$G^*(y) = \lim_{t \to \infty} G(t, y) = 1 - e^{-ay} \bar{G}(y).$$

Така, че

$$\int_0^\infty [1 - G^*(x)] dx = \int_0^\infty e^{-ax} \bar{G}(x) dx \le \int_0^\infty \bar{G}(x) dx$$

т.е. неравенството (74).

<u>Серийна система</u>. Една серийна система от k елемента работи тогава и само тогава, когато всеки от елементите й работи. Нито един от елементите не работи когато един откаже и само отказалият елемент се ремонтира и след това се включва отново. Ремонтираните елементи се предполагат, че функционират като нови.

Един стохастичен модел на горния вид системи е даден в работата [9] на Р. Барлоу и Ф. Прошан, в която са намерени осреднените по време характеристики /например времето на работа и престой на системата / и асимтотични разпределения. Тук ще разгледаме горната система чрез метода описан в този раздел, като ще намерим стационарните средни на характеристиките време на работа и време на ремонт. Освен това, ще дадем и оценка за скоростта на сходимост към стационарните характеристики. Възможност за получаване на горните резултати ни дава намирането на разпределението $F(t, x)$ на процеса $W(t)$, описващ системата във всеки момент t от времето.

Нека ξ_{ir} е времето на i-ия елемент по време на функционирането му

$$F_i(x) = P(\xi_{ir} < x), \quad r = 1, 2, \ldots$$

т.е. ξ_{ir} е времето при r-ото заменяне на i-ия елемент до настъпване на отказ.

Да означим с a_i и $a_i^{(2)}$ съответно първия и втория моменти на F_i

$$a_i = \int_0^\infty x \, dF_i(x)$$

$$a_i^{(2)} = \int_0^\infty x^2 \, dF_i(x)$$

Разпределенията $F_i, \; i = 1, 2, \ldots, k$ предполагаме непрекъснати. Едно такова предположение прави вероятността за едновременни откази равна на нула.

Нека ζ_{ir} е периода на времето за ремонт на i-ия елемент след r-ия негов отказ, а

$$G_i(x) = P(\zeta_{ir} < x), \quad r = 1, 2, \ldots$$

е разпределението на този период. С b_i и $b_i^{(2)}$ означаваме двата първи последователни момента на $G_i(x)$

$$b_i = \int_0^\infty x \, dG_i(x)$$

$$b_i^{(2)} = \int_0^\infty x^2 \, dG_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Разпределенията $F_i(x)$ и $G_i(x)$ предполагаме още и нерешетъчни, за да може да използуваме съответните теореми от теорията на възстановяването.

Функционирането на системата /по-точно работа-ремонт/ ще се описва стохастически чрез следния процес. Да означим с $\lambda_i(t)$ мигновена интензивност определена по (38,) чрез разпределенията F_i и G_i. Така отказите на системата дължащи се на i -ия елемент ще са някои от точките на поасоновия поток с водеща функция

$$\Lambda_i(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda_i(t)\,dt.$$

Да образуваме сумарния поток на тези k на брой поасонови. Понеже елементите предполагаме независими /т.е. независими предполагаме всички величини ξ_{ir} и ζ_{ir}, $i=1,2\ldots k$, $r=1,2,\ldots$, то сумарният поток ще е поасонов с мигновена интензивност $\lambda(t)$ равна на сумата от интензивностите λ_i, $i=1$

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t).$$

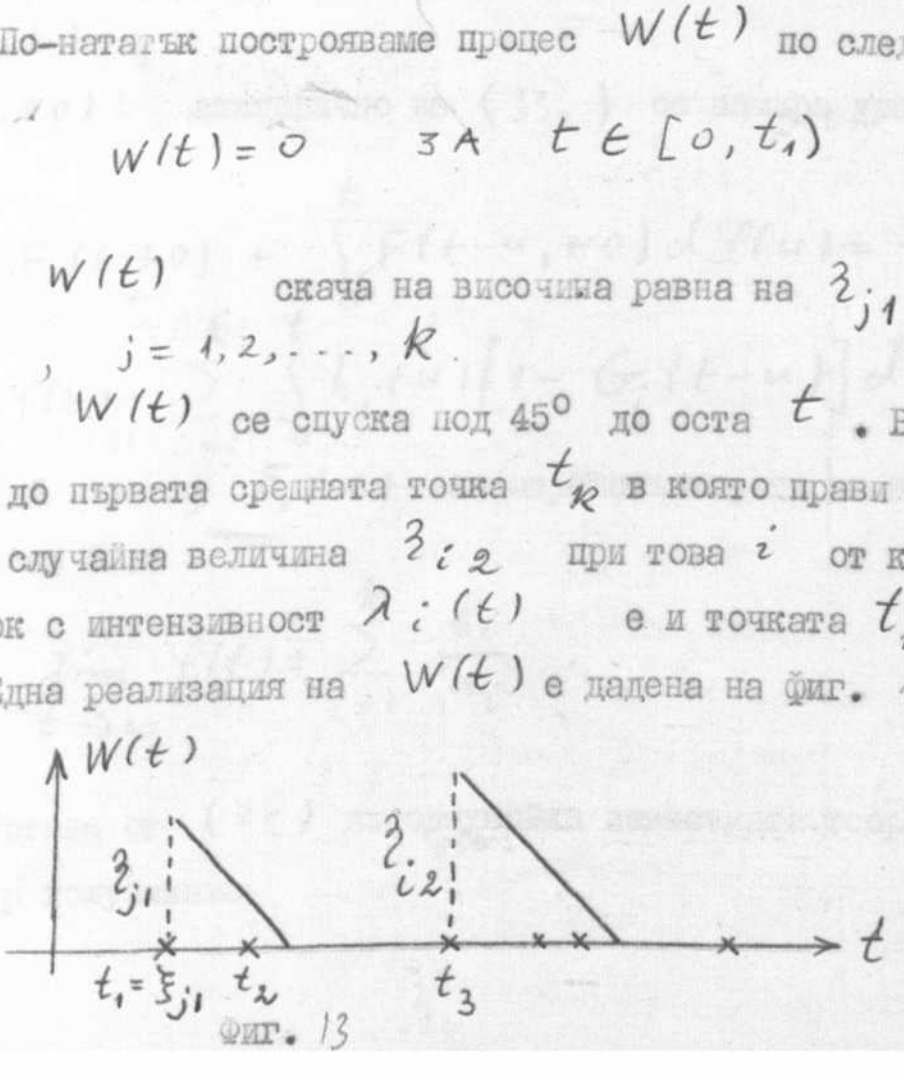
Нека $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ е една реализация на точките от поасоновия поток с интензивност $\lambda(t)$.

По-нататък построяваме процес $W(t)$ по следния начин:

$$W(t) = 0 \quad \text{за} \quad t \in [0, t_1)$$

в t_1 $W(t)$ скача на височина равна на ζ_{j1} щом $t_1 = \xi_{j1}$, $j = 1, 2, \ldots, k$.
След това $W(t)$ се спуска под 45^0 до оста t. Върви по оста t до първата срещната точка t_k в която прави скок равен на случайна величина ζ_{i2} при това i от който съставен поток с интензивност $\lambda_i(t)$ е и точката t_k и т.н.

Една реализация на $W(t)$ е дадена на фиг. 13 .



Фиг. 13

Като имаме пред вид ~~лема~~ теор 5 така построения процес $W(t)$ ще отговаря на описаната система, която ще изследваме. Да означим с $F(t,x)$ функцията на разпределение на $W(t)$

$$F(t,x) = P(W(t) < x) .$$

От определянето на $W(t)$ е ясно, че $F(0,+0)=1$. Функцията $F(t,x)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$(77) \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} - F(t,+0)\sum_{i=1}^{k}\left[1-G_i(x)\right]\lambda_i(t)$$

Уравнението (77) се получава като направим същите разсъждения както при получаването на (41). Само в случая 2 (вж. стр. 76) трябва да вземем предвид, че точката t_k в която $W(t)$ има скок е или точка от поасоновия поток с интензивност $\lambda_1(t)$ или от този с интензивност $\lambda_2(t)$ и т.н. до $\lambda_k(t)$.

За $F(t,+0)$ аналогично на (33_0) се намира уравнението

$$(78) \qquad F(t,+0) + \int_0^t F(t-u,+0)\,d\varphi(u) = 1 ,$$

където

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k}\int_0^t h_i(u)\left[1-G_i(t-u)\right]du .$$

Тъй като $F_i(x)$ са нерешетъчни, то по възловата теорема на Смит

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{a_i} .$$

Тогава от (78) използувайки известната теорема на Палей-Винер получаваме

$$(79) \quad \lim_{t\to\infty} F(t,+0) = \left(1+\int_0^\infty \varphi'(u)\,du\right)^{-1} = \left(1+\sum_{i=1}^{k} \frac{b_i}{a_i}\right)^{-1} \overset{def.}{=} \pi_0$$

Граничната стойност (79) на $F(t,+0)$ ни дава стационарната вероятност системата да работи. В работата [9] /теорема 2.2 / е получена същата гранична стойност, но за $\longleftrightarrow$ осреднената стойност на $F(t,+0)$ т.е.

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t F(u,+0)\,du = \pi_0,$$

което очевидно следва от (79).

Ясно е, че използувайки начина на доказателството на теорема 7 може да получим оценка за скоростта на сходимост на (79). Няма да дадем подробно доказателство за следващото твърдение, тъй като то е почти повторение на споменатото горе.

Теорема 8. Ако $F_i(x)$ и $G_i(x)$ са нерешетъчни разпределения, имащи втори моменти, то

$$(80) \quad \lim_{t\to\infty}\left[\int_0^t F(u,+0)\,du - t\left[1+\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{a_i}\right]^{-1}\right]$$

$$= \pi_0^2 \, \frac{a_i^2 b_i^{(2)} - b_i a_i^{(2)} - 2a_i^2}{2a_i^2}$$

Доказателство. Със същите означения, както при доказателството на теорема 7 имаме за случая

$$D(x) = x(1-\pi_0) - \sum_{i=1}^{k} \pi_0 \int_0^t (t-u)\, d\int_0^u h_i(u)\,\overline{G}_i(u-y)\,dy$$

Намира се, че

$$(81)\quad \lim_{x\to\infty} D(x) = \pi_0 \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{b_i^{(2)}}{2a_i} - \sum_{i=1}^{k} b_i d_i \Big),$$

където

$$d_i = (a_i^{(2)} - 2a_i^2)/2a_i^2 .$$

И тъй като интересуващата ни разлика от лявата страна на (80), означаваме я с $N(x)$, удовлетворява уравнението

$$N(x) + \int_0^x N(x-u)\,d\varphi(u) = D(x)$$

то от $\lim\limits_{x\to\infty} N(x) = \pi_0 \lim\limits_{x\to\infty} D(x)$ следва (80).

Стационарно разпределение. За разпределението $F(t,x)$ лесно се получава стационарното, след като знаем уравнението (82). От него преминавайки към съответните Лаплас-Стилтесови трансформации се получава

$$(83)\quad \frac{\partial f(t,s)}{\partial t} = s f(t,s) - s\Big\{F(t,+0) + \sum_{i=1}^{k} (1-g_i(s))h_i(t)\Big\},$$

където

$$f(t,s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-sx}\,dF(t,x)$$

$$g_i(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-sx}\,d\Theta_i(x).$$

Като решим (83) относно $f(t,s)$ /т.е. решаваме едно линейно диференциално уравнение/, оставим $t\to\infty$ и получения резултат съдържащ f и g_i, върнем към оригиналите F и Θ_i ще получим за стационарното разпределение $\tilde F(x)$

$$(84)\quad \tilde F(x) = \lim_{t\to\infty} F(t,x) = \pi_0 \Big(1 + \sum_{i=1}^{k} a_i^{-1} \int_0^x \bar\Theta_i(u)\,du\Big).$$

Тъй като всичко е повторение на съответните пресмятания дадени при доказателството на ~~теорема~~ (38,) , то се ограничихме само със скициране на получаването на (84) .

Да означим с m средната стойност на стационарното разпределение $\tilde{F}(x)$. От (84) се получава

$$m = \int_0^\infty x \, d\tilde{F}(x) = \pi_0 \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i^{(2)}}{2a_i}$$

Средни значения. Да определим средните на времето на работа и времето на престой за системата. Да означим с α средното време на работа за една серийна система в стационарния режим. Като вземем пред вид лема 4 и тъй като $\lambda_i(t) \to a_i^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ ще имаме

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^{-1} \right)^{-1} .$$

Средното време на бездействие β на системата /в стационарен режим/ може да се определи също лесно, след като знаем α . За тази цел ще използваме, че отношението $\alpha/(\alpha+\beta)$ ни дава вероятността системата да работи. Следователно

$$\lim_{t \to \infty} F(t, +0) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

или

$$\pi_0 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} ,$$

от където получаваме

$$(85) \qquad \beta = \alpha \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i}{a_i}$$

Изразът (85) е получен в [9] (теорема 2.7) като граница на осреднения по време престой на системата. От тук следва, че той съвпада със средната стойност на престоя на системата.

Да определим средния брой откази в интервал $(0, T)$ на системата, дължащи се на i -тия елемент. Знаем, че при поасонов поток с параметър $\lambda_i(t)$ средния брой попадения $m(z)$ в интервал с дължина z /отчитана от началото/ е равен на

$$m(z) = \int_0^z \lambda_i(t)\,dt.$$

Да означим с $z(T)$ средната стойност на сумарното време на работа на системата в $(0, T)$. Тогава

$$z(T) = \int_0^T F(u, +0)\,du$$

и средния брой откази $M(T)$ в $(0, T)$ на i -ия елемент ще е

$$M(T) = m(z(T)) = \int_0^{z(T)} \lambda_i(t)\,dt.$$

Тъй като

$$T^{-1} z(T) = T^{-1} \int_0^T F(u, +0)\,du \to \pi_0, \quad T \to \infty,$$

то $z(T) \sim \pi_0 T$ и следователно

$$T^{-1} M(T) = \frac{1}{z} \int_0^z \lambda_i(t)\,dt\, \frac{z}{T} \sim \pi_0 a_i^{-1}.$$

Разглежданията, които направихме за системата като цяло могат да се направят и относно един от елементите. Да означим с $P_i(t)$ вероятността в момента t системата да не работи по причина на отказал i -и елемент. Нека x

е произволно неотрицателно число, но $x < t$. Системата няма да работи в момента t поради отказа на i -ия елемент, ако:

1. До момента x тя работи – вероятността за това е равна на $F(x,+0)$

2. В момента x отказва точно i -ият елемент и той се ремонтира време ξ_i по-голямо от $t-x$. Вероятността за осъществяване на тези две неща е равна на $\lambda_i(x)\, G_i(t-x)$.

Като вземем предвид 1 и 2, то търсената вероятност $P_i(t)$ ще е

$$(86) \quad P_i(t) = \int_0^t F(x,+0)\,\lambda_i(x)\left[1-G_i(t-x)\right]dx.$$

По-удобна за изчисляване е стационарната вероятност $P_i = \lim_{t\to\infty} P_i(t)$. От (86) като вземем пред вид, че при $x \to \infty$:

$$f(x) = F(x,+0)\,\lambda_i(x) \to \pi_0 a_i^{-1}$$

$$g(x) = \int_0^x [1-G_i(u)]\,du \to b_i$$

следва

$$(87) \quad P_i = \lim_{t\to\infty} P_i(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)\,dg(t-x) = \frac{\pi_0 b_i}{a_i}.$$

В работата [9] е получено (стр. 320), че

че
$$t^{-1}\int_0^t P_i(u)\,du \to \frac{\pi_0 b_i}{a_i}, \quad t\to\infty.$$

Очевидно горното гранично твърдение следва от (87).

4. СИСТЕМА ОТ ТИПА " k ОТ n " С ВЪЗСТАНОВЯВАНЕ И ЕКСПОНЕНЦИАЛНА ПРОДЪЛЖИТЕЛНОСТ НА ЖИВОТ

Ще разгледаме едно разширение на паралелно свързана система. При такова свързване функционирането на системата се изразява чрез правилото: системата работи, ако поне един от n -те елемента работят. Ще допуснем по-общо, че системата от n елемента работи, ако поне k от тях работят. Системата, работеща по това правило, ще наричаме накратко система от тип " k от n ". Най-общият случай е, когато продължителностите на живот на елементите са произволно разпределени с функция на разпределение $F_i(x)$ за i -тия елемент и време на възстановяване, разпределено произволно по закони $G_i(x)$. Ще се ограничим с частния случай, когато всички $F_i(x)$ са еднакви, но експоненциални / с параметър λ /, а $G_i(x)$ също са еднакви, но произволни.

Продължителността на работа и възстановяване на един елемент ще разгледаме като случаен процес, който за i -тия елемент означаваме с $W_i(t)$ и който е определен, както в §3.II. Функцията на разпределение $F(t,x)$ на $W_i(t)$ няма да зависи от i и ще се определя от диференциално уравнение от вида (12), §3, което има единствено решение при условие $F(0,x)=1$. Съгласно (19_0) стационарното състояние на всеки един от процесите $W_i(t)$ се характеризира с функцията на разпределение $\tilde{F}(x)$:

$$\tilde{F}(x) = \lim_{t\to\infty} F(t,x) = (\lambda b_1 + 1)^{-1}\left[1 + \lambda \int_0^x \bar{G}(u)\,du\right],$$

$x \geq 0$.

Да определим процес $W(t)$, който да характеризира работата на системата. За тази цел да разгледаме една наредена реализация

$$W_1^*(t) \leqq W_2^*(t) \leqq \cdots \leqq W_n^*(t)$$

на величините $W_1, W_2, \ldots, W_n$. Ако $W_k^*(t)=0$, то $W_i^*(t) \leqq 0$ за всички $i \leqq k$. Следователно в момента t работят поне k на брой елемента, тъй като $W_i^*(t)=0$ означава /по определението на W_i /, че i-тият елемент работи в момента t. Обратно, ако поне k елемента работят, то $W_k^*(t)=0$. И така, вероятностният режим на системата " k от n " се определя от $W_k^*(t)$.

Да положим $W(t)=W_k^*(t)$ и да намерим $P(W(t)<x)$. Нека някое $W_\nu^*(t)$ в момента t взема стойност y. За да е изпълнено събитието $W(t) \leqq x$, трябва $k-1$ на брой W_i да са по-малки от някое произволно число $y=W(t)$ от интервала $(0,x)$ а останалите $n-k$ да са не по-малки от y. Следователно по формулата за пълната вероятност имаме

$$(88) \quad P(W(t)<x)=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^x F^{k-1}(t,y)\left[1-F(t,y)\right]^{n-k} dF(t,y)$$

при $x \neq 0$. Ако $x=0$, то $W(t)=0$ означава, че системата работи в момента t. Нека точно ν на брой от величините $W_i(t)$ са нули, $\nu \geqq k$. Тогава вероятността за $W(t)=0$ е $\binom{n}{\nu} F^\nu(t,+0)\left[1-F(t,+0)\right]^{n-\nu}$, а вероятността поне k да са равни на нула е

$$(89) \quad P(W(t)=0)=\sum_{\nu \geqq k} F^\nu(t,+0)\left[1-F(t,+0)\right]^{n-\nu}.$$

Сумата отдясно в (89) допуска интегрално представяне и (89) е еквивалентно на

$$(90)\quad P(W(t)=0)=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^{F(t,+0)} u^{k-1}(1-u)^{n-k}\,du.$$

Ако в интеграла (88) направим смяната $F(t,y)=u$, получаваме интеграл от същия вид, както (90), само че в граници от $F(t,+0)$ до $F(t,x)$. Това ни дава право да запишем едновременно (88) и (89) като

$$(91)\quad P(W(t)\le x)=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^{F(t,x)} u^{k-1}(1-u)^{n-k}\,du,\quad x\ge 0.$$

Тук (91) е търсената вероятност за всяко неотрицателно x.

Да оставим в (91) $t\to\infty$. За стационарното разпределение на $W(t)$ получаваме

$$\lim_{t\to\infty} P(W\le x)=B_{k,\,n-k+1}\left[\tilde{F}(x)\right]$$

т.е. разпределението е бета-разпределение:

$$B_{s,r}=\frac{\Gamma(s+r)}{\Gamma(s)\,\Gamma(r)}\int_0^{x} y^{s-1}(1-y)^{r-1}\,dy,$$

като вместо x имаме аргумент $\tilde{F}(x)$ – стационарното разпределение (19_0) за един отделен елемент.

Разпределението на времетона престой $G(t,x)$ на системата може да се намери по начин, съвсем аналогичен на този, който използвахме при система " 1 от n ", т.е. при паралелно свързана. Тъй като в случая, който разглеждаме сега, имаме опростяване поради еднаквост на разпределенията, изразът (51) е по-прост. Получава се

$$(92)\quad 1-G(t,x)=\left[1-G(x)\right]\left\{\frac{1-F(t,x)}{1-F(t,+0)}\right\}^{n-k}.$$

От (92) при $t \to \infty$ получаваме стационарното разпределение $\tilde{G}(x)$ на времето за ремонт на системата

$$(93) \qquad 1-\tilde{G}(x) = [1-\tilde{F}(x)]^{n-k}\,\bar{G}(x)\left(\frac{\lambda b_1}{1+\lambda b_1}\right)^{k-n}.$$

При намирането на (93) от (92) сме взели пред вид, че $F(t,x)$ клони към $\tilde{F}(x)$ от (19_0), а $F(t,+0)$ - към коефициента на готовност $1/(1+\lambda b_1)$.

Средното време на престой на системата в стационарното й състояние е

$$\beta_n = \int_0^\infty [1-\tilde{G}(x)]dx = \frac{1}{b_1^{n-k}}\int_0^\infty \Big[b_1 - \int_0^x \bar{G}(u)du\Big]^{n-k}\bar{G}(x)dx$$

или след пресмятането на интеграла

$$\beta_n = b_1/(n-k+1)$$

По елементарната теорема на възстановяване средният брой откази в интервал $(0,T)$ при голямо T е

$$(94) \qquad m(T) \sim (n-k+1)\frac{\rho\lambda T}{1-\rho}\sum_{\nu=0}^{k-1}\binom{n}{\nu}\rho^\nu(1-\rho)^{n-\nu},$$

$$\rho = (1+\lambda b_1)^{-1}.$$

Приближението (94) се получава по същия начин, както при (59). За тази цел е достатъчно да знаем средното сумарно време на престой $\Pi(T)$ на системата в $(0,T)$ и средното β_n от (53). Времето на престой в $(0,T)$ е

$$\Pi(T) = \int_0^T \{1 - P(W(t)=0)\}dt,$$

където вероятността под интеграла вземаме от (90). Тъй като по теоремата на възстановяване

$$(95) \qquad m(T) \sim \Pi(T)/\beta_n$$

то от (95) ще получим (94).

5. НАДЕЖДНОСТ НА СИСТЕМИ СЪС ЗАВИСИМИ ЕЛЕМЕНТИ. ПОЛУМАРКОВ МОДЕЛ ЗА ОПИСАНИЕ НА СИСТЕМИ И СВЕЖДАНЕ КЪМ МАРКОВСКИ ПРОЦЕСИ

Система без отчитане на времето за ремонт. В разгледаните досега случаи ние предполагахме, че елементите на дадената система са независими. Това е силно допускане и се прави, за да се опростят изводите и да се получат резултатите в по-компактен вид. На практика често няма независимост. Например при паралелно свързани елементи, след отказ на един от тях функциите му се поемат от всички останали. Те се претоварват и това влияе на продължителността им на живот. Да разгледаме този случай на паралелно свързани елементи при следната вероятностна схема на зависимост:

а/ Системата се състои от n еднакви паралелно съединени елемента. Предполагаме, че опасността за отказ на всеки един от тях не зависи от времето, но зависи от броя на отказалите елементи. Отказал елемент не се заменя.

б/ Ако в момента работят k елемента, опасността за отказ на всеки от тях е равна на λ_k.

Да означим с $P_k(t)$ вероятността в момента t да работят k елемента. В този случай ще казваме, че системата се намира в състояние k. От това състояние тя може за безкрайно малко време Δt да премине в състояние $k-1$ с вероятност

$$k\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$$

и с допълнителна вероятност $1 - k\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$ да остане в същото състояние k. Да сравним състоянията на системата в моментите t и $t+\Delta t$. В момента $t+\Delta t$ тя може да е в състояние $k \neq n$, като преди това е била в състояние k или е била в състояние $k+1$. По формулата за пълната вероятност имаме

$$P_k(t+\Delta t) = [(k+1)\lambda_{k+1}\Delta t + o(\Delta t)]\, P_{k+1}(t)$$
$$+ [1 - k\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)]\, P_k(t) + o(\Delta t).$$

Като разделим двете страни на горното равенство на Δt и минем към граница при $\Delta t \to 0$, получаваме

$$(96)\qquad P_k'(t) = (k+1)\lambda_{k+1} P_{k+1}(t) - k\lambda_k P_k(t), \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

При $k=n$ аналогично се получава

$$P_n'(t) = -n\lambda_n P_n(t).$$

Предполагаме, че в началния момент всички елементи работят, следователно $P_n(0)=1$ и $P_k(0)=0,\ k<n$. За да решим системата (96), ще преминем към лапласовата трансформация. Нека

$$p_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_k(t)\,dt, \quad k=0,1,\ldots,n.$$

Да умножим всяко уравнение (96) с e^{-st} и да интегрираме по t. Така намираме следните уравнения относно $p_k(s)$

$$-1 + s p_n(s) = -n\lambda_n p_n(s)$$

$$(97)\qquad s p_k(s) = (k+1)\lambda_{k+1} p_{k+1}(s) - k\lambda_k p_k(s)$$
$$k=0,1,\ldots,n-1.$$

Като решим алгебрично системата (97) относно $p_k(s)$, намираме

$$p_n(s) = (s+n\lambda_n)^{-1}$$

$$p_k(s) = \frac{(k+1)\lambda_{k+1} p_{k+1}(s)}{s+k\lambda_k} = \frac{(k+1)\lambda_{k+1}\cdots n\lambda_n}{(s+k\lambda_k)\cdots(s+n\lambda_n)}, \quad k \le n-1$$

При $k=0$ имаме

$$(98) \quad p_0(s) = \frac{n!\,\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}{s(s+\lambda_1)\ldots(s+n\lambda_n)}$$

и по формулата за обръщане намираме $P_0(t)$

$$P_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{st} p_0(s)\,ds,$$

където C е област, обхващаща точките $-\lambda_1, -2\lambda_2, \ldots, -n\lambda_n$ и началото.

Ако разгледаме n независими случайни величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ разпределени експоненциално съответно с параметри $k\lambda_k$, то случайната величина

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

ще има производяща функция

$$(99) \quad Ee^{-s\xi} = Ee^{-s\xi_1}\,Ee^{-s\xi_2}\ldots Ee^{-s\xi_n}.$$

Тъй като

$$Ee^{-s\xi_k} = \int_0^\infty e^{-(s+k\lambda_k)t}\,dt = \frac{k\lambda_k}{s+k\lambda_k}$$

от (99) намираме

$$(100) \quad Ee^{-s\xi} = \frac{n!\,\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}{(s+\lambda_1)(s+2\lambda_2)\ldots(s+n\lambda_n)} = s\,p_0(s).$$

От (98) и (100) се вижда, че $P_0(t)$ е разпределението на случайната величина ξ, т.е. ако $F(t) = P(\xi < t)$, то

$$F(t) = P_0(t)$$

е вероятността до момента t всички елементи да са отказали. Тъй като разглеждаме паралелна система, това означава че системата е отказала. Затова $F(t)$ е разпределението на продължителността на работа на системата. Тази функция е разпределение на случайна величина, която е сума от n независими и експоненциално разпределени величини с параметри $\lambda_1, 2\lambda_2, \ldots, n\lambda_n$.

Средната продължителност на живот α_n на системата е

$$\alpha_n = \int_0^\infty \bar{F}(x)\,dx.$$

За да намерим α_n, ще използваме факта, че

$$\alpha_n = E(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n).$$

Тъй като $E\xi_k = (k\lambda_k)^{-1}$, то

$$(101) \qquad \alpha_n = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{2\lambda_2} + \dots + \frac{1}{n\lambda_n}.$$

Оценка за $P_0(t)$. Вероятността $P_0(t)$ можем да оценим като използваме факта, че $F(t) = P_0(t)$ е разпределение на сума от n независими и експоненциално разпределени величини. Знаем, че експоненциалното разпределение е РФИ -разпределение и композицията на РФИ -разпределения е също РФИ-разпределение /сравни със свойство 2, a_0 38 [1]/. Следователно $F(t)$ е РФИ-разпределение и според теорема 5, §5.I ще имаме

$$(102) \qquad \sup |\bar{F}(t) - e^{-\alpha_n t}| \leq 1 - \frac{\alpha}{\alpha_n},$$

където α_n е средното на F от (101) и константата α в (102) според (18), §2.I е $\alpha = \max(\lambda_1^{-1}, (2\lambda_2)^{-1}, \dots, (n\lambda_n)^{-1})$.

~~Система със зависими елементи и отчитане на времето за ремонт.~~ Разгледаната схема на зависимост на елементите не взема пред вид възможността за възстановяване на даден елемент и връщането муотново на работа. Това е ясно от самата постановка, която разгледахме. Системата преминава от състояние k /k елемента работят/ в състояние $k-1$, т.е. $k-1$ елемента работят /единият е престанал да работи/ или остава в същото състояние /не отказва никой елемент/. Да разширим тази схема, като допуснем възможност за връщане към работа и на ремонтираните елементи. Нека:

1. За време Δt /независимо от момента на отмерването му/ с вероятност $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$ системата от състояние $k \neq n$ преминава в състояние $k+1$. Този път приемаме, че състоянието отговаря на броя на отказалите елементи, т.е. $n-k$ е броят на работещите. Това е също вероятността един да откаже, ако k са отказали преди това.

2. За време Δt от състояние $k \neq 0$ системата преминава в състояние $k-1$ с вероятност $\mu_k \Delta t + o(\Delta t)$, т.е. един елемент се включва отново, след като е ремонтиран.

3. За време Δt от състояние k системата остава пак в състояние k с вероятност допълнителната на тази в 1/ и 2/, т.е.

$$1-(\lambda_k+\mu_k)\Delta t + o(\Delta t).$$

Условието 2/ при $k=0$ е: преминаване в състояние 1 с вероятност $\lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)$ и оставане в нулево състояние /отговарящо на това, всички елементи да работят/ с вероятност $1-\lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)$. Условието 1/ при $k=n$ трябва да гласи: от състояние n /т.е. всички елементи са отказали, системата не работи/ преминаване в състояние $n-1$ с вероятност $\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$ и с вероятност $1-\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$ оставане в същото състояние.

Да означим пак с $P_k(t)$ вероятността за това, в момента t системата да е в състояние k. Както преди, ако сравним състоянието на системата в моментите t и $t+\Delta t$, по формулата за пълната вероятност ще получим

$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)\left[\lambda_{k-1}\Delta t + o(\Delta t)\right] +$$
$$+ P_k(t)\left[1-(\lambda_k+\mu_k)\Delta t + o(\Delta t)\right.$$
$$+ P_{k+1}\left[\mu_{k+1}\Delta t + o(\Delta t)\right] + o(\Delta t).$$

Да прехвърлим $P_k(t)$ в лявата страна на горното равенство, да разделим двете части на $\Delta(t)$ и да оставим $\Delta t \to 0$. В граница получаваме

$$P_k'(t) = \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) P_k(t) + \mu_{k+1} P_{k+1}(t)$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1$$

По същия начин се получават при $k = 0$ и $k = n$ уравненията

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$$

$$P_n'(t) = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - \mu_n P_n(t).$$

Ако положим $\mu_0 = \lambda_{-1} = 0$ и $\lambda_n = 0$, горните три уравнения можем да запишем общо в едно

$$P_k'(t) = \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) P_k(t) + \mu_{k+1} P_{k+1}(t) \tag{103}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n$$

Получената система (103) от диференциални уравнения определя вероятностното поведение на разглежданата паралелна система.

Намирането на решението на безкрайната система в нестационарния случай е трудно и в затворен вид то е получено само в някои частни случаи. Ще разгледаме следната задача за случая на безкрайна система в нестационарния случай:

Да намерим вероятността системата в продължение на време t нито веднаж да не бъде в състояние m.

Да означим с τ_m времето, необходимо, за да премине системата от състояние 0 в състояние m /за пръв път/. За да намерим търсената вероятност, трябва да знаем разпределението на τ_m.

Ако използуваме трансформацията на Лаплас за $P_k(t)$

$$p_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_k(t)\,dt, \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

намираме, като решим съответната система относно $p_m(s)$

$$p_m(s) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}{s\,\Delta_m(s)}$$

където полиномите $\Delta_m(s)$ удовлетворяват рекурентната връзка:

$$\Delta_{m+1}(s) = (s + \lambda_m + \mu_m)\,\Delta_m(s) - \mu_m \lambda_{m-1} \Delta_{m-1}(s),$$

$$\Delta_0(s) = 1\,, \quad \Delta_1(s) = s + \lambda_0 + \mu_0\,.$$

Търсената вероятност $P_m(t)$ ще намерим по формулата за обръщане

$$(104) \qquad P_m(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}{s\,\Delta_m(s)}\, ds\,,$$

където C е контур, обхващащ началото и нулите на $\Delta_m(s)$. Корените на $\Delta_m(s)$ са реални и отрицателни. Нека ги означим с $-\alpha_j$, $\alpha_j > 0$. Да разгледаме нормираните полиноми

$$\bar{\Delta}_m(s) = \Delta_m(s) / \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_m\,.$$

От рекурентната връзка за Δ_m следва такава и за $\bar{\Delta}_m$

$$(105) \qquad \bar{\Delta}_{m+1}(s) = \left(1 + \frac{\mu_m}{\lambda_m} + \frac{s}{\lambda_m}\right) \bar{\Delta}_m(s) - \frac{\mu_m}{\lambda_m} \bar{\Delta}_{m-1}(s)$$

$$\bar{\Delta}_0(s) = 1 \qquad \bar{\Delta}(s) = 1 + s\lambda_0^{-1}\,.$$

При $s = 0$ имаме непосредствено $\Delta_0(0) = \bar{\Delta}_0(0) = 1$. Тогава от (105) следва индуктивно, че за всяко m $\bar{\Delta}_m(0) = 1$. Следователно свободният член на полинома $\bar{\Delta}_m(s)$ е единица и тъй като той е произведението от нулите на Δ_m нормирани с $\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}$, то

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}\,.$$

В такъв случай (104) можем да запишем

$$P_m(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}{s\,\Delta_m(s)}\, ds$$

Ако представим полинома $\Delta_m(s)$ чрез нулите му

$$\Delta_m(s) = (s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\cdots(s+\alpha_m)$$

/коефициентът пред s^m е единица, както се вижда индуктивно от (105) /, то вероятността $P_m(t)$ е

$$(106) \qquad P_m(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{st}\,\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}{s(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\cdots(s+\alpha_m)}\,ds$$

Но дясната страна на (106) е функция на разпределение на случайната величина

$$(106_0) \qquad \xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_m ,$$

където ξ_k са независими и експоненциално разпределени съответно с параметър α_k. Така че

$$P_m(t) = P(\xi < t)$$

е разпределението на τ_m и според горния извод τ_m е разпределено като ξ, т.е. както сума от m на брой експоненциално разпределени и независими случайни величини. Параметрите на разпределенията са нулите на $\Delta_m(s) = 0$.

Средната на τ_m, означаваме ~~преди~~ с T_m и се намира, че е

$$T_m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sum_{\nu=0}^{k}\theta_\nu}{\lambda_k\theta_k}, \quad \theta_k = \frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{k-1}}$$

От друга страна $T_m = E\xi_1 + E\xi_2 + \cdots + E\xi_m$ и тъй като $E\xi = \alpha_k^{-1}$, то T_m може да представим и чрез нулите $\Delta_m(s)$

$$T_m = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k^{-1}.$$

Известно е, че за да съществува стационарно решение на (106), трябва $\lim_{m\to\infty} T_m = \infty$. Когато m е голямо, очевидно τ_m също средно ще е голямо и възниква въпросът за асимптотичното поведение на величината τ_m при $m\to\infty$, растящо неограничено. Ще покажем, че при известни условия величината τ_m е асимптотично разпределена по експоненциален закон.

Асимптотично поведение на времето за достигане на високо ниво. Всяко състояние k на системата се нарича още и ниво. При големи стойности на нивото m за произволни λ_k и μ_k намирането на вероятността $P_m(t)$ по формулата (106) е трудно. Затова удобно е да имаме гранично разпределение за величината τ_m - времето до първото достигане на дадено ниво m. Ще докажем следната теорема:

Теорема 9. Случайната величина τ_m / T_m е асимптотично експоненциално разпределена, т.е.

$$(107) \qquad \lim_{m\to\infty} P(\tau_m / T_m < x) = 1 - e^{-x}$$

при условие

$$(108) \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{\left(\sum_1^m \alpha_k^{-2}\right)^{1/2}}{\sum_{k=1}^m \alpha_k^{-1}} = 1$$

където $-\alpha_k$, $k=1,2,\dots,m$ са нулите на полинома $\Delta_m(s)$. При това оценка за скоростта на сходимост на (107) е същата, както тази на (108).

Доказателство. Разпределението на величината τ_m както видяхме съвпада с разпределението на сумата $\sum_1^m \xi_k$ на m независими и експоненциално разпределени случайни величини с параметър съответно равен на α_k, $1\leq k\leq n$. Следователно, разпределението $F_m(x) = P(\tau_m < x)$ е РФИ-разпределение и може да използваме оценката (52) от $\S 7$ гл. I за съответната функция на възстановяване $H_m(t)$ на $F_m(t)$. В случая средната стойност T_m и дисперсията σ_m^2 на τ_m са

$$T_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{-1}$$

$$\sigma_m^2 = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{-2}$$

и (52) е

$$(109) \qquad \sup_{t \geq 0} \left[H_m(t) - \frac{t}{T_m} \right] \leq 1 - \frac{\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{-2} \right)^{1/2}}{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{-1}}$$

Неравенството (109) се запазва, ако вместо t пишем tT_m. Тогава използувайки условието (108) ще получим

$$(110) \qquad \lim_{m \to \infty} H_m(tT_m) = t$$

или $h_m(s) \to s^{-1}$, където $h_m(s)$ е $\mathcal{L}(H_m)$.

Тогава за Лаплас-Стилтесовата трансформация $f_m(s)$ на $F_m(T_m^x)$ ще имаме

$$\lim_{m \to \infty} f_m(s) = \lim_{m \to \infty} \frac{h_m(s)}{1 + h_m(s)} = \frac{1}{1+s}$$

и по теоремата на Леви-Хинчин за непрекъснатост следва (107).

Граничното съотношение (107) може да се получи като се използва неравенството (81), гл. I, но тъй като то е получено чрез (52), доказателството няма да е по-директно. Използуването на (81) има това преимущество, че дава възможност да се види, че $F_m(xT_m)$ се стреми към $1-e^{-x}$ поне както отношението σ_m/T_m към 1.

<u>Случай на фиксирано ниво</u>. По-горе доказахме гранична теорема при неограниченото растене на нивото m. Да разгледаме сега величината τ_m при фиксирано m. Параметрите λ_k и μ_k характеризират съответно интензивността на отказите на системата и средното време за възстановяването й. В повечето случаи на практика средното време на безотказна работа е голямо спрямо средното време на престой. Изразено за величините λ_k, това

означава те да са сравнително малки. Ще предположим, че параметрите $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}$ остават постоянни, а параметърът λ_{m-1} се мени и клони към нула. Следователно, ако системата е в състояние $m-1$, вероятността тя да премине в състояние m е малка. При такова условие ще докажем, че пак има асимптотична експоненциалност на времето τ_m за достигане на състоянието m.

Теорема 10. Времето τ_m за достигане за пръв път на ниво m, нормирано с неговото средно $T_m = E\tau_m$ при $\lambda_{m-1} \to 0$, е разпределено експоненциално, т.е.

$$(111) \qquad \lim_{\lambda_{m-1}\to 0} P(\tau_m / T_m < x) = 1 - e^{-x}.$$

Доказателство. Разпределението на τ_m по формулата (106) е

$$P_m(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}{s(s+\alpha_1)\cdots(s+\alpha_m)}\, ds,$$

където полиномите $\Delta_m(s) = (s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\cdots(s+\alpha_m)$ удовлетворяват рекурентното равенство

$$\Delta_m(s) = (s + \lambda_{m-1} + \mu_{m-1})\Delta_{m-1} - \mu_{m-1}\lambda_{m-2}\Delta_{m-2}$$
$$\Delta_0(s) = 1 \qquad \Delta_1(s) = 1 + \lambda_0.$$

Когато $\lambda_{m-1} \to 0$, една от нулите α_k на $\Delta_m(s)$ клони към нула, а останалите – към различни от нула стойности. Действително от $\Delta_m(0) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{m-1}$ следва, че при $\lambda_{m-1} \to 0$ граничният полином $\tilde{\Delta}_m(s)$ ще има един корен, равен на нула, а произведението от останалите ще е $\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{m-2} \neq 0$. Тъй като разпределението (106) е разпределение на случайната величина ξ от (106_0), то $P_m(t)$ е РФИ-разпределение и според теорема 5, §5.I ще имаме

$$(112) \qquad \sup_{t \geq 0} \left| \overline{P}_m(t) - e^{-t/T_m} \right| \leq 1 - \frac{\max \alpha_k^{-1}}{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{-1}}$$

Неравенството (112) е вярно и когато вместо t пишем tT_m. Тогава

$$(113) \qquad \sup_{t \geq 0} \left| \overline{P}_m(tT_m) - e^{-t} \right| \leq 1 - \frac{1}{\alpha_0 \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{-1}},$$

където α_0 е най-малката от нулите α_k. Ако оставим $\alpha_{m-1} \to 0$, то $\alpha_0 \to 0$ и дясната страна ще клони също към нула. Това води до граничното твърдение (111). Неравенството (113) ни дава също и оценка за грешката, която правим, ако вместо $P_m(t)$ вземем e^{-t/T_m}. Според доказаната теорема, ако вероятността λ_{m-1} за преминаване за единица време от състояние $m-1$ в m клони към нула, разпределението $P_m(t)$ на времето за достигане на състоянието m е приблизително равно на $1 - e^{-t/T_m}$, или

$$P_m(t) \approx 1 - e^{-t/T_m}.$$

<u>Полумарков модел</u>. Ще разгледаме един по-общ модел на работещи системи. Една система състояща се само от един работещ елемент, както видяхме, може да се описва с помощта на един полумарковски процес от съвсем частен случай: две възможни състояния и от едното състояние в другото се преминава с вероятност единица. В едното от състоянията процесът стои случайно време разпределено $F(x)$ /разпределението на продължителността на живот/, а в другото - време разпределено $G(x)$/разпределението на времето на ремонт/. Да разгледаме по-общ случай: системата може да се намира в изброимо много състояния $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ като във всяко едно от тях стои случайно време. Преминаването

от състояние i в състояние j става съгласно вероятностите на една преходна матрица $\{p_{ij}\}, i,j=1,2,\dots$. С други думи вероятностният характер на системата се определя от един полумарковски процес.

Нека x_t е полумарковски процес определен от

$$\mathbb{P}=\{p_{ij}\}, \quad \mathbb{F}=\{F_{ij}\}, \quad i,j=1,2,\dots,$$

където $\mathbb{P}$ е матрица на преход, а $F_{i,j}$, $i,j=1,2,\dots$ са функции на разпределение.

Матрицата $\mathbb{F}$ се нарича полумарковска матрица, ако сумата

$$A_i(x)=\sum_{j=1}^{\infty} F_{ij}(x)$$

удовлетворява условията

$$A_i(-0)=0 \quad A_i(+\infty)\leqq 1.$$

Ако $\mathbb{F}$ е полумарковска матрица, то очевидно при всяко фиксирано $x=x_0$

$$\mathbb{F}(x_0)=\{\tilde{F}_{ij}\}, \quad \tilde{F}_{ij}=F_{ij}(x_0)$$

е марковска матрица, понеже $\tilde{F}_{ij}\geqq 0$ и $\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{F}_{ij}\leqq 1$.
В частност

$$\tilde{\mathbb{F}}=\{F_{ij}(+\infty)\}$$

е също марковска матрица. Матрицата $\tilde{\mathbb{F}}$ се нарича свързана с $\mathbb{F}$ марковска матрица. Ще предполагаме, че марковската верига определена от матрицата $\tilde{\mathbb{F}}$ е невъзвратна и устойчива. В такъв случай, както е известно ([10], лема 2.12) съществува единствен вектор $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\dots)$
удовлетворяващ уравнението

$$\alpha=\alpha\tilde{\mathbb{F}}, \quad \alpha_0=1$$

Да означим с T_{ij}, случайното време на престой на системата в състояние i, ако след това тя ще премине в състояние j. Разпределението на величината T_{ij}, очевидно е $F_{ij}(x)$. Да положим

$$\xi_i = \chi_{i1} T_{i1} + \chi_{i2} T_{i2} + \cdots ,$$

където χ_{ij} са случайни величини независими от T_{ij} и

$$\chi_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{с вероятност } p_{ij} \\ 0 & \text{с вероятност } 1-p_{ij} . \end{cases}$$

Величината χ_{ij} всъщност е характеристичната функция на състоянието E_i при условие че след това се отива в състояние E_j, а величината ξ_i ни дава времето на пребиваване в състояние i /вместо E_i за по-кратко ще пишем i/, независимо от това в кое състояние се отива. Тъй като всяко следващо състояние се избира независимо от предишното съгласно матрицата P, то величините ξ_i, $i=1,2,\ldots$ са независими. Нека

$$F_i(x) = P(\xi_i < x), \quad i = 1,2,\ldots .$$

Да означим с a_{ij} средното време на престой в състояние i, ако след това системата отива в състояние j и с a_i средното време на пребиваване на системата в състояние i т.е.

$$a_{ij} = ET_{ij}$$

$$a_i = E\xi_i = \sum_j p_{ij} a_{ij} .$$

Нека τ_i е времето от момента на напускането на системата състояние i до попадане за пръв път пак в i, $\Phi_i(x)$ да е функцията на разпределение на случайната величина τ_i и l_i средната на τ_i

$$l_i = E\tau_i$$

Да разгледаме процесът на възстановяване определен от величините

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots,$$

където ζ_k, $k=1,2,\dots$, са независими и еднакво разпределени случайни величини с функция на разпределение

$$(114) \qquad F_i * \Phi_i .$$

Да предположим, че функцията на възстановяване за разпределението (114)

$$H_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(F_i * \Phi_i \right)_*^{(k)}$$

има плътност

$$h_i(t) = H_i^{!}(t).$$

Всяка от величините ζ_k може да се представи като сума на две независими величини $\zeta_k^{(1)}$ и $\zeta_k^{(2)}$, разпределени съответно F_i и Φ_i т.е. $\zeta_k^{(1)}$, $k=1,2,\dots$, са еднакво разпределени както ξ_i, а $\zeta_k^{(2)}$, $k=1,2,\dots$ - както τ_i.
Чрез редицата

$$\zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_2^{(2)}, \dots$$

построяваме процеса $W_i(t)$ така както в раздел 3. гл.I /вж. фиг 11/.
Нека

$$(115) \qquad F_i(t,x) = P(W_i(t) < x), \; i=1,2,\dots$$

Функциите на разпределение (115) са напълно определени за всяко $i \geq 1$, $t \geq 0$ и $x \geq 0$ от съответните им уравнения, от типа на (41), гл.I. .

Нека $W_i^*(t)$ е марковският процес еквивалентен на $W_i(t)$. Съгласно теорема 5 $W_i^*(t)$ е образуван от точките на поасоновия поток с плътност на водещата функция

$$\lambda_i(t) = h_i(t) / F_i(t,+0)$$

и от редицата $\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, \dots$

Определение. Марковски процес асоциран към състоянието E_i на полумарковския процес x_t се нарича процесът $W_i^*(t)$.

С помощта на процесите $W_i^*(t), i=1,2,\dots$, може да се изследват вероятностните характеристики на работещата система. Така вероятността системата в момент t да се намира в състояние E_i е

$$P(x_t \in E_i) = P(W_i^*(t) = 0),$$

тъй като времето ξ_i на престой на x_t в състояние E_i може да си мислим като време на живот на някакъв елемент, който след отказ се ремонтира случайно време равно на τ_i.

Използувайки факта, че вероятността $P(w_i^* = 0)$ при $t \to \infty$ клони към стационарния коефициент на готовност може да намерим лесно стационарните вероятности $\lim_{t\to\infty} P(x_t \in E_i)$. Наистина, като вземем предвид, че W_i^* е определен от редиците $\{\xi_n^{(1)}\}$ и $\{\xi_n^{(2)}\}$ имащи съответно общи средни на величините $a_i = E\xi_1^{(1)}$, $l_i = E\xi_1^{(2)}$, то по (18_1), веднага следва

$$\lim_{t\to\infty} P(x_t \in E_i) = \frac{a_i}{a_i + l_i}. \tag{116}$$

Не е трудно граничното съотношение (116) да изразим чрез a_i и векторът $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$. Ще докажем, че ако x_t е неразложим устойчив и апериодичен полумарков процес, то

$$\lim_{t\to\infty} P(x_t \in E_i) = \frac{\alpha_i a_i}{\sum_k \alpha_k a_k} \tag{117}$$

Границата (117) ни дава в известния стандартен вид стационарните вероятности за попадане на процесът x_t в дадено състояние.

Тъй като $h_i(t)$ е плътност на средния брой попадения в състоянието E_i на интервал от време $(0,t]$, то знаем ([10], стр. 181), че

$$\lim_{t\to\infty} h_i(t) = \frac{\alpha_i}{\sum \alpha_k a_k}, \tag{118}$$

където α е решението на $\alpha \tilde{F} = \alpha$.

От друга страна $h_i(t)$ е плътност на възстановяване за редицата $\{\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)}\}$ и следователно

$$\lim_{t\to\infty} h_i(t) = \frac{1}{a_i + l_i} \tag{119}$$

Сравняването на границите (118) и (119) ни дава

$$\frac{\alpha_i}{\sum_k \alpha_k a_k} = \frac{1}{a_i + l_i} \tag{120}$$

от където

$$l_i = \alpha_i^{-1} \sum_{k \neq i} \alpha_k a_k$$

Като заместим горния израз за l_i в (116) получаваме (117).

При допълнителни условия граничното съотношение (117) може да бъде прецизирано. Вярно е следното твърдение.

Теорема 11. Нека x_t е неразложим, устойчив и апериодичен полумарков процес. Тогава

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \left[P(x_t \in E_i) - \frac{\alpha_i a_i}{\sum_k \alpha_k a_k} \right] dt \tag{121}$$

$$= \left(a_i E \tau_i^2 - l_i a_i^{(2)} + 2 a_i l_i\right) / 2 l_{ii}^2 ,$$

където

$$l_{ii} = \alpha_i^{-1} \sum_k \alpha_k a_k$$

(122) $$E\tau_i^2 = l_{ii}^{(2)} + a_i^{(2)} - 2a_i l_i, \quad a_i^{(2)} = E\xi_i^2$$

$$l_{ii}^{(2)} = \alpha_i^{-1}\Big(\sum_k \alpha_k a_k^{(2)} + 2\sum_{k\neq i}\sum_j \alpha_j p_{jk} a_{jk} l_{ki}\Big).$$

Доказателство. Граничното съотношение (121) се получава непосредствено от (35). Наистина, от равенството (120) се вижда, че $\alpha_i a_i / \sum_k \alpha_k a_k$ е стационарен коефициент на готовност, ако ξ_i се тълкува като продължителност на живот, а τ_i продължителност на времето за ремонт. Остава само да се използва (35) като се пресметнат $E\xi_i^2$ и $E\tau_i^2$. Ако означим с γ_{ii} сумата

$$\gamma_{ii} = \xi_i + \tau_i,$$

то величината γ_{ii} ще ни дава времето за преминаване от състояние i за пръв път пак в състояние i. Нека разпределението на γ_{ii} е G_{ii}. Тогава лесно се съобразява, че

(123) $$G_{ii} = F_{ii}(t) + \sum_{k\neq i}\int_0^t F_{ik}(t-u)\,dG_{ki}(u).$$

Рекурентното равенство (123) ни дава възможност да пресметнем моментите $l_{ii} = E\gamma_{ii}$ и $l_{ii}^{(2)} = E\gamma_{ii}^2$. Втория момент на τ_i намираме чрез равенството

$$E\tau_i^2 = l_{ii}^{(2)} + a_i^{(2)} - 2a_i l_i,$$

тъй като $\tau_i = \gamma_{ii} - \xi_i$.

Асимптотични разпределения. Нека да тълкуваме сега времето на пребиваване на системата в състояние E_i като време през което системата не функционира по причина на отказ от тип i. Това означава, че величината $\xi_i = \sum_j p_{ij} T_{ij}$ ни дава времето на бездействие, а τ_i времето на работа на системата до пръв отказ от типа i. Очевидно от интерес е да знаем разпределението на случайната величина τ_i. Ние ще намерим асимптотичното разпределение на τ_i, когато средното време $a_i = E\xi_i$, на бездействие е малко, т.е. когато $a_i \to 0$. Клоненето към нула на a_i /i фиксирано/ може да се осъществява, когато елементите на i-ия ред на матрицата $\mathbb{P}$ клонят към нула или когато $\max_j (a_{ij}) \to 0$. Ние ще предполагаме, че поне един от тези случаи е на лице, когато пишем $a_i \to 0$.

Теорема 12. Ако τ_i е времето за попадане за пръв път в състояние i за един полумарковски процес, от момента на напускане на състоянието i, то в стационарния режим

$$(124) \qquad \lim_{a_i \to 0} P\left(\frac{\tau_i}{l_i} < x\right) = 1 - e^{-x},$$

където a_i е средното време на престой в състояние i, а $l_i = E\tau_i$.

Доказателство. Твърдението (124) следва веднага като се използува теорема 7. В случая $\lambda(x)$ е $\lambda(x) = \lambda_i(x)$, $a = l_i$, а $\xi = \xi_i$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Обретенов А.,Теория на надеждността, Техника,София 1973

2 Обретенов А. ,Оценка на разликата между разпределение с растяща функция на интензивност и експоненциалното, Годишник на СДУ,

3 Obretenov A., An Estimation for the renewal Function of an IFR-Distribution. Proceedings of European Meeting of Statisticians, Budapest, 1972

4 Обретенов А.,Оценка за скоростта на сходимост на една редица от итерационни функции на разпределение.Извест. на Матем. инст. 15,1974,305-309

5 Обретенов А., An Estimation for the renewal Function of the IFR-Distributions by fixed two Moments, Ann. of Probability (to appear)

6 Обретенов А.,Б. Димитров,М. Узунов,Исследование надежности системы посредством стохастических процессов Извест. на Матем. инст.,11/1970/,БАН,159-180

7 Обретенов А.,М. Кръстева,Система от типа "к от n" с възстановяване и експоненциална продължителност на живот.Извест. на Матем. инст.,13/1972/,БАН,93-98

8 Obretenov A., Über die Zuverläßigkeit von Systemen aus n-Elementen, Z.Wahrsch.verw. Geb. 27(1973), 1-8

9 Barlow R., F.Proschan, Availability Theory for Multicomponent Systems

10 Cinlar E, Markov renewal theory, Adv.Appl.Prob. 1(1969), 123-187

11 Hunter J., On the Moments of Markov renewal Processes, Adv. Appl.Prob. 1(1969), 188-210

12 Smith, W.L., Renewal Theory and its Ramifications. J.Roy. Statist.Soc. Ser. B20(1958), 243-302

13 Винер Н., Р.Пэли.Преобразование Фурье в комплексной области,Москва,1964

14 Кокс Д., У. Смит, Теория восстановления, Сов. радио, Москва, 1967

15 Барлоу Р., Ф. Прошан.Математическая теория надежности. Москва,1969

16 Гнеденко ,Б.В., Ю. К. Беляев, А.Д. Соловьев.Математические методы в теории надежности.Москва,1965