Serdica

Mathematical Journal

Сердика

Математическо списание

Serdica Math. J. **39** (2013), 119–154

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

STRUCTURES DE CONTACT INVARIANTES

Saad Aggoun

Communicated by O. Mushkarov

Abstract. Let M be a compact manifold of dimension three with a contact structure $[\omega]$. The Lie algebra $A([\omega])$ of infinitesimal automorphisms of $[\omega]$ is of infinite dimension. In this paper we study the subalgebras of $A([\omega])$ of finite dimensions.

1. Introduction.

L'algèbre de Lie $A\left([\omega]\right)$ des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact $[\omega]$ a fait l'objet de plusieurs travaux.

Ainsi en 1958, P. Libermann [2] aborde dans les actes du colloque de géométrie différentielle globale de Bruxelles l'étude des automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et de contact.Le fait suivant y est essentiel : Ces automorphismes infinitésimaux correspondent bijectivement aux fonctions sur la variété. Ceci permet de transporter sur l'espace $\mathrm{F}(M)$ des fonctions la structure d'algèbre de Lie de l'espace vectoriel des automorphismes infinitésimaux. On obtient un crochet de Poisson $\{f, g\}$ qui dépend de ω. Une sous-algèbre $A(\omega)$ est constituée des fonctions telles que le champ correspondant

2010 *Mathematics Subject Classification:* 37J55, 53D10, 53D17, 53D35.
Key words: Contact structures, Contact forms, Reeb vector field, Poisson Brackets, infinitesimal Automorphism.

X soit un automorphisme infinitésimal de ω. Ce sont les fonctions constantes le long des trajectoires des courbes intégrales du champ de Reeb R associé à ω.

L'étude de ces algèbres de Lie de dimension infinie ainsi obtenues est loin d'être avancée. En 1973, A. Lichnerowicz [3] qui espère distinguer des structures de contact par les propriétés de leurs algèbres donne une série de résultats tous "universels". Par exemple tous les automorphismes d'une telle algèbre sont intérieurs.D'autres travaux ont suivi,qui ont toujours mis l'accent sur la ressemblance de ces algèbres de dimensions infinies quelle que soit la structure concernée. Un résultat difficile et très intéressant dans le cas où l'action du groupe est localement libre est obtenu en 1978 par M. Goze [1] où il montre que cette algèbre ne contient aucune sous-algèbre de dimension supérieure à $\frac{3p+1}{2}$ où $(2p+1)$ est la dimension de la variété M.

Lorsque une structure de contact $\sigma = [\omega]$ définie par une forme de contact ω est invariante par rapport à trois champs de vecteurs linéairement indépendants en chaque point de M et qui engendrent une certaine algèbre de Lie H de dimension trois,le représentant ω n'est pas nécessairement invariant par rapport à ces trois champs de vecteurs. On sait d'après [4] qu'il existe un groupe de Lie connexe G et une action localement libre de G sur M dont les transformations infinitésimales sont les éléments de H. Les orbites de l'action sont alors des sous-variétés de dimensions trois de$M$ difféomorphes au quotient de G par un sous-groupe discret. Si G est compact il existe un représentant qui est une forme de contact invariante par rapport aux trois champs de vecteurs qui engendrent H et qui sont linéairement indépendants en chaque point de M. Ce représentant est obtenu comme moyenne des transformées de ω le long du groupe G via une mesure de Haar contact.

Dans cet article on va déterminer dans un premier temps les sous-algèbres de $A(\omega)$ lorsque la variété M est compacte et ω une forme de contact quelconque puis lorsque M est $\mathbb{R}^3$ et ω la forme de Darboux $xdy + dz$, ensuite les sous-algèbres de $A([\omega])$ de dimensions trois lorsque les automorphismes infinitésimaux sont linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois.Dans ce dernier cas on sait que lorsque une structure de contact $\sigma = [\omega]$ est invariante par rapport à ces champs de vecteurs, le représentant ω n'est pas forcément invariant par ces memes automorphismes infinitésimaux. C'est ainsi qu'on va donner une méthode pour déterminer dans le cas échéant le représentant qui soit une forme de contact invariante par rapport à ces automorphismes infinitésimaux.

2. Préliminaires.

Définition 2.1. *Une structure de contact sur une variété M de dimension $(2p+1)$ est une équation de Pfaff $\sigma = [\omega]$ dont tout représentant local ω est de contact, c'est à dire vérifie les deux conditions équivalentes suivantes :*

i) $\omega \wedge (d\omega)^p$ *sans zéros.*

ii) $\omega_x(u) = 0$ *et* $i(u)d\omega_x = 0$ *implique* $u = 0$ *pour* $u \in T_xM$.

Lorsque M est compacte, orientable, σ est difinie globalement par une forme de contact ω, les autres représentants sont du type $\lambda\omega$ où λ est une fonction sans zéros sur M.

Définition 2.2. *Soit ω une forme de contact sur une variété M de dimension $(2p+1)$.Il existe un unique champ de vecteurs R sans zéros qui vérifie $\omega(R) = 1$ et $i(R)d\omega = 0$. On l'appelle champ de Reeb associé à ω.*

Définition 2.3. *Soit X un champ de vecteurs sur M. Une équation de Pfaff $\sigma = [\omega]$ est invariante par rapport à X si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

i) $L_X\omega \wedge \omega = 0$ *où L est la dérivée de Lie.*

ii) $\theta_t^*\omega \wedge \omega = 0$ *où θ est le flôt de X.*

X est appelé automorphisme infinitésimal de la structure de contact $\sigma = [\omega]$.

Définition 2.4. *A chaque automorphisme infinitésimal X est associée la fonction $f = \omega(X)$. Inversement si $f \in F(M)$ les équations $\omega(X) = f$ et $(i(X)\,d\omega + df) \wedge \omega = 0$ admettent un unique champ de vecteurs X comme solution. Ainsi les automorphismes infinitésimaux de $\sigma = [\omega]$ correspondent bijectivement aux fonctions sur la variété. Ceci permet de transporter sur $F(M)$ la structure de l'algèbre de Lie de l'espace vectoriel des automorphismes infinitésimaux. On obtient un crochet de Poisson $[f, g]$ qui dépend de ω.*

Définition 2.5. *Si X et Y sont deux automorphismes infinitésimaux de la structure de contact $\sigma = [\omega]$, il en est de même pour $[X, Y]$. En effet si on pose*

$$\omega(X) = f,$$

et

$$\omega(Y) = g,$$

on aura

$$\omega([X, Y]) = [f, g],$$

qui est par définition le crochet de Poisson de f et g.

Définition 2.6. *On désigne par $A([\omega])$ (resp. $A(\omega)$) l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de la structure $\sigma = [\omega]$(resp. de la forme ω). Ces algèbres de Lie sont de dimensions infinies. Le centre de $A([\omega])$ est engendré par la fonction nulle tandis que celui de $A(\omega)$ est engendré par les fonctions constantes.*

Définition 2.7. *On dit qu'une algèbre de Lie H de dimension finie n est réalisable comme sous-algèbre de $A([\omega])$ (resp. $A(\omega)$)si et seulement s'il existe n fonctions (resp. n intégrales premières de R)f_i $(1 \leq i \leq n)$ telles que :*

i) Les $\{f_i\}_{1\leq i\leq n}$ engendrent une algèbre de Lie isomorphe à H.

ii) Les $\{f_i\}_{1\leq i\leq n}$ sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel réel des fonctions sur M.

Définition 2.8. *Si $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est un point de $\mathbb{R}^4$ on pose :*

$$Z = x_1 + ix_2$$

et

$$Z' = x_3 + ix_4.$$

Z et Z' sont dans $\mathbb{C}$ de sorte que l'application : $x \longmapsto (Z, Z')$ réalise un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{C}^2$. La sphère S^3 devient le sous-espace de $\mathbb{C}^2$ d'équation : $|Z|^2 + |Z'|^2 = 1$.

Soit $h : S^3 \longmapsto S^3$ l'automorphisme défini par :

$$h(Z, Z') = \left(Z \exp\frac{2\pi i}{p}, Z' \exp\frac{2\pi iq}{p}\right)$$

avec p et q deux entiers premiers entre eux.

On note $L(p,q)$ le quotient de S^3 par le groupe engendré par h dans $SO(4)$.

$L(p,q)$ est une variété compacte, orientable de dimension trois, appelée espace lenticulaire. Son revêtement universel est S^3 et son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. En particulier $L(2,1) = P^3$(espace projectif).

Pour plus de détails voir [4].

Définition 2.9. *On définit les algèbres de Lie de dimension trois H_i pour $(1 \leq i \leq 9)$ par :*

Pour (H_1) on a $[f,g] = 0, [f,g] = 0, [f,g] = 0$.

Pour (H_2) on a $[f,g] = g, [f,h] = 0, [h,g] = 0$.

Pour (H_3) *on a* $[f,g]=h,[f,h]=0,[h,g]=0.$
Pour (H_4) *on a* $[f,g]=g+h,[f,h]=h,[h,g]=0.$
Pour (H_5) *on a* $[f,g]=\alpha g-h,[f,h]=g+\alpha h,[h,g]=0.$
Pour (H_6) *on a* $[f,g]=h,[g,h]=f,[h,f]=g.$
Pour (H_7) *on a* $[f,g]=h,[f,h]=g,[g,h]=f.$
Pour (H_8) *on a* $[f,g]=g,[f,h]=\alpha h,[h,g]=0.$
Pour (H_9) *on a* $[f,g]=g,[f,h]=h,[h,g]=0.$
Ce sont les seules à isomorphisme près voir [6].

3. Résultats principaux.

Théorème 3.1. *Soit* M_{2p+1} *une variété compacte de dimension impaire* $(2p+1)$ *munie d'une forme de contact* ω.

$1°/$ $A(\omega)$ *ne contient aucune sous-algèbre isomorphe à l'une des algèbres de Lie suivantes*

i) h_1 *engendrée par* f, g *et telle que :*

$$[f,g]=g.$$

ii) h_2 *engendrée par* f, g, h *et telle que :*

$$[f,h]=g+\alpha h, \quad [f,g]=\alpha g-h, \quad [g,h]=0, \quad (\alpha>0).$$

$2°/$ *Si* $p=1$ *et* h *est une sous-algèbre de* $A(\omega)$ *de dimension inférieure ou égale à* 4 *alors* h *est soit abélienne soit isomorphe à* $SO(3)$ *ou* $SO(3)\times R$.

$3°/$ *Si* $p=1$ *et* $SO(3)$ *est une sous-algèbre de* $A(\omega)$ *alors* M *est difféomorphe à* S^3 *ou à un espace lenticulaire* $L(p,q)$.

Théorème 3.2. *Soit* ω *la forme de contact définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par*

$$\omega = xdy+dz.$$

Alors :

Toute algèbre de lie de dimension trois est réalisable comme sous-algèbre de $A(\omega)$.

Théorème 3.3. *Soit* M *une variété de dimension trois munie d'une structure de contact* $\sigma=[\omega]$ *invariante par rapport à trois champs de vecteurs linéairement indépendants en chaque point de* M *et qui engendrent une algèbre de Lie* H *de dimension trois, alors :*

1°/ Si M est compacte alors :

i) H est isomorphe à $SO(3)$.

ii) M est difféomorphe à S^3 ou à un espace lenticulaire $L(p,q)$.

iii) Il existe un représentant ϖ unique à une constante multiplicative près de σ qui soit invariant par les éléments de H.

2°/ Si M n'est pas compacte alors :

i) H n'est pas isomorphe à H_9.

ii) Si H est isomorphe à H_3, H_6, H_7, ou H_{10},

alors :

Il existe un représentant ϖ pas nécessairement unique qui soit invariant par les éléments de H.

iii) Si H est isomorphe à H_2 , H_4 , H_5, ou H_8,

alors :

Le représentant $\varpi = \dfrac{\omega}{\sqrt{F}}$ (si F est positive) ou $\varpi = \dfrac{\omega}{\sqrt{-F}}$ (si F est négative) n'est pas invariant par tous les éléments de H. F étant la fonction $f.[g,h] + g.[h,f] + h.[f,g]$.

4. Lemmes.

Lemme 4.1. *Le crochet de Poisson de deux intégrales premières f et g du champ de Reeb R de ω sur une variété de dimension trois est donné par l'une des formules suivantes :*

$$[f,g] = X(g), [f,g] = -Y(f), [f,g] = d\omega(X,Y),$$

où X et Y sont deux automorphismes infinitésimaux de ω tels que

$$X(f) = 0, Y(g) = 0, \omega(X) = f, \omega(Y) = g.$$

D é m o n s t r a t i o n. Par définition

$$[f,g] = \omega([X,Y]).$$

De la relation

$$\omega([X,Y]) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - d\omega(X,Y)$$

on trouve que :

$$[f,g] = X(g) - Y(f) - d\omega(X,Y).$$

Les relations

$$L_X\omega = 0, L_Y\omega = 0,$$

donnent :

$$X\rfloor \quad d\omega + df = 0, Y\rfloor \quad d\omega + dg = 0.$$

En calculant ces expréssions en X et Y on trouve :

$$d\omega\,(X, Y) + Y\,(f) = 0, X\,(f) = 0, Y\,(g) = 0, d\omega\,(X, Y) - X\,(g) = 0.$$

En remplaçant dans l'expression de $[f, g]$ on trouve que :

$$[f, g] = X\,(g)\,, [f, g] = -Y\,(f)\,, [f, g] = d\omega\,(X, Y) \qquad \square$$

Lemme 4.2. *Soient X, Y et Z trois automorphismes infinitésimaux d'une forme de contact ω définie sur une variété M de dimension trois. Alors : Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

$i)$ X ,Y et Z sont linéairement indépendants en tout point de M.

$ii)$ La fonction

$$F = f.\,[g, h] + g.\,[h, f] + h.\,[f, g]\,,$$

est sans zéros où f, g et h sont les trois intégrales premières du champ de Reeb R de ω associées aux trois automorphismes infinitésimaux X, Y et Z.

Démonstration. $(\omega\wedge d\omega)(X, Y, Z) = \omega(X)d\omega(Y, Z) - \omega(Y)d\omega(X, Z) + \omega(Z)d\omega(X, Y)$ et puisque X, Y et Z sont des automorphismes infinitésimaus de ω on aura d'après le lemme 4.1 que :

$$[f, g] = d\omega\,(X, Y)\,, [g, h] = d\omega\,(Y, Z)\,, [f, h] = d\omega\,(X, Z)\,.$$

En remplaçant ces expressions dans $\omega \wedge d\omega$ on trouve :

$$(\omega \wedge d\omega)\,(X, Y, Z) = f\,[g, h] + g\,[h, f] + h\,[f, g]\,,$$

de sorte que X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point équivaut à

$$(\omega \wedge d\omega)\,(X, Y, Z) = F,$$

une fonction sans zéros. $\square$

Lemme 4.3. *Soit M une variété compacte de dimension $(2p+1)$. L'algèbre de Lie affine de dimension deux définie par*

$$[f, g] = g,$$

ne peut être réalisée comme sous-algèbre de $A(\omega)$.

D é m o n s t r a t i o n. L'équation

$$[f, g] = g,$$

implique d'après le lemme 4.1 que :

$$X(g) = g$$

et puisque M est compacte g admet ses extremums en deux points quelconques de M. En de tels points dg et par suite $X(g)$ sont nulles. Ainsi g est nulle en ses extremums, donc elle est identiquement nulle et l'algèbre de Lie affine ne peut être réalisée comme sous-algèbre de $A(\omega)$. □

Lemme 4.4. *Considérons l'algèbre de Lie de dimension trois engendrée par* f, g *et* h *dont la loi est donnée par :*

$$[f, g] = \alpha g - h, [f, h] = g + \alpha h, [g, h] = 0, (\alpha \rangle 0)\,.$$

i) Si M *est une variété compacte de dimension* $(2p+1)$ *alors cette algèbre ne peut être réalisée comme sous-algèbre de* $A(\omega)$.

ii) Si M *n'est pas compacte et de dimension trois, cette algèbre peut être réalisée avec des champs linéairement indépendants en chaque point si on prend* $\left(g^2 + h^2\right)$ *une fonction sans zéro.*

D é m o n s t r a t i o n. *i)* Par définition on a :

$$\left[f, g^2 + h^2\right] = X\left(g^2 + h^2\right) = 2gX(g) + 2hX(h)\,.$$

D'après le lemme 4.1 on a :

$$[f, g] = X(g)\,, [f, h] = X(h)\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}[f, g^2 + h^2] &= 2g[f, g] + 2h[f, h] = 2g(\alpha g - h) + 2h(g + \alpha h) \\ &= 2\alpha(g^2 + h^2).\end{aligned}$$

Ainsi les fonctions f et $\left(g^2 + h^2\right)$ engendrent une algèbre de Lie affine de dimension deux et d'après le lemme 4.2 on déduit que g et h sont identiquement nulles. Donc cette algèbre ne peut être réalisée comme sous-algèbre de $A(\omega)$.

ii) Si M n'est pas compacte, la fonction

$$F = f.\,[g, h] + g.\,[h, f] + h.\,[f, h]$$

est égale à $\left(-g^2 - h^2\right)$ et l'algèbre peut être réalisée avec des champs de vecteurs linéairement indépendants en chaque point de M. $\square$

Lemme 4.5. *Considérons l'algèbre de Lie de dimension trois engendrée par f, g, h et telles que :*

$$[f,g] = -h, [f,h] = g, [g,h] = 0.$$

i) Si M est une variété compacte de dimension trois, l'algèbre n'est pas réalisable comme sous-algèbre de $A(\omega)$.

ii) Si M n'est pas compacte, de dimension trois et si cette algèbre est réalisée comme sous-algèbre de $A(\omega)$, alors la fonction F est sans zéros et les automorphismes infinitésimaux X, Y et Z de ω associés aux intégrales premières du champ de Reeb R de ω sont linéairement indépendants en tout point de M.

Démonstration. Posons :

$$\sum = \left\{x \in M : g^2 + h^2 = 0\right\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} X\left(g^2+h^2\right) &= 2gX(g) + 2hX(h), Y\left(g^2+h^2\right) = 2gY(g) + 2hY(h), \\ Z\left(g^2+h^2\right) &= 2gZ(g) + 2hZ(h). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.1 on obtient les équations

$$\begin{aligned} [f,g] &= X(g), [f,h] = X(h), [g,h] = Y(h), [h,g] = Z(g), \\ Y(g) &= 0, Z(h) = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$X\left(g^2+h^2\right) = 0, Y\left(g^2+h^2\right) = 0, Z\left(g^2+h^2\right) = 0.$$

Sur $(M - \sum)$ la fonction F égale à

$$g^2 + h^2,$$

est non nulle et les champs de vecteurs X, Y et Z sont linéairement indépendants en tout point de $(M - \sum)$ donc F est une constante. Ainsi F est constante sur $(M - \sum)$, nulle sur $\sum$, par continuité on déduit que la fonction

$$g^2 + h^2,$$

est soit identiquement nulle et $\sum$ est égal à M, soit une constante non nulle et $\sum$ est vide, donc :

i) Lorsque M est compacte, il existe un point x de M où $df_x = 0$, par conséquent les fonctions

$$g = [f,h] = -Z(f) \text{ et } h = -[f,g] = Y(f),$$

s'annulent aussi , donc on est dans la situation $\sum$ égal à M et l'algèbre n'est pas réalisable comme sous-algèbre de $A(\omega)$.

ii) Si M n'est pas compacte et si cette algèbre est réalisable comme sous-algèbre de $A(\omega)$ alors on est dans le cas $\sum$ vide et la fonction F est sans zéros, et par suite les automorphismes infinitésimaux X Y et Z associés aux intégrales premières f, g et h du champ de Reeb R de ω sont linéairement indépendants en chaque point de M. □

Lemme 4.6. *Soit M une variété de dimension trois. Si l'algèbre d'Heisenberg de dimension trois est réalisable comme sous-algèbre de $A(\omega)$ alors :*

i) Si les intégrales premières f, g et h du champ de Reeb R de ω engendrent une telle algèbre avec

$$[f,g] = h, [f,h] = 0, [g,h] = 0,$$

alors h est une constante et les automorphismes infinitésimaux X, Y et Z de ω associés à f, g et h sont linéairement indépendants en tout point de M.

ii) M est non compacte.

Démonstration. La fonction

$$F = f.[g,h] + g.[h,f] + h.[f,g],$$

dans ce cas vaut h^2 et on a :

$$\begin{aligned} X\left(h^2\right) &= 2hX(h) = 2h[f,h] = 0, Y\left(h^2\right) = 2hY(h) = 2h[g,h] = 0, \\ Z\left(h^2\right) &= 2hZ(h) = 0. \end{aligned}$$

Posons $\sum = \{x \in M : h(x) = 0\}$.

i) Sur $(M - \sum)$, h est sans zéros, donc h^2 aussi, et par suite les champs X, Y et Z sont linéairement indépendants en tout point de $(M - \sum)$ d'après lemme 4.2 et h est une constante. Et comme h est continue on déduit que h est soit identiquement nulle sur M et l'algèbre n'est pas réalisable, soit égale à une constante non nulle et dans ce cas $\sum$ est vide et l'algèbre est réalisée avec des champs X, Y et Z linéairement indépendants en tout point de M.

ii) Si M est compacte on a par définition $h = [f, g] = X(g)$ et puisque dg sannule au moins en un point x de M alors il en est de meme pour $X(g)$ et h et ainsi $\sum$ n'est pas vide, donc égal à M et h est identiquement nulle est l'algèbre n'est pas réalisable comme sous-algèbre de $A(\omega)$. □

Lemme 4.7. *Soit M une variété de dimension trois munie d'une forme de contact ω. Si f, g et h sont trois intégrales premières de R engendrant $SO(3)$ alors la fonction*

$$F = f.[g,h] + g.[h,f] + h.[f,g],$$

est une constante, et les automorphismes infinitésimaux associés X, Y et Z sont linéairement indépendants en tout point de M.

Démonstration. Soit

$$F = f.[g,h] + g.[h,f] + h.[f,g] = f^2 + g^2 + h^2,$$

on a :

$$\begin{aligned} X(F) &= 2fX(f) + 2gX(g) + 2hX(h), Y(F) = 2fY(f) + 2gY(g) + 2hY(h), \\ Z(F) &= 2fZ(f) + 2gZ(g) + 2hZ(h). \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.1 on a :

$$\begin{aligned} X(f) &= 0, Y(g) = 0, Z(h) = 0, \\ [f,g] &= X(g) = -Y(f), [f,h] = X(h) = -Z(f), [g,h] = Y(h) = Z(g). \end{aligned}$$

En remplacant ces expréssions dans $X(F)$, $Y(F)$ et $Z(F)$ on obtient :

$$X(F) = 0, Y(F) = 0, Z(F) = 0.$$

Soit $\sum = \{x \in M : F = 0\} = \{x \in M : f = g = h = 0\}$.

Sur $(M - \sum)$ F est sans zéros, donc X, Y et Z sont linéairement indépendants en tout point de $(M - \sum)$, donc F est une constante non nulle et par continuité F est soit une constante non nulle sur tout M et $\sum$ est vide, soit identiquement nulle sur. M et $\sum$ est égal à M. Ainsi si $SO(3)$ est réalisable comme sous-algèbre de $A(\omega)$ on est dans la situation $\sum$ vide et F constante non nulle sur tout M et les automorphismes infinitésimaux X, Y et Z associés aux intégrales premières f g et h du champ de Reeb R de ω sont linéairement indépendants en chaque point de M. □

Lemme 4.8. *Le crochet de Poisson de deux fonctions f et g sur une variété de dimension trois est donné par l'une des formules suivantes*

$$[f,g] = X(g) - g.R(f), [f,g] = f.R(g) - Y(f),$$

où R est le champ de Reeb de ω et X, Y les deux automorphismes infinitésimaux de la structure de contact $\sigma = [\omega]$ associés aux fonctions f et g.

Démonstration. Par définition

$$[f,g] = \omega([X,Y]).$$

De la relation

$$\omega([X,Y]) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - d\omega(X,Y)$$

on trouve que

$$[f,g] = X(g) - Y(f) - d\omega(X,Y).$$

Les relations

$$L_X\omega \wedge \omega = 0, L_Y\omega \wedge \omega = 0,$$

donnent :

$$X\rfloor \quad d\omega + df = R(f)\omega, Y\rfloor \quad d\omega + dg = R(g)\omega.$$

En calculant ces expréssions en X et Y on trouve

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y) + Y(f) &= g.R(f), X(f) = f.R(f), Y(g) = g.R(g), \\ d\omega(Y,X) + X(g) &= f.R(g). \end{aligned}$$

En remplaçant dans $[f,g]$ on trouve le résultat demandé □

Lemme 4.9. *Soient X, Y et Z trois automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact $\sigma = [\omega]$ définie sur une variété M de dimension trois. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) X, Y et Z sont linéairement indépendants en tout point de M.

ii) La fonction

$$F = f.[g,h] + g.[h,f] + h.[f,g],$$

est sans zéros où f, g et h sont les trois fonctions associées aux trois automorphismes infinitésimaux X, Y et Z de $\sigma = [\omega]$.

D é m o n s t r a t i o n.

$$(\omega \wedge d\omega)(X,Y,Z) = \omega(X).d\omega(Y,Z) - \omega(Y).d\omega(X,Z) + \omega(Z).d\omega(X,Y)$$

et puisque X, Y et Z sont des automorphismes infinitésimaus de $[\omega]$ on aura d'après le lemme 4.8 que :

$$\begin{aligned} d\omega\,(X,Y) &= [f,g] - f.R\,(g) + g.R\,(f)\,, d\omega\,(X,Z) = [f,h] - f.R\,(h) + h.R\,(f)\,, \\ d\omega\,(Y,Z) &= [g,h] - g.R\,(h) + h.R\,(g)\,. \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans $\omega \wedge d\omega$ on trouve :

$$(\omega \wedge d\omega)\,(X,Y,Z) = f\,[g,h] + g\,[h,f] + h\,[f,g]\,,$$

de sorte que X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point équivaut à

$$(\omega \wedge d\omega)\,(X,Y,Z) = F,$$

une fonction sans zéros. □

Lemme 4.10. *Soit $\sigma = [\omega]$ une structure de contact invariante par rapport à trois champs de vecteurs X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre de Lie définie par :*

$$[f,g] = h, [g,h] = f, [h,f] = g.$$

Alors :

il existe un représentant ϖ (unique si M est compacte) qui le soit aussi.

D é m o n s t r a t i o n. Si $\sigma = [\omega]$ est invariante par rapport aux trois champs de vecteurs X, Y et Z qui sont linéairement indépendants en chaque point d'une variété M,alors d'après le lemme 4.9 la fonction F égale à $\left(f^2+g^2+h^2\right)$ est sans zéros.

Posons :

$$\varpi = \frac{1}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\omega.$$

On a :

$$L_X\varpi = \left[X\left(\frac{1}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\right) + \frac{R\,(f)}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\right]\omega.$$

Et puisque

$$X\left(\frac{1}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\right)=-\frac{fX(f)+gX(g)+hX(h)}{(f^2+g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{f.(fR(f))+g(h+gR(f))+h(-g+gR(f))}{(f^2+g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{\left(f^2+g^2+h^2\right)R(f)}{(f^2+g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{R(f)}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}.$$

Donc

$$L_X\varpi=0.$$

De meme on a

$$L_Y\varpi=\left[Y\left(\frac{1}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\right)+\frac{R(G)}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\right]\omega.$$

Et puisque

$$Y\left(\frac{1}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\right)=-\frac{fY(f)+gY(g)+hY(h)}{(f^2+g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{f.(fR(g)-h)+g(gR(g))+h(f+hR(g))}{(f^2+g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{\left(f^2+g^2+h^2\right)R(g)}{(f^2+g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{R(g)}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}.$$

Donc

$$L_Y\varpi=0.$$

De meme on a

$$L_Z\varpi=\left[Z\left(\frac{1}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\right)+\frac{R(h)}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\right]\omega$$

Et puisque

$$Z\left(\frac{1}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\right)=-\frac{fZ(f)+gZ(g)+hZ(h)}{(f^2+g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{f.\left(g + fR\left(h\right)\right) + g\left(-f + gR\left(h\right)\right) + h\left(hR\left(h\right)\right)}{\left(f^2+g^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{\left(f^2+g^2+h^2\right)R\left(h\right)}{\left(f^2+g^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R\left(h\right)}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}.$$

Donc

$$L_Z\varpi = 0.$$

Par conséquent la forme

$$\varpi = \frac{1}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\omega,$$

est de contact et invariante par une action localement libre de $SO(3)$ avec,

$$\left[\frac{f}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}};\frac{g}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\right] = \frac{h}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}},$$

$$\left[\frac{g}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}};\frac{h}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\right] = \frac{f}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}},$$

$$\left[\frac{h}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}};\frac{f}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\right] = \frac{g}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}.$$

Lorsque M est compacte on sait que tout autre représentant est de la forme $\lambda\omega$ avec λ une fonction sans zéros (voir définition (2.1)) et on cherche λ en posant : $\varpi = \lambda\omega$ avec

$$\omega\left(X\right) = \lambda f, \omega\left(Y\right) = \lambda g, \omega\left(Z\right) = \lambda h,$$

ce qui donne

$$\varpi\left(X\right) = \lambda f, \varpi\left(Y\right) = \lambda g, \varpi\left(Z\right) = \lambda h,$$

et d'après le lemme 4.7 on a :

$$\left(\lambda f\right)^2 + \left(\lambda g\right)^2 + \left(\lambda h\right)^2 = k^2,$$

avec k une constante non nulle, ce qui donne

$$\lambda^2 = \frac{k^2}{f^2+g^2+h^2},$$

c'est à dire

$$\lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\,(\alpha \in \mathbb{R})\,,$$

et ϖ est unique à une constante multiplicative prés. $\square$

Lemme 4.11. *Soit $\sigma = [\omega]$ une structure de contact invariante par rapport à trois champs de vecteurs X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre de Lie définie par :*

$$[f,g] = h, [f,h] = 0, [g,h] = 0.$$

Alors :

i) il existe un représentant ϖ qui le soit aussi.

ii) M n'est pas compacte.

Démonstration. Si $\sigma = [\omega]$ est invariante par rapport aux trois champs de vecteurs X, Y et Z qui sont linéairement indépendants en chaque point d'une variété M, alors d'après le lemme 4.9 la fonction F égale à h^2 est sans zéros.

Posons

$$\varpi = \frac{\omega}{h},$$

on a une forme de contact et puisque

$$\begin{aligned}
L_X\varpi &= \left[X\left(\frac{1}{h}\right)+\frac{R\,(f)}{h}\right]\omega = \left[\frac{-X\,(h)+h.R\,(f)}{h^2}\right]\omega = -\,[f,h]\,\omega = 0,\\
L_Y\varpi &= \left[Y\left(\frac{1}{h}\right)+\frac{R\,(g)}{h}\right]\omega = \left[\frac{-Y\,(h)+h.R\,(g)}{h^2}\right]\omega = -\,[g,h]\,\omega = 0,\\
L_Z\varpi &= \left[Z\left(\frac{1}{h}\right)+\frac{R\,(h)}{h}\right]\omega = \left[\frac{-Z\,(h)+h.R\,(h)}{h^2}\right]\omega = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi

i) ϖ est invariante par rapport à trois champs de vecteurs X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre d'Heisenberg avec :

$$\left[\frac{f}{h},\frac{g}{h}\right] = 1, \left[\frac{f}{h},1\right] = 0, \left[\frac{g}{h},1\right] = 0.$$

ii) M n'est pas compacte à cause du lemme 4.6. □

Lemme 4.12. *Soit $\sigma = [\omega]$ une structure de contact invariante par rapport à trois champs de vecteurs X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre définie par :*

$$[f, g] = -h, \quad [f, h] = g, \quad [g, h] = 0.$$

Alors

i) Si M est compacte il n'existe aucun représentant ϖ qui le soit aussi.

ii) Si M n'est pas compacte,il existe au moins un représentant qui le soit aussi.

Démonstration. Si $\sigma = [\omega]$ est invariante par rapport aux trois champs de vecteurs X, Y et Z qui sont linéairement indépendants en chaque point d'une variété M,alors d'après le lemme 4.9 la fonction F égale à $-\left(g^2 + h^2\right)$ est sans zéros.

Posons

$$\varpi = \frac{\omega}{\sqrt{g^2 + h^2}},$$

on a une forme de contact avec

$$L_X \varpi = \left[X \left(\frac{1}{\sqrt{g^2 + h^2}} \right) + \frac{R(f)}{\sqrt{g^2 + h^2}} \right] \omega.$$

Et puisque

$$\begin{aligned} X \left(\frac{1}{\sqrt{g^2 + h^2}} \right) &= -\frac{gX(g) + hX(h)}{(g^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{g(h + gR(f)) + h(-g + hR(f))}{(g^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\left(g^2 + h^2\right) R(f)}{(g^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R(f)}{\sqrt{g^2 + h^2}} \end{aligned}$$

donc

$$L_X \varpi = 0$$

et de la meme façon on a

$$L_Y \varpi = \left[Y \left(\frac{1}{\sqrt{g^2 + h^2}} \right) + \frac{R(g)}{\sqrt{g^2 + h^2}} \right] \omega.$$

Et puisque

$$\begin{aligned} Y\left(\frac{1}{\sqrt{g^2+h^2}}\right) &= -\frac{gY(g)+hY(h)}{(g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{g(gR(g))+h(hR(g))}{(g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\left(g^2+h^2\right)R(g)}{(g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R(g)}{\sqrt{g^2+h^2}} \end{aligned}$$

on obtient

$$L_Y\varpi = 0$$

et de la meme facon on

$$L_Z\varpi = \left[Z\left(\frac{1}{\sqrt{g^2+h^2}}\right) + \frac{R(h)}{\sqrt{g^2+h^2}}\right]\omega.$$

$$\begin{aligned} Z\left(\frac{1}{\sqrt{g^2+h^2}}\right) &= -\frac{gZ(g)+hZ(h)}{(g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{g(hR(h))+h(hR(h))}{(g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\left(g^2+h^2\right)R(h)}{(g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R(h)}{\sqrt{g^2+h^2}} \end{aligned}$$

on obtient

$$L_Z\varpi = 0.$$

Ainsi

i) Si M est compacte il n'existe aucun représentant ϖ qui le soit aussi à cause du lemme 4.5.

ii) Si M n'est pas compacte, ϖ est invariante par rapport à trois champs de vecteurs X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre donnée avec

$$\begin{aligned} \left[\frac{f}{\sqrt{g^2+h^2}}, \frac{g}{\sqrt{g^2+h^2}}\right] &= \frac{-h}{\sqrt{g^2+h^2}}, \\ \left[\frac{f}{\sqrt{g^2+h^2}}, \frac{h}{\sqrt{g^2+h^2}}\right] &= \frac{g}{\sqrt{g^2+h^2}}, \\ \left[\frac{h}{\sqrt{g^2+h^2}}, \frac{g}{\sqrt{g^2+h^2}}\right] &= 0. \end{aligned}$$

□

Lemme 4.13. *Soit $\sigma = [\omega]$ une structure de contact invariante par rapport à trois champs de vecteurs X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre H_α définie par :*

$$\begin{array}{rcl} [f,g] & = & \alpha g - h, \\ [f,h] & = & g + \alpha h, \\ [g,h] & = & 0, (\alpha \rangle 0) . \end{array}$$

i) Si M est compacte il n'existe aucun représentant ϖ qui le soit aussi.

ii) Si M n'est pas compacte, le représentant

$$\varpi = \frac{\omega}{\sqrt{g^2 + h^2}}$$

n'est pas invariant.

D é m o n s t r a t i o n.

i) Si M est compacte il n'existe aucun représentant ϖ qui le soit aussi à cause du lemme 4.4.

ii) Si M n'est pas compacte, le représentant

$$\varpi = \frac{\omega}{\sqrt{g^2 + h^2}},$$

n'est pas invariant.

En effet on a

$$L_X \varpi = \left[X \left(\frac{1}{\sqrt{g^2 + h^2}} \right) + \frac{R(f)}{\sqrt{g^2 + h^2}} \right] \omega.$$

Et puisque

$$\begin{aligned} X \left(\frac{1}{\sqrt{g^2 + h^2}} \right) &= -\frac{gX(g) + hX(h)}{(g^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{g([f,g] + gR(f)) + h([f,h] + hR(f))}{(g^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{(g^2 + h^2)(R(f) + \alpha)}{(g^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{(R(f) + \alpha)}{\sqrt{g^2 + h^2}}, \end{aligned}$$

donc

$$L_X\varpi = \alpha\varpi.$$

De meme on a :

$$L_Y\varpi = \left[Y\left(\frac{1}{\sqrt{g^2+h^2}}\right) + \frac{R(g)}{\sqrt{g^2+h^2}}\right]\omega.$$

Et puisque

$$\begin{aligned} Y\left(\frac{1}{\sqrt{g^2+h^2}}\right) &= -\frac{gY(g)+hY(h)}{(g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{g(gR(g))+h(hR(g))}{(g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\left(g^2+h^2\right)R(g)}{(g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R(f)}{\sqrt{g^2+h^2}}, \end{aligned}$$

donc

$$L_Y\varpi = 0,$$

de la meme manière

$$L_Z\varpi = \left[Z\left(\frac{1}{\sqrt{g^2+h^2}}\right) + \frac{R(h)}{\sqrt{g^2+h^2}}\right]\omega.$$

Et puisque

$$\begin{aligned} Z\left(\frac{1}{\sqrt{g^2+h^2}}\right) &= -\frac{gZ(g)+hZ(h)}{(g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{g(gR(h))+h(hR(h))}{(g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\left(g^2+h^2\right)R(h)}{(g^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R(f)}{\sqrt{g^2+h^2}} \end{aligned}$$

donc

$$L_Z\varpi = 0.$$

Ainsi ϖ n'est pas invariante par rapport à tous les éléments de H. □

Lemme 4.14. *Soit $\sigma = [\omega]$ une structure de contact invariante par rapport à trois champs de vecteurs X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre de Lie définie par :*

$$[f,g] = h, [g,h] = f, [f,h] = g.$$

Alors :

i) il existe un représentant ϖ qui le soit aussi.

ii) M n'est pas compacte.

Démonstration. Si $\sigma = [\omega]$ est invariante par rapport aux trois champs de vecteurs X, Y et Z qui sont linéairement indépendants en chaque point d'une variété M, alors d'après le lemme 4.9 la fonction F égale à $\left(f^2 - g^2 + h^2\right)$ est sans zéros.

Posons

$$\varpi = \frac{1}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}\omega.$$

On a :

$$L_X \varpi = \left[X\left(\frac{1}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}\right) + \frac{R(f)}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}\right]\omega.$$

Et puisque

$$X\left(\frac{1}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}\right) = -\frac{fX(f)) - gX(g) + hX(h)}{(f^2 - g^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{f.(fR(f)) - g(h + gR(f)) + h(g + hR(f))}{(f^2 - g^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{\left(f^2 - g^2 + h^2\right) R(f)}{(f^2 - g^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R(f)}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}.$$

donc

$$L_X \varpi = 0.$$

De la meme manière on a

$$L_Y \varpi = \left[Y\left(\frac{1}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}\right) + \frac{R(g)}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}\right]\omega.$$

Et puisque

$$Y\left(\frac{1}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}\right) = -\frac{fY(f) - gY(g) + hY(h)}{(f^2 - g^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{f.(-h + fR(g)) - g(gR(g)) + h(f + hR(g))}{(f^2 - g^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{\left(f^2 - g^2 + h^2\right) R(g)}{\left(f^2 - g^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R(g)}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}},$$

donc

$$L_Y \varpi = 0.$$

De meme on a

$$L_Z \varpi = \left[Z\left(\frac{1}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}\right) + \frac{R(h)}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}} \right] \omega.$$

Et puisque

$$Z\left(\frac{1}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}\right) = -\frac{fZ(f) - gZ(g) + hZ(h)}{\left(f^2 - g^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{f.\left(-g + fR(h)\right) - g\left(-f + gR(h)\right) + h\left(hR(h)\right)}{\left(f^2 - g^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{\left(f^2 - g^2 + h^2\right) R(h)}{\left(f^2 - g^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R(h)}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}.$$

Donc

$$L_Z \varpi = 0.$$

Par conséquent la forme

$$\varpi = \frac{1}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}} \omega,$$

est de contact et invariante par une action localement libre de $SL(2, \mathbb{R})$ avec

$$\begin{aligned}
\left[\frac{f}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}; \frac{g}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}\right] &= \frac{h}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}, \\
\left[\frac{g}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}; \frac{h}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}\right] &= \frac{f}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}, \\
\left[\frac{f}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}; \frac{h}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}\right] &= \frac{g}{\sqrt{f^2 - g^2 + h^2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi

i) Si M est compacte il n'existe aucun représentant ϖ qui le soit aussi à cause du théorème (1).

ii) Si M n'est pas compacte, ϖ est invariante par rapport à trois champs de vecteurs X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à $SL(2,\mathbb{R})$. $\square$

Lemme 4.15. *Soit $\sigma = [\omega]$ une structure de contact invariante par rapport à trois champs de vecteurs X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre de Lie définie par :*

$$[f,g] = g, [f,h] = \alpha h, [g,h] = 0, (\alpha \epsilon \mathbb{R}).$$

Alors :

i) le représentant $\varpi = \dfrac{\omega}{h}$ n'est pas invariant par rapport aux trois champs de vecteurs X, Y et Z qui sont linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre donnée.

ii) M n'est pas compacte.

Démonstration. Si $\sigma = [\omega]$ est invariante par rapport aux trois champs de vecteurs X, Y et Z qui sont linéairement indépendants en chaque point d'une variété M, alors d'après le lemme 4.9 la fonction F égale à $(1-\alpha)\, g.h$ est sans zéros.

Si $\alpha = 1$, cette algèbre n'est pas réalisable comme sous-algèbre de $A[\omega]$ d'aprè le lemme 4.9.

Pour α différent de 1 :

Posons :

$$\varpi = \frac{\omega}{\sqrt{(1-\alpha)\,.g.h}}.$$

On a une forme de contact et

$$L_X \varpi = \left[X\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)\,.g.h}}\right) + \frac{R(f)}{\sqrt{(1-\alpha)\,.g.h}} \right] \omega.$$

Et puisque

$$X\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha).g.h}}\right) = \frac{(1-\alpha)\left[-g.X(h)-h.X(g)\right]}{2\left((1-\alpha).g.h\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(1-\alpha)\left[-g.(\alpha h+hR(f))-h.(g+gR(f))\right]}{2\left((1-\alpha).g.h\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(\alpha-1)\left[(1+\alpha)gh+2ghR(f)\right]}{2\left((1-\alpha).g.h\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1+\alpha)R(f)}{2\sqrt{(1-\alpha).g.h}},$$

on déduit que

$$L_X\varpi = \frac{(1+\alpha)}{2}\varpi$$

De manière analogue on démontre que

$$L_Y\varpi = \left[Y\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha).g.h}}\right) + \frac{R(g)}{\sqrt{(1-\alpha).g.h}}\right]\omega.$$

Et puisque

$$Y\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha).g.h}}\right) = \frac{(1-\alpha)\left[-g.Y(h)-h.Y(g)\right]}{2\left((1-\alpha).g.h\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(1-\alpha)\left[-g.hR(g)-h.(gR(g))\right]}{2\left((1-\alpha).g.h\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\alpha-1)\left[-2ghR(g)\right]}{2\left((1-\alpha).g.h\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-R(f)}{\sqrt{(1-\alpha).g.h}},$$

on déduit que

$$L_Y\varpi = 0$$

de la meme mamiére on a

$$L_Z\varpi = \left[X\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha).g.h}}\right) + \frac{R(h)}{\sqrt{(1-\alpha).g.h}}\right]\omega.$$

Et puisque

$$\begin{aligned} Z\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha).g.h}}\right) &= \frac{(1-\alpha)\left[-g.Z(h)-h.Z(g)\right]}{2\left((1-\alpha).g.h\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(1-\alpha)\left[-g.hR(h)-h.\left(gR(h)\right)\right]}{2\left((1-\alpha).g.h\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(1-\alpha)\left[-2ghR(h)\right]}{2\left((1-\alpha).g.h\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-R(h)}{\sqrt{(1-\alpha).g.h}}. \end{aligned}$$

Donc

$$L_Z\varpi = 0.$$

Ainsi ϖ n'est pas invariante par rapport à tous les éléments de H sauf si $\alpha = -1$. $\square$

Lemme 4.16. *Soit $\sigma = [\omega]$ une structure de contact invariante par rapport à trois champs de vecteurs X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre de Lie définie par :*

$$[f,g] = g+h, [f,h] = h, [g,h] = 0.$$

Alors :

i) le représentant $\varpi = \dfrac{\omega}{h}$ n'est pas invariant par rapport aux trois champs de vecteurs X, Y et Z qui sont linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre donnée.

ii) M n'est pas compacte.

D é m o n s t r a t i o n. Si $\sigma = [\omega]$ est invariante par rapport aux trois champs de vecteurs X, Y et Z qui sont linéairement indépendants en chaque point d'une variété M,alors d'après le lemme 4.9 la fonction F égale à h^2 est sans zéros.

Posons :

$$\varpi = \frac{\omega}{h}.$$

On a une forme de contact, et puisque

$$\begin{aligned}
L_X\varpi &= \left[X\left(\frac{1}{h}\right)+\frac{R(f)}{h}\right]\omega=\left[\frac{-X(h)+h.R(f)}{h^2}\right]\omega=-\frac{1}{h}\omega=-\varpi \\
L_Y\varpi &= \left[Y\left(\frac{1}{h}\right)+\frac{R(g)}{h}\right]\omega=\left[\frac{-Y(h)+h.R(g)}{h^2}\right]\omega=0, \\
L_Z\varpi &= \left[Z\left(\frac{1}{h}\right)+\frac{R(h)}{h}\right]\omega=\left[\frac{-Z(h)+h.R(h)}{h^2}\right]\omega=0,
\end{aligned}$$

alors ϖ n'est pas invariante. Ainsi :

i) Si M est compacte il n'existe aucun représentant ϖ qui soit invariant à cause du théorème 3.1.

ii) Si M n'est pas compacte, ϖ n'est pas invariante par rapport à trois champs de vecteurs X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre donnée. $\square$

Lemme 4.17. *Soit $\sigma=[\omega]$ une structure de contact invariante par rapport à trois champs de vecteurs X, Y et Z linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre de Lie définie par :*

$$[f,g]=g,[f,h]=0,[g,h]=0.$$

Alors :

i) le représentant $\varpi=\dfrac{\omega}{g.h}$ n'est pas invariant par rapport aux trois champs de vecteurs X, Y et Z qui sont linéairement indépendants en chaque point d'une variété M de dimension trois et qui engendrent une algèbre de lie de dimension trois isomorphe à l'algèbre donnée.

ii) M n'est pas compacte.

Démonstration. Si $\sigma=[\omega]$ est invariante par rapport aux trois champs de vecteurs X, Y et Z qui sont linéairement indépendants en chaque point d'une variété M,alors d'après le lemme 4.9 la fonction F égale à $g.h$ est sans zéros.

Posons :

$$\varpi=\frac{\omega}{\sqrt{g.h}}.$$

On a une forme de contact et

$$L_X\varpi = \left[X\left(\frac{1}{\sqrt{g.h}}\right) + \frac{R(f)}{\sqrt{g.h}}\right]\omega.$$

Et puisque

$$\begin{aligned} X\left(\frac{1}{\sqrt{g.h}}\right) &= \frac{[-g.X(h) - h.X(g)]}{2(g.h)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{[-g.(hR(f)) - h.(g + gR(f))]}{2(g.h)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-2g.h.R(f) - h.g}{2(g.h)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Ainsi on a donc

$$L_X\varpi = -\frac{1}{2}\varpi.$$

De la meme maniére on a

$$L_Y\varpi = \left[Y\left(\frac{1}{\sqrt{g.h}}\right) + \frac{R(g)}{\sqrt{g.h}}\right]\omega.$$

Et puisque

$$\begin{aligned} Y\left(\frac{1}{\sqrt{g.h}}\right) &= \frac{[-g.Y(h) - h.Y(g)]}{2(g.h)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{[-g.(hR(g)) - h.(gR(g))]}{2(g.h)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-g.h.R(f)}{(g.h)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-R(f)}{\sqrt{(g.h)}}. \end{aligned}$$

Ainsi on a donc

$$L_Y\varpi = 0.$$

De la meme maniére

$$L_Z\varpi = \left[Z\left(\frac{1}{\sqrt{g.h}}\right) + \frac{R(h)}{\sqrt{g.h}}\right]\omega.$$

Et puisque

$$\begin{aligned} Z\left(\frac{1}{\sqrt{g.h}}\right) &= \frac{[-g.Z(h) - h.Z(g)]}{2(g.h)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{[-g.(hR(h)) - h.gR(h)]}{2(g.h)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-g.h.R(f)}{(g.h)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-R(f)}{\sqrt{g.h}}. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$L_Z\varpi = 0.$$

Et par suite ϖ n'est pas invariante par tous les éléments de l àlgèbre donnée. □

5. Démonstration du théorème 3.1. La démonstration est basée sur la classification des algèbres de Lie résolubles et semi-simples de dimensions inférieures ou égales à 4, voir [6]. Ainsi toute algèbre de Lie contenant dans sa représentation une sous-algèbre isomorphe à l'une des algèbres citées dans les lemmes 4.3, 4.4, 4.5 et 4.6 ne peut être réalisée comme sous-algèbre de $A(\omega)$, d'où la démonstration de 1) et 2) du théorème.

Si maintenant $SO(3)$ est réalisée comme sous-algèbre de $A(\omega)$ alors d'après le lemme 4.7, les champ X, Y et Z sont linéairement indépendants en tout point de M c'est-à-dire la fonction F est sans zéros, ainsi on a une application $\tau : M \longrightarrow S^2$ de rang maximum 2 :

En effet si $f^2 + g^2 + h^2$ est sans zéros on a par exemple au moins un $x_0 \in M$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

Soient α et β telles que

$$\alpha dg + \beta dh = 0,$$

en appliquant Y et Z à cette expression on obtient :

$$Y(\alpha dg + \beta dh) = 0, Z(\alpha dg + \beta dh) = 0$$

ce qui donne

$$\alpha Y(g) + \beta Y(h) = 0, \alpha Z(g) + \beta Z(h) = 0,$$

et puisque

$$Y\left(g\right)=0, Z\left(h\right)=0, [g,h]=Y\left(h\right)=-f, [h,g]=Z\left(g\right)=f,$$

on obtient que

$$\alpha f=0, \beta f=0$$

et par suite $\alpha=\beta=0$ de sorte que l'application τ est de rang deux, donc c'est une submersion, et puisque M est compacte, c'est une fibration localement triviale. De plus on sait qu'il existe un groupe de Lie connexe G et une action localement libre de G sur M dont les transformations infinitésimales sont les éléments de $SO(3)$. Les orbites de l'action sont alors des sous-variétés de dimensions trois de M difféomorphes au quotient de G par un sous-groupe discret d'où M ne peut être que S^3 ou un espace lenticulaire $L\left(p,q\right)$.

6. Exemple pour le théorème 3.1. Considérons la forme de contact sur S^3 définie par

$$\omega=i^*\left(x_1dx_2-x_2dx_1+x_3dx_4-x_4dx_3\right).$$

Son champ de Reeb R est donné par :

$$R=-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_4\frac{\partial}{\partial x_3}+x_3\frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Les champs

$$\begin{aligned}
Y_1&=-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_4\frac{\partial}{\partial x_3}+x_3\frac{\partial}{\partial x_4},\\
Y_2&=-x_3\frac{\partial}{\partial x_1}+x_4\frac{\partial}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial}{\partial x_3}-x_2\frac{\partial}{\partial x_4},\\
Y_3&=-x_4\frac{\partial}{\partial x_1}-x_3\frac{\partial}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial}{\partial x_3}+x_1\frac{\partial}{\partial x_4},
\end{aligned}$$

forment une base de champs de vecteurs sur S^3.

Par conséquent si X et Y sont deux automorphismes infinitésimaux de la forme de contact ω avec

$$\omega\left(X\right)=f, \omega\left(Y\right)=g,$$

ils s'écrivent :

$$X=\alpha_1Y_1+\alpha_2Y_2+\alpha_3Y_3 \text{ et } Y=\beta_1Y_1+\beta_2Y_2+\beta_3Y_3.$$

L'équation

$$L_X\omega = 0,$$

donne :

$$\alpha_1 = f, \alpha_2 = -\frac{1}{2}Y_3(f), \alpha_3 = \frac{1}{2}Y_2(f).$$

Ainsi en utilisant le lemme 4.1 le crochet de Poisson de deux intégrales premières f et g de R a pour expréssion :

$$\{f, g\} = Y_2(f)\,Y_3(g) - Y_2(g)\,Y_3(f).$$

Soient maintenant les fonctions :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2(x_2x_3 - x_1x_4), \\ h(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 2(x_2x_4 + x_1x_3), k(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1. \end{aligned}$$

Les automorphismes infinitésimaux de ω associés à ces fonctions sont donnés par :

$$\begin{aligned} X &= -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4}, \\ Y &= -x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_4\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial}{\partial x_4}, \\ Z &= -x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4}, \\ T &= -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_4\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_4}. \end{aligned}$$

On a donc :

i) Les fonctions f, g et h engendrent une sous-algèbre de $A(\omega)$ isomorphe à $SO(3)$ sur la variété S^3.

ii) Les fonctions f, g, h et k engendrent une sous-algèbre de $A(\omega)$ isomorphe à $SO(3) \times R$ sur la variété S^3.

iii) La forme de contact ω et les fonctions f, g, h et k sont invariantes par l'action de $SO(4)$ donc les algèbres de Lie $SO(3)$ et $SO(3) \times R$ sont réalisables comme sous-algèbres de $A(\omega)$ sur $L(p, q)$ par ces memes fonction.

7. Démonstration du théorème 3.2. *i*) le champ de Reeb de ω est donné par :

$$R = \frac{\partial}{\partial z}.$$

ii) Si f est une intégrale de R alors il existe un champ de vecteurs unique tel que $\omega(X) = f$ et $L_X\omega = 0$ donné par :

$$X = \left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}, f - x\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

iii) Le crochet de Poisson de deux intégrales premières f et g de R est donné par :

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Pour démontrer le théorème il faut trouver trois fonctions f, g et h sous les conditions de la définition 2.7 et qui vérifient la loi de l'algèbre donnée suivant la classification dans [6].

Pour (H_1) si on prend

$$f(x, y) = 1, g(x, y) = x, h(x, y) = x^2,$$

on trouve :

$$[f, g] = 0, [f, h] = 0, [h, g] = 0.$$

Pour (H_2) si on prend

$$f(x, y) = xy, g(x, y) = y, h(x, y) = 1,$$

on trouve :

$$[f, g] = g, [f, h] = 0, [h, g] = 0.$$

Pour (H_3) si on prend

$$f(x, y) = x, g(x, y) = y, h(x, y) = 1,$$

on trouve :

$$[f, g] = h, [f, h] = 0, [h, g] = 0$$

et les automorphismes infinitésimaux de ω sont linéairement indépendants en chaque point de M.

$$[f, g] = h, [f, h] = 0, [h, g] = 0.$$

Pour (H_4) si on prend

$$f(x,y)=y, g(x,y)=-xe^{-x}, h(x,y)=e^{-x},$$

on trouve :

$$[f,g]=g+h, [f,h]=h, [h,g]=0$$

et les automorphismes infinitésimaux de ω sont linéairement indépendants en chaque point de M.

Pour (H_5) si on prend

$$f(x,y)=x, g(x,y)=e^{\alpha y}\cos y, h(x,y)=e^{\alpha y}\sin y,$$

on trouve :

$$[f,g]=\alpha g-h, [f,h]=g+\alpha h, [h,g]=0$$

et les automorphismes infinitésimaux de ω sont linéairement indépendants en chaque point de M,sauf si $\alpha=0$.

Pour (H_6) si on prend

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}\cos\left(\frac{y}{k}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right), \\ g(x,y) &= \frac{-k}{\sqrt{1+x^2}}\sin\left(\frac{y}{k}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right), \\ h(x,y) &= \frac{kx}{\sqrt{1+x^2}}\left(k\in\mathbb{R}\right), \end{aligned}$$

on trouve :

$$[f,g]=h, [g,h]=f, [h,f]=g.$$

Les automorphismes infinitésimaux de ω sont linéairement indépendants en chaque point de M.

$$[f,g]=h, [g,h]=f, [h,f]=g.$$

Pour (H_7) on donne trois exemples.

Si on prend :

$$f(x,y) = \frac{xy}{2}, g(x,y) = \frac{1}{4}\left(y^2 + x^2\right), h(x,y) = \frac{1}{4}\left(y^2 - x^2\right),$$

on trouve :

$$[f,g] = h, [f,h] = g, [g,h] = f, f^2 - g^2 + h^2 = 0.$$

Les automorphismes infinitésimaux de ω ne sont pas linéairement indépendants en chaque point de M.

Si on prend :

$$f(x,y) = \sqrt{1+x^2} shy, g(x,y) = x, h(x,y) = \sqrt{1+x^2} chy,$$

on trouve :

$$[f,g] = h, [f,h] = g, [g,h] = f, f^2 - g^2 + h^2 = 1.$$

Les automorphismes infinitésimaux de ω sont linéairement indépendants en chaque point de M.

Si on prend :

$$f(x,y) = x, g(x,y) = \sqrt{1+x^2} chy, h(x,y) = \sqrt{1+x^2} shy$$

on trouve :

$$[f,g] = h, [f,h] = g, [g,h] = f, f^2 - g^2 + h^2 = -1,$$

et les automorphismes infinitésimaux de ω sont linéairement indépendants en chaque point de M.

Pour (H_8) si on prend

$$f(x,y) = x, g(x,y) = e^y, h(x,y) = e^{\alpha y} \quad (\alpha \in \mathbb{R} - (1)),$$

on trouve :

$$[f,g] = g, [f,h] = \alpha h, [h,g] = 0.$$

Les automorphismes infinitésimaux de ω sont linéairement indépendants en chaque point de M, sauf si $\alpha = 1$.

$$[f,g] = g, [f,h] = \alpha h, [h,g] = 0.$$

Pour (H_9) si on prend

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2}xy^3, g(x,y) = e^{-\frac{1}{y^2}} \text{ si } y \neq 0 \text{ et } g(x,0) = 0, \\ h(x,y) &= e^{-\frac{1}{y^2}} \text{ si } y \preceq 0 \text{ et } h(x,y) = -e^{-\frac{1}{y^2}} \text{ si } y \succeq 0, \end{aligned}$$

on trouve :

$$[f,g] = g, [f,h] = h, [h,g] = 0,$$

et la fonction F est identiquement nulle et les automorphismes infinitésimaux de ω ne sont pas linéairement indépendants en chaque point de M. Cette algèbre ne peut etre réalisée par des fonctions toutes analytiques. En effet si g et h sont analytiques de la relation $[h,g] = 0$ on déduit qu'il existe un ouvert U et une fonction Φ tels que $h = \Phi(g)$. En remplacant h dans l'équation $[f,h] = h$, et en utilisant l'équation $[f,g] = g$, on obtient que : $g.\Phi'(g) = \Phi(g)$ ce qui donne $\Phi(g) = h = \alpha g$. La fonction $h - \alpha g$, est analytique et nulle dans U et comme $\mathbb{R}$ est connexe elle est identiquement nulle et par suite f et g sont liées partout ce qui ne convient pas d'aprés la définition 2.7.

8. Démonstration du Théorème 3.3. Si $\sigma = [\omega]$ est invariante par rapport aux trois champs de vecteurs X, Y et Z qui sont linéairement indépendants en chaque point de la variété M de dimension trois alors d'après le lemme 4.9 la fonction F égale à $f\ [g,h] + g[h,f] + h[f,g]$ est sans zéros, donc :

1) Si M est une variété compacte de dimensions trois on déduit d'après [5] que

i) H est isomorphe à $SO(3.\mathbb{R})$

ii) M est difféomorphe à S^3 ou à un espace lenticulaire $L(p,q)$.

iii) D'après le lemme 4.10 le représentant $\varpi = \dfrac{\alpha}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}\omega$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, (unique à une constante multiplicative près) de la structure de contact $\sigma = [\omega]$ est invariant par rapport aux éléments de H.

2) Si M est une variété non compacte de dimensions trois

i) Si H est isomorphe à H_9 la fonction F est identiquement nulle et par suite cette algèbre ne peut etre réalisée comme sous-algèbre de $A[\omega]$.

ii) Si H est isomorphe à H_3, H_6, H_7, ou H_{10} on a trouvé d'après les lemmes 4.10, 4.11, 4.12 et 4.14 un représentant qui n'est pas nécessairement unique $\varpi = \dfrac{\omega}{\sqrt{F}}$ (si F est positive) ou $\varpi = \dfrac{\omega}{\sqrt{-F}}$ (si F est négative) qui est invariant par rapport aux trois champs de vecteurs X, Y et Z qui sont linéairement indépendants en chaque point de la variété M

iii) Si H est isomorphe à H_2, H_4, H_5, ou H_8 alors d'après les lemmes 4.13, 4.15, 4.16 et 4.17 le représentant $\varpi = \dfrac{\omega}{\sqrt{F}}$ (si F est positive) ou $\varpi = \dfrac{\omega}{\sqrt{-F}}$ (si F est négative) n'est pas invariant par tous les éléments de H.

9. Conclusion. Lorsque M est une variété compacte de dimension trois et ω une forme de contact sur M, le problème de l'étude des sous-algèbres de $A(\omega)$ de dimensions finies est complètement résolu. En effet si M n'est pas difféomorphe à S^3 ou à $L(p,q)$ la seule sous-algèbre de dimension finie de $A(\omega)$ est l'abélienne si $A(\omega)$ ne l'est pas, il suffit de prendre f, $f^2, \ldots, f^n$ où f est une intégrale première de R et on obtient une algèbre de Lie abélienne de dimension n. Maintenant si M est difféomorphe à S^3 ou à $L(p,q)$ on a donné un exemple de forme de contact ω telle que $SO(3)$ soit réalisée comme sous-algèbre de $A(\omega)$. On aimerait trouver une forme de contact ω_0 sur S^3 telle que $SO(3)$ ne soit pas réalisable comme sous-algèbre de $A(\omega_0)$ car dans ce cas on conclut que $A(\omega)$ et $A(\omega_0)$ sont non isomorphes et par suite ω et ω_0 sont non difféomorphes. Concernant les sous-algèbres de $A[\omega]$ le problème est loin d'etre résolu sauf dans le cas où les automorphismes infinitésimaux sont supposés linéairement indépendants en tout point de la variété M qui est compacte de dimension trois.

REFERENCES

[1] M. Goze. Degré de symétrie d'une structure de contact. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **287** (1978), A337–A338.

[2] P. Libermann. Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et de contact. Colloque de Géométrie différentielle, Bruxelles, 1958.

[3] A. Lichnerowicz. Algèbres de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact. *J. Math. Pures Appl.* **52** (1973), 473–508.

[4] R. Lutz. Quelques remarques historiques et prospectives sur la géométrie de contact. Conference on Differential Geometry and Topology, Sardinia, 1988, *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **58** (1988), 361–393.

[5] R. Lutz. Sur la géométrie des structures de contact invariantes. *Ann. Inst. Fourier*, **29**, *1* (1979), 283–306.

[6] M. Vergne. Classification des algèbres de Lie en petites dimensions thèse 3éme cycle. Université de Paris, 1966.

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales et Numériques
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Ferhat Abbas Sétif, Algérie
e-mail : `saad.aggoun@yahoo.fr`

Received October 10, 2012
Revised February 16, 2013