PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

НЕКОТОРЫЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ $G_2(F)$. I

НИКОЛА Т. ПЕТРОВ

В работе рассматривается простая группа Шевалле типа G_2 над конечным полем F характеристики 2. Доказана следующая теорема.

Пусть $|F|>2$ и D — подгруппа в $G_2(F)$, порожденная корневыми подгруппами, соответствующими длинным корням. Тогда D изоморфна группе SL(3, F), а ее нормализатор является максимальной подгруппой в $G_2(F)$.

Сразу после того как Холл и Уелс доказали существование простой группы Янко порядка 604 800 [1], Уелс [2] показал, что она содержится (в качестве подгруппы) в $G_2(4)$. Раньше было замечено, что простая группа Янко порядка 175 560 содержится в $G_2(11)$ [3]. В связи с этим кажется разумным поставить следующую задачу: классифицировать максимальные подгруппы группы Шевалле $G_2(F)$ над полем F. При ограничении char $F=2$ здесь будет показано, что некоторые из подгрупп группы $G_2(F)$ являются максимальными (Теорема 1).

Через Σ будем обозначать систему корней типа G_2, Π — множество положительных корней относительно базиса $\{a, b\}$ (рис. 1). Будем предполагать, что длина корней a, b равняется соответственно 1 и $\sqrt{3}$. Через F всюду будем обозначать поле характеристики 2. Остальные обозначения стандартны (см. [4, 5]) и будут использоваться без специальных оговорок: H, U, N — это стандартные подгруппы группы $G_2(F)$, w_r — отражение относительно корня $r\in\Sigma$

$$U=\langle x_r(t)\,|\,r\in\Pi,\ t\in F\rangle,\quad V=\langle x_{-r}(t)\,|\,r\in\Pi,\ t\in F\rangle$$

$B=HU$ нормализатор U в $G_2(F)$. $N/H\cong W=\langle w_a, w_b\rangle$ — группа Вейля системы Σ. Так как F — поле характеристики 2, то группа N расщепляема, и мы будем считать, что $W\subset N$, $N=WH$. Заметим, что W — диэдральная группа порядка 12; любой элемент $w\in W$ можно записать в виде произведения $\prod_r w_r$, где $r=a$ либо $r=b$. Минимальное число сомножителей в такой записи w будем обозначать через $l(w)$ (длина w относительно канонической системы образующих); например, $l(e)=0$, $l(w_a)=l(w_b)=1$ и т. д. Легко сообразить, что $0\leq l(w)\leq 6$ для любого $w\in W$.

Следующие утверждения хорошо известны [5]:

Лемма 1. *Если F — поле характеристики 2, то в подгруппе $U\subset G_2(F)$ имеют место следующие соотношения для коммутаторов* ($[x, y]=x^{-1}y^{-1}xy$):

$$[x_a(t),\ x_b(u)] = x_{a+b}(tu)x_{2a+b}(t^2u)x_{3a+b}(t^3u),\quad [x_a(t),\ x_{a+b}(u)] = x_{3a+b}(t^2u)x_{3a+2b}(tu^2),$$

$$(1)\qquad [x_a(t),\ x_{2a+b}(u)] = x_{3a+b}(tu),\quad [x_b(t),\ x_{3a+b}(u)] = x_{3a+2b}(tu),$$

$$[x_{a+b}(t),\ x_{2a+b}(u)] = x_{3a+2b}(tu),$$

$[x_r(t),\ x_s(u)] = e$ *для всех остальных пар* $r,\ s \in \Pi$.

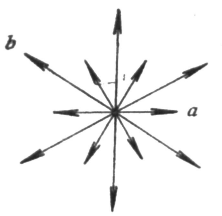

Рис. 1. Система корней типа G_2

Лемма 2. *Предположим, что в множестве* Σ *введено упорядочение. Тогда любой элемент* x *из* U *однозначно записывается в виде*

$$(2)\qquad x = \prod_{r \in \Pi} x_r(t_r),\quad t_r \in F,$$

где корни r *берутся в возрастающем порядке относительно данного упорядочения. Пусть* $w \in W$,

$$U_w = \langle x_r(t) \mid t \in F,\ r \in \Pi,\ w(r) < 0\rangle.$$

Для любого элемента g *из* $G_2(F)$ *существуют однозначно определенные* $x_1 \in U$, $h \in H$, $w \in W$ *и* $x_2 \in U_w$, *для которых* $g = x_1 h w x_2$.

Примечание. В канонической записи (2) элемента x_1 всегда будем использовать только такие упорядочения, при которых любой длинный корень меньше любого короткого. Наоборот, для записи x_2 будем использовать упорядочения, при которых любой короткий корень меньше любого длинного. Равенства (1) показывают, что в записи x_2 будут участвовать только положительные корни r, для которых $w(r) < 0$. Ввиду невозможности привести здесь все необходимые общие факты о группах Шевалле, мы будем предполагать знакомство с соответствующей частью обзора Картера [4]. Вместо $h(\chi_{r,\lambda})$ будем писать $h_r(\lambda)$.

Будет доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* F — *поле характеристики* 2 *и* $G = G_2(F)$ — *группа Шевалле типа* G_2. *Если* $D = \langle x_r(t) \mid r \in \Sigma,\ |r| = \sqrt{3},\ t \in F\rangle$, то $D \cong \mathrm{SL}(3, F)$, $C_G(D) = Z(D)$, $N_G(D) = \langle D,\ w_a\rangle \cong$ *расширение* $\mathrm{SL}(3, F)$ *при помощи автоморфизма графа. Если* $|F| > 2$, $N_G(D)$ *является максимальной подгруппой группы* $G_2(F)$.

Для удобства изложим доказательство в виде серии лемм.

Лемма 3. *При обозначениях из формулировки теоремы* 1 *покажем, что* $D \cong \mathrm{SL}(3, F)$.

Доказательство. Если Φ — система корней типа A_2, то $\mathrm{SL}(3, F$ является универсальной группой Шевалле, соответствующей системе Φ и полю F. В рассматриваемой системе типа G_2 длинные корни образуют подсистему типа A_2 и по хорошо известной теореме Стейнберга ([5, с. 64]), существует сюрективный гомоморфизм $\varphi: \mathrm{SL}(3, F) \to D$. С другой стороны, центр $\mathrm{SL}(3, F)$ состоит из диагональных матриц $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda)$, где $\lambda \in F$, $\lambda^3=1$ и фактор-группа $\mathrm{SL}(3, F)$ по центру является простой.

Предположим, что F не является полем разложения многочлена x^3-1. Тогда $\mathrm{SL}(3, F)$ — простая и, очевидно, $\mathrm{SL}(3, F) \cong D$. Если же x^3-1 разлагается над F в произведении линейных множителей, то $\mathrm{SL}(3, F)$ обладает центром из трех элементов и, как легко проверить, то же самое имеет место в группе D. В самом деле, легко убедиться, что если $1 \neq \lambda \in F$ и $\lambda^3=1$, то $h_b(\lambda)h_{3a+b}(\lambda^{-1})$ — неединичный элемент из центра группы D. Из этих соображений, ввиду теоремы о гомоморфизмах, следует, что φ — изоморфизм.

Лемма 4. $C_G(D)=Z(D)$.

Доказательство. В справедливости утверждения можно убедиться прямыми вычислениями, основанными на лемме 1. Следующее рассуждение быстрее приводит к цели. Согласно [6, с. 502]

$$C_1=C_G(x_{3a+2b}(1))=\langle h_b(\lambda)h_{3a+b}(\lambda^{-1}),\ U,\ w_a \mid \lambda \neq 0\rangle.$$

Следовательно,

$$C_2=C_G(x_{-3a-2b}(1))=\langle h_b(\lambda)h_{3a+b}(\lambda^{-1}),\ V,\ w_a \mid \lambda \neq 0\rangle.$$

Учитывая, что $V \cap U=\{e\}$ и $H \cap U=H \cap V=\{e\}$, получаем

$$C_1 \cap C_2=\langle w_a,\ x_a(t),\ h_b(\lambda)h_{3a+b}(\lambda^{-1}) \mid t,\ \lambda \in F,\ \lambda \neq 0\rangle.$$

Произвольный элемент из $C_1 \cap C_2$ можно записать либо в виде

$$g_1=x_a(t)h_b(\lambda)h_{3a+b}(\lambda^{-1}), \text{ либо в виде } g_2=x_a(t_1)h_b(\lambda)h_{3a+b}(\lambda^{-1})w_a x_a(t_2).$$

Несложные вычисления, использующие (1), показывают, что g_2 не коммутирует с $x_b(1)$, а g_1 коммутирует с $x_b(1)$ только в том случае, когда $t=0$ и $\lambda^3=1$, т. е. если g_1 принадлежит $Z(D)$. Но $C_G(D) \subset C_1 \cap C_2$ и, стало быть, $C_G(D)=Z(D)$.

Лемма 5. *Картановская подгруппа H содержится в D. Если $\langle D, w_a\rangle$ — максимальная подгруппа в $G=G_2(F)$, то $N_G(D)=\langle D, w_a\rangle$. Если F — поле из двух элементов, то $N_G(D)=\langle D, w_a\rangle$.*

Доказательство. Покажем первую часть утверждения. Пусть $h_1=h_a(\mu)$, $h_2=h_b(\mu^{-1})h_{3a+b}(\mu)$, $h=h_1h_2^{-1}$, $\mu \neq 0$. Прямая проверка убеждает нас, что h коммутирует с $x_{\pm a}(t)$ и $x_{\pm b}(t)$ для любого $t \in F$ и, стало быть, h лежит в центре группы G. Однако $Z(G)$ — тривиален и, следовательно, $h=e$, т. е. $h_1=h_2$. Итак, $h_a(\mu)$ принадлежит D. Но

$$H=\langle h_a(\mu),\ h_b(\nu) \mid \mu,\ \nu \in F,\ \mu\nu \neq 0\rangle,$$

и включение $H \subset D$ уже очевидно.

Предположим, что $\langle D, w_a\rangle$ — максимальна в G. Поскольку w_a — изометрия корневой системы, ясно, что w_a нормализует D. Если $N_G(D)$ строго содержит $\langle D, w_a\rangle$, то ввиду максимальности получаем, что D нормальна в G, а это очевидно не так — например, $x_a(1)$ не нормализует D.

Предположим, что F — поле из двух элементов. Группа внешних автоморфизмов группы $\mathrm{SL}(3, K)$ хорошо известна [5]; в рассматриваемом случае она состоит только из двух элементов и порождается так называемым

„автоморфизмом графа“. С другой стороны, можно считать, что $N_G(D)/D$ состоит из внешних автоморфизмов группы D и, следовательно, порядок этой фактор-группы не больше двух. Но ее порядок не меньше двух (лемма 4 и наблюдение, что $w_a \notin D$, но $w_a \in N_G(D)$) и, стало быть, $N_G(D)=\langle D, w_a\rangle$.

Дальше положим: $\widetilde{D}=\langle D, w_a\rangle$, D_1 — произвольно выбранная подгруппа со свойством $\widetilde{D} \subseteq D_1 \subset G_2(F)$,

$$S(w)=(BwB)\cap D_1 \setminus \widetilde{D} \quad (w \in W).$$

По лемме Брюа $G=\cup_w BwB$ (суммирование по всем элементам группы Вейля) — объединение попарно не пересекающихся множеств. Если покажем, что $S(w)=\varnothing$ для любого $w\in W$, то из этого будет следовать $D_1=\widetilde{D}$, т. е. $\widetilde{D}$ максимальна в G.

Всюду до конца будем предполагать, что $|F|>2$.

Л е м м а 6. *$S(e)=\varnothing$ (e — единица группы G).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y\in S(e)$. Умножив y слева на подходящий элемент из $\widetilde{D}$ и воспользовавшись замечанием к лемме 2, мы можем без потери общности предполагать

$$y=x_a(t_1)x_{2a+b}(t_2)x_{a+b}(t_3).$$

6.1. Пусть только одно из t_i ($i=1, 2, 3$) не равно нулю, скажем $t_1\neq 0$, $t_2=t_3=0$. Тогда $wx_a(t_1)w^{-1}=x_{w(a)}(t_1)\in D_1$ для любого $w\in W$, ибо $W\subset\widetilde{D}$. Но группа W действует транзитивно на коротких корнях и, следовательно, $x_r(t_1)\in D_1$ для любого короткого корня r. Теперь, сопрягая $x_r(t_1)$ элементами из H и применяя лемму 5, имеем $x_r(t)\in D_1$ для любого $t\in F$ и, значит, $D_1=G$, что противоречит условию.

6.2. Пусть только одно из t_i равно нулю; например, $t_1=0$, $t_2t_3\neq 0$. Положим $h=h_{3a+b}(\lambda)$, $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 1$. Тогда $yhy^{-1}h^{-1}=x_{2a+b}(t_2+\lambda t_2)$ — неединичный элемент из $S(e)$ и мы возвращаемся к 6.1. Случаи $t_2=0$, $t_1t_3\neq 0$ и $t_3=0$, $t_1t_2\neq 0$ аналогичным образом сводятся к 6.1.

6.3. Пусть $t_1t_2t_3\neq 0$. Положим $h=h_{3a+b}(\lambda)$, $\lambda\neq 1$. Тогда

$$yhy^{-1}h^{-1}=x_a(t_1+\lambda t_1)x_{2a+b}(t_2+\lambda t_2)x_{3a+b}(\ldots)\in D_1.$$

Следовательно, $x_a(t_1+\lambda t_1)x_{2a+b}(t_2+\lambda t_2)$ принадлежит $S(e)$ и удовлетворяет условиям ведущего к противоречию случая 6.2. Лемма доказана.

Л е м м а 7. *$S(w_a)=\varnothing$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что это не так. Пользуясь замечанием к лемме 2, без потери общности можем предполагать, что

$$y=x_a(t_1)x_{2a+b}(t_2)x_{a+b}(t_3)w_a x_a(u)\in S(w_a).$$

Заметим сразу, что t_1 и u не могут равняться нулю: если, скажем, $t_1=0$, то $w_a y\in S(e)$, что противоречит лемме 6.

7.1. Пусть $t_2=t_3=0$. Рассматриваем подгруппы

$$A=\langle x_a(t),\ w_a \mid t\in F\rangle\cong \mathrm{SL}(2, F),$$

$$A_1=\langle h_a(\lambda),\ w_a \mid \lambda\in F,\ \lambda\neq 0\rangle.$$

По известным результатам Д и к с о н а [7] A_1 максимальна в A и поскольку $y\in A\setminus A_1$, то $A=\langle A_1, y\rangle$. С другой стороны, $A_1\subset D_1$, $y\in D_1$ и, стало быть, $x_a(1)\in S(e)$, что противоречит лемме 6.

7.2. Пусть $t_2 \neq 0$ либо $t_3 \neq 0$. Для определенности предположим $t_3 \neq 0$ и рассмотрим элемент $y_1 = yhy^{-1}h^{-1}$, где $h = h_{3a+2b}(\lambda)$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$. Используя (1), нетрудно записать y_1 в каноническом виде и тогда становится очевидным, что $y_1 \in S(e)$ (в каноническом виде y_1 выходит множитель $x_{a+b}(t_3 + \lambda t_3)$, а y по условию принадлежит D_1). Если $t_2 \neq 0$ и $t_3 = 0$, аналогичное рассуждение снова приводит к противоречию.

Итак, возможности 7.1 и 7.2 ведут к противоречию. Следовательно, $S(w_a) = \varnothing$.

Лемма 8. *Пусть $S(w) = \varnothing$ для всех w из группы Вейля, для которых $l(w) < 3$. Тогда $S(w_{3a+b}) = \varnothing$.*

Доказательство. Допустив противное, мы можем предполагать, что

$$y = x_a(t_1) x_{2a+b}(t_2) x_{a+b}(t_3) w_{3a+b} x_{2a+b}(u_2) x_a(u_1)$$

принадлежит $S(w_{3a+b})$.

8.1. Заметим, что $t_1 u_1 \neq 0$. На самом деле, достаточно учесть, что $w_{3a+b} = w_a w_b w_a$ и, если, например, $t_1 = 0$, то $w_a y$ принадлежит $S(w_b w_a)$, что противоречит условию леммы.

8.2. Покажем, что $t_2 u_2 = 0$. Предположим, наоборот, что $t_2 u_2 \neq 0$, и пусть $h = h(\chi)$, где χ — характер, для которого $\chi(a) = z_1$, $\chi(a+b) = z_2$, $\chi(2a+b) = z_3^{-1}$, $z_1 z_2 z_3 = 1$. Выбираем z_i так, чтобы $u_1 = z_1 t_1$, $u = z_3^{-1} t_2$. Если $t_1 u_2 \neq t_2 u_1$, несложные вычисления показывают, что yhy принадлежит $S(e)$ — противоречит условию леммы. Если упомянутое неравенство не имеет места, на этот раз положим $z_1 = z_2^{-1} \neq 1$. Тогда для элемента $y' = hyw_{3a+b}h^{-1}w_{3a+b}$ мы можем повторить предыдущее рассуждение, а оно ведет к противоречию.

8.3. Покажем, что $t_2 = u_2 = 0$. Пусть, скажем, $t_2 \neq 0$, $u_2 = 0$ и $y'' = x_{2a+b}(t_2) x_a(t_1) x_{a+b}(t_3) w_{3a+b} x_a(u_1)$. Ясно, что $y'' \in S(w_{3a+b})$ (ср. y, y'' и учесть (1)). Записывая $y^{-1}y''$ в каноническом виде, мы убеждаемся, что $S(w_{3a+b})$ содержит некоторый элемент $y_1 = x_a(t_1') w_{3a+b} x_a(u_1')$ с $t_1' u_1' \neq 0$ и, следовательно, содержит

$$w_{a+b} y_1 w_{a+b} = x_{2a+b}(t_1') w_{3a+b} x_{2a+b}(u_1').$$

Последнее противоречие 8.1. Если же $t_2 = 0$, $u_2 \neq 0$, для элемента y^{-1} можно повторить дословно предыдущее рассуждение.

Теперь закончим доказательство леммы. Уже знаем, что $t_2 = u_2 = 0$, а в п. 8.3 содержится утверждение $t_3 \neq 0$. Итак, если $S(w_{3a+b})$ непустое, оно содержит элемент y, где $t_1 u_1 t_3 \neq 0$, $t_2 = u_2 = 0$. Положим $h = h_{3a+2b}(\lambda)$, где $\lambda \neq 1$, и рассмотрим элемент $y_2 = y^{-1}h^{-1}y$. Он принадлежит $D_1 \cap B$, а если записать его в каноническом виде, становится очевидным, что y_2 принадлежит $S(e)$, поскольку в его канонический вид входит множитель $x_{a+b}(t_3 + \lambda t_3)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 9. *Предположим, что если $w' \in W$ и $l(w') < 5$, то $S(w') = \varnothing$. Тогда $S(w_{2a+b}) = \varnothing$.*

Доказательство. Нам будет полезно заметить, что

$$w_{2a+b} = w_a w_b w_a w_b w_a, \quad l(w_{2a+b}) = 5,$$

$$l(w_{2a+b} w_{a+b}) = l(w_{a+b} w_{2a+b}) = 4.$$

Допустим теперь, что множество $S(w_{2a+b})$ не пустое; тогда в нем должен содержаться некоторый элемент

$$y=x_{a+b}(t_1)x_{2a+b}(t_2)x_a(t_3)w_{2a+b}x_{a+b}(t_4)x_a(t_5)x_{2a+b}(t_6).$$

9.1. Заметим, что $t_1t_3t_4t_5\neq 0$. В самом деле, если $t_3=0$, то w_ay принадлежит $S(w_aw_{2a+b})$, причем $l(w_aw_{2a+b})=4$. Если $t_1=0$, аналогичное соображение имеет место для $w_{a+b}y$ и т. д. Итак, можем предполагать $t_3t_4\neq 0$. Положим $h=h_b(t_3^{-1}t_4^{-1})$ и рассмотрим элемент $y_1=yh^{-1}w_{a+b}$. После некоторых элементарных преобразований (мы их опускаем) y_1 записывается в каноническом виде

$$y_1=x_{a+b}(t_1)x_{2a+b}(t_2)h_1w_{2a+b}\ldots \quad (h_1\in H).$$

Поскольку $y_1\in D_1$, теперь уже очевидно, что w_ay_1 принадлежит $S(w_aw_{2a+b})$ а это противоречит условию леммы.

Лемма 10. *$S(w)=\varnothing$ для любого w из группы Вейля.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $l(w)$. Если $l(w)=0$, оно справедливо — лемма 6. Пусть w — фиксированный элемент из W и предположим, что $S(w')=\varnothing$ для всех $w'\in W$, удовлетворяющих условию $l(w')<l(w)$. Предположим дополнительно, что $S(w)$ непустое множество. Следовательно, в нем содержится некоторый элемент

$$y=x_1hwx_2, \quad x_i\in U, \quad h\in H,$$

и эта запись каноническая (в смысле леммы 2). Без потери общности мы можем считать, что в канонической записи $x_i (i=1, 2)$ не входят множители вида $x_r(t)$, где r — длинный корень. Если теперь $w=w_bw_a\ldots$ — кратчайшая запись, то уже очевидно, что w_by принадлежит $S(w_bw)$. Последнее противоречит индуктивному предположению, поскольку $l(w_bw)<l(w)$. Если же $w=w_aw_b\ldots w_b$ — кратчайшая запись, предыдущее рассуждение можно повторить для yw_b. Наконец, предположим, что кратчайшей записью для w является $w_aw_b\ldots w_a$. Следовательно, w совпадает с одним из элементов w_a, $w_{3a+b}=w_aw_bw_a$, w_{2a+b}. Теперь, применяя леммы 7, 8 и 9, мы убеждаемся, что во всех случаях $S(w)=\varnothing$, чем лемма доказана. Этим закончено и доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Hall, D. Wales. The simple group of order 604 800. *J Algebra*, **9**, 1968, 417—450
2. D. Wales. Generators of the Hall — Janko group as a subgroup of $G_2(4)$. *J. Algebra*, **13**, 1969, 513—516.
3. Z. Janko. A new finite simple group with abelian 2-Sylow subgroups and its characterization. *J. Algebra*, **3**, 1966, 147—186.
4. R. W. Carter. Simple groups and simple Lie algebras. *J. London Math. Soc.*, **40**, 1965, 193—240.
5. Р. Стейнберг. Лекции о группах Шевалле. Москва, 1975.
6. H. Enomoto. The conjugacy classes of Chevalley groups of type (G_2) over finite fields of characteristic 2 or 3. *J. Fac. Sci. Tokyo Univ.*, **26**, 1970, 497—512.
7. L. E. Dickson. Linear groups with an exposition of the Galois field theory (Leipzig, 1901). Dover edition, 1958.

Висший педагогический институт
9700 Шумен

Поступила 24. 9. 1976