PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

СХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

ВЛАДИМИР Х. ХРИСТОВ, ПЕНЧО П. ПЕТРУШЕВ

В статье рассматривается пространство Банаха X, в котором действует сильно непрерывная s-регулярная группа операторов $T(t)$. Через группу $T(t)$ в X вводятся абстрактные аналоги некоторым из известных конструктивных характеристик, связанных с понятием вариации функции (модуль изменения и Ф-вариация). Используется еще и понятие абстрактного модуля непрерывности, введенное Купцовым.

Через собственные подпространства инфинитезимального оператора A группы (или его степени) определяются операторы Фурье, а через них определяется ряд Фурье произвольного элемента из пространства X. В работе найдены оценки уклонения n-тых парциальных сумм ряда Фурье данного элемента от самого элемента. Из этих оценок получаются достаточные условия для сходимости ряда Фурье. Эти достаточные условия обобщают некоторые из известных критериев для сходимости ряда Фурье периодических функций. Как следствие из наших результатов получаются некоторые критерии для сходимости ряда Фурье почти периодических функций.

Известно [1, 2], что естественное обобщение результатов теории аппроксимации функций на случай пространства Банаха можно получить, если в банаховом пространстве действует сильно непрерывная полугруппа операторов, а аппаратом приближения являются собственные функции инфинитезимального оператора полугруппы (или его степени). Купцовым [2] получены прямые и обратные теоремы теории приближений, которые обобщают известные теоремы Джексона и Бернштейна. Им получены теоремы, дающие оценки уклонения парциальных сумм ряда Фурье данного элемента банахова пространства от самого элемента. В. А. Попов [3] получил оценку для локального приближения в пространстве Банаха, из которой следует прямая теорема Купцова. При этом он отказывается от условия о существовании ограниченного линейного правого обратного для инфинитезимального оператора полугруппы, которое требуется в теореме Купцова [2].

В наших рассмотрениях мы предполагаем, что в банаховом пространстве действует группа операторов. Через эту группу мы вводим для пространства Банаха абстрактный аналог некоторым из конструктивных характеристик, связанных с понятием вариации функции. Этими характеристиками получены оценки уклонения парциальных сумм ряда Фурье данного элемента банахова пространства от самого элемента. Из наших оценок следуют достаточные условия для сходимости ряда Фурье в слабой и сильной топологии банахова пространства. Эти достаточные условия являются обобщением некоторым из известных критериев о сходи-

ПЛИСКА Български математически студии. Том 1, 1977, с. 37—48.

мости ряда Фурье от периодических функций. Из наших результатов получаются новые критерии для сходимости ряда Фурье от почти периодических функций.

1. Пусть X — пространство Банаха и X^* — его сопряженное. Пусть $T(t)(-\infty<t<\infty)$ — сильно непрерывная группа операторов в X, т. е. $X \xrightarrow{T(t)} X$ и $T(t)$ удовлетворяет

$$\text{а) } T(t)\,T(s)=T(t+s), \text{ б) } s-\lim_{t\to 0} T(t)=T(0)=I,$$

где I — единичный оператор.

Пусть A — инфинитезимальный оператор группы $T(t): Af$ существует для тех $f \in X$, для которых $\lim_{t\to 0}[T(t)f-f]/t$ существует $(=Af)$. Оператор A замкнут и его область определения $D(A)$ плотна в X (см. [1]).

Перечислим несколько результатов, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1 [1]. *Пусть $T(t)$ сильно непрерывная группа операторов в X. Тогда*

а) существует $\omega>0$ такое, что резольвента $R(\lambda;\,A)$ оператора A регулярна для $|\mathrm{Re}\,\lambda|\geqq\omega$ и

$$R(\lambda;\,A)=-\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,T(t)\,dt \text{ для } \mathrm{Re}\,\lambda\geqq\omega,$$

(1)

$$R(\lambda;\,A)=-\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda t}\,T(t)\,dt \text{ для } \mathrm{Re}\,\lambda\leqq-\omega,$$

б) существует константа M_ω такая, что

(2) $$\|T(t)\|\leqq M_\omega\, e^{\omega|t|},\ -\infty<t<\infty,$$

(3) *в)* $\|R(\lambda;\,A)\|\leqq C/(|\mathrm{Re}\,\lambda|-\omega)$ *для* $|\mathrm{Re}\,\lambda|>\omega$.

Лемма 2 [2]. *Пусть A — замкнутый оператор и k — натуральное число. Тогда:*

а) если резольвента $R(\lambda;\,A^k)$ оператора A^k регулярна в некотором кольце $0<\rho_1^k<|\lambda|<\rho_2^k$, то резольвента $R(\mu;\,A)$ регулярна в кольце $0<\rho_1<|\mu|<\rho_2$ и наоборот.

б) пусть $\{\omega_j\}_{j=0}^{k-1}$ корни k-той степени от единицы. Тогда, если все $\mu\omega_j\in\rho(A)$ (где через $\rho(A)$ обозначили резольвентное множество оператора A), то $\mu^k\in\rho(A^k)$ и

(4) $$R(\mu^k;\,A^k)=\frac{1}{k\mu^{k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}\omega_j\,R(\omega_j\mu;\,A),$$

в) если $\{\lambda: |\lambda|=\rho\}\subset\rho(A)$, то

(5) $$\int_{|\lambda|=\rho^k} R(\lambda;\,A^k)\,d\lambda=\int_{|\mu|=\rho} R(\mu;\,A)\,d\mu,$$

(6) $$\int_{|\lambda|=\rho^k} \lambda^{-1}R(\lambda;\,A^k)\,d\lambda=\int_{|\mu|=\rho} \mu^{-k}R(\mu;\,A)\,d\mu,$$

г) пусть $R(\lambda;\,A)$ регулярна в кольце $0<\beta<|\lambda|<\gamma$ и для этих λ выполнено $\|R(\lambda;\,A)\|\leqq C/|\mathrm{Re}\,\lambda|$. Тогда

$$(7)\qquad |R((\beta+\gamma)\,e^{i\varphi}/2;\,A)|\leq C/(\gamma-\beta),\quad 0\leqq\varphi<2\pi.$$

Следуя Купцову [2], введем понятие s-регулярного оператора.

Определение 1. *Оператор A называется s-регулярным, если для некоторого натурального s существует число θ такое, что*

$$|R(\lambda;\,e^{i\theta}A^s)|\leq C/|\operatorname{Im}\lambda|,$$

где C не зависит от λ.

Группу, порожденную s-регулярным оператором, будем называть s-регулярной группой.

Если оператор s-регулярен, то спектр оператора $e^{i\theta}A^s$, очевидно, лежит на действительной оси. Если A порождает s-регулярную сильно непрерывную группу операторов, то, учитывая, что $R(\lambda;\,A)$ регулярна для $|\operatorname{Re}\lambda|\geqq\omega$, и имея в виду теорему об отображении спектров [4, с. 664], легко сообразить, что все λ такие, что $|\lambda|\geqq\omega/\sin\pi/s$ и $\lambda\in\sigma(A)$ ($\sigma(A)$ — спектр оператора A) лежат на имагинерной оси. Таким образом видно, что понятие s-регулярной группы близко к понятию равномерно ограниченной группы. Поэтому естественна следующая

Лемма 3. *Пусть A порождает s-регулярную группу операторов. Тогда для всех $|\lambda|\geqq(\omega+\varepsilon)/(\sin\pi/s)$, $\varepsilon>0$, выполнено*

$$(8)\qquad |R(\lambda;\,A)|\leqq C/|\operatorname{Re}\lambda| \quad \textit{для } s \textit{ нечетных,}$$

$$(9)\qquad |R(\lambda;\,A)-R(-\lambda;\,A)|\leqq C/|\operatorname{Re}\lambda| \quad \textit{для любых } s,$$

где C может зависеть лишь от ε, ω и s.

Утверждение леммы 3 следует легко из (3) и (4).

Пусть A порождает s-регулярную группу операторов и оператор $e^{i\theta}A^s=Q$ имеет дискретный бесконечный спектр. Занумеруем модули собственных значений оператора Q в порядке их возрастания $m_1<m_2<\ldots<m_\nu<\ldots$ Проектор, соответствующий собственным значениям, имеющих модули, равных m_ν, определяем

$$P_\nu=-(2\pi i)^{-1}\int_{|\lambda|=\rho_\nu}R(\lambda;\,Q)\,d\lambda+(2\pi i)^{-1}\int_{|\lambda|=\rho_{\nu-1}}R(\lambda;\,Q)\,d\lambda,$$

где $\rho_\nu\in(m_\nu,\,m_{\nu+1})$, $\rho_0=0$.

Операторы $S_n=\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu=-(2\pi i)^{-1}\int_{|\lambda|=\rho_n}R(\lambda;\,Q)\,d\lambda$, $n=1,\,2,\,3,\ldots$, будем называть операторами Фурье.

Для дальнейших выкладок нам будут нужны следующие оценки:

$$|R((\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n})\,e^{i\varphi}/2;\,A)|\leqq C/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}) \text{ для } s \text{ нечетных,}$$

$$(10)\qquad |R((\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n})\,e^{i\varphi}/2;\,A)-R((\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n})\,e^{i\varphi}/2;\,A)|$$

$$\leqq C/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}) \text{ для любых } s,$$

которые следуют из (7), (8) и (9) и верны для всех n таких, что $\sqrt[s]{m_n}\geqq(\omega+\varepsilon)/\sin\pi/s$.

Определение 2. *k-тый модуль непрерывности элемента $f \in X$ (см. [2]) определяем как* $\omega_k(f;\delta)=\sup_{|h|\le\delta}\|(T(h)-I)^k f\|$.

Укажем несколько свойств модуля непрерывности

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
&\text{а) } \omega_k(f;\delta)\leqq C_{r,k}\,\omega_r(f;\delta),\ r\leqq k,\\
&\text{б) } \omega_k(f;\alpha\delta)\leqq C_{\alpha,k}\,\omega_k(f;\delta),\ \alpha\geqq 0.
\end{aligned}
$$

Для функций вещественного переменного З. А. Чантурия [5] и В. А. Попов [6] ввели понятие модуля изменения. Мы дадим определение абстрактного k-ого модуля изменения произвольного элемента из банахова пространства X, в котором действует сильно непрерывная группа операторов. Для $k=1$ и когда X является пространством непрерывных 2π-периодических функций с действующей в нем группой сдвигов, наше понятие эквивалентно модулю изменения Чантурии.

Определение 3. *Пусть $l>0$, k и n — любые натуральные числа. Для любых $f\in X$ и $x^*\in X^*$ определяем*

$$\nu_k(f;x^*,l,n)=\sup_{-l\le h_0\le h_1\le\ldots\le h_{2n-1}\le l}\ \sum_{j=0}^{n-1}\left|x^*T(h_{2j})\left[T\left(\frac{1}{k}(h_{2j+1}-h_{2j})\right)-I\right]^k f\right|$$

(локальный),

$$\nu_k(f;l,n)=\sup_{x^*\in S^*}\nu_k(f;x^*,l,n)\qquad\textit{(глобальный),}$$

где S^* единичная сфера пространства X^*.

Сформулируем несколько свойств модуля изменения:

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
&\text{а) } \nu_k(f;x^*,l,n)\leqq \nu_k(f;x^*,l,n+1),\\
&\text{б) } \nu_k(f;x^*,l,pn)\leqq p\,\nu_k(f;x^*,l,n),\ p\ \text{— целое},\\
&\text{в) } \nu_k(f;x^*,l,n)\le C_l\,n\,\omega_k(f;1/n),\\
&\text{г) } \nu_k(f;x^*,l,n)\leqq C_{k,r}\,\nu_r(f;x^*,l,n),\ \text{где } r\leqq k.
\end{aligned}
$$

Для глобального модуля изменения перечисленные свойства тоже верны.

Рассмотрим модифицированную функцию Стеклова [3] для случая пространства Банаха:

$$f_{h,k}=\frac{(-1)^{k-1}}{h^k}\underbrace{\int_0^h\int_0^h\ldots\int_0^h}_{k}\Big[T(k(t_1+t_2+\ldots+t_k))-\binom{k}{1}T((k-1)(t_1+t_2+\ldots+t_k))$$

$$+\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}T(t_1+t_2+\ldots+t_k)\Big]f\,dt_1\,dt_2\ldots dt_k.$$

Перечислим несколько свойств функции $f_{h,k}$.

Лемма 4. *Для любых $f\in X$ и $h>0$*

а) $f_{h,k}$ принадлежит области определения $D(A^k)$ оператора A^k,

(13) $$б)\ A^k f_{h,k} = \frac{(-1)^{k-1}}{h^k}\Big[\frac{1}{k^k}(T(kh)-I)^k - \frac{1}{(k-1)^k}\binom{k}{1}(T((k-1)h)-I)^k$$

$$+\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}(T(h)-I)^k\Big]f = \frac{1}{h^k}\sum_{j=1}^{k} a_j (T(jh)-I)^k f,$$

$$\|A^k f_{h,k}\| \leqq 2^k h^{-k}\omega_k(f;\ kh),$$

(14) $$в)\ f_{h,k} - f = \frac{(-1)^{k-1}}{h^k}\underbrace{\int_0^h\int_0^h\ldots\int_0^h}_{k}[T(t_1+t_2+\ldots+t_k)-I]^k f\,dt_1\,dt_2\ldots dt_k,$$

$$\|f_{h,k}-f\| \leqq \omega_k(f;\ kh).$$

2. Основная теорема.

Теорема 1. *Пусть A порождает s-регулярную сильно непрерывную группу операторов $T(t)$ и спектр оператора A^s дискретен и бесконечен. Пусть k — произвольное натуральное, $l>0$ и $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность натуральных чисел. Существует константа $N=N(s, A)$ такая, что для всех $n>N$ и для любых $f\in X$ и $x^*\in S^*$*

$$|x^*(I-S_n)f| \leqq C_1\omega_k\Big(f;\ \frac{1}{\sqrt[s]{m_n}}\Big)\ln\Big(e+\frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}}\Big)$$

$$+C_2\omega_k\Big(f;\ \frac{1}{\sqrt[s]{m_n}}\Big)\ln p_n + C_3\sum_{j=p_n}^{q_n}\frac{\nu_k(f;\ x^*, l,\ j)}{j^2},$$

где $q_n = \min\{[(\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n})/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n})],\ [\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n}]\}$.

Доказательство. Докажем теорему для k четного. Случай, когда k — нечетное, можно свести к случаю k четное, используя (11) и (12).

Положим $\rho_n = (\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n})/2$ и $h=l/\rho_n$. Очевидно $\rho_n^s\in(m_n,\ m_{n+1})$ и, следовательно, имея в виду (5), получаем

(15) $$S_n f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho_n^s} R(\lambda;\ e^{i\theta}A^s)f\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda=\rho_n^s} R(\lambda;\ A^s)f\,d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho_n} R(\lambda;\ A)f\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho_n^k} R(\lambda;\ A^k)f\,d\lambda.$$

Добавляя и вычитая $f_{h,k}$, получаем

$$|x^*(I-S_n)f| \leqq |x^*(I-S_n)f_{h,k}| + |x^* S_n(f_{h,k}-f)| + |x^*(f_{h,k}-f)|.$$

Очевидно из (14), что $|x^*(f_{h,k}-f)| \leqq \|f_{h,k}-f\| \leqq C\omega_k(f;\ 1/\sqrt[s]{m_n})$. Будем оценивать $|x^*(I-S_n)f_{h,k}|$. Ввиду (6) и (13) получаем

$$(I-S_n)f_{h,k}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda=\rho_n^k}\frac{1}{\lambda}R(\lambda;\ A^k)A^k f_{h,k}\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda=\rho_n^k}\frac{1}{\lambda}R(\lambda;\ A^k)\frac{1}{h^k}Bf\,d\lambda=\frac{1}{2\pi i h^k}\int_{\lambda=\rho_n}\frac{1}{\lambda^k}R(\lambda;\ A)Bf\,d\lambda,$$

где

$$Bf=\sum_{j=1}^{k}a_j(T(jh)-I)^k f \quad (\text{см. } (13)), \tag{16}$$

$$\|Bf\|\leqq 2^k\omega_k(f;\ kh). \tag{17}$$

Обозначим $\Delta_n=(\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n})/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n})$ и $\alpha_n=\max\{1,\ 2\pi\omega/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n})\}$. Тогда

$$x^*(I-S_n)f_{h,k}=x^*\frac{\rho_n}{2\pi l^k}\int_0^{2\pi}e^{-i(k-1)\varphi}R(\rho_n e^{i\varphi};\ A)Bf\,d\varphi$$

$$\leqq\left|x^*\frac{\rho_n}{2\pi l^k}\int_{-\pi/2+\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}\right|+\left|x^*\frac{\rho_n}{2\pi l^k}\int_{\pi/2+\alpha_n\Delta_n}^{3\pi/2-\alpha_n\Delta_\alpha}\right|+\left|x^*\frac{\rho_n}{2\pi l^k}\left[\int_{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2+\alpha_n\Delta_n}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{-\pi/2-\alpha_n\Delta_n}^{-\pi/2+\alpha_n\Delta_n}\right]\right|=G_1+G_2+G_3.$$

Интервал $[0,\ 2\pi]$ разделили так, чтобы в первых двух интегралах можно было воспользоваться представлением (1) для $R(\lambda;\ A)$ через группу операторов $T(t)$. Оно справедливо при $|\operatorname{Re}\lambda|\geqq\omega$ и в самом деле $|\operatorname{Re}\lambda|=|\rho_n\cos\varphi|=|\rho_n\sin(\pi/2-\varphi)|\geqq 2\rho_n\alpha_n\Delta_n/\pi\geqq 2\omega$.

Последние два интеграла, т. е. член G_3, оцениваем, используя (9), (10) и (17):

$$G_3=\left|x^*\frac{\rho_n}{2\pi l^k}\int_{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2+\alpha_n\Delta_n}e^{-i(k-1)\varphi}[R(\rho_n e^{i\varphi};\ A)-R(-\rho_n e^{i\varphi};\ A)]Bf\,d\varphi\right|$$

$$\leqq\frac{\rho_n}{2\pi l^k}\int_{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2+\alpha_n\Delta_n}\|R(\rho_n e^{i\varphi};\ A)-R(-\rho_n e^{i\varphi};\ A)\|\,\|Bf\|\,d\varphi$$

$$=\frac{\rho_n}{2\pi l^k}\left[\int_{\pi/2-\Delta_n}^{\pi/2+\Delta_n}+\int_{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2-\Delta_n}+\int_{\pi/2+\Delta_n}^{\pi/2+\alpha_n\Delta_n}\right]$$

$$\leqq\frac{\rho_n}{2\pi l^k}2\Delta_n\frac{C}{\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}}2^k\omega_k(f;\ kh)+\frac{2\rho_n}{2\pi l^k}2^k\omega_k(f;\ kh)\frac{1}{\rho_n}\int_{\Delta_n}^{\alpha_n\Delta_n}\frac{1}{\sin\psi}\,d\psi$$

$$\leqq D_1\omega_k(f;\ 1/\sqrt[s]{m_n})+D_2\omega_k(f;\ 1/\sqrt[s]{m_n})\ln\alpha_n$$

$$\leqq D_3\omega_k(f;\ 1/\sqrt[s]{m_n})\ln(e+1/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n})).$$

Оценим G_1, используя представление (1) для $R(\lambda; A)$:

$$G_1 = x^* \frac{\rho_n}{2\pi l^k} \int\limits_{-\pi/2+\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2-\alpha_n\Delta_n} e^{-i(k-1)\varphi} \left[\int\limits_0^\infty \exp(-\rho_n t e^{i\varphi})\, T(t)\, dt\right] Bf d\varphi$$

$$\leqq \frac{\rho_n}{2\pi l^k} \int\limits_0^\infty x^* T(t) Bf \left[\int\limits_{-\pi/2+\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2-\alpha_n\Delta_n} e^{-i(k-1)\varphi} \exp(-\rho_n t e^{i\varphi})\, d\varphi\right] dt$$

$$= \frac{\rho_n}{\pi l^k} \int\limits_0^\infty x^* T(t) Bf \left[\int\limits_0^{\pi/2-\alpha_n\Delta_n} \exp(-\rho_n t \cos\varphi)\, d\varphi\right] dt.$$

Для внутреннего интеграла имеем

$$(18)\qquad \int\limits_0^{\pi/2-\alpha_n\Delta_n} \exp(-\rho_n t \cos\varphi)\, d\varphi \leqq \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{для } t \geqq 0, \\ \dfrac{\pi}{2\rho_n t} \exp\left(-\dfrac{2}{\pi}\alpha_n \Delta_n \rho_n t\right) & \text{для } t > 0. \end{cases}$$

Тогда

$$G_1 \leqq \frac{\rho_n}{\pi l^k} \int\limits_0^{l/2\rho_n} + \frac{\rho_n}{\pi l^k} \int\limits_{l/2\rho_n}^{p_n l/2\rho_n} + \frac{\rho_n}{\pi l^k} \int\limits_{p_n l/2\rho_n}^{q_n l/2\rho_n} + \frac{\rho_n}{\pi l^k} \int\limits_{q_n l/2\rho_n}^{\infty} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Осталось оценить каждый из последних интегралов. Используя (2), (17) и (18), получаем оценки для J_1, J_2 и J_4:

$$J_1 \leqq \frac{\rho_n}{\pi l^k} \cdot \frac{\pi l}{2\rho_n} M_\omega e^{\omega l/2\rho_n}\, 2^k \omega_k(f;\ kh) \leqq D_1' \omega_k(f;\ 1/\sqrt[s]{m_n}),$$

$$J_2 \leqq \frac{\rho_n}{\pi l^k} \int\limits_{l/2\rho_n}^{p_n l/2\rho_n} \frac{\pi}{2\rho_n t} \exp\left(-\frac{2}{\pi}\alpha_n \Delta_n \rho_n t\right) \|T(t)\|\, \|Bf\|\, dt$$

$$\leqq \frac{1}{2l^k} M_\omega e^{\omega l}\, 2^k \omega_k(f;\ kh) \ln p_n \leqq D_2' \omega_k\left(f;\ \frac{1}{\sqrt[s]{m_n}}\right) \ln p_n.$$

Имея в виду, что $\dfrac{1}{\pi}\alpha_n \Delta_n \rho_n \geqq \omega$, получаем

$$J_4 \leqq \frac{\rho_n}{\pi l^k} \int\limits_{q_n l/2\rho_n}^{\infty} \frac{\pi}{2\rho_n t} \exp\left(-\frac{2}{\pi}\alpha_n \Delta_n \rho_n t\right) M_\omega e^{\omega t}\, 2^k \omega_k(f;\ kh)\, dt$$

$$\leqq \frac{M_\omega 2^k}{2l^k} \int\limits_{q_n l/2\rho_n}^{\infty} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{\pi}\alpha^n \Delta_n \rho_n t\right) \omega_k(f,\ kh)\, dt$$

$$= \frac{M_\omega 2^{k-1} \omega_k(f;\ kh)}{l^k} \int\limits_{\alpha_n \Delta_n \rho_n q_n l/2\rho_n \pi}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-t}\, dt \leqq D_3' \omega_k\left(f;\ \frac{1}{\sqrt[s]{m_n}}\right).$$

Последний интеграл конечен и не зависит от n, так как

$$\frac{l}{2\pi} q_n \alpha_n \Delta_n \geq \frac{l}{2\pi} > 0 .$$

Наконец, переработаем и оценим J_3, используя (18)

$$J_3 \leq \frac{\rho_n}{\pi l^k} \int_{p_n l/2\rho_n}^{q_n l/2\rho_n} \frac{\pi}{2\rho_n t} \exp\left(-\frac{2}{\pi} \alpha_n \Delta_n \rho_n t\right) |x^* T(t) Bf| \, dt$$

$$\leq \frac{1}{2l^k} \int_{p_n l/2\rho_n}^{q_n l/2\rho_n} \frac{1}{t} |x^* T(t) Bf| \, dt = \frac{1}{2l^k} \sum_{j=p_n}^{q_n-1} \int_{jl/2\rho_n}^{(j+1)l/2\rho_n} \frac{1}{t} |x^* T(t) Bf| \, dt .$$

В каждом из последних интегралов применяем теорему о средних стойностях. Получаем $J_3 \leq (2l^k)^{-1} \sum_{j=p_n}^{q_n} j^{-1} |x^* T(t_j) Bf|$, где $t_j \in [jl/2\rho_n, (j+1)l/2\rho_n]$, $j=p_n, p_n+1, \ldots, q_n$. В последней сумме делаем преобразование Абеля. Отбрасывая отрицательный член, получаем

$$J_3 \leq \frac{1}{2l^k} \left\{ \frac{1}{q_n} \sum_{j=1}^{q_n} |x^* T(t_j) Bf| + \sum_{j=p_n}^{q_n} \frac{1}{j^2} \sum_{\nu=1}^{j} |x^* T(t_\nu) Bf| \right\}$$

$$\leq D_4' \omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n}) + \frac{1}{2l^k} \sum_{j=p_n}^{q_n} \frac{1}{j^2} \sum_{\nu=1}^{j} |x^* T(t_\nu) Bf| .$$

Рассмотрим $\sigma_j = \sum_{\nu=1}^{j} |x^* T(t_\nu) Bf|$, где $Bf = \sum_{m=1}^{k} a_m (T(mh) - I)^k f$ $h = l/\rho_n$ (см. (16)). Покажем, что для $j = p_n, p_{n+1}, \ldots, q_n$

$$\sigma_j \leq D_5' \nu_k(f; x^*, l, j) + D_6' \omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n}),$$

где D_5' и D_6' константы, не зависящие от j.

В самом деле сначала заметим, что Bf представляет сумму из k k-тых разностей и, следовательно, любое t_ν служит левым концом для ровно k k-тых разностей. С другой стороны, $l/2\rho_n \leq t_{\nu+2} - t_\nu \leq 3l/2\rho_n$ и $h = l/\rho_n$. Следовательно, объединяя подходящим образом непересекающиеся k-тые разности, не выходящие из интервала $[0, l]$, мы получим $\nu_k(f; x^*, l, q)$, где $q \leq j$. Число таких членов будет зависеть лишь от k. Те k-тые разности, которые выходят за интервал $[0, l]$, оцениваем через $\omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n})$. Их число тоже зависит лишь от k.

Таким образом, мы получаем, что

$$\sum_{j=p_n}^{q_n} \frac{1}{j^2} \sum_{\nu=1}^{j} |x^* T(t_\nu) Bf| \leq D_5' \sum_{j=p_n}^{q_n} \frac{1}{j^2} \nu_k(f; x^*, l, j)$$

$$+ D_6' \omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n}) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} .$$

Окончательно $J_3 \leq D_7' \omega_k\left(f; \frac{1}{\sqrt[s]{m_n}}\right) + D_8' \sum_{j=p_n}^{q_n} \frac{1}{j^2} \nu_k(f; x^*, l, j).$

Объединяя оценки для J_1, J_2, J_3 и J_4, получаем

$$G_1 \leqq D_4\, \omega_k(f;\ 1/\sqrt[s]{m_n}) + D_5\, \omega_k(f;\ 1/\sqrt[s]{m_n}) \ln p_n + D_6 \sum_{j=p_n}^{q_n} \frac{1}{j^2}\, \nu_k(f;\ x^*,\ l,\ j).$$

Аналогично для симметрического G_1 члена G_2 получаем такую же оценку.

Из оценок для G_1, G_2 и G_3 получаем

$$|x^*(I-S_n)f| \leqq C_1'\, \omega_k(f;\ \frac{1}{\sqrt[s]{m_n}}) \ln(e + \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}} - \sqrt[s]{m_n}})$$

$$+ C_2'\, \omega_k(f;\ 1/\sqrt[s]{m_n}) \ln p_n + C_3' \sum_{j=p_n}^{q_n} \frac{1}{j^2}\, \nu_k(f;\ x^*,\ l,\ j).$$

Осталось оценить

$$|x^* S_n(f_{h,k}' - f)| = |x^* \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=\rho_n} R(\lambda;\ A) [\frac{(-1)^{k-1}}{h^k} \underbrace{\int_0^h \int_0^h \ldots \int_0^h}_{k} (T(t_1+t_2+\ldots t_k)$$

$$- I)^k f\, dt_1 \ldots dt_k]\, d\lambda| \leqq \frac{1}{2\pi h^k} \int_0^h \int_0^h \ldots \int_0^h |\int\limits_{|\lambda|=\rho_n} x^* R(\lambda;\ A)(T(t_1+t_2+\ldots+t_k)$$

$$- I)^k f\, d\lambda|\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_k.$$

Но внутренний интеграл оценивается так же, как это делалось при оценке предыдущего члена и получается такая же оценка. Теорема 1 доказана.

Используя, что $\sup_{x^* \in S^*} |x^*(I-S_n)f| = \|(I-S_n)f\|$, и имея в виду определение k-ого глобального модуля изменения, получаем

Теорема 2. *Пусть A порождает s-регулярную сильно непрерывную группу операторов $T(t)$ и спектр оператора A^s дискретен и бесконечен. Пусть k произвольное натуральное, $l>0$ и $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность натуральных чисел. Существует константа $N=N(s,\ A)$ такая, что для всех $n>N$ и для любых $f \in X$*

$$\|(I-S_n)f\| \leqq C_1\, \omega_k(f;\ \frac{1}{\sqrt[s]{m_n}}) \ln(e + \frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}} - \sqrt[s]{m_n}}) \tag{19}$$

$$+ C_2\, \omega_k(f;\ \frac{1}{\sqrt[s]{m_n}}) \ln p_n + C_3 \sum_{j=p_n}^{q_n} \frac{1}{j^2}\, \nu_k(f;\ l,\ j),$$

где $q_n = \min\{[(\sqrt[s]{m_{n+1}} + \sqrt[s]{m_n})/(\sqrt[s]{m_{n+1}} - \sqrt[s]{m_n})],\ [\sqrt[s]{m_{n+1}} + \sqrt[s]{m_n}]\}$.

Полагая в оценке (19) $p_n = (\sqrt[s]{m_{n+1}} + \sqrt[s]{m_n})/(\sqrt[s]{m_{n+1}} - \sqrt[s]{m_n})$, получаем

Следствие. *Если оператор A удовлетворяет условиям теоремы 2, то для любого $f \in X$, k натурального и n достаточно большого*

$$\|(I-S_n)f\| \leq C\,\omega_k\Big(f;\ \frac{1}{\sqrt[s]{m_n}}\Big)\ln\Big(e+\frac{\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n}}{\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}}\Big).$$

Подобную оценку получил Купцов [2, с. 157].

3. Из предыдущих оценок выведем несколько достаточных условий для сходимости ряда Фурье произвольного элемента $f \in X$.

Теорема 3. *Пусть A порождает s-регулярную сильно непрерывную группу операторов и спектр оператора A^s дискретен и бесконечен. Пусть $f \in X$ и $x^* \in S^*$. Если существуют $l>0$ и k натуральное такие, что*

$$a)\ \omega_k\Big(f;\ \frac{1}{\sqrt[s]{m_n}}\Big)\ln\Big(e+\frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}}\Big)\to 0,\quad при\ n\to\infty,$$

$$б)\ \min_{1\leq m\leq q_n}\Big\{\omega_k\Big(f;\ \frac{1}{\sqrt[s]{m_n}}\Big)\ln m+\sum_{j=m}^{q_n}\frac{1}{j^2}\,\nu_k(f;\ x^*,\ l,\ j)\Big\}\to 0,\qquad при\ n\to\infty,$$

где

$$q_n=\min\{[(\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n})/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n})],\ [\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n}]\},$$

то $\lim_{n\to\infty} x^*(I-S_n)f=0$.

Следствие. *Пусть A удовлетворяет условиям теоремы 3 и $\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}\geq a>0$ для достаточно больших n. Если $f\in X$ и $x^*\in S^*$ таковы, что для некоторых $l>0$ и k натуральное*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\,\nu_k(f;\ x^*, l,\ j)<\infty,$$

то $\lim_{n\to\infty} x^*(I-S_n)f=0$.

Теорема 4. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям теоремы 3. Если для элемента $f\in X$ существуют $l>0$ и k натуральное такие, что*

$$a)\ \omega_k\Big(f;\ \frac{1}{\sqrt[s]{m_n}}\Big)\ln\Big(e+\frac{1}{\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}}\Big)\to 0,\quad при\ n\to\infty,$$

$$б)\ \min_{1\leq m\leq q_n}\Big\{\omega_k\Big(f;\ \frac{1}{\sqrt[s]{m_n}}\Big)\ln m+\sum_{j=m}^{q_n}\frac{1}{j^2}\,\nu_k(f;\ l,\ j)\Big\}\to 0\quad при\ n\to\infty,$$

где $$q_n=\min\{[(\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n})/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n})],\ [\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n}]\},$$

то $\lim_{n\to\infty}\|(I-S_n)f\|=0$.

Теперь для любого элемента $f\in X$ введем понятие k-той Ф-вариации на интервале $[-l,\ l]$.

Определение 4. *Пусть* $\Phi(u)$ — *строго возрастающая функция для* $u \geqq 0$, $\Phi(0)=0$. *Тогда* k-*тую* Φ-*вариацию на интервале* $[-l, l]$ *определяем*

$$V_{\Phi, l, k}(f) = \sup_{x^* \in S^*} \sup_{-l \leqq h_0 \leqq h_1 \leqq \ldots \leqq h_{2m-1} \leqq l} \sum_{j=1}^{m-1} \Phi\left(x^* T(h_{2j}) T\left(\frac{h_{2j+1}-h_{2j}}{k}\right) - I)^k f\right).$$

Будем говорить, что элемент f *имеет ограниченную* k-*тую* Φ-*вариацию на интервале* $[-l, l]$, *если* $V_{\Phi, l, k}(f) < \infty$.

В частности, когда $k=1$, получаем определение ограниченной Φ-вариации на интервале $[-l, l]$ для элемента $f \in X$. Понятие ограниченной Φ-вариации в банаховом пространстве является абстрактным аналогом хорошо известного понятия ограниченной Φ-вариации для функций действительного переменного.

Свяжем факт, что данный элемент $f \in X$ имеет ограниченную k-тую Φ-вариацию на интервале $[-l, l]$ с порядком возрастания его k-ого модуля изменения $\nu_k(f; l, n)$.

Лемма 5. *Пусть* $\Phi(u)$ *выпукла. Если элемент* $f \in X$ *имеет ограниченную* k-*тую* Φ-*вариацию на интервале* $[-l, l]$, *то* $\nu_k(f; l, n) = O(n\Phi^{-1}(1/n))$, *где через* $\Phi^{-1}(u)$ *обозначили обратную функцию функции* $\Phi(u)$.

Для $k=1$ этот факт заметил З. А. Чантурия [5].

Используя лемму 5, из теоремы 4 получаем следующий критерий для сходимости ряда Фурье по норме в X.

Теорема 5. *Пусть оператор* A *удовлетворяет условиям теоремы 3 и* $\sqrt[s]{m_{n+1}} - \sqrt[s]{m_n} \geqq a > 0$ *для достаточно больших* n. *Если элемент* $f \in X$ *имеет ограниченную* k-*тую* Φ-*вариацию на интервале* $[-l, l]$, *где* $\Phi(u)$ *выпукла и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty,$$

то $\lim_{n\to\infty} \|(I-S_n)f\| = 0$.

Можно ввести и понятие локальной k-той Φ-вариации на интервале $[-l, l]$ для элемента $f \in X$ и получим через нее аналогичный критерий для сходимости ряда Фурье на функционале $x^* \in S^*$.

Заметим, что если X является пространством непрерывных 2π-периодических функций $C[0, 2\pi]$ и $T(t)$ есть группа сдвигов на прямой, то инфинитезимальный оператор A группы является оператором дифференцирования d/dx, который 2-регулярен. Тогда для произвольной функции $f \in C[0, 2\pi]$, $S_n f$ совпадает с n-той парциальной суммой ряда Фурье по тригонометрической системе $\{\cos nx, \sin nx\}$. В этом случае результат, получающийся из теоремы 4 для $k=1$, получен Чантурием [5].

Другими примерами ограниченных сильно непрерывных групп операторов являются сдвиги в пространствах и подпространствах почти периодических функций, определяемых с помощью норм Бора, Степанова, Вейля, Безиковича [7]. Из наших результатов следуют критерии для сходимости ряда Фурье почти периодических функций как в норме этих пространств, так и в точке.

Авторы благодарят В. А. Попову за постановку задачи и за его внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. L. Butzer, H. Berenz. Semi-Groups of Operators and Approximation. Springer-Verlag, 1967.
2. Н. П. Купцов. Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов. *Успехи мат. наук,* **23**, **1967**, вып. 4 (142), 117—178.
3. В. А. Попов. Локальное приближение в пространствах Банаха. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*, **66**, 1972/73, 321—330.
4. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. Линейные операторы (общая теория). Москва, 1962.
5. З. А. Чантурия. Модуль изменения функции и ее применения в теории ряда Фурье. *Доклады АН СССР,* **214**, 1974, № 1, 63—66.
6. V. A. Popov. On the connection between rational and spline approximation. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **27**, 1974, № 5, 623—626.
7. Б. М. Левитан. Почти-периодические функции. Москва, 1953.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 17. 11. 1975