Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA
ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Pliska Studia Mathematica Bulgarica
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~pliska/
or contact: Editorial Office
Pliska Studia Mathematica Bulgarica
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: pliska@math.bas.bg

CONDITIONS DE RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME NON-COERCIF

IORDAN V. IORDANOV

On trouve une condition nécessaire et suffisante pour que la solution du problème en [7] appartienne à la classe d'espaces de Sobolev $H^{2,p}(\Omega_0)$, $p>n\geqq 2$, $\overline{\Omega}_0\subset\Omega$. Dans le cas où on considère une contrainte régulière $\varphi\in H^{2,p}(\Omega)$ on obtient des conditions suffisantes de la régularité dans une forme simple.

Ici on prouve des résultats sur la différentiabilité de la solution d'une inéquation variationnelle elliptique (cas non-coercif), analogues aux résultats trouvés en [3, 8]. On énonce aussi quelques conditions suffisantes, lesquelles découlent du théorème général donnant des conditions nécessaires et suffisantes de régularité. Il est évident qu'on peut résulter des assertions pareilles et pour le problème susmentionné.

1. Notations et formulation du problème. En ce paragraphe on introduit des notations utilisées et en même temps on généralisera les résultats de [7].

Soit $\Omega\subset R^n$ un domaine ouvert de frontière $\partial\Omega$ de la classe C^2 bien qu'il n'en soit pas toujours nécessaire. Notons par $H^{k,p}(\Omega)$, $k=1, 2$, $p>1$, les complétés de $C^k(\overline{\Omega})$ pour la norme

$$\|u\|^p_{H^{k,p}(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leqq k}\int_\Omega |D^\alpha_u|^p dx.$$

Lorsque $p=2$ on écrit simplement $H^k(\Omega)$.

Les fonctions $a_{ij}(x)$, $i, j=1,\dots, n$, $a(x)$ sont bornées et mesurables dans Ω et telles que

(1.1) $\sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqq\nu|\xi|^2$, $\nu>0$, $\forall\xi\in R^n$ et p. p. sur Ω, $a(x)\geqq 0$ p. p. sur Ω.

Soient E et F deux sous-ensembles formés de Ω et $\varphi\in H^1(\Omega)$. Notons

$$a(u, v)=\int_\Omega\sum_{ij} a_{ij}(x)\,u_{x_i}v_{x_j}dx,\quad u,\ v\in H^1(\Omega)$$

et $K=\{v\mid v\in H^1(\Omega),\ (v-\varphi)|_E\geqq 0,\ (v-\varphi)|_F\leqq 0$ au sens de $H^1(\Omega)\}$. (Pour la définition de l'inégalité au sens de $H^1(\Omega)$ on peut voir par exemple [3, 8].)

Considérons l'inéquation variationnelle suivante:

Problème 1. *Trouver $u\in K$ tel que*

$$a(u, v-u)+\int_\Omega a(x)u(v-u)dx\geqq(f, v-u),\quad\forall v\in K,$$

où f est une fonctionnelle linéaire continue sur $H^1(\Omega)$.

PLISKA Studia mathematica bulgarica. Vol. 3, 1981, p. 61—66.

On distingue deux cas selon la validité de la condition

$$\int_\Omega a(x)dx>0. \tag{1.2}$$

Si cette condition n'est pas vraie, i. e. l'intégrale dernière s'annule (par (1.1) cela signifie que $a=0$ p. p.), le problème 1 n'est pas coercif. En ce cas l'inégalité de Poincaré [6]. p. 18

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\leqq \text{const}\,(\int_\Omega \sum_{i=1}^n u^2_{x_i}dx+|\int_\Omega u(x)dx|) \tag{1.3}$$

jouera un rôle important. Notons par C le sous-espace linéaire des constantes dans $H^1(\Omega)$ et par $\widetilde{H}$ son complément orthogonal. Il est clair que la forme $a(u, v)$ est coercitive sur $\widetilde{H}$, i. e. const $\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\leqq a(u, u)$, $\forall u\in\widetilde{H}$. Lorsque la condition (1.2) est vérifiée alors la forme $a(u, v)+\int_\Omega a(x)uvdx$ est coercive sur $H^1(\Omega)$. (La démonstration est pareille de celle de (1.3).)

Théorème 1.1. *En outre des hypothèses déjà faites, en cas lorsque* $a=0$ *p. p. on suppose que la fonctionnelle* f *est nulle sur le sous-espace* C. *Alors le problème 1 a pour tout* f *une solution. Elle est unique sous la condition* (1.2). *Si* $a=0$ *p.p. la différence de toutes deux solutions est constante*.

Démonstration. En vertu de la coercivité des formes considérées, l'affirmation suit du théorème de Lions et Stampacchia [5]. Si $a=0$ on réduit le problème jusqu'à l'espace $\widetilde{H}$ parce que $a(u, v)=0$ quand au moins l'un des éléments u, v est égale à une constante.

Remarque. Il est évident que le théorème d'existence et d'unicité pour le problème 1 est un cas particulier de la théorie générale de [4].

Dorénavant supposons que les nombres $N=\text{vraimax}_E\,\varphi$, $M=\text{vraimin}_F\,\varphi$ sont finis et que $f=0$. Sous ces conditions et $a=0$, la solution du problème 1 est unique seulement si $N\geqq M$ (cf. [7]).

Prouvons une estimation analogue au lemme 3.1 de [7].

Lemme 1.1. *Soit* $\text{mes}\,E\neq 0\neq\text{mes}\,F$. *On suppose que les nombres* $P=\max(\text{vraimax}_{E\cup F}\,\varphi, 0)$ *et* $Q=\min(\text{vraimin}_{E\cup F}\,\varphi, 0)$ *soient finis et soit* $u\in K$ *la solution de*

$$a(u, v-u)+\int_\Omega a\,.\,u\,.\,(v-u)dx\geqq 0,\quad \forall v\in K. \tag{1.4}$$

Alors $Q\leqq u\leqq P$ *sur* Ω *au sens de* $H^1(\Omega)$ (*et donc p. p. sur* Ω).

Démonstration. Il est évident que les fonctions $\xi=\min(P, u)$ et $\eta=\max(Q, u)$ appartiennent à K et de plus que $\int_\Omega a\,.\,\xi\,.\,(\xi-u)\,dx\leqq 0$ et $\int_\Omega a\,.\,\eta\,.\,(\eta-u)dx\leqq 0$. D'autre part, comme on le démontre en [7], $a(\xi, \xi-u)=a(\eta, \eta-u)=0$. On a immédiatement $u-\xi=c_1$ et $u-\eta=c_2$, où c_1, c_2 sont constantes. Maintenant l'assertion suit des inégalités $c_1\leqq 0$ et $c_2\geqq 0$. En effet, si au contraire $c_1>0$, alors $u>P$ sur Ω, i. e. il existe $\delta>0$ tel que $u-\delta>P$. Mais sur F: $u\leqq\varphi$ et par conséquence $u\leqq M+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ arbitrairement fixé) sur un ensemble de mesure positive. Soit $\varepsilon<\delta$. Il suit que sur le même ensemble $u>P+\delta\geqq M+\delta>M+\varepsilon\geqq u$, ce qui est absurde.

2. Conditions de régularité de la solution. Nous étudions en ce paragraphe l'inéquation homogène (1.4). Supposons que la distance entre E et F est positive.

D'abord on considère le cas lorsque $E \cup F$ est contenu dans l'intérieur du domaine Ω. Sous cette hypothèse on peut facilement obtenir les résultats de différentiabilité analogues à ceux de [3]. Tenant compte de

$$Lu \equiv -\sum_{i,j} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + a(x)u = 0$$

dans $\Omega \diagdown (E \cup F)$ il vient que la solution u est lisse dans $\Omega \diagdown (E \cup F)$. Cette régularité dépend de la différentiabilité des coefficients d'opérateur L.

Passant vers le problème de la régularité de la solution u à proximité de $E \cup F$, tout d'abord nous établissons un résultat analogue du lemme 3.1 de [3].

Soit Ω_0, $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$, un domaine connexe de frontière régulière. On le fixera plus tard. Par la suite nous supposerons que le problème de Dirichlet

$$Lv = f \in L_p(\Omega_0), \quad v|_{\partial\Omega_0} = h \in H^{3/2,p}(\partial\Omega_0)$$

admet une solution $v \in H^{2,p}(\Omega_0)$ unique pour laquelle

$$\|v\|_{H^{2,p}(\Omega_0)} \leq \text{const}\,(\|f\|_{L_p(\Omega_0)} + \|h\|_{H^{3/2,p}(\partial\Omega_0)})$$

où la constante ne dépend que de L, p et le domaine Ω_0. (Ici par $H^{3/2,p}(\partial\Omega_0)$ on désigne l'espace des fonctions sur $\partial\Omega_0$, prolongeables dans Ω_0 comme des fonctions de $H^{2,p}(\Omega_0)$ (cf. [1]). Comme il suit de [1] il suffit de faire la supposition $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $a \in C(\Omega)$, pour avoir la propriété susdite.

Lemme 2.1. *Soit ϱ une fonction mesurable $g_1, g_2 \in L_p(\Omega_0)$, $p > n \geq 2$ et soit θ: $R^1 \to [0, 1]$ une fonction lipschitzienne. Alors il existe une solution $v \in H^{2,p}(\Omega_0)$ du problème*

$$Lv = g_1\theta(v-\varrho) + g_2\theta(\varrho - v), \quad v|_{\partial\Omega_0} = h \in H^{3/2,p}(\partial\Omega_0) \tag{2.1}$$

pour laquelle $\|v\|_{H^{2,p}(\Omega_0)} \leq \text{const}\,(g_1, g_2, h)$.

La démonstration est analogue de celle du lemme 3.1 de [3].

Par la suite un rôle essentiel jouera l'hypothèse:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Il existe une fonction } \psi \in H^{2,p}(\Omega) \text{ et des ensembles mesurables} \\ E' \text{ et } F' \text{ tels que} \\ E \subset E' \subset \Omega, \quad F \subset F' \subset \Omega, \\ \text{dist } (E', F') > 0, \text{ dist } (E', \partial\Omega) > 0, \text{ dist } (F', \partial\Omega) > 0, \\ Q \leq \psi \leq P, \quad \psi|_{\partial E'} = Q, \quad \psi|_{\partial F'} = P, \\ (\psi - \varphi)|_E \geq 0, \quad (\psi - \varphi)|_F \leq 0, \\ (u - \psi)|_{E'} \geq 0, \quad (u - \psi)|_{F'} \leq 0, \end{array}\right. \tag{2.2}$$

où les quatre dernières inégalités sont au sens de $H^1(\Omega)$.

Fixons Ω_0 tel que $E' \cup F' \subset \Omega_0$.

Théorème 2.1. *L'hypothèse* (2.2) *et une condition nécessaire et suffisante pour que la solution u du problème* (1.4) *appartienne à l'espace de Sobolev $H^{2,p}(\Omega_0)$, $p > n \geq 2$.*

Démonstration. En vertu de la régularité de la solution u hors de $E \cup F$, établie au début de ce paragraphe, on a $u|_{\partial\Omega_0} \in H^{3/2,p}(\partial\Omega)$. A l'aide du lemme 2.1, prenant $\varrho = \psi$ et $h = u|_{\partial\Omega_0}$, on détermine les fonctions $v_m \in H^{2,p}(\Omega_0)$ lesquelles satisfont l'équation non-linéaire (2.1) avec $\varrho = \psi$, $g_1 = e' \max(L\psi, 0)$,

$g_2 = f' \min(L\psi, 0)$ (où e', f' sont les fonctions caractéristiques des ensembles E', F') et

$$\theta(t) = \theta_m(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 1/2m, \\ 2 - 2mt, & 1/2m \leq t \leq 1/m, \quad m = 1, 2, \ldots, \\ 0, & 1/m \leq t. \end{cases}$$

Désignant

$$\bar{u}_m = \begin{cases} v_m, & \Omega_0, \\ u, & \Omega \setminus \Omega_0, \end{cases}$$

il est évident que $u_m \in H^1(\Omega)$. Puis on reprend la démonstration comme dans le théorème 3.1 de [3].

A l'aide du théorème 2.1 on obtient des conditions suffisantes de régularité en cas lorsque $\varphi \in H^{2,p}(\Omega)$.

Corollaire 2.1. *Si $\varphi|_{\partial E} = Q$ et $\varphi|_{\partial F} = P$, alors $u \in H^{2,p}(\Omega_0)$.*

Démonstration. Ceci résulte du théorème 2.1 avec $E' = E$, $F' = F$ et $\psi = \varphi$.

On peut formuler des conditions plus générales qui assurent que la solution u soit plus grande que φ dans un voisinage de ∂E et plus petite que φ dans un voisinage de ∂F. Cela nous permet de transformer la fonction φ dans des voisinages convenables E', F' de E, F de sorte que la condition (2.2) sera vérifiée avec $\psi = \varphi$. L'estimation du lemme 1.1 aura une importance essentielle.

Corollaire 2.2. Soit *$L\varphi \leq 0$ dans un voisinage unilatéral de ∂E contenu dans E (resp. $L\varphi \geq 0$ dans un voisinage analogue de ∂F) et de plus on peut prolonger φ dans des voisinages E', F' de E, F tels que $\varphi|_{\partial E'} = Q$, $\varphi|_{\partial F'} = P$, et dans $E' \setminus E$, $F' \setminus E$ la fonction $L\varphi$ satisfait les inégalités correspondantes. Alors $u \in H^{2,p}(\Omega_0)$.*

Démonstration. On a $u \geq \varphi$ sur le contour de l'ensemble sur lequel $L\varphi \leq 0$. Mais là $Lu \geq 0$ (au sens de la théorie des distributions) et du principe du maximum [2, p. 242], il suit que $u \geq \varphi$ sur l'ensemble entier. Analogiquement on établit $\varphi \geq u$ autour de F.

Corolaire 2.3. Soient *E', F' des voisinages de E, F de frontières lisses.* Soient *Γ_1, Γ_2 deux contours lisses contenus resp. dans E et F. Désignons par ξ et η les solutions des problèmes de Dirichlet*

$$\begin{aligned} &L\xi = 0, && L\eta = 0, \\ &\xi|_{\partial E'} = Q, && \eta|_{\partial F'} = P, \\ &\xi|_{\Gamma_1} = \varphi|_{\Gamma_1}, && \eta|_{\Gamma_2} = \varphi|_{\Gamma_2}. \end{aligned}$$

Alors les conditions $(\xi - \varphi)|_{\partial E} > 0$ et $(\eta - \varphi)|_{\partial F} < 0$, ou bien $\xi \geq \varphi$ et $\eta \leq \varphi$ dans des voisinages unilatérals de ∂E et ∂F, lesquels se trouvent hors de E et F resp., sont suffisantes pour avoir $u \in H^{2,p}(\Omega_0)$.

Démonstration. Le principe de maximum, mentionné ci-dessus, donne $u \geq \xi$ et $u \leq \eta$, d'où tout suit.

Pour formuler une affirmation pareille désignons par α et β deux fonctions construites comme ξ et η mais pour $\Gamma_1 = \partial E$ et $\Gamma_2 = \partial F$. Soit n la normale extérieure du contour $\partial(E \cup F)$ appartenant à la classe C^2.

Corollaire 2.4. *Les inégalités*

$$\left.\frac{\partial(\alpha - \varphi)}{\partial n}\right|_{\partial E} > 0 \quad et \quad \left.\frac{\partial(\beta - \varphi)}{\partial n}\right|_{\partial F} < 0$$

sont suffisantes pour la validité de la relation $u \in H^{2,p}(\Omega_0)$, D é m o n s t r a t i o n. On voit aisément que $\alpha \geqq \varphi$ et $\beta \leqq \varphi$ dans des voisinages unilatéraux de ∂E et ∂F resp. par quoi on achève la démonstration.

Tenant compte de [2], p. 251, nous voyons qu'ilya deux constantes c_α, c_β, qui ne dépendent que de L et des domaines où sont déterminés α et β et telles que $|\partial\alpha/\partial n|_{\partial E} \leqq c_\alpha$, $|\partial\beta/\partial n|_{\partial F} \leqq c_\beta$. Par conséquence une condition suffisante de régularité est $\partial\varphi/\partial n|_{\partial E} < -c_\alpha$ et $\partial\varphi/\partial n|_{\partial F} > c_\beta$.

Enfin nous prouverons un résultat analogue du théorème 2.1 en cas $E \cup F \subset \bar{\Omega}$, c.-à-d. lorsque E (ou F) peut avoir une intersection non-vide par $\partial\Omega$. Maintenant l'hypothèse suivante est principale:

$$(2.3) \qquad \begin{cases} \text{On a (2.2), mais } E', F' \text{ sont contenus dans } \bar{\Omega} \text{ et } \partial E' \text{ et } \partial F' \\ \text{désignent les intersections des frontières de } E, F \text{ par } \Omega. \end{cases}$$

T h é o r è m e 2.2. *La solution u du problème* (1.4) *appartient à l'espace $H^{2,p}(\Omega_0)$ pour chaque domaine Ω_0, $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$, seulement si on a* (2.3).

D é m o n s t r a t i o n. On amène ce problème au théorème 2.1. On verra de la démonstration que le comportement de la fonction φ sur $\partial\Omega \cap (E \cup F)$ n'influence pas sur la régularité de u à l'intérieur de Ω.

D'abord on prolonge la fonction ψ de (2.3) hors de Ω comme une fonction de $H^{2,p}(\Omega_1)$, où Ω_1 est un domaine de contour lisse et $\Omega_1 \supset \bar{\Omega}$. Soit $P_1 = \max_{\bar{\Omega}_1} \psi$ et $Q_1 = \min_{\bar{\Omega}_1} \psi$ ($P_1 \geqq P$, $Q_1 \leqq Q$). Choisissons une suite $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ des domaines des frontières régulières avec $\Omega_n \supset \bar{\Omega}_{n+1}$, $\Omega_n \supset \bar{\Omega}$. Fixons pour tout n des ensembles fermés E'_n, F'_n satisfaisantes $E'_n \cap \bar{\Omega} = E'$, $F'_n \cap \bar{\Omega} = F'$, $E'_n \cup F'_n \subset \Omega_n$. Maintenant changeons la fonction ψ (déjà prolongée) par une fonction ψ_n, satisfaisante dans Ω_n les conditions (2.2) avec E'_n, F'_n, P_1 et Q_1 au lieu de E', F', P et Q (à l'exception des inégalités avec la solution u). Evidemment il est possible de construire ψ_n de façon que sur Ω on ait $\psi_n = \psi_1$ et encore

$$(2.4) \qquad \psi_n \geqq \psi_{n+1} \quad \text{sur} \quad E'_{n+1} \quad \text{et} \quad \psi_n \leqq \psi_{n+1} \quad \text{sur} \quad F'_{n+1}.$$

Supposons que les coefficients $a_{ij}(x)$, $a(x)$ sont prolongés dans Ω_1 de façon qu'ils conservent leurs propriétés (1.1) dans Ω_1. Etant donné $\varepsilon > 0$, remplaçons $a(x)$ par $a(x) + \varepsilon$. Résolvons le problème (1.4) pour tout n définissant K_n (analogue de K) par E'_n, F'_n et ψ_n. D'après le corollaire 2.1 la solution $u_{\varepsilon,n} \in H^{2,p}(\Omega_n)$ satisfait l'inéquation non-linéaire

$$Lu_{\varepsilon,n} + \varepsilon u_{\varepsilon,n} = e'_n \max(L\psi_n, 0) H(u_{\varepsilon,n} - \psi_n) + f'_n \min(L\psi_n, 0) H(\psi_n - u_{\varepsilon,n}),$$

où

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \leqq 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

A l'aide des estimations à priori pour les solutions des opérateurs elliptiques on obtient pour Ω_0($\bar{\Omega}_0 \subset \Omega'$, $\bar{\Omega}' \subset \Omega$) le résultat suivant

$$\| u_{\varepsilon,n} \|_{H^{2,p}(\Omega_0)} \leqq \text{const} \left(\| Lu_{\varepsilon,n} \|_{L_p(\Omega')} + \| u_{\varepsilon,n} \|_{L_p(\Omega')} \right),$$

où la constante ne dépend pas de ε. Puisque $Q_1 \leqq u_{\varepsilon,n} \leqq P_1$ et en vertu des propriétés de ψ_n on a

(2.5) $$\|u_{\varepsilon,n}\|_{H^{2,p}(\Omega_0)} \leqq \text{const}$$

uniformément pour ε et n. Choisissant une sous-suite convenable nous obtenons $u_{\varepsilon,n} \to \widetilde{u}_\varepsilon \in H^{2,p}(\Omega_0)$ faiblement dans $H^{2,p}(\Omega_0)$ et par conséquence $u_{\varepsilon,n} \to \widetilde{u}_\varepsilon$ p. p. dans Ω_0.

Prolongeons la solution u_ε de (1.4) (avec $a+\varepsilon$, ψ_1, E', F', au lieu de a, φ, E, F) comme une fonction $v_\varepsilon \in H^1(\Omega_1)$ telle que $v_\varepsilon \geqq \psi_1$ sur E'_1 et $v_\varepsilon \leqq \psi_1$ sur F'_1. Alors, comme il vient de (2.4), $v_\varepsilon \in K_n$ pour tout n. Pour simplifier l'écriture, désignons par $b_G(u, v)$ l'expression

$$\int_G [\sum_{i,j} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j}] dx + \int_G (a+\varepsilon) uv dx, \ u, v \in H^1(\Omega_1), \ G \subset \Omega_1.$$

On a $b_\Omega(u_\varepsilon, u_{\varepsilon,n}|_\Omega - u_\varepsilon) \geqq 0$ parce que $u_{\varepsilon,n}|_\Omega \in K$. Analogiquement $b_\Omega(u_{\varepsilon,n}|_\Omega, u_\varepsilon - u_{\varepsilon,n}|_\Omega) + b_{\Omega_n \setminus \Omega}(u_{\varepsilon,n}, v_\varepsilon - u_{\varepsilon,n}) \geqq 0$. Après une addition on trouve

$$\nu \|\text{grad}(u_\varepsilon - u_{\varepsilon,n})\|^2_{L_2(\Omega)} + \varepsilon \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,n}\|_{L_2(\Omega)} \leqq b_{\Omega_n \setminus \Omega}(u_{\varepsilon,n}, v_\varepsilon - u_{\varepsilon,n}),$$

d'où $u_{\varepsilon,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} u_\varepsilon$ dans $H^1(\Omega)$ et donc p. p. sur Ω. Il suit que $u_\varepsilon = \widetilde{u}_\varepsilon$ dans Ω_0 et

(2.6) $$\|u_\varepsilon\|_{H^{2,p}(\Omega)_0} \leqq \text{const}$$

uniformément pour ε.

Il nous reste à faire le passage à la limite pour $\varepsilon \to 0$ dans (1.4), où a est changé par $a+\varepsilon$. Suivant [7], à l'aide du lemme de Minty, on trouve que la solution u est égale à la limite faible de u_ε dans $H^1(\Omega)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Maintenant tenant compte pour (2.6) on établit $u \in H^{2,p}(\Omega_0)$, par quoi la suffisance est démontrée.

On démontre la nécessité comme dans la théorème 3.1 de [3].

Remarque. Si $\varphi \in H^{2,p}(\Omega)$ et si les frontières de E et F sont lisses, on obtient à l'aide du théorème 2.2 des conditions suffisantes de régularité analogues aux corollaires 2.1—2.4.

BIBLIOGRAPHIE

1. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. I. Москва, 1962.
2. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Москва, 1973.
3. Й. В. Йорданов. Регулярност на решението на едно елиптично вариационно неравенство с две препятствия. *Годишник Соф. унив., Фак. мат. мех.*, 67, 1976, 169—190.
4. Г. Фикера. Теоремы существования в теории упругости. Москва, 1974.
5. J. L. Lions, G. Stampacchia. Variational inequalities. *Comm. Pure Appl. Math.*, **20**, 1967, 493—519.
6. J. Nečas. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Prague, 1967.
7. I. V. Iordanov. Problème non-coercif pour une inéquation variationnelle elliptique à deux contraintes. *Serdica*, **1**, 1975, 261—268.
8. I. V. Iordanov. Régularité de la solution d'une inéquation variationnelle elliptique à deux contraintes. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **26**, 1973, 1587—1589.

Centre for Mathematics and Mechanics
1090 Sofia P. O. Box 373

Received 14. 12. 1976