Serdica
Mathematical Journal
Сердика
Математическо списание

Serdica Math. J. **39** (2013), 17–36

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

SOLUTION STATIONNAIRE DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS DE LA RADIATION ET DE LA TEMPÉRATURE DANS L'AIR

Nawel Messaadia, Hisao Fujita Yashima

Communicated by T. Gramchev

Abstract. We consider the integro-differential equation system which describes the intensity of the radiation and the temperature of the air in a domain of $\mathbb{R}^3$. Supposing that the coefficients of absorbation and emission of radiation are small even if they depend on the position, we prove the existence of a stationary solution of the equation system in a bounded domain.

1. Introduction. La question de la radiation et son effet thermique dans l'atmosphère, dont l'analyse devrait donner l'explication, entre autres, de l'effet serre, intéresse des rechercheurs de plus en plus nombreux dans le monde. Toutefois il nous semble que la théorie mathématique concernant ces phénomènes ne soit pas adéquatement développée. Nous désirons alors apporter notre contribution à l'étude mathématique des équations qui décrivent ces phénomènes.

Dans l'atmosphère la radiation provient principalement du Soleil et de la surface terrestre; une partie de cette radiation est absorbée par certaines

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35Q79 (35J61, 86A10).
Key words: Radiation, air temperature, integro-differential equation system.

composantes de l'air ou diffusée par déviation ou réflexion dans l'atmosphère. L'absorption du rayonnement par l'air provoque l'augmentation de la température et l'air réchauffé, à son tour, émet le rayonnement, en provoquant la diminution de la température (pour les détails, voir [2], [3], [5], etc.).

Pour contribuer à l'élaboration de la théorie mathématique de ces phénomènes, nous allons étudier un système d'équations intégro-différentielles pour l'intensité $I_\lambda(x, q)$ de la radiation de longueur d'onde λ dans la direction $q \in S^2$ au point $x \in \mathbb{R}^3$ et la température $T(x)$ au point $x \in \mathbb{R}^3$. Il s'agira d'une famille d'équations paramétrisée par $\lambda \in \mathbb{R}_+$ qui décrit la variation de $I_\lambda(x, q)$, variation due à l'absorption, à la diffusion et à l'émission du rayonnement, et d'une équation qui décrit la distribution de la température dans l'air en tant que milieu continu calorifère avec des sources, positives ou négatives, de la chaleur.

Dans cette orientation, Amosov (voir [1]) a étudié le problème avec le mouvement de l'air dans un domaine d'une dimension spatiale et a obtenu la solution globale par rapport au temps. Dans le présent travail, nous allons considérer le système d'équations dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, mais sans prendre en considération le mouvement de l'air (c'est-à-dire dans le cas où la vitesse de l'air s'annule identiquement) et nous allons chercher la solution stationnaire, en renvoyant à l'étude future la question de la résolution de l'équation d'évolution. Pour la température $T(x)$ nous considérons la condition de Neumann sur la frontière, ce qui signifie que la solution stationnaire correspond à l'état d'équilibre sans diffusion de la chaleur à travers la frontière, état thermique déterminée seulement par l'absorption et l'émission du rayonnement par l'atmosphère.

La radiation du Soleil est fort concentrée dans une direction. Comme l'angle solide du Soleil vu de la Terre est très petit, dans les études pratiques on utilise souvent une description qui considère le rayonnement du Soleil dans une seule direction $q_0 \in S^2$. Toutefois dans le présent travail nous décrivons toutes les radiations qui entrent dans le domaine Ω de la même manière, en donnant leur valeur à la frontière, ce qui sera compatible avec l'éventualité que l'intensité de la radiation à la frontiére soit très élevée dans un petit ensemble de $q \in S^2$ correspondant à l'angle solide du Soleil.

Le résultat principal du présent travail est la démonstration de l'existence d'une solution stationnaire $(\{I_\lambda(x, q)\}_{\lambda>0}, T(x))$ du système d'équations considéré dans un domaine borné sous l'hypothèse que les coefficients de absorption et de diffusion du rayonnement sont petits. Du point de vue technique, l'équation pour $I_\lambda(x, q)$ est linéaire en $I_\lambda(x, q)$, de sorte que, si l'on la transforme habilement, il n'est pas difficile de la résoudre avec $T(x)$ donnée; mais le terme représentant l'émission du rayonnement est fortement non-linéaire par rapport à $T(x)$, ce qui ne facilite pas la résolution du système d'équations; toutefois il possède un certain comportement de monotonie (voir le paragraphe 4), ce qui nous permettra de trouver une solution.

2. Système d'équations et sa transformation. Désignons par $a_\lambda(x)$ et $r_\lambda(x)$ respectivement le coefficient d'absorption et celui de diffusion (par déviation ou par réflexion) du rayonnement dans l'atmosphère. On suppose que

$$a_\lambda(x) \geq 0, \quad r_\lambda(x) \geq 0, \quad a_\lambda(x) + r_\lambda(x) \leq C < \infty \tag{2.1}$$

avec une constante C.

La diffusion du rayonnement – diffusion de Rayleigh, diffusion de Mie, diffusion d'optique géométrique, toutes confondues – peut être décrite par la fonction $P_\lambda(q', q)$ qui représente le changement de direction du rayonnement de longueur d'onde λ de la direction q' à la direction q, changement exprimé par une densité par rapport à $q \in S^2$. Normalement dans la Nature $P_\lambda(q', q)$ ne dépend essentiellement que de $q' \cdot q \in [-1, 1]$. Toutefois, comme on n'utilise pas cette propriété dans la suite, ici nous considérons $P_\lambda(q', q)$ comme une fonction de q' et de q. On pose donc les conditions

$$P_\lambda(q', q) \geq 0 \quad \forall q', q \in S^2, \qquad \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} P_\lambda(q', q) dq = 1 \quad \forall q' \in S^2. \tag{2.2}$$

Quant à l'émission de la radiation de l'atmosphère, conformément à la loi de Kirchhoff, on suppose qu'elle est donnée par

$$a_\lambda(x) B[\lambda, T(x, t)],$$

où $B[\lambda, T]$ est la fonction de Planck

$$B[\lambda, T] = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \left(e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1 \right)^{-1} \tag{2.3}$$

(ici c est la vitesse de la lumière, h la constante de Planck et k la constante de Boltzmann). Il est utile de rappeler que

$$\int_0^\infty B[\lambda, T] d\lambda = \sigma T^4$$

avec une constante σ, ce qui nous redonne la loi de Stefan-Boltzmann.

Cela étant, selon les considérations des physiciens, l'intensité de la radiation $I_\lambda(x,q)$ doit satisfaire à l'équation

$$-\frac{1}{a_\lambda(x)+r_\lambda(x)}(q\cdot\nabla)I_\lambda(x,q) = I_\lambda(x,q) - J_\lambda(x,q,I_\lambda,T), \tag{2.4}$$

où $J_\lambda(x,q,I_\lambda,T)$ est donné par

$$J_\lambda(x,q,I_\lambda,T) = \frac{1}{4\pi}\frac{r_\lambda(x)}{a_\lambda(x)+r_\lambda(x)}\int_{S^2} I_\lambda(x,q')P_\lambda(q',q)dq' + \tag{2.5}$$

$$+\frac{a_\lambda(x)}{a_\lambda(x)+r_\lambda(x)}B[\lambda,T(x)]$$

(voir par exemple (6.7.8)–(6.7.9) de [2]).

D'autre part, pour la température $T(x)$, on considère l'équation de la diffusion de la chaleur dans le gaz avec la “source” de la chaleur due à l'absorption et l'émission de la radiation. Plus précisément on considère l'équation

$$\kappa\Delta T = \nabla\cdot F, \tag{2.6}$$

où

$$F=(F_1,F_2,F_3), \qquad F_j(x) = \int_0^\infty\int_{S^2} I_\lambda(x,q)q_j dq d\lambda, \tag{2.7}$$

q_j étant la composante dans la direction de l'axe x_j du vecteur q (voir par exemple (6.7.11) de [2]).

Les équations (2.4) avec $\lambda\in]0,\infty[$ et (2.6) constituent le système d'équations que nous devons envisager. Or, il nous sera commode de transformer l'équation (2.4) en une équation intégrale. En effet, en posant

$$b_\lambda(x) = a_\lambda(x)+r_\lambda(x), \tag{2.8}$$

on peut réécrire l'équation (2.4) dans la forme

$$\frac{d}{d\alpha}I_\lambda(x+\alpha q,q,t) = -b_\lambda(x+\alpha q)I_\lambda(x+\alpha q,q)+b_\lambda(x+\alpha q)J_\lambda(x+\alpha q,q,I_\lambda,T). \tag{2.9}$$

Pour envisager l'équation (2.4) (ou (2.9)) dans un ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, on pose

$$\alpha^0_{(x,q)} = \inf\{\,\alpha\in\mathbb{R}\,|\,x+\alpha' q\in\Omega\ \forall\alpha'\in]\alpha,0[\,\}. \tag{2.10}$$

Si $\alpha^0_{(x,q)} > -\infty$, alors $x + \alpha^0_{(x,q)} q \in \partial\Omega$; mais si Ω n'est pas borné, $\alpha^0_{(x,q)}$ peut être $-\infty$. Dans le cas où $\alpha^0_{(x,q)} > -\infty$, l'équation (2.9) avec la condition

$$I_\lambda(x + \alpha^0_{(x,q)} q, q) = I^0_\lambda(x + \alpha^0_{(x,q)} q, q) \tag{2.11}$$

peut être résolue formellement par la fonction

$$I_\lambda(x,q) = I^0_\lambda(x + \alpha^0_{(x,q)} q, q) \exp\left(- \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} b_\lambda(x + \alpha' q) d\alpha' \right) + \tag{2.12}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} \int_{S^2} r_\lambda(x + \alpha' q) P_\lambda(q', q) I_\lambda(x + \alpha' q, q') \exp\left(- \int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x + \alpha'' q) d\alpha'' \right) dq' d\alpha' +$$

$$+ \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x + \alpha' q) B[\lambda, T(x + \alpha' q)] \exp\left(- \int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x + \alpha'' q) d\alpha'' \right) d\alpha'.$$

Dans le cas où $\alpha^0_{(x,q)} = -\infty$, on considère la condition

$$\lim_{\alpha \to -\infty} I_\lambda(x + \alpha q, q) = I^\infty_\lambda(q). \tag{2.13}$$

Comme on peut le constater facilement, cette condition (2.13) nous permet de définir la solution formelle de l'équation (2.9) avec la condition (2.13)

$$I_\lambda(x,q) = I^\infty_\lambda(q) \exp\left(- \int_{\infty}^{0} b_\lambda(x + \alpha' q) d\alpha' \right) + \tag{2.14}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{\infty}^{0} \int_{S^2} r_\lambda(x + \alpha' q) P_\lambda(q', q) I_\lambda(x + \alpha' q, q') \exp\left(- \int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x + \alpha'' q) d\alpha'' \right) dq' d\alpha' +$$

$$+ \int_{\infty}^{0} a_\lambda(x + \alpha' q) B[\lambda, T(x + \alpha' q)] \exp\left(- \int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x + \alpha'' q) d\alpha'' \right) d\alpha'.$$

Ça veut dire que l'équation (2.4) avec la condition (2.11) ou (2.13) est transformée dans les équations (2.12) et (2.14).

3. Equation de la radiation avec la température donnée. Dans ce paragraphe on considère la famille d'équations (2.12) ou (2.14), en supposant que la fonction $T(x)$ est donnée. Or, comme on le constate immédiatement, si $T(x)$ est donnée, on peut envisager la famille d'équations (2.12) ou (2.14) séparément pour chaque λ. Donc, dans le présent paragraphe, nous fixons un $\lambda > 0$.

Soit Ω un ouvert, borné ou non borné, de $\mathbb{R}^3$. Pour $x^0 \in \partial\Omega$ on pose

$$S^2_-(x^0) = \{q \in S^2 \,|\, \exists\, \varepsilon > 0\,,\, x^0 + \alpha q \in \Omega,\ \forall \alpha \in]0, \varepsilon[\,\} \tag{3.1}$$

et on définit l'ensemble

$$\Xi = \bigcup_{x^0 \in \partial\Omega} \{\{x^0\} \times S^2_-(x^0)\}. \tag{3.2}$$

On admet que $I^0_\lambda(x^0, q)$ est donnée pour tout $(x^0, q) \in \Xi$ et que $I^\infty_\lambda(q)$ est donnée pour tout $q \in S^2$. On suppose que

$$\sup_{(x^0,q)\in\Xi} I^0_\lambda(x^0, q) < \infty, \qquad \sup_{q\in S^2} I^\infty_\lambda(q) < \infty. \tag{3.3}$$

Proposition 3.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Soient $a_\lambda(x)$, $r_\lambda(x)$ et $P_\lambda(q', q)$ des fonctions mesurables définies sur Ω, Ω et $S^2 \times S^2$ respectivement et satisfaisantes aux conditions* (2.1) *et* (2.2)*. Soient en outre $I^0_\lambda(x^0, q)$ et $I^\infty_\lambda(q)$ des fonctions mesurables, non-négatives définies sur Ξ et S^2 respectivement et satisfaisantes à la condition* (3.3)*. Si une fonction $T(x) \in L^\infty(\Omega)$, $T(x) > 0$, est donnée et si en outre*

$$N(r_\lambda)\|P\|_{L^\infty(S^2\times S^2)} < 1, \tag{3.4}$$

où

$$N(r_\lambda) = \sup_{(x,q)\in\Omega\times S^2} \left\{ \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} r_\lambda(x + \alpha q)\, d\alpha \right\} \tag{3.5}$$

(ici $\alpha^0_{(x,q)}$ est le nombre réel négatif ou $-\infty$ défini dans (2.10)*), alors la famille d'équations* (2.12) *ou* (2.14) *admet une solution I_λ et une seule dans la classe $L^\infty(\Omega \times S^2)$.*

Pour démontrer la proposition, il nous est commode de définir l'opérateur G par

$$G(I_\lambda)(x,q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} r_\lambda(x+\alpha' q) \int_{S^2} P_\lambda(q',q) I_\lambda(x+\alpha' q, q') \times \tag{3.6}$$

$$\times \exp\left(- \int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q) d\alpha'' \right) dq' d\alpha',$$

où $\alpha^0_{(x,q)}$ est le nombre réel négatif ou $-\infty$ défini dans (2.10). On a alors le lemme suivant.

Lemme 3.1. *L'opérateur G est une contraction dans l'espace $L^\infty(\Omega \times S^2)$, c'est-à-dire il existe une constante K telle que $0 < K < 1$ et que pour tout $I^{[1]}, I^{[2]} \in L^\infty(\Omega \times S^2)$ on ait*

$$\|G(I^{[1]}) - G(I^{[2]})\|_{L^\infty(\Omega\times S^2)} \leq K \, \|I^{[1]} - I^{[2]}\|_{L^\infty(\Omega\times S^2)}. \tag{3.7}$$

D é m o n s t r a t i o n. Comme $b_\lambda(x) \geq 0$, on a

$$\exp\left(- \int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q) d\alpha'' \right) \leq 1.$$

On a donc

$$|G(I^{[1]})(x,q) - G(I^{[2]})(x,q)| \leq \tag{3.8}$$

$$\leq \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha^0{}_{(x,q)}}^{0} r_\lambda(x+\alpha' q) P_\lambda(q',q) \left| I^{[1]}(x+\alpha' q, q') - I^{[2]}(x+\alpha' q, q') \right| dq' d\alpha' \leq$$

$$\leq N(r_\lambda) \|P_\lambda\|_{L^\infty(S^2\times S^2)} \|I^{[1]} - I^{[2]}\|_{L^\infty(\Omega\times S^2)}$$

presque partout dans $\Omega \times S^2$. Les relations (3.4) et (3.8) entraînent (3.7) avec $0 < K < 1$. $\square$

D é m o n s t r a t i o n d e l a p r o p o s i t i o n 3.1. On constate que le premier et le troisième termes du second membre de (2.12) et de (2.14) sont déterminés directement par les fonctions données. Donc, si on désigne par $\tilde{G}_I(I_\lambda)$ le second membre de (2.12) ou de (2.14) considéré comme une fonction de I_λ, quelques soient $I^{[1]}, I^{[2]} \in L^\infty(\Omega \times S^2)$, on a

$$\tilde{G}_I(I^{[1]}) - \tilde{G}_I(I^{[2]}) = G(I^{[1]}) - G(I^{[2]}),$$

où $G(\cdot)$ est l'opérateur défini dans (3.6). Par conséquent, du lemme 3.1 on déduit que même l'opérateur $\tilde{G}_I(\cdot)$ est une contraction dans l'espace $L^\infty(\Omega \times S^2)$, ce qui nous permet de trouver une solution I_λ et une seule dans la classe $L^\infty(\Omega \times S^2)$. □

Dans le prochain paragraphe on va utiliser la propriété suivante de la solution de l'équations (2.12).

Proposition 3.2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $a_\lambda(x)$, $r_\lambda(x)$, $P_\lambda(q', q)$ et $I^0_\lambda(x^0, q)$ vérifient les conditions mentionnées dans la proposition* 3.1. *Soient $T^{[1]}$ et $T^{[2]}$ deux fonctions à valeurs dans $]0, \infty[$ appartenant à $L^\infty(\Omega)$. Soit $I^{[1]}_\lambda$ (resp. $I^{[2]}_\lambda$) la solution de l'équations* (2.12) *avec $B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[1]}]$ (resp. $B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[2]}]$). Alors on a*

$$\text{(3.9)} \quad \|I^{[1]}_\lambda - I^{[2]}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega \times S^2)} \leq$$

$$\leq \frac{N(a_\lambda)}{1 - N(r_\lambda)\|P_\lambda\|_{L^\infty(S^2 \times S^2)}} \|B[\lambda, T^{[1]}] - B[\lambda, T^{[2]}]\|_{L^\infty(\Omega)},$$

où $N(r_\lambda)$ est le nombre défini dans (3.5), *tandis que*

$$\text{(3.10)} \qquad N(a_\lambda) = \sup_{(x,q) \in \Omega \times S^2} \left\{ \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x + \alpha q) d\alpha \right\}.$$

D é m o n s t r a t i o n. On pose

$$U = I^{[1]}_\lambda - I^{[2]}_\lambda, \qquad V = B[\lambda, T^{[1]}] - B[\lambda, T^{[2]}].$$

Alors, en faisant la différence de l'équations (2.12) avec $B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[1]}]$ et celle avec $B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[2]}]$, on a

$$U(x,q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} \int_{S^2} r_\lambda(x+\alpha' q) P_\lambda(q', q) U(x+\alpha' q, q') \times$$

$$\times \exp\left(- \int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q) d\alpha'' \right) dq' d\alpha' +$$

$$+ \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x+\alpha' q) V(x+\alpha' q) \exp\left(- \int_{\alpha'}^{0} (b_\lambda(x+\alpha'' q)) d\alpha'' \right) d\alpha',$$

ou, en utilisant l'opérateur $G(\cdot)$ introduit dans (3.6),

$$U(x,q) = G(U)(x,q) +$$

$$+ \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x+\alpha' q) V(x+\alpha' q) \exp\left(- \int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q) d\alpha'' \right) d\alpha',$$

De la manière analogue à (3.8) on a

$$|G(U)(x,q)| \leq N(r_\lambda) \|P_\lambda\|_{L^\infty(S^2 \times S^2)} \|U\|_{L^\infty(\Omega \times S^2)}.$$

D'autre part, on a

$$\left| \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} a_\lambda(x+\alpha' q) V(x+\alpha' q) \exp\left(- \int_{\alpha'}^{0} b_\lambda(x+\alpha'' q) d\alpha'' \right) d\alpha' \right| \leq$$

$$\leq N(a_\lambda) \|V\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

On en déduit que

$$\|U\|_{L^\infty(\Omega \times S^2)} \leq \frac{N(a_\lambda)}{1 - N(r_\lambda) \|P_\lambda\|_{L^\infty(S^2 \times S^2)}} \|V\|_{L^\infty(\Omega)},$$

ce qui preuve (3.9). $\square$

4. Lemmes sur l'effet thermique du rayonnement. Dans la suite (paragraphes 4, 5), nous considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ muni d'une frontière suffisamment régulière et nous nous occupons du système d'équations (2.12), (2.6). Pour la température $T(x)$, on considère la condition de Neumann sur la frontière

$$\vec{n} \cdot \nabla T = 0 \qquad \text{sur} \ \ \partial\Omega, \tag{4.1}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal extérieur sur $\partial\Omega$. On remarque que, pour que l'équation (2.6) admette une solution, il faut que

$$\int_\Omega \nabla \cdot F dx = 0. \tag{4.2}$$

En effet, si T et F satisfont à l'équation (2.6) et à la condition (4.1), alors, en intégrant les deux membres de (2.6) sur Ω, on a l'égalité (4.2).

En outre, si a_λ s'annule identiquement ($a_\lambda = 0$), le problème se réduit à celui que nous avons considéré dans le théorème 3.1. Donc dans les paragraphes 4 et 5 nous supposons que $a_\lambda(x)$ est mesurable dans $\Omega\times]0,\infty[$ et que

$$\exists \varepsilon > 0 \ \text{ tel que } \ \ \mathrm{mes}(\{ (x,\lambda) \in \Omega\times]0,\infty[\,|\, a_\lambda(x) \geq \varepsilon \}) > 0. \tag{4.3}$$

Nous supposons en outre que $I_\lambda^0(x^0,q)$ est mesurable dans

$$\Xi^\Lambda = \{ (x^0,q,\lambda) \in \partial\Omega \times S^2\times]0,\infty[\,|\, (x^0,q) \in \Xi \}$$

(Ξ étant l'ensemble défini dans (3.2)) et que

$$\exists \varepsilon > 0 \ \text{ tel que } \ \ \mathrm{mes}(\{ (x^0,q,\lambda) \in \Xi^\Lambda \,|\, I_\lambda^0(x^0,q) \geq \varepsilon \}) > 0. \tag{4.4}$$

En effet, si $I_\lambda^0(x^0,q)$ s'annule identiquement dans Ξ^Λ, alors on pourra démontrer sans difficulté que $I_\lambda(x,q) = 0$, $T(x) = 0$ sera la solution du problème (2.12), (2.6), (4.1).

En vertu de la proposition 3.1, pour tout $T \in L^\infty(\Omega)$, $T > 0$, il existe une seule $I_\lambda \in L^\infty(\Omega \times S^2)$ pour tout $\lambda \in]0,\infty[$, ce qui nous permet de considérer I_λ comme fonction de T; donc la fonction F définie dans (2.7) elle aussi peut être considérée comme fonction de T. Pour souligner cette dépendance, nous écrivons

$$F = F(T).$$

Lemme 4.1. *Soient $T^{[i]} \in L^\infty(\Omega)$, $T^{[i]} > 0, i = 1,2$. Si $T^{[1]} > T^{[2]}$, alors on a*

$$\int_\Omega \nabla \cdot F(T^{[1]})dx > \int_\Omega \nabla \cdot F(T^{[2]})dx. \tag{4.5}$$

D é m o n s t r a t i o n. On remarque d'abord que

$$\frac{\partial}{\partial T} B[\lambda, T] > 0 \qquad \forall \lambda > 0,\ \forall T > 0, \tag{4.6}$$

ce qui résulte immédiatement du calcul explicite de la dérivée de la fonction de Planck (voir (2.3)). Donc on a

$$B[\lambda, T^{[1]}] > B[\lambda, T^{[2]}].$$

On rappelle que l'équation (2.12) est linéaire en I_λ, ce qui nous permet de décomposer la fonction $I_\lambda(x,q) = I_\lambda^{[2]}(x,q)$ définie avec la température $T^{[2]}$ en

$$I_\lambda(x,q) = I_\lambda^{ex}(x,q) + I_\lambda^{in}(x,q), \tag{4.7}$$

où $I_\lambda^{ex}(x,q)$ est la solution de l'équation (2.12) avec $B[\lambda,T] = 0$, tandis que $I_\lambda^{in}(x,q)$ est la solution de l'équation (2.12) avec $I_\lambda^0(x+\alpha^0_{(x,q)}q, q) = 0$ et $B[\lambda,T] = B[\lambda, T^{[2]}]$.

D'autre part, on décompose la fonction $I_\lambda(x,q) = I_\lambda^{[1]}(x,q)$ en

$$I_\lambda(x,q) = I_\lambda^{ex}(x,q) + I_\lambda^{in}(x,q) + I_\lambda^{di}(x,q), \tag{4.8}$$

où $I_\lambda^{ex}(x,q)$ et $I_\lambda^{in}(x,q)$ sont comme dans (4.7), tandis que $I_\lambda^{di}(x,q)$ est la solution de l'équation (2.12) avec $I_\lambda^0(x+\alpha^0_{(x,q)}q, q) = 0$ et avec le remplacement de $B[\lambda,T]$ par $B[\lambda,T^{[1]}] - B[\lambda,T^{[2]}]$. Comme $B[\lambda,T^{[1]}] - B[\lambda,T^{[2]}] > 0$, en rappelant la définition de $I_\lambda^{di}(x,q)$ comme solution de l'équation (2.12) avec les conditions mentionnées ci-dessus, il n'est pas difficile de constater que, au moins pour λ appartenant à un ensemble de mesure non nulle (voir (4.3)), on a

$$I_\lambda^{di}(x,q) > 0 \quad \text{p.p. dans } \ \Omega' \times S^2, \qquad \Omega' \subset \Omega, \quad \mathrm{mes}(\Omega') > 0.$$

Par ailleurs, de la définition (2.7) de F on déduit que

$$\int_\Omega \nabla \cdot F(T^{[1]})dx - \int_\Omega \nabla \cdot F(T^{[2]})dx = \int_\Omega \int_0^\infty \int_{S^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} I_\lambda^{di}(x,q) q_j dq d\lambda dx = \tag{4.9}$$

$$= \int_0^\infty \int_{S^2} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^3 q_j n_j I_\lambda^{di}(x,q) dS dq d\lambda,$$

où n_j est la composante j-ième du vecteur normal extérieur $\vec{n}$ sur $\partial\Omega$. Comme on a défini $I_\lambda^{di}(x,q)$ par l'équation (2.12) avec $I_\lambda^0(x+\alpha^0_{(x,q)}q,q)=0$ et que $I_\lambda^0(x^0,q)$ est donnée sur l'ensemble de (x^0,q) caractérisé par la relation $\sum_{j=1}^3 q_j n_j < 0$ (voir (3.1), (3.2)), on a

$$\sum_{j=1}^3 q_j n_j I_\lambda^{di}(x,q) = 0 \qquad \text{si} \quad \sum_{j=1}^3 q_j n_j \leq 0.$$

D'autre part, comme on l'a constaté ci-dessus, pour λ appartenant à un ensemble de mesure non nulle on a

$$I_\lambda^{di}(x,q) > 0 \quad \text{dans} \quad \Omega' \times S^2,$$

ce qui peut être prolongé jusquà la frontière pourvu que $\sum_{j=1}^3 q_j n_j > 0$. En rappelant (4.9), on en déduit l'inégalité (4.5). Le lemme est démontré. □

Lemme 4.2. *Soit $T \in L^\infty(\Omega)$, $T > 0$. On pose $m_T = \operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} T(x)$. Alors la fonction*

$$f(c) = \int_\Omega \nabla \cdot F(T+c) dx \tag{4.10}$$

est continue et strictement croissante dans l'intervalle $]-m_T,\infty[$.

D é m o n s t r a t i o n. Comme la croissance stricte de $f(c)$ est démontée dans le lemme 4.1, il reste à démontrer que $f(c)$ est continue. Or, comme on le voit aisément par la définition (4.10) de la fonction $f(c)$, pour démontrer la continuité de $f(c)$, il suffit de démontrer que $\lim_{c\to 0} f(c) = f(0)$.

Il n'est pas difficile de déduire de la définition de $I_\lambda^{di}(x,q)$ que

$$I_\lambda^{di}(x,q) \to 0 \qquad \text{pour} \quad c \to 0$$

et donc

$$f(c) - f(0) = \int_0^\infty \int_{S^2} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^3 q_j n_j I_\lambda^{di}(x,q) dS dq d\lambda \to 0 \qquad \text{pour} \quad c \to 0.$$

Le lemme est démontré. □

Lemme 4.3. *Il existe une constante strictement positive* $\overline{T}_0$ *et une seule telle que*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F(\overline{T}_0)dx = 0. \tag{4.11}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $I_\lambda(x,q)$ la solution de l'équation (2.12) avec une constante $T > 0$. On décompose $I_\lambda(x,q)$ en

$$I_\lambda(x,q) = I_\lambda^{ex}(x,q) + I_\lambda^{in}(x,q)$$

de la même manière que dans (4.7). En outre on pose

$$F^{ex} = (F_1^{ex}, F_2^{ex}, F_3^{ex}), \qquad F_j^{ex}(x) = \int_0^\infty \int_{S^2} I_\lambda^{ex}(x,q)q_j dqd\lambda,$$

$$F^{in} = (F_1^{in}, F_2^{in}, F_3^{in}), \qquad F_j^{in}(x) = \int_0^\infty \int_{S^2} I_\lambda^{in}(x,q)q_j dqd\lambda.$$

De (2.9) (voir aussi (2.8)) on déduit que

$$\frac{d}{d\alpha} I_\lambda^{ex}(x+\alpha q, q) = -a_\lambda(x+\alpha q)I_\lambda^{ex}(x+\alpha q,q) - r_\lambda(x+\alpha q)I_\lambda^{ex}(x+\alpha q,q) + \tag{4.12}$$

$$+r_\lambda(x+\alpha q)\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} I_\lambda^{ex}(x+\alpha q, q')P_\lambda(q',q)dq'.$$

On a donc

$$\nabla \cdot F^{ex} = \int_0^\infty \int_{S^2} q \cdot \nabla I_\lambda^{ex}(x+\alpha q, q)dqd\lambda = \int_0^\infty \int_{S^2} \frac{d}{d\alpha} I_\lambda^{ex}(x+\alpha q,q)\Big|_{\alpha=0} dqd\lambda = \tag{4.13}$$

$$= \int_0^\infty \int_{S^2} \left[-a_\lambda(x)I_\lambda^{ex}(x,q) - r_\lambda(x)I_\lambda^{ex}(x,q) + r_\lambda(x)\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} I_\lambda^{ex}(x,q')P_\lambda(q',q)dq' \right] dqd\lambda.$$

Or, en vertu de la deuxième condition de (2.2) on a

$$\int_{S^2} \left[-r_\lambda(x)I_\lambda^{ex}(x,q) + r_\lambda(x)\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} I_\lambda^{ex}(x,q')P_\lambda(q',q)dq' \right] dq = 0. \tag{4.14}$$

Il s'ensuit que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F^{ex} dx = \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \int_{S^2} \left[-a_\lambda(x) I_\lambda^{ex}(x,q) \right] dq d\lambda dx < 0. \tag{4.15}$$

D'autre part, de manière analogue à la déduction de (4.5) de (4.9), on parvient à

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F^{in} dx = \int_0^{\infty} \int_{S^2} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} q_j n_j I_\lambda^{in}(x,q) dS dq d\lambda > 0.$$

Or, comme l'équation (2.12) est linéaire en I_λ, pour chaque $\lambda > 0$ fixé, la quantité

$$\int_0^{\infty} \int_{S^2} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} q_j n_j I_\lambda^{in}(x,q) dS dq d\lambda$$

est proportionnelle par rapport à $B[\lambda, T]$. Donc, en rappelant l'expression (2.3) de $B[\lambda, T]$, on voit aisément que

$$B[\lambda, T] \to 0 \qquad \text{pour } T \to 0^+,$$

ce qui, joint à (4.15), nous donne

$$\lim_{T \to 0^+} \int_{\Omega} \nabla \cdot F(T) dx = \lim_{T \to 0^+} \left[\int_{\Omega} \nabla \cdot F^{ex} dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot F^{in} dx \right] = \tag{4.16}$$

$$= \int_{\Omega} \nabla \cdot F^{ex} dx < 0.$$

En outre, de l'expression (2.3) de $B[\lambda, T]$ on déduit également qu'il existe un T_1 suffisamment grand tel que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F^{in} dx > \left| \int_{\Omega} \nabla \cdot F^{ex}(T_1) dx \right|$$

($F^{ex}(T_1)$ étant F^{ex} déterminé par T_1) et donc

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F(T_1) dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot F^{ex} dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot F^{in}(T_1) dx > 0. \tag{4.17}$$

Le lemme 4.3 résulte de (4.16) et (4.17) et du lemme 4.2. □

Lemme 4.4. *Soient $T^{[1]}$ et $T^{[2]}$ deux fonctions appartenant à $L^\infty(\Omega)$ et telles que*

$$\frac{1}{2}\overline{T}_0 \leq \text{ess}\inf_{x\in\Omega} T^{[i]}(x) \leq \text{ess}\sup_{x\in\Omega} T^{[i]}(x) \leq \frac{3}{2}\overline{T}_0, \qquad i = 1, 2. \tag{4.18}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}\|\nabla\cdot F(T^{[1]}) - \nabla\cdot F(T^{[2]})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \\ \leq M(\{a_\lambda\}_\lambda, \{r_\lambda\}_\lambda, \{P_\lambda\}_\lambda, \overline{T}_0)\|T^{[1]} - T^{[2]}\|_{L^\infty(\Omega)},\end{aligned} \tag{4.19}$$

où

$$\begin{aligned}M(\{a_\lambda\}_\lambda, \{r_\lambda\}_\lambda, \{P_\lambda\}_\lambda, \overline{T}_0) = \\ = 4\pi \sup_{x\in\Omega,\lambda>0} a_\lambda(x)\left(\frac{\overline{N}(a)}{1-\overline{N}(rP)}+1\right)\int\limits_0^\infty \gamma(\lambda)d\lambda,\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\overline{N}(a) = \sup_{\lambda>0} N(a_\lambda), \qquad \overline{N}(rP) = \sup_{\lambda>0} N(r_\lambda)\|P_\lambda\|_{L^\infty(S^2\times S^2)},$$

$$\gamma(\lambda) = \sup_{\frac{1}{2}\overline{T}_0\leq T\leq\frac{3}{2}\overline{T}_0} \frac{\partial}{\partial T}B[\lambda, T],$$

$N(r_\lambda)$, $N(a_\lambda)$ étant les nombres définis dans (3.5) *et* (3.10)*.*

Remarque. On a

$$\int\limits_0^\infty \gamma(\lambda)d\lambda < \infty. \tag{4.21}$$

En effet, en calculant explicitement la dérivée $\dfrac{\partial}{\partial T}B[\lambda, T]$, il n'est pas difficile de trouver une fonction $\tilde{\gamma}(\lambda)$ telle que

$$\gamma(\lambda) \leq \tilde{\gamma}(\lambda) \quad \forall\lambda\in\,]0,\infty[\,, \qquad \int\limits_0^\infty \tilde{\gamma}(\lambda)d\lambda < \infty.$$

D é m o n s t r a t i o n. D'après la définition de $\gamma(\lambda)$, on a

$$|B[\lambda, T^{[1]}] - B[\lambda, T^{[2]}]| \leq \gamma(\lambda)|T^{[1]} - T^{[2]}| \tag{4.22}$$

et donc, à l'aide de la proposition 3.2, on a

$$\|I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}\|_{L^\infty(\Omega\times S^2)} \leq \frac{N(a_\lambda)}{1 - N(r_\lambda)\|P_\lambda\|_{L^\infty(S^2\times S^2)}}\gamma(\lambda)\|T^{[1]} - T^{[2]}\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{4.23}$$

où $I_\lambda^{[i]}$ est la solution de l'équation (2.12) avec $B[\lambda, T] = B[\lambda, T^{[i]}]$, $i = 1, 2$.

Or, de la définition de F et de la relation (2.9) on déduit que

$$\nabla\cdot F(T^{[1]}) - \nabla\cdot F(T^{[2]}) = \int_0^\infty\int_{S^2}\Big[-a_\lambda(x)U_\lambda(x,q) - r_\lambda(x)U_\lambda(x,q) +$$

$$+ r_\lambda(x)\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} U_\lambda(x,q')P_\lambda(q',q)dq' + a_\lambda(x)(B[\lambda,T^{[1]}] - B[\lambda,T^{[2]}])\Big]\,dqd\lambda,$$

où

$$U_\lambda(x,q) = I_\lambda^{[1]}(x,q) - I_\lambda^{[2]}(x,q).$$

Or, en vertu de la deuxième condition de (2.2), on a

$$\int_{S^2}\left[-r_\lambda(x)U_\lambda(x,q) + r_\lambda(x)\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} U_\lambda(x,q')P_\lambda(q',q)dq'\right]dq = 0.$$

Donc, on parvient à

$$\|\nabla\cdot F(T^{[1]}) - \nabla\cdot F(T^{[2]})\Big\|_{L^\infty(\Omega)} \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\Omega,\lambda>0} a_\lambda(x)\int_0^\infty\Big[\|U_\lambda\|_{L^\infty(\Omega\times S^2)} + \|B[\lambda,T^{[1]}] - B[\lambda,T^{[2]}]\|_{L^\infty(\Omega)}\Big]\,d\lambda,$$

d'où, compte tenu de (4.22) et (4.23), on obtient (4.19). □

5. Solution stationnaire. Maintenant on va démontrer le résultat principal du présent travail.

Théorème 5.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ muni de la frontière $\partial\Omega$ de la classe C^2. Soient $a_\lambda(x)$, $r_\lambda(x)$, $P_\lambda(q',q)$, $I_\lambda^0(x^0,q)$ des fonctions mesurables, bornées et non-négatives définies sur $\Omega\times\,]0,\infty[$, $\Omega\times\,]0,\infty[$, $S^2\times S^2\times\,]0,\infty[$,*

$\Xi\times\,]0,\infty[$ *respectivement, où* Ξ *est l'ensemble défini dans* (3.2). *On suppose qu'elles vérifient la condition* (2.2) *ainsi que les conditions*

$$\sup_{(x^0,q)\in\Xi}\int_0^\infty I_\lambda(x^0,q)d\lambda<\infty. \tag{5.1}$$

$$\sup_{0<\lambda<\infty} N(r_\lambda)\|P\|_{L^\infty(S^2\times S^2)}<1 \tag{5.2}$$

$$M(\{a_\lambda\}_\lambda,\{r_\lambda\}_\lambda,\{P_\lambda\}_\lambda,\overline{T}_0)\leq\frac{\kappa}{2C_\Omega}, \tag{5.3}$$

$$\|\nabla\cdot F(\overline{T}_0)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq\frac{\kappa\overline{T}_0}{4C_\Omega}, \tag{5.4}$$

où $N(r_\lambda)$ *et* $M(\{a_\lambda\}_\lambda,\{r_\lambda\}_\lambda,\{P_\lambda\}_\lambda,\overline{T}_0)$ *sont les constantes définies dans* (3.5) *et* (4.20) *respectivement et* $\overline{T}_0$ *la constante définie dans le lemme 4.3, tandis que* C_Ω *est une constante dépendante seulement de* Ω *(la constante* C_Ω *est précisée dans la démonstration du lemme 5.1). Alors le système d'équations* (2.12), (2.6) *avec la condition* (4.1) *admet une solution* $(\{I_\lambda\}_{\lambda\in]0,\infty[},T)$ *dans la classe*

$$I_\lambda\in L^\infty(\Omega\times S^2),\quad \forall\lambda\in\,]0,\infty[,\qquad T\in H^2(\Omega),\quad \inf_{x\in\Omega}T(x)>0. \tag{5.5}$$

La solution est unique dans un voisinage d'elle-même.

Avant tout on définit l'ensemble E_0 par

$$E_0=\left\{T\in L^\infty(\Omega)\,\Big|\,\int_\Omega\nabla\cdot F(T)dx=0,\ \frac{1}{2}\overline{T}_0\leq T\leq\frac{3}{2}\overline{T}_0\ \text{p.p. dans }\Omega\right\}. \tag{5.6}$$

On a alors le lemme suivant.

Lemme 5.1. *Si* $\overline{T}\in E_0$, *il existe l'unique solution* T *de l'équation*

$$\kappa\Delta T=\nabla\cdot F(\overline{T})\quad \text{dans }\Omega, \tag{5.7}$$

avec la condition (4.1), *solution satisfaisant à la condition*

$$\int_\Omega\nabla\cdot F(T)dx=0. \tag{5.8}$$

En outre on a $T \in E_0$.

Démonstration. Un raisonnement analogue à la démonstration du lemme 4.4 nous conduit à l'appartenance de $\nabla \cdot F(\overline{T})$ à $L^\infty(\Omega)$. On a donc également $\nabla \cdot F(\overline{T}) \in L^2(\Omega)$. Cela étant, le problème (5.7), (4.1) admet une solution généralisé T avec $\nabla T \in H^1(\Omega)$, qui est unique à une constante additive près (voir par exemple le théorème 1 du chapitre IV de [4]). En outre, il existe une constante C_1 telle que

$$\|T - \mathbf{M}(T)\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C_1}{\kappa}\|\nabla \cdot F(\overline{T})\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.9}$$

où

$$\mathbf{M}(T) = \frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega)}\int_\Omega T(x)dx$$

(voir par exemple le théorème 4 du chapitre IV de [4]). On a donc

$$\|T - \mathbf{M}(T)\|_{L^\infty(\Omega))} \leq \frac{C_1C_2}{\kappa}\|\nabla \cdot F(\overline{T})\|_{L^2(\Omega)}$$

avec une constante C_2 telle que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega))} \leq C_2\|u\|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^2(\Omega).$$

On en déduit que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} T(x) - \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} T(x) \leq \frac{C_\Omega}{\kappa}\|\nabla \cdot F(\overline{T})\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{5.10}$$

avec $C_\Omega = 2C_1C_2(\mathrm{mes}(\Omega))^{1/2}$.

D'ailleurs on a

$$\|\nabla \cdot F(\overline{T})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\nabla \cdot F(\overline{T}_0)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla \cdot F(\overline{T}) - \nabla \cdot F(\overline{T}_0)\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Or, d'après le lemme 4.4, on a, compte tenu de la condition (5.3) et de l'appartenance de $\overline{T}$ à E_0,

$$\|\nabla\cdot F(\overline{T}) - \nabla\cdot F(\overline{T}_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M(\{a_\lambda\}_\lambda, \{r_\lambda\}_\lambda, \{P_\lambda\}_\lambda, \overline{T}_0)\|\overline{T} - \overline{T}_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\kappa\overline{T}_0}{4C_\Omega}.$$

Donc, en rappelant (5.4), on obtient

$$\|\nabla \cdot F(\overline{T})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\kappa\overline{T}_0}{2C_\Omega},$$

ce qui, joint à (5.10), nous donne

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} T(x) - \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} T(x) \leq \frac{1}{2}\overline{T}_0. \tag{5.11}$$

On en déduit, compte tenu également des lemmes 4.1 et 4.2, qu'il existe une unique $T \in E_0$ satisfaisant à (5.7), (4.1). Le lemme est démontré. □

Lemme 5.2. *Si* $\overline{T}^{[1]}$, $\overline{T}^{[2]} \in E_0$ *et si* $T^{[1]}$ *et* $T^{[2]}$ *sont la solution du problème* (5.7), (4.1) *appartenant à* E_0, *alors on a*

$$\|T^{[1]} - T^{[2]}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\kappa}\|\nabla\cdot F(\overline{T}^{[1]}) - \nabla\cdot F(\overline{T}^{[2]})\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{5.12}$$

Démonstration. On remarque que la différence $W = T^{[1]} - T^{[2]}$ vérifie l'équation

$$\kappa\Delta W = \nabla\cdot F(\overline{T}^{[1]}) - \nabla\cdot F(\overline{T}^{[2]})$$

et la condition

$$\vec{n}\cdot\nabla W = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega.$$

Or, en vertu du lemme 4.2, W ne peut pas être strictement positive presque partout, ni strictement négative presque partout. Donc le même raisonnement de la démonstration du lemme 5.1 nous ramème à (5.12). □

Démonstration du théorème 5.1. On définit l'opérateur Γ, qui, à $\overline{T} \in E_0$, associe la solution $T \in E_0$ du problème (5.7), (4.1). En vertu du lemme 5.1 on a

$$\Gamma(E_0) \subset E_0. \tag{5.13}$$

D'autre part, en vertu de (4.19) et (5.12), on a

$$\|T^{[1]} - T^{[2]}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\kappa} M(\{a_\lambda\}_\lambda, \{r_\lambda\}_\lambda, \{P_\lambda\}_\lambda, \overline{T}_0)\|\overline{T}^{[1]} - \overline{T}^{[2]}\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{5.14}$$

où $M(\{a_\lambda\}_\lambda, \{r_\lambda\}_\lambda, \{P_\lambda\}_\lambda, \overline{T}_0)$ est la constante définie dans (4.20).

Définissons la suite $T^{[n]}$, $n = 0, 1, \ldots$, en posant

$$T^{[0]} = \overline{T}_0, \qquad T^{[n+1]} = \Gamma(T^{[n]}).$$

En vertu de (5.13), $T^{[n]}$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a $\{T^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E_0$. Or, comme l'inégalité (5.14) jointe à (5.3) nous donne la contraction de l'opérateur

Γ, la suite $T^{[n]}$, $n = 0, 1, \ldots$, converge dans la topologie de $L^\infty(\Omega)$. Il n'est pas difficile de voir que la limite vérifie le système d'équations (2.12), (2.6) avec la condition (4.1). En outre, de l'inégalité (5.14) et de la condition (5.3) on déduit que la solution $(\{I_\lambda\}_{\lambda \in]0,\infty[}, T)$ avec $T \in E_0$ est unique. Le théorème est démontré. $\square$

REFERENCES

[1] A. A. Amosov. Correction globale du problème aux conditions initiales et aux limites pour le système d'équations de la dynamique d'un gaz visqueux avec la radiation. *Doklady Akad. Nauk SSSR.* **280** (1985), 1326–1329 (en russe).

[2] K.-N. Liou. An introduction to atmospheric radiation. Acad. Press, 2002.

[3] L. T. Matveev. Physique de l'atmosphère. Leningrad–S. Peterburg, Gidrometeoizdat, 1965, 1984, 2000 (en russe).

[4] V. P. Mikhaïlov. Equations aux dérivées partielles. Mir, 1980 (traduit du russe).

[5] P.-X. Sheng, J.-T. Mao, J.-G. Li, A.-C. Zhang, J.-G. Sang, N.-X. Pan. Physique de l'atmosphère. Pékin, Publ. Univ. Pékin, 2003 (en chinois).

Nawel Messaadia
Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation
Université 8 mai 1945
Guelma, Algérie

Hisao Fujita Yashima
Dipartimento di Matematica
Università di Torino
Torino, Italie
*e-mail:*hisao.fujitayashima@unito.it
et
Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation
Université 8 mai 1945
Guelma, Algérie

Received April 6, 2012