Б Ъ Л Г А Р С К А   А К А Д Е М И Я   Н А   Н А У К И Т Е

МАТЕМАТИЧЕСКИ ИНСТИТУТ

Иван Рачев Проданов

И З П Ъ К Н А Л И   П Р О С Т Р А Н С Т В А

Дисертация за получаване на научната степен "кандидат на физико-математическите науки"

Научен ръководител: проф. Я. Тагамлицки

С о ф и я

1 9 6 3

Във връзка със своите изследвания върху неразложимостта Я. Тагамлицки въведе понятието изпъкнало пространство, показа как може да се обобщи теоремата на Крейн и Милман [1] и доказа някои теореми за отделяне в изпъкнало пространство.

стр 256. [illegible]

През зимния семестър на учебната 1962/63г. той прочете цикъл от лекции, в които изложи своите резултати. Част от последните ще излязат под заглавие " Върху принципа за отделимост в абелевите изпъкнали пространства" в "Известия на Математическия институт при БАН"

Ние си поставяме за задача да обобщим някои понятия и теореми от теорията на линейните пространства така, че те да бъдат валидни в някои класи от изпъкнали пространства.

В първия параграф на нашата дисертация излагаме различни уводни неща от теорията на изпъкналите пространства.

Вторият параграф е посветен на понятието афинна независимост. Тук се показва как в една специална категория от изпъкнали пространства могат да се пренесат различни понятия и резултати свързани с линейната независимост на вектори в линейно пространство.

Третият параграф съдържа главните резултати на тази работа. Там е показано как може да се обобщи една теорема на Тагамлицки за отделяне на изпъкнали множества с полупространства и с помощта на това обобщение са доказани една теорема за отделяне с хиперравнини и една теорема за разширяване на афинни многообразия. Първата от тях съдържа като частни случаи една теорема на Крейн [2] за отделяне на изпъкнали конуси в линейно пространство, една теорема на Айделхайт [3] и др., а втората - теоремата на Хан Банах в нейната геометрична форма и др.

Ползувам се от случая, за да изкажа благодарност на моя учител проф. Тагамлицки, който насочи вниманието ми към тези въпроси и следеше с интерес работата ми над тази дисертация.

§ 1. Изпъкнали пространства

1. Мултипликативни множества

Определение 1. Една съвкупност R от елементи от произволно естество се нарича мултипликативно множество, ако в нея е дадена двучленна операция „·" /умножение/, която на всяка наредена двойка (a,b) от елементи на R съпоставя по едно подмножество ab на R. Съвкупността ab, която евентуално може и да бъде празна, ще наричаме произведение на a и b.

Елементите на R ще наричаме накратко елементи или точки.

Операцията „·" може да се продължи по естествен начин и върху произволни подмножества на R. И наистина, ако за произволни $A, B \subset R$ поставим

/1/ $$AB = \bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}} ab$$

и ако се условим да не различаваме множеството съставено от един елемент от този елемент, към която конвенция ще се придържаме навсякъде в тази работа, така дефинираната операция е продължение на умножението в R. Множеството AB ще наричаме понякога произведение на A и B.

От дадената дефиниция веднага следва, че умножението на множества притежава следните свойства:

/2/ $$A\Theta = \Theta A = \Theta,$$

където $A \subset R$, а Θ означава празното множество;

/3/ Ако $A \subset A'$, $B \subset B'$, то $AB \subset A'B'$ $(A', B' \subset R)$;

/4/ $$\Big(\bigcup_{\mu\in M} A_\mu\Big)\Big(\bigcup_{\nu\in N} B_\nu\Big) = \bigcup_{\substack{\mu\in M\\ \nu\in N}} A_\mu B_\nu \quad ;$$

/5/ $$\Big(\bigcap_{\mu\in M} A_\mu\Big)\Big(\bigcap_{\nu\in N} B_\nu\Big) \subset \bigcap_{\substack{\mu\in M\\ \nu\in N}} A_\mu B_\nu \quad .$$

С помощта на умножението в R могат да се дефинират и други операции По-специално ние ще използуваме една операция, която ще наричаме деление и която може да се дефинира така: под частно $\frac{a}{b}$ на два елемента a и b ще разбираме множеството на всевъзможните елементи x , за които е изпълнено условието $a\in bx$.

Относно делението R е мултипликативно множество. Следователно всичко казано до тук за умножението може да се перифразира и за делението. Специално с помощта на формулата

/1'/ $$\frac{A}{B} = \bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \frac{a}{b}$$

операцията „—" се продължава и върху произволни подмножества на R и така дефинираното продължение притежава свойствата:

/2'/ $$\frac{A}{\theta} = \frac{\theta}{A} = \theta \qquad (A\subset R);$$

/3'/ Ако $A\subset A'$, $B\subset B'$, то $\frac{A}{B}\subset\frac{A'}{B'}$ $\quad (A', B'\subset R)$;

/4'/ $$\frac{\bigcup_{\mu\in M} A_\mu}{\bigcup_{\nu\in N} B_\nu} = \bigcup_{\substack{\mu\in M\\ \nu\in N}} \frac{A_\mu}{B_\nu} \quad ;$$

/5'/ $$\frac{\bigcap_{\mu\in M} A_\mu}{\bigcap_{\nu\in N} B_\nu} \subset \bigcap_{\substack{\mu\in M\\ \nu\in N}} \frac{A_\mu}{B_\nu} \quad .$$

От дефиницията на частно следва, че сечението $C\cap\frac{a}{b}\neq\theta$ тогава и само тогава, когато сечението $bC\cap a\neq\theta$ /придържайки се към нашата конвенция ние означаваме множеството $\{x\}$, чийто единствен елемент е x с x /. Последното твърдение може да се обобщи за произволни подмножества на R . По- точно имаме

<u>Теорема 1. Сечението</u>

/6/ $$C \cap \frac{A}{B} \neq \theta$$

<u>тогава и само тогава, когато сечението</u>

/7/ $$BC \cap A \neq \theta \qquad (A, B, C \subset R).$$

<u>Доказателство.</u> Нека $C \cap \frac{A}{B} \neq \theta$. Тогава ще съществува елемент c със свойствата

$$c \in C \quad , \quad c \in \frac{A}{B} .$$

Съгласно /1'/ последното означава, че $c \in \frac{a}{b} (a \in A, b \in B)$, т.е. $a \in bc$. От друга страна от /1/ следва, че $bc \subset BC$. Следователно $a \in A \cap BC$ и ние се убедихме, че от /6/ следва /7/.

Обратно, ако е налице /7/ ще съществува елемент a със свойствата $a \in A$, $a \in BC$.

Съгласно /1/ последното условие означава, че $a \in bc$ $(b \in B, c \in C)$, т.е. $c \in \frac{a}{b}$. Отдруга страна от /1'/ следва, че $\frac{a}{b} \subset \frac{A}{B}$. Следователно $c \in C \cap \frac{A}{B}$ и ние се убедихме, че от /7/ следва /6/, с което теоремата е доказана.

<u>Следствие.</u> Сечението $C \cap \frac{A}{B} = \theta$ тогава и само тогава, когато сечението $BC \cap A = \theta$.

По-нататък ще използуваме резултатите от тази точка без навсякъде изрично да уговаряме това.

2. Асоциативни пространства

Поради прекомерно широкия обем на понятието мутипликативно множество теорията на последните е бедна на резултати. По-нататък ние ще разглеждаме мултипликативни множества, в които умножението удовлетворява някои условия.

<u>Определение 2.</u> Едно мултипликативно множество R ще наричаме асоциативно пространство, ако за произволни $a,b,c\in R$ е изпълнено равенството

/A/ $$(ab)c = a(bc)$$

/асоциативен закон/ .

Във връзка с асоциативния закон ще отбележим, че ab е подмножество на R и че $(ab)c$ означава произведението на множествата ab и c .

Понятието асоциативно пространство е обобщение на полугрупа, всяка полугрупа може да се схваща като асоциативно пространство, в което произведението на всеки два елемента е множество съставено от един елемент.

Асоциативният закон се пренася и върху умножението на множества, т.е.

/8/ $$(AB)C = A(BC) \qquad (A,B,C\subset R).$$

И наистина нека $x\in (AB)C$. Последното условие изразява, че

/9/ $$x\in yc ,$$

където $c\in C$, а $y\in AB$, т.е.

/10/ $$y\in ab \qquad (a\in A,\ b\in B).$$

От /9/ и /10/ получаваме $x\in (ab)c = a(bc)\subset A(BC)$, т.е. $(AB)C\subset A(BC)$. За да докажем /8/ остава по аналогичен начин да установим противоположното включване.

Както обикновено може да се дефинира произведение на произволен краен брой подмножества на R. Ще разглеждаме и произведения съставени от един множител A и под такова произведение ще разбираме A. Равенство /8/ ни дава възможност да се убедим, че произведението на краен брой множества не се изменя, когато групираме множителите по произволен начин.

За в бъдеще под A^n $(A\subset R, n\geq 1)$ ще разбираме произведението на n множителя, всеки от които е равен на A. За така дефинираната операция е в сила равенството $A^m A^n = A^{m+n}$ $(A\subset R;\ m,n\geq 1)$.

3. Изпъкнали множества

Определение 3. Едно подмножество A на едно асоциативно пространство R ще наричаме изпъкнало, ако $A^2\subset A$.

От включванията $\emptyset^2\subset\emptyset$ и $R^2\subset R$ следва, че празното множество и R са изпъкнали.

Множеството A е тогава и само тогава изпъкнало, когато за всеки две точки $a_1,a_2\in A$ произведението $a_1a_2\subset A$.

Нека множествата A_ν $(\nu\in N)$ са изпъкнали. Тогава

$$\Big(\bigcap_{\nu\in N}A_\nu\Big)^2\subset\bigcap_{\substack{\nu'\in N\\ \nu''\in N}}A_{\nu'}A_{\nu''}\subset\bigcap_{\nu\in N}A_\nu^2\subset\bigcap_{\nu\in N}A_\nu\,,$$

т.е. сечение на изпъкнали множества е изпъкнало. Това ни дава възможност да твърдим, че за произволно множество $A\subset R$ съществува точно едно изпъкнало множество $C(A)\supset A$, което се съдържа във всяко изпъкнало множество съдържащо A. Ще наричаме $C(A)$ изпъкнала обвивка на A.

Като използуваме изпъкналостта на $C(A)$ получаваме

$$A^n\subset\big(C(A)\big)^n\subset C(A)\qquad(n\geq 1).$$

Следователно

/11/ $$\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n \subset C(A).$$

Освен това

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n\right)^2 = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} A^{m+n} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n.$$

Намереното включване показва, че $\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$ е изпъкнало множество и понеже $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$, то

/12/ $$C(A) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$$

Включванията /11/ и /12/ ни показват, че е налице следната

Теорема 2. Нека R е асоциативно пространство и $A \subset R$. Тогава изпъкналата обвивка $C(A)$ на A се определя по формулата

/13/ $$C(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n.$$

4. Афинна независимост

Определение 4. Ще казваме, че една система A от елементи на едно асоциативно пространство R е афинно независима, ако при всеки избор на $X, Y \subset A$, за които сечението $X \cap Y = \emptyset$, сечението $C(X) \cap C(Y) = \emptyset$.

Ако едно множество не е афинно независимо ще казваме, че то е афинно зависимо.

Всяка подсистема на една афинно независима ситема е афинно независима.

Теорема 3. Нека R е асоциативно пространство и $A \subset R$. За да бъде системата A афинно независима е необходимо и достатъчно всяка нейна крайна подсистема да бъде афинно независима.

Доказателство. Необходимостта на това предложение е очевидна. За да се убедим в достатъчността нека допуснем, че всяка крайна подсистема на A е афинно независима и въпреки това системата A е афинно зависима. Тогава ще съществуват две подсистеми X и Y на A, за които $X \cap Y = \emptyset$ и въпреки това $C(X) \cap C(Y) \neq \emptyset$. От последното условие и теор. 2. следга, че за някои естествени числа m и n $X^m \cap Y^n \neq \emptyset$. Но

$$X^m = \bigcup x_1 x_2 \dots x_m \qquad (x_i \in X,\ 1 \le i \le m),$$

$$Y^n = \bigcup y_1 y_2 \dots y_n \qquad (y_i \in Y,\ 1 \le i \le n).$$

Следователно съществуват $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ и $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y$, за които сечението $x_1 x_2 \dots x_m \cap y_1 y_2 \dots y_n \neq \emptyset$. Получихме, че крайната подсистема $\{x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_n\}$ на A е афинно зависима, което доказва теоремата.

В термините на асоциативните пространства може да се приредактира формулировката и едно известно доказателство на теоремата на Хели за непразно сечение на фа милия от изпъкнали множества/виж [4], стр. 78, зад. 16/ По-точно имаме

Теорема 4. Нека R е асоциативно пространство, в което всяка система от n точки е афинно зависима и нека $X_1, X_2, \dots, X_p\ (p \ge n)$ е фамилия от изпъкнали множества, сечението на всеки $n-1$ от които не е празно. Тогава и сечението

$$\bigcap_{1 \le i \le p} X_i \neq \emptyset.$$

<u>Доказателство.</u> Най-напред ще докажем, че ако $Y_1, Y_2, \dots, Y_q$ $(q \geq n)$ е една фамилия от изпъкнали подмножества на R, сечението на всеки $q-1$ от които не е празно, то и сечението

/14/ $$\bigcap_{1 \leq i \leq q} Y_i \neq \theta .$$

И наистина, в противен случай за всяко k $(1 \leq k \leq q)$ ще може да се посочи такъв елемент $y_k \in Y_k$, че $y_k \in \bigcap_{i \neq k} Y_i$. Според условието точките $y_1, y_2, \dots, y_q$ образуват афинно зависима система. Следователно интервалът $[1, q]$ ще може да се представи като сума на две такива свои непресичащи се части L и M, че

$$C(\{y_\lambda\}) \cap C(\{y_\mu\}) \neq \theta \qquad (\lambda \in L, \ \mu \in M).$$

Но съгласно избора на y_k

$$\{y_\lambda\} \subset \bigcap_{\mu \in M} Y_\mu \qquad (\lambda \in L),$$

$$\{y_\mu\} \subset \bigcap_{\lambda \in L} Y_\lambda \qquad (\mu \in M).$$

Следователно/ множествата Y_k са изпъкнали/

$$\bigcap_{1 \leq i \leq q} Y_i = \left(\bigcap_{\lambda \in L} Y_\lambda\right) \cap \left(\bigcap_{\mu \in M} Y_\mu\right) \supset C(\{y_\mu\}) \cap C(\{y_\lambda\}) \neq \theta .$$

Полученото противоречие доказва /14/. От него най-напред следва, че сечението на които и да са n на брой множества $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}$ не е празно; разсъждавайки по този начин индуктивно ние ще получим и теоремата.

Нека R е линейно пространство. Ако за произволни точки a и b поставим $ab = \bigcup \{pa + qb\}$ $(p > 0, q > 0, p + q = 1)$, R се обръща в асоциативно пространство. Изпъкналите множества в него са същите, както и в линейното пространство R. Една крайна система $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

от елементи на R е тогава и само тогава афинно независима, когато системата $\{a_2-a_1, \ldots, a_n-a_1\}$ е линейно независима. Следователно в n-мерното пространство всяка система от $n+2$ точки е афинно зависима. Всичко това ни дава възможност да получим теоремата на Хели от теор. 5.

5. Изпъкнали пространства

<u>Определение 5.</u> Едно асоциативно пространство R ще наричаме изпъкнало пространство, ако за произволни точки a, b и c имаме

/C_1/ $$ab = ba$$

/ комутативен закон /;

/C_2/ $$a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

/втори асоциативен закон /.[1]

Операцията умножение в едно изпъкнало пространство ще наричаме понякога изпъкналост, а произведението ab — отсечка с краища a и b.

Може да се докаже, че всяка комутативна полугрупа е изпъкнало пространство относно зададеното в нея умножение.

<u>Теорема 5. Нека A, B, C и D са подмножества на едно изпъкнало пространство R. Тогава</u>

/15/ $$AB = BA,$$

---

[1] Символът $a\frac{b}{c}$ е кратко означение за $a\left(\frac{b}{c}\right)$, а $\frac{ab}{c}$ — за $\frac{(ab)}{c}$. По-нататък често ще си служим с подобни упростявания в обозначенията без изрично да уговаряме това.

/16/ $$A\frac{B}{C} \subset \frac{AB}{C},$$

/17/ $$\frac{A}{B} : C = \frac{A}{BC},$$

/18/ $$A : \frac{B}{C} \subset \frac{AC}{B},$$

/19/ $$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \subset \frac{AC}{BD},$$

/20/ $$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} \subset \frac{AD}{BC}.$$

Доказателство. На доказателствата на /15/ и /16/ няма да се спираме, защото те следват от /C_1/ и /C_2/ така, както от /A/ следва /8/.

Пристъпваме към доказателството на /17/. С помощта на теор.1. можем да напишем следната верига от еквивалентни едно на друго условия:

$$x \in \frac{A}{B} : C \leftrightarrow x \cap \frac{A}{B} : C \neq \theta \leftrightarrow Cx \cap \frac{A}{B} \neq \theta \leftrightarrow B(Cx) \cap A \neq \theta \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (BC)x \cap A \neq \theta \leftrightarrow x \cap \frac{A}{BC} \neq \theta \leftrightarrow x \in \frac{A}{BC},$$

от която равенство /17/ следва веднага.

Като използуваме отново теор. 1. можем да напишем и следната верига от следващи едно от друго условия:

$$x\in A:\frac{B}{C}\longleftrightarrow x\cap A:\frac{B}{C}\neq\theta\longleftrightarrow\frac{B}{C}x\cap A\neq\theta\longrightarrow\frac{Bx}{C}\cap A\neq\theta\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow Bx\cap AC\neq\theta\longleftrightarrow x\cap\frac{AC}{B}\neq\theta\longleftrightarrow x\in\frac{AC}{B}\ )$$

от която незабавно следва /18/.

За да докажем /19/ с помощта на /16/ и /17/ ще напишем следната верига от равенства и включвания:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\subset\frac{A\frac{C}{D}}{B}\subset\frac{AC}{D}:B=\frac{AC}{BD}.$$

По аналогичен начин се доказва и/20/:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=A:\left(B\frac{C}{D}\right)\subset A:\frac{BC}{D}\subset\frac{AD}{BC}.$$

Теоремата е доказана.

Тази теорема ни дава правила за смятане, които многократно ще бъдат използувани по-нататък. От нея в частност следва, че произведение и частно на изпъкнали множества е изпъкнало множество.

За нашите цели ще бъдат особено интересни изпъкнали пространства, в които от условията $x\in C(z),\ y\in C(z)$ следва, че $C(x)\cap C(y)\neq\theta$.[1] Може да се види, че ако за всяка точка a множеството a^n е съставено най-много от един елемент това условие е изпълнено. Следователно то е на лице, когато R е комутативна полугрупа.

Въпросното условие е изпълнено и когато за всеки три точки a и b на изпъкналото пространство R е валидно включването $ab^2\subset ab$. И наистина нека $x\in C(z),\ y\in C(z)$.

---

[1] Тук $C(a)$ означава изпъкналата обвивка на a.

От условието и теор. 2. следва, че $x \in z \cup z^2$, $y \in z \cup z^2$. От четирите възможности ще разгледаме само нетривиалната $x \in z^2$, $y \in z^2$. Тогава

/21/ $$z \in \frac{x}{z} \subset \frac{C(x)}{z}.$$

Но

/22/ $$\left(\frac{C(x)}{z}\right)^2 \subset \frac{C(x)C(x)}{zz} \subset \frac{C(x)}{z^2}$$

/теор. 5./ Нека $\zeta \in \frac{C(x)}{z^2}$, т.е. $\zeta z^2 \cap C(x) \neq \theta$. Тогава съгласно теор. 1. сечението $\zeta z^2 \cap C(x) \neq \theta$ и толкова по-вече $\zeta z \cap C(x) \neq \theta$. Намерихме, че $\zeta \in \frac{C(x)}{z}$, т.е. $\frac{C(x)}{z^2} \subset \frac{C(x)}{z}$, което заедно с /22/ ни убеждава, че множеството $\frac{C(x)}{z}$ е изпъкнало. При тези обстоятелства от /21/ следва, че $C(z) \subset \frac{C(x)}{z}$ и следователно $y \in \frac{C(x)}{z}$. Така намерихме, че $z \in \frac{C(x)}{y}$. Аналогично се доказва и включването $z \in \frac{C(y)}{x}$. По този начин ние се убедихме, че сечението $\frac{C(x)}{y} \cap \frac{C(y)}{x} \neq \theta$. Като приложим теор. 1 и теор 5. намираме последователно

$$\frac{C(x)}{y}x \cap C(y) \neq \theta,$$

$$\frac{C(x)x}{y} \cap C(y) \neq \theta$$

/тук използувахме /16/ и

$$C(x)x \cap C(y)y \neq \theta.$$

От последното поради изпъкналостта на $C(x)$ и $C(y)$ следва, че $C(x) \cap C(y) \neq \theta$, с което всичко е доказано.

<u>Примери.</u> Може да се докаже, че ако R е комутативна полугрупа и Σ е една съвкупност от обратими изображения на R върху R, която притежава свойствата

/а/ Σ съдържа идентичното изображение ε ;

/б/ $$\alpha(a+b)=\alpha(a)+\alpha(b) \qquad (\alpha\in\Sigma\ ;\ a,b\in R);$$

/в/ Ако $\alpha,\beta\in\Sigma$, то $\alpha^{-1}\in\Sigma$, $\alpha+\beta\in\Sigma$ и $\alpha\beta\in\Sigma$

/ тук α^{-1} означава обратното изображение на α, $\alpha+\beta$ е изображението дефинирано чрез равенството $(\alpha+\beta)(a)=\alpha(a)+\beta(a)$, а $\alpha\beta$ - чрез равенството $(\alpha\beta)(a)=\alpha(\beta(a))$ /, то относно произведението ab, дефинирано по формулата

/23/ $$ab=\bigcup\{\alpha a+\beta b\} \qquad (\alpha\in\Sigma,\ \beta\in\Sigma,\ \alpha+\beta=\varepsilon),$$

R е изпъкнало пространство, в което за всеки две точки a, b е изпълнено включването $ab^2\subset ab$.

В частност ако в произволно линейно пространство R под произведение ab на две точки a и b разбираме отворената отсечка с краища a и b , т.е. множеството

$$ab=\bigcup\{pa+qb\} \qquad (p>0,\ q>0,\ p+q=1),$$

то относно това умножение R е изпъкнало пространство, в което за всеки две точки a, b е изпълнено включването $ab^2\subset ab$.Също ако под $\langle ab$ разбираме отворения ъгъл aob , т.е. множеството

$$\langle ab=\bigcup\{pa+qb\} \qquad (p>0,\ q>0) \ ,$$

то и относно това произведение R е изпъкнало пространство, в което е изпълнено включването $\langle ab^2 \subset \langle ab$.

Изпъкналите множества относно произведението „отворена отсечка“ съвпадат с изпъкналите множества в линейното пространство R а тези относно произведението „отворен ъгъл“ са всевъзможните изпъкнали/в линейното пространство R / конуси с връх в началото.

За да посочим пример от по-друго естество ще отбележим, че ако R е дистрибутивна структура, т.е. множество в което е дадена частична наредба $\subset$ със свойствата:

/а/ Ако $a \subset b$, $b \subset c$, то $a \subset c$; $(a, b, c \in R)$;

/б/ Ако $a \subset b$, $b \subset a$, то $a = b$; $(a, b \in R)$;

/в/ $a \subset a$ $(a \in R)$;

/г/ Всеки два елемента a и b на R имат точна мажоранта $a \cup b$ и точна миноранта $a \cap b$ относно наредбата на R / под точна мажоранта на a и b се разбира такъв елемент $a \cup b \supset a, b$ на R , за който от условията $a \subset x, b \subset x$ винаги следва $a \cup b \subset x$ 3/ ; аналогично се дефинира и точна миноранта/;

/д/ $(a \cap b) \cup c = (a \cup c) \cap (b \cup c)$ $(a, b, c \in R)$;

/е/ $(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c)$ $(a, b, c \in R)$,

то относно всяко от произведенията

$$ab = \{x : a \cap b \subset x \subset a \cup b\},$$

$$\langle ab = \{x : a \cap b \subset x\} ,$$

$$ab\rangle = \{x : x \subset a \cup b\}$$

R е изпъкнало пространство, в което за всеки две точки a и b е изпълнено включването $ab^2 \subset ab$.

6. Афинни многообразия

<u>Определение 6.</u> Едно подмножество X на едно изпъкнало пространство R ще наричаме афинно / многообразие /, ако е изпъкнало, т.е. $X^2 \subset X$ и $\frac{X}{X} \subset X$.

Празното множество и R са афинни многообразия.

Множеството X е афинно многообразие тогава и само тогава, когато за всеки два елемента $y, z \in X$ произведението $yz \subset X$ и частното $\frac{y}{z} \subset X$.

Афинните многообразия относно произведението "отворен ъгъл" в едно линейно пространство R са всевъзможните подпространства на R, а тези относно произведението "отворена отсечка" се получават от подпространствата на R чрез произволни транслации.

Сечение на афинни многообразия е афинно многообразие. Това ни дава възможност да твърдим, че за произволно множество $Y \subset R$ съществува точно едно афинно многообразие $A(Y) \supset Y$, което се съдържа във всяко афинно множество, съдържащо Y. Ще наричаме $A(Y)$ афинна обвивка на Y. Понеже $A(Y)$ е изпъкнало множество съдържащо Y, то

/24/
$$A(Y) \supset C(Y)$$

Това ни дава възможност да напишем

$$A(A(Y)) \supset A(C(Y)) \supset A(Y),$$

т.е.

/25/
$$A(Y) = A(C(Y)).$$

Нека Y е изпъкнало множество. Тогава $\frac{Y}{Y} \subset \frac{A(Y)}{A(Y)} \subset A(Y)$, т.е.

/26/
$$Y \cup \frac{Y}{Y} \subset A(Y).$$

Освен това

$$\left(Y\cup\frac{Y}{Y}\right)^2 = Y^2\cup Y\frac{Y}{Y}\cup\frac{Y}{Y}Y\cup\frac{Y}{Y}\cdot\frac{Y}{Y}\subset Y^2\cup\frac{Y^2}{Y}\cup\frac{Y^2}{Y^2}\subset Y\cup\frac{Y}{Y}$$

и

$$\left(Y\cup\frac{Y}{Y}\right):\left(Y\cup\frac{Y}{Y}\right)=\frac{Y}{Y}\cup Y:\frac{Y}{Y}\cup\frac{Y}{Y}:Y\cup\frac{Y}{Y}:\frac{Y}{Y}\subset\frac{Y}{Y}\cup\frac{Y^2}{Y}\cup\frac{Y}{Y^2}\cup\frac{Y^2}{Y^2}\subset\frac{Y}{Y}\subset Y\cup\frac{Y}{Y}$$

/използувахме теор. 5. и изпъкналостта на Y /, т.е. $Y\cup\frac{Y}{Y}$ е афинно многообразие, което съдържа Y . Следователно

/27/ $$A(Y)\subset Y\cup\frac{Y}{Y}$$

Едно сравнение на /26/ и /27/ ни показва, че при напрвеното предположение за Y

/28/ $$A(Y)=Y\cup\frac{Y}{Y}\ .$$

Нека сега Z е произволно подмножество на R . Тогава по силата на /25/ и /28/

$$A(Z)=A(C(Z))=C(Z)\cup\frac{C(Z)}{C(Z)}\ ,$$

т.е. /теор. 2./ ние доказахме следната

Теорема 6. Афинната обвивка $A(Z)$ на произволно подмножество Z на едно изпъкнало пространство R се определя по формулата

$$A(Z)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}Z^n\right)\cup\left(\bigcup_{m,n=1}^{\infty}\frac{Z^m}{Z^n}\right).$$

Теорема 7. Нека X е афинно многообразие в едно изпъкнало пространство R и нека допълнението на X до R е сума на изпъкнали множества. Тогава ако за три точки a, b и c са изпълнени условията

/29/ $$ab \cap X \neq \theta, \quad bc \cap X \neq \theta, \quad ca \cap X \neq \theta,$$

то $a, b, c \in X$.

Доказателство. От /29/ следва, че $b \in \frac{X}{a}$ и $c \in \frac{X}{a}$. Следователно $bc \subset \frac{X}{a} \cdot \frac{X}{a} \subset \frac{X^2}{a^2} \subset \frac{X}{a^2}$. С помощта на тези включвания намираме, че $X \cap \frac{X}{a^2} \neq \theta$, или което е все същото $a^2 \cap \frac{X}{X} \neq \theta$. Следователно

/30/ $$a^2 \cap X \neq \theta$$

Да допуснем за момент, че $a \bar{\in} X$. Тогава според условието $a \in Y \subset R$, където $Y^2 \subset Y$ и $Y \cap X = \theta$. Тези свойства на a и Y ни дават възможност да заключим последователно, че $a^2 \subset Y$ и че $a^2 \cap X = \theta$, което противоречи на /30/. Следователно $a \in X$ и предложението е доказано.

7. Конструиране на изпъкнали пространства

Нека R е изпъкнало пространство. Ще разглеждаме двучленни релации между елементи на R, или което е все същото изображения, които на всеки елемент на R съпоставят по едно подмножество на R и ще ги наричаме оператори изобразяващи R в R или накратко оператори. Нека p е оператор и $X \subset R$. Под $p(X)$ ще разбираме множеството $\bigcup_{x \in X} p(x)$. Това определение ни дава възможност да дефинираме понятието монотонен оператор.

Определение 7. Един оператор p, изобразяващ изпъкналото пространство R в R ще наричаме монотонен, ако за всеки две точки a

и b от R са изпълнени включванията $p(ab) \subset p(a)p(b)$, $p(\frac{a}{b}) \subset \frac{p(a)}{p(b)}$.

Ако p и q са два оператора в R, формулата $(pq)(a) = p(q(a))$ ни дефинира оператор pq, който ще наричаме произведение на p и q. В случай, че p и q са монотонни оператори произведението pq е монотонен оператор.

Един монотонен оператор p в R ще наричаме разширяващ, ако удовлетворява следните условия:

/а/ $a \in p(a) \quad (a \in R)$;

/б/ $p^2(a) \subset p(a) \quad (a \in R)$;

/в/ Ако $a \in p(c)$, $b \in p(c)$, то $p(a) \cap p(b) \neq \emptyset \quad (a, b, c \in R)$.

<u>Теорема 8. Нека R е изпъкнало пространство и p е разширяващ оператор в R. Тогава формулите</u>

/а/ $[ab] = p(a)p(b)$,

/б/ $\{ab\} = p(a) \cup p(a)p(b) \cup p(b)$

<u>дефинират две нови изпъкналости в R.</u>

<u>Доказателство.</u> Произведението и частното на две множества A и B относно произведението определено от /а/ ще означаваме съответно с $[AB]$ и $[\frac{A}{B}]$. Произведението $[\,]$ очевидно удовлетворява комутативния закон, а асоциативния следва от равенството

/31/ $$[[ab]c] = p(a)p(b)p(c),$$

към доказателството на което преминаваме. Нека $x \in [[ab]c]$. Това означава, че $x \in [\xi c]$, където $\xi \in [ab]$, т.е.

/32/ $$x \in p(\xi)p(c)$$

и $\xi \in p(a)p(b)$. Тогава $p(\xi) \subset p(p(a)p(b)) \subset p^2(a)\,p^2(b) \subset p(a)p(b)$. От последното включване и от /32/ следва, че $x \in (p(a)p(b))p(c) = p(a)p(b)p(c)$

Обратно, нека $x \in p(a)p(b)p(c)$. Това означава, че

/33/ $$x \in u\,p(c),$$

където $u \in p(a)p(b)$, т.е.

/34/ $$u \in [ab].$$

Но от /33/ следва, че $x \in p(u)p(c)$, т.е.

/35/ $$x \in [uc].$$

Включванията /34/ и /35/ означават, че $x \in [[ab]c]$, с което равенство /31/ и асоциативния закон са доказани.

Остана да се докаже втория асоциативен закон, т.е. включването

/36/ $$\left[\left[\frac{a}{b}\right]c\right] \subset \left[\frac{[ac]}{b}\right].$$

Нека за тази цел $x \in \left[\left[\frac{a}{b}\right]c\right]$. Това означава, че

/37/ $$x \in [uc],$$

където $u \in \left[\frac{a}{b}\right]$, т.е.

/38/ $$a \in [ub].$$

Включванията /37/ и /38/ могат да се запишат още и така $x \in p(u)p(c)$, $a \in p(u)p(b)$, или още по-различно $\frac{x}{p(c)} \cap p(u) \neq \theta$, $\frac{a}{p(b)} \cap p(u) \neq \theta$. Нека $\xi \in \frac{x}{p(c)} \cap p(u)$ и $\eta \in \frac{a}{p(b)} \cap p(u)$. Понеже $\xi, \eta \in p(u)$ и p е разширяващ оператор, то $p(\xi) \cap p(\eta) \neq \theta$ и толкова повече $p\left(\frac{x}{p(c)}\right) \cap p\left(\frac{a}{p(b)}\right) \neq \theta$. Използувайки отново монотонността на p и свойство /6/ от дефиницията на разширяващ оператор намираме, че $\frac{p(x)}{p(c)} \cap \frac{p(a)}{p(b)} \neq \theta$ т.е. /теор. 1. и теор. 5./ $p(x)p(b) \cap p(a)p(c) \neq \theta$. Последното условие може дасее запише още и така $[xb] \cap [ac] \neq \theta$ и следователно $x \cap \left[\frac{[ac]}{b}\right] \neq \theta$, т.е. $x \in \left[\frac{[ac]}{b}\right]$.

По този начин ние доказахме частта от теоремата, отнасяща се до произведението [ ]. Аналогично се доказва и твърдението, отнасящо се до $\{\}$.

Във връзка с доказаната теорема възниква задачата да се посочат някои разширяващи оператори. Нека R е изпъкнало пространство, в което всеки път, когато $x \in C(z)$, $y \in C(z)$ сечението $C(x) \cap C(y) \neq \theta$. Тогава операторът $a \to C(a)$ е разширяващ.

Да означим с Σ една система от <u>еднозначни</u> монотонни оператори в едно изпъкнало пространство R със свойствата

/а/ Σ съдържа идентичния оператор ε;

/б/ Ако α и $\beta \in \Sigma$, то $\alpha\beta = \beta\alpha$ и $\alpha\beta \in \Sigma$.

Тогава операторът $p(a) = \bigcup_{\alpha \in \Sigma} \alpha(a)$ $(a \in R)$ е разширяващ.

Нека Σ е една система от монотонни оператори в едно изпъкнало пространство R със свойствата

/а/ Σ съдържа идентичния оператор ε;

/б/ Ако $\alpha \in \Sigma$, то $\alpha^{-1} \in \Sigma$ / операторът α^{-1} се дефинира така: $x \in \alpha^{-1}(y)$ тогава и само тогава, когато $y \in \alpha(x)$ /;

/в/ Ако α и $\beta \in \Sigma$, то $\alpha\beta \in \Sigma$.

Тогава операторът $p(a) = \bigcup_{\alpha \in \Sigma} \alpha(a)$ $(a \in R)$ е разширяващ.

На доказателството на тези предложения няма да се спираме.

§ 2. Афинни изпъкнали пространства

Вече видяхме, че в асоциативните и изпъкнали пространства се пренасят някои понятия и резултати от теорията на линейните пространства. В този параграф ще разгледаме една специална категория от изпъкнали пространства, приликата на които с линейните пространства е още по-пълна.

1. Определение и примери

Определение 1. Едно изпъкнало пространство R ще наричаме афинно изпъкнало просранство /АИП/, ако удовлетворява следните условия:

/AC_1/ Ако $x \in xy$, то $x \in C(y)$;

/AC_2/ Ако $x \in C(y)$, то $y \in C(x)$;

/AC_3/ $xy^2 \subset xy$;

/AC_4/ Ако $xy \cap xz \neq \emptyset, y \bar{\in} C(z)$, то налице е поне една от релациите

$$x \in yz, \; y \in zx, \; z \in xy \quad (x, y, z \in R).$$

Аксиомата /AC_1/ изразява, че в известен смисъл отсечките са отворени, т.е. една отсечка може да съдържа краищата си само в „изключителни случаи".

От /AC_2/ може да се изведе следното следствие: нека A е изпъкнало подмножество на R, $x \in R$ и $C(x) \cap A \neq \emptyset$; тогава $x \in A$. И наистина да означим с a една точка от $C(x) \cap A$. Тогава съгласно /AC_2/ $x \in C(a) \subset A$.

От /AC_3/ следва, че всяко произведение от вида $a_1 a_2 \ldots a_n$ $(n \geq 2)$ е изпъкнало множество. В частност отсечките са винаги изпъкнали.

<u>Теорема 1. Нека R е АИП $A\subset R$ и $x\in R$. Тогава</u>

/1/ $$C(x) = x\cup x^2 ,$$

/2/ $$AC(x) = Ax ,$$

/3/ $$\frac{A}{C(x)} = \frac{A}{x} ,$$

/4/ $$\frac{C(x)}{A} = \frac{x}{A} .$$

<u>Доказателство.</u> За да докажем /1/ ще отбележим, че

$$(x\cup x^2)(x\cup x^2) = x^2\cup x.x^2\cup x^2.x^2 \subset x^2 \subset x\cup x^2 ,$$

/т.е. съгласно /AC_3/ множеството $x\cup x^2$ е изпъкнало/ и че $x\in x\cup x^2$.

От /1/ следва, че за да докажем /2/ е достатъчно да се убедим във включването $Ax^2\subset Ax$, а то следва незабавно от /AC_3/.

Също за да докажем /3/ е достатъчно да докажем включването $\frac{A}{x^2}\subset\frac{A}{x}$, във верността на което можем да се убеди както на стр.14

Остана да се докаже /4/. Нека за тази цел $\xi\in\frac{C(x)}{A}$. Тогава $\xi A\cap C(x)\neq\emptyset$ и следователно $\xi a\cap C(x)\neq\emptyset$ $(a\in A)$. Както знаем от последното следва, че $x\in\xi a$, т.е. $\xi\in\frac{x}{a}\subset\frac{x}{A}$.

Теоремата е доказана.

Оказва се, че при условията на /AC_4/ заключението може да се уточни. Именно: при тези условия или $y\in zx$ или $z\in yx$. И наистина да допуснем, че $x\in yz$ и да изберем $\xi\in xy\cap xz$. Тогава $y\in\frac{\xi}{x}$, $z\in\frac{\xi}{x}$ и следователно $yz\subset\frac{\xi}{x}\cdot\frac{\xi}{x}\subset\frac{\xi^2}{x^2}\subset\frac{C(\xi)}{C(x)}\subset\frac{\xi}{x}$ / тук използувахме /3/ и /4//. От последните включвания и от нашето допускане следва, че $x\in\frac{\xi}{x}$, т.е. $\xi\in x^2\subset C(x)$ и съгласно /AC_2/ $x\in C(\xi)\subset xy$.

По такъв начин ние се намираме при условията на /AC_1/. Следователно $x\in C(y)$,което заедно с нашето допускане дава $C(y)\cap yz\neq\emptyset$. От последното намираме, че $y\in yz$, което заедно с /AC_1/ дава $y\in C(z)$. Но последното включване противоречи на предположенията на /AC_4/ и всичко е доказано. По този начин ние доказахме следното предложение:

/AC_4'/ Ако $xy \cap xz \neq \emptyset$, $y \bar{\in} C(z)$, то налице е поне една от релациите $y \in zx$, $z \in yx$.

<u>Теорема 2. Нека R е АИП $A, B \subset R$ и $x \in R$. Тогава,</u>

<u>/а/ Ако $x \in xA$, то $x \in C(A)$;</u>

<u>/б/ Ако $xA \cap xB \neq \emptyset$ и $A \cap C(B) = \emptyset$, то $x \in \frac{A}{B} \cup \frac{B}{A}$.</u>

<u>Доказателство.</u> При предположенията на /а/ $x \in xa$ $(a \in A)$ и по силата на /AC_1/ $x \in C(a) \subset C(A)$; /а/ е доказано.

От условието на /б/ следва, че $xa \cap xb \neq \emptyset$ $(a \in A, b \in B)$. При това $a \bar{\in} C(b)$, защото в противен случай бихме имали $A \cap C(B) \neq \emptyset$. Намираме се при условията на /AC_4'/. Следователно или $a \in xb$ или $b \in xa$, т.е. $x \in \frac{A}{B} \cup \frac{B}{A}$.

Теоремата е доказана.

<u>Примери.</u> Нека R е абелева [redacted]група, а Σ - комутативно наредено тяло /[5], стр. 33 /. Тогава наредбата на Σ ще удовлетворява следните условия: ако $\alpha > 0, \beta > 0$, то $\alpha + \beta > 0$, $\alpha\beta > 0$, $\alpha^{-1} > 0$ $(\alpha, \beta \in \Sigma)$. Ще предположим, че между елементите на Σ и тези на R е дефинирано умножение със следните свойства:

/а/ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

/б/ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

/в/ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

/г/ $1x = x$, $0x = 0$ $\quad (\alpha, \beta \in \Sigma;\ x, y \in R)$.

в R ще дефинираме произведение с помощта на формулата

$$xy = \bigcup\{\alpha x + \beta y\} \quad (\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1).$$

Вече знаем, че относно така дефинираното произведение R е изпъкнало пространство/ §1.,5./ Ще докажем, че R е афинно изпъкнало пространство /АИП/.

Най-напред ще отбележим, че

$$\alpha x = \bigcup_{\substack{\alpha>0,\beta>0\\ \alpha+\beta=1}} \{\alpha x+\beta x\} = \bigcup \{(\alpha+\beta)x\} = \bigcup x = x \quad ,$$

т.е. $C(x)=x$.

Нека сега $x\in xy$, т.е. $x=\alpha x+\beta y$ $(\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta=1)$. Тогава $\beta x=(1-\alpha)x=x+(-\alpha)x=\alpha x+\beta y+(-\alpha)x=\beta y$; намерихме, че $x=y=C(y)$ и аксиомата /AC$_1$/ е проверена.

/AC$_2$/ следва от равенството $x=C(x)$.

/AC$_3$/ следва от доказаното вече равенство $x^2=x$.

Остава да се провери /AC$_4$/ Нека за тази цел $xy\cap xz\neq\Phi$, $y\bar{\in}C(z)$. Тогава при подходящ избор на $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Sigma$, за които $\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta=1;\ \gamma>0,\delta>0,\ \gamma+\delta=1$ ще имаме

/5/ $$\alpha x+\beta y=\gamma x+\delta z.$$

Ако допуснем, че $\alpha=\gamma$, то $\beta=\delta$ и следователно $y=z\subset C(z)$, което противоречи на условието. В такъв случай или $\alpha>\gamma$ или $\alpha<\gamma$. Ще разгледаме само първата от тези възможности. От /5/ следва, че $(\alpha-\gamma)x+\beta y=\delta z$ или $z=\delta^{-1}(\alpha-\gamma)x+\delta^{-1}\beta y$. Но $\delta^{-1}(\alpha-\gamma)>0$, $\delta^{-1}\beta>0$ и $\delta^{-1}(\alpha-\gamma)+\delta^{-1}\beta=\delta^{-1}(\alpha+\beta-\gamma)=\delta^{-1}(1-\gamma)=\delta^{-1}\delta=1$. Следователно в разглеждания случай $z\in xy$ и /AC$_4$/ е проверена.

В светлината на горната конструкция изниква въпросът за съществуване на комутативни наредени тела различни от тялото на реалните числа.

Да разгледаме тялото на рационалните функции над тялото на ре реалните числа. Една такава функция $\tau(x)$ ще наричаме положителна, ако съществува такова число N , че за всяко $x>N$ да е изпълнено неравенството $\tau(x)>0$. Ясно е, че по този начин получаваме наредено тяло. Този пример може да се обобщи. Именно тялото на рационалните функции над произволно наредено тяло може да се превърне по аналогичен в наредено тяло.

За да получим друг подобен пример бихме могли да разгледаме тялото на всевъзможните анлитични върху крайния и затворен интервал $[a,b]$ функции, които нямат други особености освен краен брой полюси и приемат само реални стойности, когато $x \in [a,b]$. Една такава функция $\underbrace{\ }_{}^{f(x)}$ ще наричаме положителна, ако съществува такова число $c \in (a,b)$, че за всяко $x \in (c,b)$ да е изпълнено неравенството $f(x) > 0$. Ясно е, че по този начин получаваме наредено тяло.

Нека сега A е произволно множество, а Σ — наредено комутативно тяло. Да означим с R множеството на всевъзможните изображения на A в Σ. Формулата $(\xi+\eta)(a) = \xi(a)+\eta(a)$ $(\xi,\eta \in R;\ a \in A)$ дефинира събиране в R, относно което R е абелева група. От друга страна формулата $(\alpha\xi)(a) = \alpha\,\xi(a)$ $(\alpha \in \Sigma, \xi \in R, a \in A)$ дефинира умножение между елементите на Σ и тези на R. Може да се провери, че така дефинираното умножение притежава свойствата /а/,/б/,/в/,/г/.

С помощта на горното и на общата конструкция можем да получим различни афинни изпъкнали пространства. В частност всяко линейно пространство е АИП относно произведението "отворена отсечка".

2. Афинна независимост

В § 1. въведохме понятието афинна независимост и го използувахме при теоремата на Хели. Оказва се, че в афинните изпъкнали пространства това понятие има още ред свойства.

<u>Определение 2.</u> Нека R е АИП, $x \in R$ и $X \subset R$. Ако $x \in A(X)$ / $A(X)$ означава афинната обвивка на X /, ще казваме, че x е афинна комбинация от елементи на X.

Ще казваме, че x е собствена афинна комбинация на системата $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ / $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ /, ако или $x \in x_1 x_2 \dots x_n$ или пък $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$

$x \in \frac{x_1 x_2 \dots x_k}{x_{k+1} \dots x_n}$ $(1 \leq k < n)$.

Ако A и B са две подмножества на едно АИП R, $A \subset B$ и x е афинна комбинация от елементи на A, то x е афинна комбинация и от елементи на B.

Ако x е собствена афинна комбинация на една система от елементи на A, то x е и афинна комбинация от елементи на A.

Теорема 3. Нека R е АИП, $x \in R$ и $X \subset R$. При тези предположения, ако x е афинна комбинация от елементи на X, то x е собствена афинна комбинация на една система от елементи на X.

Доказателство. Нека $x \in A(X)$. Тогава / § 1., теор. 6. / или $x \in X^n$ или $x \in \frac{X^n}{X^m}$ $(m, n \geq 1)$.

Ако $x \in X^n$, то $x \in x_1 x_2 \dots x_n$ $(x_i \in X)$ и твърдението е вярно.

Във втория случай можем да си мислим, че

/6/ $$x \bar{\in} C(X)$$

и че $x \in \frac{X^{n_0}}{X^{m_0}}$, където двойката m_0, n_0 е избрана така, че сумата $m_0 + n_0$ да бъде най-малка. Тогава $x \in \frac{y_1 y_2 \dots y_{n_0}}{z_1 z_2 \dots z_{m_0}}$ $(y_i \in X,\ z_i \in X)$. Като имаме пред вид аксиомата /AC_3/ /$xy^2 \subset xy$/, от избора на m_0 и n_0 следва, че $y_i \neq y_j$ $(i \neq j)$ и $z_i \neq z_j$ $(i \neq j)$. Ще докажем, че и $y_i \neq z_j$. За тази цел нека допуснем например, че $z_1 = y_1$. Могат да се представят няколко случая.

/a/ $n_0 > 1$, $m_0 > 1$. Тогава съгл. теор. 1. от §1.

$y_1 x z_2 \dots z_{m_0} \cap y_1 y_2 \dots y_{n_0} \neq \emptyset$. При това не може да се случи

$C(x z_2 \dots z_{m_0}) \cap y_2 \dots y_{n_0} \neq \emptyset$, защото това би означавало, че

$x z_2 \dots z_{m_0} \cap y_2 \dots y_{n_0} \neq \emptyset$ / множеството $x z_2 \dots z_{m_0}$ по силата на /AC_3/ е изпъкнало / или което е все същото $x \in \frac{y_2 \dots y_{n_0}}{z_2 \dots z_{m_0}}$, което противоречи на избора на m_0 и n_0. Тогава ние се намираме при условията на теор.2. Следователно или $y_1 \in \frac{y_2 \dots y_{n_0}}{x z_2 \dots z_{m_0}}$ или пък $y_1 \in \frac{x z_2 \dots z_{m_0}}{y_2 \dots y_{n_0}}$. С помощта на теор. 1. от §1. в първия от тези случаи намираме, че

$x \in \frac{y_2 \ldots y_{n_0}}{y_1 z_2 \ldots z_{m_0}}$, а във втория – $x \in \frac{y_1 y_2 \ldots y_{n_0}}{z_2 \ldots z_{m_0}}$. И двете получени включвания противоречат на избора на m_0 и n_0. Следователно случаят /а/ не може да се представи;

/б/ $n_0 = 1$, $m_0 > 1$. Тогава $x \in \frac{y_1}{y_1 z_2 \ldots z_{m_0}}$ и следователно $y_1 \in y_1 x z_2 \cdots z_{m_0}$. Отново са изпълнени условията на теор. 2. Следователно $y_1 \in \mathcal{C}(x z_2 \ldots z_{m_0}) = x z_2 \ldots z_{m_0}$, т.е. $x \in \frac{y_1}{z_2 \ldots z_{m_0}}$ и отново получаваме противоречие;

/в/ $n_0 > 1$, $m_0 = 1$. Тогава $x \in \frac{y_1 y_2 \ldots y_{n_0}}{y_1}$ и следователно $y_1 x \cap y_1 y_2 \ldots y_{n_0} \neq \phi$. При това не може да се случи $x \in \mathcal{C}(y_1 y_2 \ldots y_{n_0})$, защото това би означавало, че $x \in \mathcal{C}(X)$, което противоречи на /б/. Отново се намираме при предположенията на теор. 2. Следователно или $y_1 \in \frac{y_2 \ldots y_{n_0}}{x}$, или пък $y_1 \in \frac{x}{y_2 \ldots y_{n_0}}$. В първия от тези случаи намираме, че $x \in \frac{y_2 \ldots y_{n_0}}{y_1}$, което противоречи на минималността на $m_0 + n_0$, а във втория – $x \in y_1 y_2 \cdots y_{n_0} \subset \mathcal{C}(X)$, което противоречи на /б/. Случаят /в/ също се оказа невъзможен; но единствената оставаща възможност е

/г/ $m_0 = n_0 = 1$. Тогава $x \in \frac{y_1}{y_1}$, т.е. $y_1 \in y_1 x$. Следователно $y_1 \in \mathcal{C}(x)$ и $x \in \mathcal{C}(y_1)$ / използувахме /AC_1/ и /AC_2//, което отново противоречи на /б/.

Полученото противоречие доказва, че наистина $y_i \neq z_j$, което доказва теоремата.

Теор. 3. от §1. ни дава възможност да предактираме по следния начин определението на афинно независима система / §1.,4/

<u>Определение 3.</u> Една система L от елементи на АИП R ще наричаме афинно независима, ако при всеки избор на точките $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m \in L$, за които $\{x_i\} \cap \{y_j\} = \phi$ /т.е. $x_i \neq y_j$ / сечението $x_1 x_2 \ldots x_n \cap y_1 y_2 \cdots y_m = \phi$.

Във връзка с това определение се намира следната

Теорема 4. Нека R е АИП и L е афинно независима подсистема на R. Тогава при всеки избор на точките $x_1, x_2, \dots x_n \in L$ и $y_1, y_2, \dots, y_m \in L$, за които $\{x_i\} \neq \{y_j\}$ сечението $x_1 x_2 \cdots x_n \cap y_1 y_2 \cdots y_m = \phi$

Преди да пристъпим към доказателството на теор. 4. ще докажем следната

Лема 1. Нека R е АИП $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$, $y_1, y_2, \dots, y_m \in R$, $x_1 \neq y_j$ и $x_1 x_2 \cdots x_n \cap y_1 y_2 \cdots y_m \neq \phi$. Тогава x_1 е афинна комбинация от елементи на множеството

/7/ $$\{x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m\} - \{x_1\}.$$

Доказателство. Прилагайки аксиомата /AC_3/ /$xy^2 \subset xy$/ можем да си мислим, че или

/а/ Всички x_i са различни по между си;

или пък

/б/ $x_1 = x_2$ $(n=2)$

Ще разгледаме по отделно тези две възможности

/а/ Тогава или $x_1 \in y_1 y_2 \cdots y_m$ $(n=1)$ или пък $x_1 \in \frac{y_1 y_2 \cdots y_m}{x_2 \cdots x_n}$. Следователно в този случай x_1 наистина е афинна комбинация от елементи на множеството /7/.

/б/ В този случай $C(x_1) \cap y_1 \cdots y_m \neq \phi$. Има две възможности

/$б_1$/ $m=1$. Тогава $C(x_1) \ni y_1$ и следователно $x_1 \in C(y_1)$; в този случай твърдението е доказано;

/$б_2$/ $m \geq 2$. Тогава $y_1 y_2 \cdots y_m$ е изпъкнало множество и следователно $x_1 \in C(y_1 \cdots y_m) \subset y_1 \cdots y_m$, което отново показва, че x_1 е афинна комбинация от елементи на множеството /7/.

Лемата е доказана.

Доказателство на теор.4. Нека при някой избор на точките $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$ и $y_1, y_2, \dots, y_m \in L$, за които $\{x_i\} \neq \{y_j\}$ сечението $x_1 x_2 \dots x_n \cap y_1 y_2 \dots y_m \neq \phi$. Понеже $\{x_i\} \neq \{y_j\}$ можем да си мислим, че например $x_1 \neq y_j$ $(j=1,2,\dots m)$. Тогава според лема 1. x_1 се оказва афинна комбинация от елементи на множеството $X=\{x_2,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m\}-\{x_1\}$. Прилагайки теорема 3. намираме, че или $x_1\in Z_1^2$ или $x_1\in Z_1Z_2\dots Z_p$ или

$$x_1\in\frac{z_1z_2\dots z_p}{t_1t_2\dots t_q}\quad (z_i,t_j\in X;\ z_i\neq z_j,\ t_i\neq t_j\ (i\neq j);\ z_i\neq t_j).$$

При първата от тези възможности полагаме $x_1'=x_1, y_1'=z_1, y_2'=z_1$. Тогава $x_i'\neq y_j'$ и въпреки това сечението $x_1'\cap y_1'y_2'\neq\phi$ — получаваме противоречие с афинната независимост на L.

При втората възможност поставяме $x_1'=x_1, y_1'=z_1,\dots,y_p'=z_p$. Понеже $x_1\overline{\in}X$, то $x_i'\neq y_j'$ и въпреки това сечението $x_1'\cap y_1'y_2'\dots y_p'\neq\phi$; отново получаваме противоречие с афинната независимост на L.

В третия случай поставяме $x_1'=x_1, x_2'=t_1,\dots,x_{q+1}'=t_q;\ y_1'=z_1, y_2'=z_2,\dots,y_p'=z_p$. Тогава отново $x_i'\neq y_j'$, а сечението

$$x_1'x_2'\dots x_{q+1}'\cap y_1'y_2'\dots y_p'=x_1t_1t_2\dots t_q\cap z_1z_2\dots z_p\neq\phi.$$

И тази възможност не може да се представи. Виждаме, че направеното допускане води до противоречие, с което теоремата е доказана.

<u>Теорема 5. Нека L е афинно независима система в едно АИП R и $x\in R$. Тогава x може да бъде собствена афинна комбинация най много на една система от елементи на L.</u>

<u>Доказателство.</u> В противен случай ще съществуват поне две различни системи $\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ и $\{z_1,z_2,\dots,z_m\}$ от елементи на L, за които

или

/а/ $$x\in y_1y_2\dots y_n$$

или

/б/ $$y_i\neq y_j\ (i\neq j)\quad и\quad x\in\frac{y_1y_2\dots y_k}{y_{k+1}\dots y_n}\quad (1\leq k<n)$$

и едновременно или

/а/ $$x\in z_1z_2\dots z_m$$

или

/б/ $$z_i\neq z_j\quad (i\neq j)\quad и\quad x\in\frac{z_1z_2\dots z_l}{z_{l+1}\dots z_m}\quad (1\leq l<m).$$

Ще разгледаме по отделно тези четири възможни случая.

/а,а'/ Тогава $y_1 y_2 \dots y_n \cap z_1 z_2 \dots z_m \neq \phi$, което противоречи на афинната независимост на L / теор. 4./; случаят е невъзможен;

/а,б'/ В този случай $y_1 y_2 \dots y_n \cap \frac{z_1 z_2 \dots z_l}{z_{l+1} \dots z_m} \neq \phi$ и следователно $y_1 y_2 \dots y_n z_{l+1} \dots z_m \cap z_1 z_2 \dots z_l \neq \phi$. Но системите $\{y_1, \dots, y_n; z_{l+1}, \dots, z_m\}$ и $\{z_1, \dots, z_l\}$ са различни, защото например $z_{l+1} \overline{\in} \{z_1, \dots, z_l\}$ и ние отново получаваме противоречие с афинната независимост на L.

/б,а'/ В невъзможността на този случай се убеждаваме, както при случая /а,б'/.

/б,б'/ Тогава $\frac{y_1 y_2 \dots y_k}{y_{k+1} \dots y_n} \cap \frac{z_1 z_2 \dots z_l}{z_{l+1} \dots z_m} \neq \phi$ и следователно

$$y_1 y_2 \dots y_k z_{l+1} \dots z_m \cap y_{k+1} \dots y_n z_1 z_2 \dots z_l \neq \phi$$

Но $\{y_i\} \neq \{z_j\}$. Нека например $y_1 \overline{\in} \{z_j\}$. Тогава $y_1 \overline{\in} \{y_{k+1}, \dots, y_n; z_1, \dots, z_l\}$ и системите $\{y_1, \dots, y_k; z_{l+1}, \dots, z_m\}$, $\{y_{k+1}, \dots, y_n; z_1, \dots, z_l\}$ се оказват различни; ние отново получаваме противоречие с теор. 4.

Теоремата е доказана.

<u>Следствие 1.</u> Нека L е афинно независима система в едно АИП R и $L_\nu \subset L$. Тогава

$$\bigcap_{\nu \in N} A(L_\nu) = A\Big(\bigcap_{\nu \in N} L_\nu\Big).$$

И наистина нека $x \in \bigcap_{\nu \in N} A(L_\nu)$. От това следва, че x е афинна комбинация от елементи на L и следователно /теор. 3./ x е собствена афинна комбинация на системата $\{l_i\} \subset L$. Но поради аналогични съображения при всяко $\nu \in N$ x е собствена афинна комбинация на системата $\{l_i^{(\nu)}\} \subset L_\nu \subset L$. Според теоремата $\{l_i^{(\nu)}\} = \{l_i\}$ и следователно $\{l_i\} \subset L_\nu$ $(\nu \in N)$. Така намираме, че x е собствена афинна комбинация от елементи на системата $\bigcap_{\nu \in N} L_\nu$. Следователно $x \in A\Big(\bigcap_{\nu \in N} L_\nu\Big)$.

Противоположното включване е очевидно.

<u>Следствие 2.</u> Всеки елемент x на една афинно независима сис-

тема L не е афинна комбинация на множеството $L-x$.

И наистина в противен случай точката x би била афинна комбинация на двете различни подсистеми x и $L-x$ на L, което противоречи на теоремата.

3. Бази

Определение 4. Нека R е АИП и $X\subset R$. Една афинно независима подсистема B на X ще наричаме база на X, ако тя е максимална афинно независима подсистема на X ,т.е. ако всяка афинно независима подсистема $B'\supset B$ на X съвпада с B $(B'=B)$.

Ако $X=R$ базите на X ще наричаме просто бази.

Теорема 6. Нека R е АИП, $X\subset R$ и L е афинно независима подсистема на X . Тогава съществува база B на X , която съдържа L $(B\supset L)$.

Доказателство. Предложението следва от теор. 3. от §1. и от тоеремата на Цорн /

Ако изберем $L=\phi$ от теоремата следва, че X има бази.

Теорема 7. Нека R е АИП, $X\subset R$ и L е една афинно независима подсистема на X . При тези обозначения L е тогава и само тогава база на X , когато $A(L)\supset X$,т.е. когато всеки елемент на X е афинна комбинация от елементи на L .

Доказателство. Нека L е база на X и $x\in X-L$. Тогава системата $L'=L\cup x$ е афинно зависима. Следователно съществуват такива точки $x_1,x_2,\dots,x_n\in L'$ и $y_1,y_2,\dots,y_m\in L'$, че $\{x_i\}\cap\{y_j\}=\phi$ и сечението $x_1x_2\dots x_n\cap y_1\dots y_m\neq\phi$. Но $x\in\{x_i\}\cup\{y_j\}$, защото в противен случай системата L би излязла афинно зависима. Нека например $x=x_1$. Тогава според лема 1. x се оказва афинна комбинация от елементи на множеството $\{x_i\}\cup\{y_j\}-\{x\}\subset L$ и толкова по вече - афинна комбинация от елементи на L .

По този начин ние се убедихме в необходимостта на условието, За да докажем достатъчността да предположим, че съществува афинно независима подсистема L на X, която не е база на X и въпреки това $A(L) \supset X$. В такъв случай ще съществува афинно независима подсистема [redacted] L' на X която съдържа L и не съвпада с нея. Нека $x \in L' - L$. Тогава $x \in A(L)$ и $L \subset L' - x$. Следователно $x \in A(L' - x)$, което противоречи на следствие 2. от теор. 5.

Теоремата е доказана.

<u>Следствие 1.</u> Нека L е афинно независима система и $x \bar{\in} A(L)$. Тогава системата $x \cup L$ е афинно независима.

И наистина в противен случай системата L би била база на $x \cup L$ и по силата на теоремата $x \in A(L)$, което е противоречие.

<u>Следствие 2.</u> Нека R е АИП и $L \subset R$. Ако за всяко $x \in L$ имаме $x \bar{\in} A(L - x)$, то системата L е афинно независима.

И наистина нека B е една база на L. Ако допуснем, че $B \neq L$ ще можем да изберем $x \in L - B$; тогава $x \in A(B) \subset A(L - x)$ и ние получаваме противоречие.

<u>Теорема 8. Нека R е АИП $X \subset R$, а B' и B'' са две бази на X. Тогава мощностите на B' и B'' са равни./ виж [7], стр. 10 /</u>.

<u>Доказателство.</u> Най-напред ще докажем, че съществува еднозначно обратимо изображение на част от B' върху B''. За произволно еднозначно обратимо изображение φ на част от B' върху част от B'' да означим с B'_φ и B''_φ съответно дефиниционната област и областта на стойности на φ. Едно такова изображение ще наричаме нормално, ако системата $B'_\varphi \cup (B'' - B''_\varphi)$ е афинно независима.

Съвкупността Φ на нормалните изображения не е празна. И наистина към нея се числи поне изображението φ, за което $B'_\varphi = B''_\varphi = \phi$. Ние ще наредим Φ считайки, че $\varphi_1 \geq \varphi_2$ означава, че φ_1 е продължение на φ_2.

Нека $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \varphi_\alpha \leq \dots$ е една трансфинитна монотонно растяща редица от елементи на Φ. Да поставим $B'_\varphi = \bigcup_\alpha B'_{\varphi_\alpha}$ и $\varphi(x) = \varphi_\alpha(x)$ при $x \in B'_{\varphi_\alpha}$. Така дефинираната мажоранта на $\{\varphi_\alpha\}$ е нормална. За да докажем това ще се убедим, че системата

/8/ $$B'_\varphi \cup (B'' - B''_\varphi)$$

е афинно независима. Нека $\{b'_i\} \cup \{b''_j\}$ $(b'_i \in B', b''_j \in B'')$ е еднакрайна подсистема на /8/. Тогава ще съществува такъв индекс α_0, че $\{b'_i\} \subset B'_{\varphi_{\alpha_0}}$. Но $\{b_j\}'' \subset B'' - B''_{\varphi_{\alpha_0}}$ и понеже системата $B'_{\varphi_{\alpha_0}} \cup (B'' - B''_{\varphi_{\alpha_0}})$ е афинно независима, то и $\{b'_i\} \cup \{b''_j\}$ е афинно независима. Прилагайки теор. 3. от §1. заключаваме, че системата /8/ е афинно независима.

По теоремата на Цорн съществува максимално нормално изображение φ_0. Ще докажем, че $B''_{\varphi_0} = B''$.

Ако това не е така, то $B'_{\varphi_0} \neq B'$, защото в противен случай системата $B' \cup (B'' - B''_{\varphi_0})$ би била афинно независима, което противоречи на факта, че B' е база. Нека

/9/ $$x_0 \in B' - B'_{\varphi_0}.$$

Възможни са два случая.

/а/ $$x_0 \overline{\in} A(B'_{\varphi_0} \cup (B'' - B''_{\varphi_0})).$$

Нека тогава $y_0 \in B'' - B''_{\varphi_0}$. Съгласно следствие 1. от теор. 7. системата $x_0 \cup B'_{\varphi_0} \cup (B'' - B''_{\varphi_0})$ и толкова по-вече системата $x_0 \cup B'_{\varphi_0} \cup (B'' - B''_{\varphi_0} - y_0)$ е афинно независима. Следователно продължението φ' на φ_0, за което $\varphi'(x_0) = y_0$ е нормално и φ_0 не е максимално. Случаят /а/ не е възможен.

/б/ $$x_0 \in A(B'_{\varphi_0} \cup (B'' - B''_{\varphi_0})).$$

Тогава / теор. 3. / x_0 е собствена афинна комбинация на $\{c_i\} \subset B'_{\varphi_0} \cup (B'' - B''_{\varphi_0})$. От /9/ и следствие 2. на теор. 5. следва, че $\{c_i\} \not\subset B'_{\varphi_0}$. Следователно $\{c_i\} \cap (B'' - B''_{\varphi_0}) \neq \phi$. Нека например $c_1 \in B'' - B''_{\varphi_0}$. Тогава $x_0 \overline{\in} A(B'_{\varphi_0} \cup (B'' - B''_{\varphi_0} - c_1))$, защото в противен случай x_0 би била собствена афинна комбинация на две различни подсистеми на афинно независимата система $B'_{\varphi_0} \cup (B'' - B''_{\varphi_0})$. Следователно системата $x_0 \cup B'_{\varphi_0} \cup (B'' - B''_{\varphi_0} - c_1)$ е афинно независима / следствие 1. от теор. 7./. Това означава,че продължението φ' на φ_0, за което $\varphi'(x_0) = c_1$ е нормално и φ_0 отново се оказа продължимо.

По този начин предположението, че $B''_{\varphi_0} \neq B''$ води до противоречие. Следователно изображението φ_0 изобразява еднозначно и обратимо част от B' върху B''.

За да докажем теоремата остава да се възползуваме от симетрията и да приложим теоремата на Кантор Бернщайн за сравняване на мощностите.

4. Афинни многообразия

Дефиницията на афинно многообразие и някои свойства на това понятие са дадени в §1. В тази точка ще разглеждаме афинни многообразия в произволно афинно изпъкнало пространство.

<u>Теорема 9. Нека R е АИП X е афинно многообразие в R $a, b, c \in R$ и $ab \cap X \neq \phi$, $bc \cap X \neq \phi$, $ca \cap X \neq \phi$. Тогава $a, b, c \in X$.</u>

<u>Доказателство.</u> Ако $C(x) \cap X \neq \phi$, то $x \in X$ / §2., 1. /. Следователно допълнението на X е сума от изпъкнали множества и предложението следва от теор.7. от §1.

<u>Определение.</u> 5 Едно афинно многообразие H в едно <u>изпъкнало пространство</u> R ще наричаме хиперравнина, ако $H \neq R$ и всяко афинно многообразие H', което съдържа H $(H' \supset H)$ и несъвпада с R съвпада с H $(H' = H)$.

Така например хиперравнините в едно линейно пространство R относно произведението " отворена отсечка " са всевъзможните хиперравнини в линейното пространство R, а тези относно произведението "отворен ъгъл" са всевъзможните подпространства на R.

Теорема 10. Нека R е АИП и B е база на R. Тогава за всяко $x \in B$ множеството $H = A(B-x)$ е хиперравнина, която не съдържа x.

Доказателство. Да допуснем за момент, че H не е хиперравнина. Тогава ще съществува афинно многообразие $X \neq R$, $X \supsetneqq H$. При това не може да се случи $x \in X$. И наистина при това предположение $B \subset X$ и понеже X е афинно многообразие, $A(B) \subset X$. Но B беше база на R. Следователно $A(B) = R \subset X$, което противоречи на избора на X.

Да означим с B_1 една база на X, която съдържа $B-x$. Тогава от една страна

/10/ $$B_1 \supsetneqq B-x,$$

а от друга $x \bar{\in} X = A(B_1)$. Но тогава /теор. 7. следствие 1. / системата $B_1 \cup x$ е афинно независима. От /10/ следва, че $B_1 \cup x \supsetneqq B$, а това противоречи на обстоятелството, че B е база на R.

H наистина се оказа хиперравнина. От теор.5. следствие 2. следва, че $x \bar{\in} H$.

От тази теорема в частност следва, че във всяко АИП R съществуват хиперравнини. Нещо по-вече в сила е следната

Теорема 11. Нека X е афинно многообразие в едно АИП R и $x \in X$. Тогава съществува хиперравнина $H \supset X$, за която $x \bar{\in} H$.

Доказателство. Да означим с B една база на X. Тогава $X = A(B)$ /теор.7. /. Следователно $x \bar{\in} A(B)$. Но по силата на следствие1. от теор. 7. системата $B \cup x$ е афинно независима. Да означим с B_1 една база на R, която съдържа $B \cup x$. Според предната теорема $H = A(B_1 - x)$ е хиперравнина, която отговаря на посочените условия.

Теорема 12. Нека H е хиперравнина в едно АИП R и $x,y,z \bar{\in} H$. Тогава точно четен брой от сеченията $xy \cap H$, $yz \cap H$, $zx \cap H$ не са празни.

Доказателство. В противен случай или всичките тези сечения не са празни и тогава $x,y,z \in H$ /теор. 9./, което е невъзможно, или пък поне едно от тях , например, $xy \cap H \neq \phi$,а другите две са празни $(yz \cap H = \phi\ ,\ zx \cap H = \phi)$.

Ще докажем, че и тази втора възможност не може да се представи. Да означим за тази цел с B една база на H .Понеже $z \bar{\in} H = A(B)$ системата $B \cup z$ е афинно независима. Нещо повече тя е база на R. И наистина $A(B \cup z) \supset A(B) = H$ и $A(B \cup z) \neq H$ /първото от тези множества съдържа z , а второто не/. Следователно $A(B \cup z) = R$. Но в такъв случай $x \in A(B \cup z)$,т.е. x е афинна комбинация от елементи на $B \cup z$ и следователно x е собствена афинна комбинация от елементи на това множество /теор. 3./. Следователно

или

$$/а/ \qquad x \in x_1 x_2 \dots x_n \qquad (x_i \in B \cup z)$$

или пък

$$/б/ \qquad x \in \frac{x_1 x_2 \dots x_k}{x_{k+1} \dots x_n} \qquad (x_i \in B \cup z\ ,\ x_i \neq x_j \quad (i \neq j)).$$

При това и в двата случая $z \in \{x_i\}$, защото от противното би следвало, че $x \in A(B) = H$, което е невъзможно.

Да разгледаме най-напред случая /а/. Априори има две възможности

$/a_1/ \quad x_i = z \quad (1 \leq i \leq n)$;

тогава $x \in C(z)$ и следователно $xy \subset C(z)y \subset zy$; излиза, че $yz \cap H \neq \phi$, което противоречи на нашето допускане; разглежданата възможност не може да се представи;

$/a_2/$ Поне една от точките $x_i \neq z$; тогава

$$/11/ \qquad x \in C(z)H \subset zH .$$

При случая /б/ също могат да се представят две възможности

/б$_1$/ z съвпада с някой от елементите в числителя; тогава

или

/12/ $$x\in\frac{z}{H}\quad(k=1),$$

или

/13/ $$x\in\frac{zH}{H}\quad(k>1);$$

/б$_2$/ z съвпада с някой от елементите на знаменателя; тогава или $x\in\frac{H}{z}$ или $x\in\frac{H}{zH}$; но и в двата случая излиза , че $xz\cap H\neq\theta$, което е невъзможно.

От /11/ , /12/ и /13/ следва, че $x\in zH\cup\frac{z}{H}\cup\frac{zH}{H}$.

Разсъждавайки по същия начин намираме, че и $y\in zH\cup\frac{z}{H}\cup\frac{zH}{H}$.

Следователно

$$xy\subset\left(zH\cup\frac{z}{H}\cup\frac{zH}{H}\right)^2\subset z^2H^2\cup zH\frac{z}{H}\cup zH\frac{zH}{H}\cup\left(\frac{z}{H}\right)^2\cup\frac{z}{H}\cdot\frac{zH}{H}\subset\left(\frac{zH}{H}\right)^2\subset$$

$$\subset zH\cup\frac{zH}{H}\cup\frac{z}{H}.$$

Но $xy\cap H\neq\phi$ и следователно поне едно от сеченията $H\cap zH$, $H\cap\frac{zH}{H}$ и $H\cap\frac{z}{H}$ е различно от празното множество. Но във всеки от тези случаи се получава $z\in H$. Например ако $H\cap\frac{z}{H}\neq\phi$, то $H^2\cap z\neq\phi$, т.е. $z\in H^2\subset H$.

Полученото противоречие доказва теоремата.

Тази теорема напомня аксиомата на Паш. С нейна помощ също, както и в други случаи може да се докаже, че хиперравнините разделят R на полупространства и др.

§3. Отделяне на изпъкнали множества

1. Отделяне с полупространства

Един многозначен оператор P, изобразяващ едно топологично пространство E в някое топологично пространство E', се нарича непрекъснат отдолу /или само непрекъснат/, ако при всеки избор на точката $x \in E$ и на отвореното множество U' в E', за които $P(x) \cap U' \neq \phi$, съществува такава околност $U \ni x$, че за всяка точка $y \in U$ сечението $P(y) \cap U' \neq \phi$ /виж [6] стр. 114 /

Операторът P е тогава и само тогава непрекъснат, когато за всяко отворено множество U' в E' множеството $P^{-1}(U') = E(x: P(x) \cap U' \neq \phi)$ е отворено.

Ако P_α $(\alpha \in A)$ е една система от непрекъснати оператори изобразяващи E в E', то операторът $P(x) = \bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha(x)$ е непрекъснат.

Ако P е непрекъснат оператор и $P(A) \subset B$ $(A \subset E,\ A' \subset E')$, то $P(\overline{A}) \subset \overline{B}$ / $\overline{A}$ и $\overline{B}$ означават съответно затворените обвивки на A и B /.

Нека R е изпъкнало пространство. В R могат да се посочат различни многозначни оператори. Например ако в произведението xy или в частното $\frac{x}{y}$ фиксираме един от елементите получаваме многозначен оператор с аргумент другия елемент.

В тази точка ще разглеждаме изпъкнали пространства с топология, относно която операторът ax е непрекъснат при всеки избор на a от R : в такива пространства затворената обвивка на всяко изпъкнало множество C е изпъкнала. И наистина операторът Cx е непрекъснат и изобразява C в C . Следователно той изобразява $\overline{C}$ в

$\overline{C}$, т.е. $C\overline{C} \subset \overline{C}$. Намерихме, че операторът $\overline{C}x$ изобразява C в $\overline{C}$. Следователно той изобразява $\overline{C}$ в $\overline{\overline{C}} = \overline{C}$, т.е. $\overline{C}\,\overline{C} \subset \overline{C}$, което изразява, че множеството $\overline{C}$ е изпъкнало.

За произволен монотонен [redacted] оператор P в едно изпъкнало пространство R с $C_P(x)$ $(x \in R)$ ще означаваме минималното изпъкнало множество, което съдържа x и е инвариантно относно P, т.е. $P(C_P(x)) \subset C_P(x)$. Ясно е, че

$$C_P(x) = \bigcup P^{k_1}(x)\, P^{k_2}(x) \dots P^{k_n}(x) \quad (k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0),$$

където $P^0(x)$ означава x.

<u>Определение 1.</u> Един непрекъснат монотонен оператор P в едно изпъкнало пространство R с топология ще наричаме сепаративен, ако всеки път когато $x \in C_P(z)$, $y \in C_P(z)$ $(z \in R)$, сечението $\overline{C_P(x)} \cap C_P(y) \neq \phi$.

Например идентичният оператор ε е сепаративен относно всяка топология в R, ако за всеки три точки x, y, z на R от условията $x \in C(z)$, $y \in C(z)$ винаги следва, че $C(x) \cap C(y) \neq \phi$. Същият оператор е сепаративен и когато топологията на R има база съставена само от изпъкнали множества. И наистина нека $x \in C_\varepsilon(z) = C(z)$, $y \in C_\varepsilon(z) = C(z)$. Тогава всяка изпъкнала околност на z съдържа x и следователно $z \in \overline{X} \subset \overline{C_\varepsilon(x)}$. Това ни дава възможност да напишем $y \in C(z) \subset \overline{C_\varepsilon(x)}$, с което [redacted] е доказано, че $\overline{C_\varepsilon(x)} \cap C_\varepsilon(y) \neq \phi$.

<u>Определение 2.</u> Едно изпъкнало множество S в едно изпъкнало пространство R ще наричаме полупространство, ако допълнението на S до R е изпъкнало множество.

T. 5 стр. 181

Я. Тагамлицки доказа една теорема за отделяне отнасяща се до изпъкнали пространства с топология. Преминаваме към формулировката и доказателството на едно обобщение на тази теорема.

<u>Теорема 1. Нека R е изпъкнало пространство с топология, относно която многозначният оператор ax е непрекъснат при всеки из-</u>

бор на a от R и нека P е сепаративен оператор в R. Тогава за всеки две инвариантни относно P изпъкнали множества U и A без общи точки, от които U е отворено съществува отворено полупространство S, което съдържа U, няма общи точки с A и заедно със своето допълнение е инвариантно относно P.

Доказателство. От лемата на Цорн следва, че измежду изпъкналите множества, които съдържат A, нямат общи точки с U и са инвариантни относно P има и максимални. Да означим с F едно такова множество. Тогава $\overline{F} \supset F$, $P(\overline{F}) \subset \overline{F}$, $\overline{F}$ е изпъкнало множество и $\overline{F} \cap U = \phi$ /защото множеството U е отворено/. Следователно $\overline{F} = F$, т.е. избраното от нас множество е затворено.

Да означим с S едно максимално изпъкнало множество, което съдържа U, няма общи точки с F и е инвариантно относно P. Тогава

$$/1/ \qquad \frac{F}{S} \subset F, \quad \frac{S}{F} \subset S.$$

Понеже тези включвания се установяват аналогично ще се спрем на доказателството на първото от тях. За тази цел да поставим $F' = F \cup \frac{F}{S}$. Тогава $F' \supset F$, $P(F') = P(F) \cup P(\frac{F}{S}) \subset P(F) \cup \frac{P(F)}{P(S)} \subset F \cup \frac{F}{S} = F'$, т.е. F' е инвариантно относно P и $F'^2 = F^2 \cup F\frac{F}{S} \cup (\frac{F}{S})^2 \subset F^2 \cup \frac{F^2}{S} \cup \frac{F^2}{S^2} \subset F \cup \frac{F}{S} = F'$ /§1., теор.5./, т.е. F' е изпъкнало. Освен това $F' \cap U = \phi$, защото в противен случай бихме имали $\frac{F}{S} \cap U \neq \phi$, т.е. $F \cap US \neq \phi$ и толкова по-вече $F \cap S \neq \phi$, което е невъзможно. От всичко това и от максималността на F следва, че $F' = F$, т.е. $\frac{F}{S} \subset F$.

Нека $z \in R$. Тогава не може едновременно $C_P(z) \cap F \neq \phi$ и $C_P(z) \cap S \neq \phi$, защото в противен случай ще съществуват $x \in F$ и $y \in S$, за които $\overline{C_P(x)} \cap C_P(y) \neq \phi$ /операторът P е сепаративен/ и следователно F и S ще имат общи точки, което е невъзможно. Нека например

$$/2/ \qquad C_P(z) \cap F \neq \phi .$$

Да поставим $S' = S \cup S C_p(z) \cup C_p(z)$. Тогава $S' \supset S$, S' е изпъкнало множество,

$$P(S') = P(S) \cup P(S C_p(z)) \cup P(C_p(z)) \subset P(S) \cup P(S) P(C_p(z)) \cup P(C_p(z)) \subset$$
$$\subset S \cup S C_p(z) \cup C_p(z) = S',$$

т.е. S' е инвариантно относно P. Освен това $S' \cap F = \phi$, защото в противен случай бихме имали $F \cap S C_p(z) \neq \phi$, т.е. $\frac{F}{S} \cap C_p(z) \neq \phi$, което противоречи на /1/ и /2/. От всичко това и от максималността на S следва, че $S' = S$, т.е. $z \in S$. Аналогично се доказва, че ако $C_p(z) \cap S = \phi$, то $z \in F$. Ние се убедихме, че $S = R - F$, което доказва, че S е отворено полупространство. От изборите на F и S следва, че $S \supset U$, $S \cap A = \phi$ и че S и неговото допълнение са инвариантни относно P.

Теоремата е доказана.

2. Топологични изпъкнали пространства

Определение 3. Едно множество Γ в едно изпъкнало пространство R с топология ще наричаме полусвързано, ако за всеки две отворени и изпъкнали множество U и V е в сила поне едно от условията

/а/ $U \cap V \cap \Gamma \neq \phi$,

/б/ $\Gamma - (U \cup V) \neq \phi$,

/в/ $U \cap \Gamma = \phi$,

/г/ $V \cap \Gamma = \phi$.

Всяко свързано множество в R е полусвързано.

Определение 4. Едно изпъкнало пространство R ще наричаме топологично изпъкнало пространство / ТИП /, ако в него е дадена топология, която удовлетворява следните условия:

/а/ Многозначните оператори ax, $\frac{a}{x}$ и $\frac{x}{a}$ са непрекъснати при всеки избор на a от R;

/б/ При всеки избор на a и b от R множеството $a \cup ab \cup b$ притежава полусвързано подмножество Γ, за което $a \in \Gamma$ и $b \in \Gamma$;

/в/ При всеки избор на a и b от R частното $\frac{a}{b} \neq \phi$.

Във всяко ТИП R изпъкналите множества и в частност R и ϕ са полусвързани.

Нека G е отворено множество в едно ТИП R и $A \subset R$. Тогава множествата

/3/ $$\frac{G}{A}, \quad \frac{A}{G} \quad \text{и} \quad AG$$

са отворени. И наистина многозначният оператор Ax е непрекъснат. Следователно ако $Ax \cap G \neq \phi$, т.е. ако $x \in \frac{G}{A}$, съществува такава околност U на x , че за всяко $y \in U$ сечението $Ay \cap G \neq \phi$, т.е. $y \in \frac{G}{A}$. Ние се убедихме, че всяка точка x от $\frac{G}{A}$ притежава околност съдържаща се в $\frac{G}{A}$,т.е. че множеството $\frac{G}{A}$ е отворено. Аналогично се доказва, че и другите две множества са отворени.

Ако A и B са подмножества на едно ТИП R , то

/4/ $$\overline{A}\,\overline{B} \subset \overline{AB} \ , \quad \frac{\overline{A}}{\overline{B}} \subset \overline{\left(\frac{A}{B}\right)} .$$

Ще докажем само второто от тези включвания. Непрекъснатият оператор $\frac{A}{x}$ изобразява B в $\frac{A}{B}$. Следователно той изобразява $\overline{B}$ в $\overline{\left(\frac{A}{B}\right)}$. Убедихме се, че непрекъснатият оператор $\frac{x}{\overline{B}}$ изобразява A в $\overline{\left(\frac{A}{B}\right)}$. Следователно той ще изобразява $\overline{A}$ в $\overline{\overline{\left(\frac{A}{B}\right)}} = \overline{\left(\frac{A}{B}\right)}$ и второто включване от /4/ е доказано.

Всяко топологично линейно пространство е ТИП както по отношение на произведението "отворена отсечка", така и по отношение на произведението "отворен ъгъл". Други примери на топологични изпъкнали пространства ни дава следната теорема

<u>Теорема 2. Нека R е ТИП и P е непрекъснат и отворен разширяващ оператор /операторът P се нарича отворен, ако множеството $P(G)$ е отворено при всеки избор на отвореното множество G в R /.</u>

Тогава R е ТИП и относно произведението $[\,]$ определено от равенството

$$[ab]=P(a)P(b).$$

Доказателство. Ние вече знаем, че това произведение е изпъкналост//§1., теор.8./. Да докажем например, че операторът $\left[\frac{a}{x}\right]$ е непрекъснат. Нека за тази цел G е отворено множество в R и $\left[\frac{a}{x}\right]\cap G\neq\phi$. Тогава $a\cap[xG]\neq\phi$ /да напомним, че $[xG]$ означава произведението на x и G относно изпъкналостта $[\,]$ /, т.е. $a\cap P(x)P(G)\neq\phi$. Последното условие може да се запише още и така $P(x)\cap\frac{a}{P(G)}\neq\phi$, от където поради факта, че P е непрекъснат и отворен оператор, следва, че съществува такава околност V на x, че за всяко $y\in V$ сечението $P(y)\cap\frac{a}{P(G)}\neq\phi$. Това условие може да се запише още и по следните различни начини:

$$a\cap P(y)P(G)\neq\phi,$$
$$a\cap[yG]\neq\phi,$$
$$\left[\frac{a}{y}\right]\cap G\neq\phi,$$

последният от които изразява, че операторът $\left[\frac{a}{x}\right]$ е непрекъснат. Аналогично се доказва, че и другите два оператора са непрекъснати.

Включването

$$a\cup ab\cup b\subset a\cup[ab]\cup b$$

ни осигурява съществуването на полусвързано множество Γ, което съдържа a и b и се съдържа в $a\cup[ab]\cup b$. Непразнотата на частните следва по аналогичен начин от /в/.

Теоремата е доказана.

§3. Афинни могообразия, чието допълнение не е полусвързано

Лема 1. Нека R е ТИП, $H \subset R$, а A и B са две изпъкнали и отворени множества в R, за които $A \cup B \supset R-H$, $A \cap B \subset H$. Тогава всяко афинно многообразие H_1, за което $H_1 \supset H$ и $H_1 \cap A \cap (R-H) \neq \emptyset$, съдържа B.

Доказателство. За произволен елемент $x \in B$ ще покажем, че $x \in H_1$. За тази цел ще разгледаме само по-интересния случай, когато $x \in B-H$. Да изберем произволно $a \in H_1 \cap A \cap (R-H)$. Твърдим, че

/5/ $$ax \cap H \neq \emptyset.$$

И наистина в противен случай ще имаме $ax \subset R-H$ и понеже $x \bar{\in} H, a \bar{\in} H$, то $a \cup ax \cup x \subset R-H$. Да означим с Γ едно полусвързано подмножество на $a \cup ax \cup x$, за което $a \in \Gamma$ и $x \in \Gamma$. Тогава $\Gamma \subset R-H$ и следователно $A \cap B \cap \Gamma \subset A \cap B \cap (R-H) \subset H \cap (R-H) = \emptyset$. Освен това $\Gamma \subset R-H \subset A \cup B$ и сеченията $A \cap \Gamma$ и $B \cap \Gamma$ не са празни, защото първото от тях съдържа a, а второто – x. Но всичко това противоречи на полусвързаността на Γ и /5/ е доказано. От него веднага следва, че $x \in \frac{H}{a} \subset \frac{H_1}{H_1} \subset H_1$, с което и лемата е доказана.

Теорема 3. Нека H е афинно многообразие в едно ТИП R, чието допълнение $R-H$ не е полусвързано. Тогава H е хиперравнина.

Доказателство. H не може да съвпада с R, защото в противен случай неговото допълнение /което ще бъде празното множество/ ще бъде полусвързано. Нека H_1 е афинно многообразие, за което

/6/ $$H_1 \supsetneqq H.$$

Множеството $R-H$ не е полусвързано и следователно съществуват две отворени и изпъкнали множества U и V, за които условията /а/, /б/, /в/, /г/ от определение 3. са нарушени, т.е.

/7/ $$U \cap V \cap (R-H) = \phi,$$

/8/ $$U \cup V \supset R-H,$$

/9/ $$U \cap (R-H) \neq \phi,$$

/10/ $$V \cap (R-H) \neq \phi.$$

Понеже $H_1 \supsetneqq H$ от /8/ следва, че поне едно от сеченията $H_1 \cap U \cap (R-H)$ и $H_1 \cap V \cap (R-H)$ не е празно. Нека например $H_1 \cap U \cap (R-H) \neq \phi$. Ако поставим $A=U$, $B=V$ ще се намерим при условията на лемата. Следователно

/11/ $$H_1 \supset V.$$

Но тогава сечението $H_1 \cap V \cap (R-H) \neq \phi$ и ние отново се намираме при условията на лемата $(A=V, B=U)$. Следователно

/12/ $$H_1 \supset U.$$

От /6/,/8/,/11/ и /12/ следва, че $H_1 = R$, т.е. H наистина е хиперравнина.

Теоремата е доказана.

<u>Следствие.</u> Нека R е ТИП с изпъкналост σ и σ_1 е друга изпъкналост в R, за която $[ab]_\sigma \subset [ab]_{\sigma_1}$ /обозначенията са ясни от самосебеси/. Тагава всяка хиперравнина относно σ_1, чието допълнение не е полусвързано е хиперравнина и относно σ.

4. Правилни хиперравнини

Може да се докаже, че допълнението на една хиперравнина в едно ТИП R най-много по един начин може да се представи като сума на две непразни отворени и изпъкнали множества без общи точки. Това ни дава повод за следното

Определение 5. Една хиперравнина H в едно ТИП R ще наричаме правилна, ако допълнението и е сума на две непразни и отворени полупространства S и T без общи точки.

Множествата S и T ще наричаме отворени полупространства определени от H, а $S \cup H$ и $T \cup H$ — затворени полупространства определени от H.

Всяка правилна хиперравнина не е празна. И наистина в противен случай получаваме противоречие с полусвързаността на R.

Теорема 4. Нека S е непразно и отворено полупространство в едно ТИП R, чието допълнение $R-S$ също не е празно. Тогава контурът H на S е правилна хиперравнина с отворени полупространства S и вътрешността T на $R-S$.

Доказателство. Очевидно $R-S = H \cup T$, $R = S \cup H \cup T$ и никои две от събираемите нямат общи точки.

От равенството $S \cup H = \overline{S}$ следва, че $S \cup H$ е изпъкнало множество. Но $H = (S \cup H) \cap (R-S)$ и H като сечение на изпъкнали множества е изпъкнало.

Сега ще докажем включванията

$$\frac{R-S}{S} \subset R-S, \quad \frac{S}{R-S} \subset S. \qquad /13/$$

Понеже те се доказват аналогично ще се убедим във верността на първото от тях. Ако допуснем, че то не е изпълнено ще имаме $\frac{R-S}{S} \cap S \neq \phi$, т.е. $(R-S) \cap S^2 \neq \phi$ и толкова по-вече /S е изпъкнало/ $(R-S) \cap S \neq \phi$, което е абсурд. Следователно /13/ е налице.

Първото от тези включвания ни показва, че непрекъснатият оператор $\frac{H}{x}$ изобразява S в $R-S$. Следователно той изобразява $\overline{S}$ в $\overline{R-S} = R-S$, т.е. $\frac{H}{S \cup H} \subset R-S$. От последното включване следва, че $\frac{H}{H} \subset R-S$. По аналогичен начин от второто включване /13/ следва, че $\frac{H}{H} \subset \overline{S} = S \cup H$ и следователно $\frac{H}{H} \subset (S \cup H) \cap (R-S) = H$.

Убедихме се, че H е афинно многообразие.

Понеже множеството $\frac{R-S}{S}$ е отворено / виж /3// от първото от включванията /13/ следва, че $\frac{R-S}{S} \subset T$. Следователно $T \neq \phi$ / определение 4./ Освен това $T^2 \subset (R-S)^2 \subset R-S$ и поради аналогични съображения $T^2 \subset T$, т.е. T е изпъкнало. Допълнението на H се оказа сума на двете непразни отворени и изпъкнали множества S и T без общи точки, т.е. $R-H$ не е полусвързано. Следователно H е хиперравнина /теор. 3./.

За да докажем, че тази хиперравнина е правилна остана да видим, че T е полупространство, т.е. че множеството $S \cup H$ е изпъкнало, нещо в което се убедихме.

Теоремата е доказана.

Следствие 1. Нека H е правилна хиперравнина в едно ТИП R с отворени полупространства S и T. Тогава полупространствата S и T имат общ контур, който съвпада с H.

И наистина контурът $K(S)$ на S очевидно се съдържа в H. Но съгласно теоремата $K(S)$ е хиперравнина и следователно $K(S) = H$.

Следствие 2. При същите означения вътрешността на затвореното полупространство $H \cup S$ съвпада с S, а тази на $H \cup T$ — с T.

И наистина съгласно следсвие 1. всяко отворено множество, имащо общи точки с H пресича, както S, така и T.

Теорема 5. Нека H е правилна хиперравнина в едно ТИП R, а S и T са отворените полупространства определени от H. Тогава

/а/ $$\frac{H}{S} = T,$$

/б/ $$\frac{T}{S} = T,$$

/в/ $$HS = S,$$

/г/ $$\frac{S}{H} \subset S.$$

Доказателство. От изпъкналостта на S следва, че $\frac{H}{S} \cap S = \phi$. Следователно $\frac{H}{S} \subset H \cup T$. Но множеството $\frac{H}{S}$ е отворено, а T е вътрешността на $H \cup T$ /следсвие 2. от теор. 4./. Следователно

/14/ $$\frac{H}{S} \subset T.$$

Поради симетрията между S и T от последното включване следва, че $\frac{H}{T} \subset S$. Нека $t \in T$. Тогава $\frac{H}{t} \cap S \neq \phi$ /виж /в/ от определение 4./ и следователно $t \in \frac{H}{S}$. Доказахме включването $T \subset \frac{H}{S}$, което сравнено с /14/ дава /а/.

Пристъпваме към доказателството на /б/. Нека $x \bar{\in} \frac{T}{S}$, т.е. $xS \cap T = \phi$. Тогава $xS \subset S \cup H$ и понеже xS е отоворено множество, а S е вътрешността на $S \cup H$, то $xS \subset S$. Така намерихме, че $xS \cap H = \phi$, т.е. $x \bar{\in} \frac{H}{S}$, което заедно с /а/ дава $x \bar{\in} T$. Доказахме, че

/15/ $$T \subset \frac{T}{S}$$

Но от изпъкналостта на S следва, че $\frac{T}{S} \cap S = \phi$. Следователно $\frac{T}{S} \subset H \cup T$ и следователно $\frac{T}{S} \subset T$. Последното включване и /15/ доказват /б/.

За да докажем /в/ ще отбележим, че от включванията $SH \subset (S \cup H)(S \cup H) \subset S \cup H$ следва

/16/ $$SH \subset S.$$

Нека $x \bar{\in} SH$, т.е. $\frac{x}{H} \cap S = \phi$. Тогава $\frac{x}{H} \subset T \cup H$. Следователно или $\frac{x}{H} \cap T \neq \phi$ или $\frac{x}{H} \cap H \neq \phi$; в първия от тези два случая намираме, че $x \in TH \subset T \cup H$, а във втория $x \in H^2 \subset T \cup H$. Следователно $x \bar{\in} S$ и ние доказахме, че $S \subset SH$, което заедно с /16/ доказва /в/.

Накрая от изпъкналостта на $T \cup H$ следва, че $\frac{S}{H} \cap (T \cup H) = \phi$, т.е. $\frac{S}{H} \subset S$, което е включването /г/.

Теоремата е доказана.

5. Отделяне с правилни хиперравнини

Следващите две точки съдържат главните резултати на нашата дисертация.

Определение 6. Ще казваме, че една правилна хиперравнина H в едно ТИП R разделя две подмножества A и B на R, ако A се съдържа в едното затворено полупространство определено от H, а B – в другото.

Теорема 6. Нека R е ТИП и P е сепаративен оператор в R /определение 1./. Тогава за всеки две инвариантни относно P, непразни изпъкнали множества U и A в R без общи точки, от които U е отворено, съществува правилна хиперравнина H, която разделя U и A и е инвариантна относно P заедно със своите полупространства.

Доказателство. По силата на теор. 1. съществува отворено полупространство S, което съдържа U, няма общи точки с A и е инвариантно относно P заедно със своето допълнение. Тогава /теор. 4./ контурът H на S е правилна хиперравнина със затворени полупространства $S \cup H$ и $R-S$. От друга страна от избора на S следва, че $U \subset S \cup H$, $A \subset R-S$, т.е. H разделя U и A.

За да докажем теоремата остава да се убедим, че H заедно със своите полупространства е инвариантно относно P. Вече знаем, че $P(S) \subset S$, $P(R-S) \subset R-S$. От тези включвания и от непрекъснатостта на P следва, че

$$P(H) \subset P(S \cup H) \cap P(R-S) = P(\bar{S}) \cap P(R-S) \subset \bar{S} \cap (R-S) = H,$$

т.е. H също е инвариантно относно P. Инвариантността на $S \cup H$ е вече очевидна, а инвариантността на другото отворено полупространство T следва от включванията $P(T) = P(\frac{H}{S}) \subset \frac{P(H)}{P(S)} \subset \frac{H}{S} = T$ /теор.5/.

Теоремата е доказана.

Нека R е линейно топологично пространство. Ще разглеждаме топологичното изпъкнало пространство, което се получава като снабдим R с произведението "отворена отсечка". В R могат да се посочат различни сепаративни оператори. Такъв е например идентитетът. Това ни дава възможност да получим като следствие от теор.5. следната теорема за отделяне на Айделхайт [3]:

<u>Теорема 7. За всеки две изпъкнали множества U и A без общи точки в едно линейно топологично пространство R, от които U е отворено, съществува затворена хиперравнина, която ги разделя.</u>

Един еднозначен оператор p, изобразяващ едно линейно пространство R в себе си, се нарича афинен, ако при всеки избор на положителните числа α и β, за които $\alpha+\beta=1$ и при всеки избор на точките x и y от R е в сила равенството $p(\alpha x+\beta y)=\alpha p(x)+\beta p(y)$.

Нека Σ е една съвкупност от непрекъснати афинни оператори в едно линейно топологично пространство R, която съдържа идентичния оператор ε и за всеки два елемента q и r на Σ имаме

$$/\Sigma/ \qquad qr=rq\in\Sigma,\ \alpha q+\beta r\in\Sigma\quad(\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta=1).$$

Тогава операторът P дефиниран чрез равенството

$$/17/ \qquad P(x)=\bigcup_{p\in\Sigma}p(x)$$

е сепаративен.

И наистина непрекъснатостта и монотонността на P са очевидни. Нека $y\in P(x)$, $z\in P(x)$, т.е. $y\in q(x)$, $z\in r(x)$ $(q,r\in\Sigma)$. Тогава при всеки избор на положителните числа α и β, за които $\alpha+\beta=1$ ще имаме $\alpha y+\beta z=\alpha q(x)+\beta r(x)=(\alpha q+\beta r)(x)\in P(x)$, защото $\alpha q+\beta r\in\Sigma$, т.е. при всеки избор на x от R множеството $P(x)$ е изпъкнало.

Освен това, ако $y\in P(x)$, т.е. ако $y\in p_0(x)$ $(p_0\in\Sigma)$, то

$$P(y)=\bigcup_{p\in\Sigma}p(p_0(x))=\bigcup_{p\in\Sigma}pp_0(x)\subset\bigcup_{p\in\Sigma}p(x)=P(x),$$

т.е. множеството $P(x)$ е инвариантно относно оператора P. Но всяко инвариантно относно P множество C, което съдържа x, трябва да съдържа и $P(x)$. Следователно $P(x)$ е минималното изпъкнало множество, което съдържа x / $\varepsilon \in \Sigma$ /и е инвариантно относно P, т.е. за всяко $x \in R$

$$C_p(x) = P(x) . \qquad /18/$$

Нека сега $x \in C_p(z)$, $y \in C_p(z)$. Тогава поради /17/ $x \in q(z), y \in r(z)$ $(q, r \in \Sigma)$ и $r(x) = rq(z) = qr(z) = q(y)$. Намерихме, че $P(x) \cap P(y) \neq \phi$ което заедно с /18/ доказва сепаративността на P.

Всичко това ни дава възможност да формулираме следното обобщение на теор.7.:

Теорема 8. Нека R е линейно топологично пространство, U и A са две непразни изпъкнали множества в R без общи точки, от които U е отворено, а Δ е една система от комутативни два по два непрекъснати афинни оператори в R оставящи инвариантни множествата U и A. Тогава съществува затворена хиперравнина H, която разделя U и A и заедно със своите полупространства е инвариантна относно операторите на P.

И наистина да означим с Σ минималното множество от афинни оператори, което съдържа ε и Δ и има свойствата /Σ'/ / с други думи Σ е множеството на всевъзможните линейни комбинации от вида $\alpha\varepsilon + \alpha_1 p_1 p_2 \dots p_{k_1} + \alpha_2 q_1 q_2 \dots q_{k_2} + \dots + \alpha_n r_1 r_2 \dots r_n$, където $\alpha \geq 0, \alpha_i \geq 0, \alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$; $p_i, q_j, r_e \in \Delta$ / Ясно е, че множествата U и A са инвариантни относно операторите на Σ т.е. инвариантни са и относно сепаративният оператор дефиниран от /17/. Това ни дава възможност прилагайки теор.6., да получим теоремата.

В специалния случай когато U и A са конуси с връх в началото на R теор.8. преминава в една теорема на Крейн за отделяне [2]

Накрая ще посочим още един пример на сепаративен оператор.

Нека Σ е една система от обратими непрекъснати афинни оператори в едно линейно топологично пространство R, която съдържа идентичния оператор ε и за всеки два елемента q и τ на Σ имаме

$$q\tau \in \Sigma, \quad q^{-1} \in \Sigma, \quad \alpha q + \beta \tau \in \Sigma \quad (\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1).$$

Тогава операторът P, дефиниран чрез равенството

/19/
$$P(x) = \bigcup_{p \in \Sigma} p(x),$$

е сепаративен.

Непрекъснатостта и монотонността на P са очевидни. Също както и в предния пример се убеждаваме, че

/20/
$$C_p(x) = P(x).$$

Нека $x \in C_p(z)$, $y \in C_p(z)$. Тогава поради /19/ $x \in q(z)$, $y \in \tau(z)$ $(q, \tau \in \Sigma)$ и следователно $q^{-1}(x) = z = \tau^{-1}(y)$. Намерихме, че $P(x) \cap P(y) \neq \emptyset$, което заедно с /20/ доказва сепаративността на P.

Този пример дава възможност да се формулира още една теорема за отделяне.

6. Разширяване на афинни многообразия

Теорема 9. Нека R е ТИП, U е непразно отворено и изпъкнало множество в R, A е непразно афинно многообразие в R, което няма общи точки с U и P е сепаративен оператор, който оставя инвариантни множествата U и A. Тогава съществува правилна хиперравнина H, която съдържа A, няма общи точки с U и е инвариантна относно P заедно със своите полупространства.

Доказателство. Да означим с V едно максимално в смисъл на Цорн отворено и изпъкнало множество в R, което съдържа U, няма общи точки с A и е инвариантно относно P. Нека $V' = V \cup VA$. Тогава множеството V' е отворено /виж/3//, $V'^2 = V^2 \cup V^2 A \cup V^2 A^2 \subset V \cup VA = V'$, т.е. V' е изпъкнало, $V' \supset V \supset U$ и $V' \cap A = \emptyset$, защото в противен случай бихме имали $V A \cap A \neq \phi$, т.е. $V \cap \frac{A}{A} \neq \phi$ и толково по-вече / A е афинно многообразие/ $V \cap A \neq \phi$,което е невъзможно. Освен това $P(V') = P(V) \cup P(VA) \subset P(V) \cup P(V) P(A) \subset V \cup V A \subset V'$. При тези обстоятелства от максималността на V следва, че $V' = V$,т.е.

/21/ $$VA \subset V$$

Нека H е правилна хиперравнина, която разделя V и A и заедно със своите полупространства S и T е инвариантна относно оператора P /теор. 6./. Нека V се съдържа в затвореното полупространство $S \cup H$, а A - в $T \cup H$,т.е.

/22/ $$V \subset S \cup H ,$$

/23/ $$A \subset T \cup H .$$

Съгласно следствие 2. от теор.4. $V \subset S$ и следователно $V \cap H = \emptyset$. За да докажем теоремата остава да се убедим, че $A \subset H$. Нека за тази цел допуснем, че има точка a ,за която

/24/ $$a \in A \cap T$$

и нека $b \in V$. Да означим с Γ полусвързано множество, което се съдържа в $aUaUbUb$ и съдържа точките a и b . Тогава съгласно /24/ и /21/ ще имаме $\Gamma \subset a \cup ab \cup b \subset T \cup AV \cup V \subset T \cup V$.и освен това

$$\Gamma \cap T \supset a \neq \phi ,$$

$$\Gamma \cap V \supset b \neq \phi ,$$

$$\Gamma \cap V \cap T \subset S \cap T = \phi ,$$

което противоречи на полусвързаността на Γ .Следователно няма точки, за които е изпълнено /24/, т.е. $A \subset S \cup H$. От последното включване и от /23/ следва,че $A \subset H$,с което теоремата е доказана.

Нека R е линейно топологично пространство. Ще разгледаме отново топологичното изпъкнало пространство,което се получава като снабдим R с произведението "отворена отсечка". Идентитетът в R е сепаративен оператор.Това ни дава възможност да получим като следствие от теор.9. теоремата на Хан Банах в нейната геометрична форма, т.е. предложението

Теорема 10. Нека R е линейно топологично пространство $\mathcal{U}$ е непразно отворено и изпъкнало множество в R и A е непразно афинно многообразие в R, което няма общи точки с $\mathcal{U}$. Тогава съществува затворена хиперравнина,която съдържа A и няма общи точки с $\mathcal{U}$.

От тази теорема следва и теоремата на Хан Банах в нейната аналитична форма,т.е. предложението

Теорема 11. Нека τ е полунорма в линейното пространство R, M е подпространство на R и f е линеен функционал дефиниран в M и такъв,че $|f(x)| \leq \tau(x)$ за всяко $x \in M$. Тогава съществува линеен функционал $\bar{f}$ в R ,който е продължение на f и е такъв,че $|\bar{f}(x)| \leq \tau(x)$ за всяко $x \in R$.

Ние ще приведем едно доказателство на теорема 11 чрез теорема 10,което заимствуваме от [4] ,стр. 126.

Можем да се ограничим със случая $f \neq \phi$. Да разгледаме в R локално изпъкналата топология определена от полунормата τ . Изпъкналото множество $\mathcal{U}$ на онези x ,за които $\tau(x)<1$ не е празно и е отворено в R . Нека A е хиперравнината в M зададена с уравнението $f(x)=1$. Тя е афинно многообразие в R и тъй като във всичките и точки $\tau(x) \geq 1$, то $A \cap \mathcal{U} = \phi$.Теорема 10. показва,че в R съществува хиперравнина H , която съдържа A и не се пресича с $\mathcal{U}$. Нека $\bar{f}$ е такъв ленеен функционал в R ,че $\bar{f}(x)=1$ върху H .Тъй като $\bar{f}$ и f съвпадат върху хиперравнината A на подпространството M , то $\bar{f}(x)=f(x)$ върху цялото M . Накрая тъй като 0 принадлежи на отвореното полупространство определено от неравенството $\bar{f}(x)<1$,то това полупространство съдържа и $\mathcal{U}$ и следователно $\bar{f}(x)=1$ влече $r(x)\geq 1$.Поради хомогенността на $\bar{f}$ и r от това следва,че $|\bar{f}(x)|\leq r(x)$ за всички $x\in R$ и теоремата е доказана.

От теорема 9. могат да се получат и други следствия. Използувайки примерите на сепаративни оператори от предната точка можем да получим и други теореми за разширяване на афинни многообразия в линейно топологично пространство.

Ние няма да се спираме на формулировката на тези теореми.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА

[1] Крейн М.Г. и Мильман Д.П., On extreme points of regularey sets. Studia Math., 9 /1940/, 133-138.

[2] Крейн М.Г., О линейных операторах, оставляющих инвариантным некоторое коническое множество. ДАН, т. XXIII, № 8, 1939, 749-752. Виж също Крейн М.Г. и Рутман М.А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. УМН, т. III, выпуск 1 /23/, 1948, 1- 95.

[3] Eidelheit M., Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen. Studia Math., 6 /1936/, 104-111.

[4] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства. Москва, 1959 в прев. Тасилич

[5] Bourbaki N., Algèbre. Actualités scientifiques et industrielles, No 1179 /1952/.

[6] Berge Cl., Espaces topologiques, fonctions multivoques. Dunod, Paris, 1959. Илиев

[7] Дей М., Нормированные векторные пространства. Москва, 1962.

Съдържание

Стр.