PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

НЕКО Н. ГЕОРГИЕВ

В работе исследуется поведение траекторий трехмерной системы в фазовом пространстве R_3. На основании расположения траекторий доказывается, в частности, теорема о существовании периодического решения, отличного от положения равновесия.

Рассмотрим уравнение

$$\dddot{\xi}+a\ddot{\xi}+b\dot{\xi}+ab\xi-g(\xi)=0, \tag{1}$$

где a и b положительные постоянные, а функция $g(\xi)$ непрерывно дифференцируемая на промежутке $(-\infty,\ \infty)$. Пусть выполняются следующие условия:

1) $g(-\xi)=-g(\xi)$;
2) $g'(\xi)<0$ при $0\leqq\xi<\xi_0$, $g'(\xi)>0$ при $\xi_0<\xi\leqq\xi_1<1$;
3) $|g(\xi)/\xi|\leqq k$, $k<\min\{ab,\ a\sqrt{b}\,(a^2+b)/2(\sqrt{b}+\sqrt{a^2+b})\}$;
4) $g(\xi)/\xi>0$ при $\xi\geqq\xi_1$;
5) $\lim\limits_{\xi\to\infty} g(\xi)/\xi=l>0$

Положим $\xi=x_1$, $x_2=ax_1+\dot{x}_1$, $x_3=bx_1+a\dot{x}_1+\ddot{x}_1$, тогда уравнение (1) заменится системой

$$\dot{x}_1=x_2-ax_1,\ \dot{x}_2=x_3-bx_1,\ \dot{x}_3=-abx_1+g(x_1). \tag{2}$$

Плисс в работах [1; 2] доказал, что система (2) является диссипативной. Но из диссипативности системы (2) не следует, что она имеет периодическое решение, отличное от положения равновесия.

Отметим еще, что другие авторы (см. [3, 4]) исследовали на устойчивость в целом положение равновесия уравнения вида (1).

В этой работе поставлена другая задача: исследовать фазовый портрет системы (2). Некоторые результаты, касающиеся системы (2), опубликованы в заметке [5].

В силу условия 3) все решения системы (2) могут быть продолжены на промежутке $(-\infty,\ \infty)$ (см. [6]). Так что система (2) определяет динамическую систему в фазовом пространстве R_3 переменных x_1, x_2, x_3.

Через g^t будем обозначать фазовый поток, заданный векторным полем $\{x_2-ax_1,\ x_3-bx_1\ -abx_1+g(x_1)\}$.

Система (2), в силу условия 3), имеет единственное состояние равновесия — начало координат O. Изучим поведение решений этой системы в окрестности состояния равновесия O. Положим $g(x_1)=hx_1+s(x_1)$, $h=g'(0)$. Тогда система (2) переписывается в виде

(3) $$\dot{x}=Ax+F(x),$$

где векторы $x=\operatorname{colon}\{x_1, x_2, x_3\}$, $F=\operatorname{colon}\{0, 0, s(x_1)\}$, а матрица

$$A=\begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ h-ab & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линеаризованную систему

(4) $$\dot{x}=Ax.$$

Запишем характеристическое уравнение системы (4):

(5) $$\psi(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+a\lambda-h=0.$$

Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — корни этого уравнения. Из $\psi(0)>0$ и $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\psi(\lambda)=-\infty$ следует, что уравнение (5) имеет хотя бы один отрицательный корень. Для определенности будем считать, что $\lambda_1<0$. Запишем уравнение (5) в виде $\psi(\lambda)=(\lambda^2+b)(\lambda+a)-h=0$.

Из последнего представления легко следует, что многочлен $\psi(\lambda)$ имеет чисто мнимые корни тогда и только тогда, когда $h=0$. Но в силу условия 3) $h<0$ и, следовательно, $\operatorname{Re}\lambda_j\neq 0$. Условия Гурвица отрицательности действительных частей корней уравнения (5) имеют вид $a>0, ab-h>0, h>0$. Там как эти условия не выполнены и $\operatorname{Re}\lambda_j\neq 0$, уравнение (5) имеет хотя бы один корень $\lambda_2=\beta_1+i\beta_2$ с положительной действительной частью β_1. С другой стороны, уравнение (5) не имеет положительного корня. Отсюда следует, что $\beta_2\neq 0$ и $\lambda_3=\overline{\lambda_2}$. Теперь из единственности отрицательного корня и $\psi(-a)>0$ в силу непрерывности функции $\psi(\lambda)$ следует, что $\lambda_1<-a$.

Ясно, что система (4) имеет ровно две траектории, стремящиеся к началу координат при $t\to+\infty$. Обе эти траектории представляют собой лучи одной и той же прямой. Направление этой прямой назовем главным, оно определяется собственным вектором $\{\lambda_1, \lambda_1(a+\lambda_1), h-ab\}$ матрицы A соответствующим собственому значению λ_1. Из доказанного ясно, что эта прямая лежит в объединении множеств $\{x_1\geqq 0, x_2\leqq 0, x_3\geqq 0\}$ и $\{x_1<0, x_2>0, x_3<0\}$.

Обозначим через $h^{(j)}$ собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным значениям λ_j. Тогда легко получить поведение траектории системы (4) в фазовом пространстве R_3. Фазовый поток системы (4) есть сжатие по направлению $h^{(1)}$ и вращение с растяжением в плоскости $(h^{(2)}, h^{(3)})$ при $t\to+\infty$.

Теперь окружим главное направление семейством цилиндров, которые пересекаются траекториями линейной системы (4) изнутри наружу.

Существует линейное, действительное и неособенное преобразование P такое, что матрица $P^{-1}AP=B$ имеет действительную кононическую форму Жордана. При этом

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & -\beta_2 \\ 0 & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда преобразование $x=Py$ приводит систему (3) к виду

$$\dot{y}=By+cs(x_1), \tag{6}$$

где постоянный вектор $c=\operatorname{colon}(c_1,\ c_2,\ c_3)$, а

$$x_1=k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3,\quad k_i=\text{const}. \tag{7}$$

При этом преобразовании ясно, что ось y_1 пойдет вдоль главного направления.

Рассмотрим семейство цилиндров, ограниченных боковыми поверхностями

$$y_2^2+y_3^2=(\delta p)^2 \tag{8}$$

и основаниями $y_1^2=(\delta q)^2$, где p и q постоянные, а δ — достаточно малый параметр.

Положим

$$u=y_2^2+y_3^2. \tag{9}$$

Тогда производная $\dot{u}$ по времени, взятая в силу системы дифференциальных уравнений (6), равна

$$\dot{u}=2\beta_1(y_2^2+y_3^2)+2(c_2y_2+c_3y_3)s(x_1). \tag{10}$$

На боковой поверхности цилиндров имеем $y_2^2+y_3^2=(\delta p)^2$, $y_1^2\leqq(\delta q)^2$. Отсюда получаем $y_1^2\leqq(y_2^2+y_3^2)q^2p^{-2}$.

Тогда для x_1 из (7), на основании неравенства Коши — Буняковского, имеем $|x_1|\leqq(|k_1|qp^{-1}+\sqrt{k_2^2+k_3^2})/\sqrt{y_2^2+y_3^2}$. Из последнего соотношения находим оценку $S(x_1)=o(\sqrt{y_2^2+y_3^2})=o(\delta)$. Отсюда следует

$$(c_2y_2+c_3y_3)S(x_1)=o(y_2^2+y_3^2)=o(\delta^2). \tag{11}$$

Из соотношения (11) и $\beta_1>0$ для $\dot{u}$ из (10) при достаточно малом δ получаем $\dot{u}>0$. Отсюда вытекает, что при достаточно малом δ семейство цилиндров (8) при $|y_1|\leqq\delta q$ пересекается траекториями системы (6) изнутри наружу.

Теперь рассмотрим две конические поверхности с общей вершиной в начале координат, определяемые уравнением

$$v\equiv(a^2x_1-ax_2+x_3)^2-(x_3-bx_1)^2-bx_2^2=0. \tag{12}$$

Докажем, что траектории системы (2) пересекают поверхности конусов $v\geqq0$ переходя при этом в область $v<0$.

Наше утверждение будет доказано, если установим, что производная от v по времени, взятая в силу системы дифференциальных уравнений (2) отрицательна при $v=0$. Докажем это. В силу системы (2) имеем

$$\dot{v}/2=-a(a^2x_1-ax_2+x_3)^2+[(a^2+b)x_1-ax_2]g(x_1). \tag{13}$$

Введем обозначения $z_1=a^2x_1-ax_2+x_3$, $z_2=x_3-bx_1$, $z_3=\sqrt{b}x_2$. Тогда

$$x_1=(z_1-z_2+az_3/\sqrt{b})/(a^2+b),\quad x_2=z_3/\sqrt{b},\quad x_3=z_2+b(z_1-z_2+az_3/\sqrt{b})/(a^2+b) \tag{14}$$

Теперь (12) и (13) в новых переменных перепишутся в виде

(15) $$z_1^2-z_2^2-z_3^2=0$$

и

(16) $$\dot{v}/2=-az_1^2+(z_1-z_2)g(x_1).$$

В силу условия 3), учитывая (14), из (16) имеем

$$\dot{v}/2\leqq -az_1^2+k(|z_1|+|z_2|)(|z_1|+\sqrt{a^2b^{-1}+1}\ \sqrt{z_2^2+z_3^2})/(a^2+b).$$

Таким образом, на основании (15), получаем

(17) $$\dot{v}/2\leqq -az_1^2+k|z_1|(|z_1|+|z_2|)(1+\sqrt{a^2b^{-1}+1})/(a^2+b).$$

Из (15) следует, что на поверхности конусов выполняется неравенство $|z_2|\leqq|z_1|$. Отсюда, учитывая (17), имеем $\dot{v}/2\leqq[-a+2k(\sqrt{b}+\sqrt{a^2+b})/(a^2+b)\sqrt{b}]\,z_1^2$.

Из последнего неравенства в силу условия 3) следует, что при $z_1\neq 0$ будем иметь $\dot{v}<0$. При $z_1=0$ из (15) и (14) получаем положение равновесия $x=0$. Неравенство $\dot{v}<0$ показывает, что оператор g^t при $t\leqq 0$ является положительным (см. [7]).

С другой стороны, легко видно, что главное направление лежит вне области $v<0$. Действительно, вычисляя $v=v(x)$ в точке $(\lambda_1, \lambda_1(a+\lambda_1), h-ab)=\tilde{x}$ и учитывая, что λ_1 есть корень уравнения (5), находим

$$v(\tilde{x})=a^2\lambda_1^4-2ag'(0)\lambda_1^2+a^2b\lambda_1^2+bg'(0)\lambda_1-ab^2\lambda_1-ab\lambda_1^3.$$

И так как $\lambda_1<0$ и $g'(0)<0$, имеем $v(\tilde{x})>0$. Отсюда ясно, что, если возьмем число p, достаточно малое относительно q, то основания цилиндров (8) будут лежать в множестве $v>0$, что и будем в дальнейшем предполагать. Будем тоже предполагать, что δ настолько малый параметр, что траектории системы (3) пересекают поверхность цилиндров (8) при $|y_1|\leqq\delta q$ изнутри наружу.

Рассмотрим теперь область G, определяемую неравенствами $v<0$, $u>(\delta p)^2$. В силу доказанного, область G является инвариантным множеством по отношению к оператору g^t при $t\geqq 0$.

Пусть D_1 — сечение G полуплоскостью $x_1=0$, $x_2>0$; D_2 — сечение G полуплоскостью $x_1=0$, $x_2<0$. Сечения D_i представляют собой, очевидно, односвязные области. Через $\varphi(t, x)$ будем обозначать решение системы (2) с начальными данными 0, x.

Сечения D_1 и D_2 не имеет контакта с полем направлений системы (2). Действительно, при $x_1=0$ имеем $\dot{x}_1=x_2$. Отсюда следует наше утверждение. При этом, если $x\in D_1$, то траектория $\varphi(t, x)$ пересекает сечение D_1, переходя из полупространства $x_1<0$ в полупространство $x_1>0$; сечение D_2 пересекается траекториями в обратном направлении.

Пусть $x\in\bar{D}_1\cap(Ox_3)$, тогда $\varphi(t, x)$ при достаточно малых $t>0$ входит в полупространство $x_1>0$. Действительно, траектория решения $\varphi(t, x)$ при $t=0$ касается плоскости $x_1=0$ в точке $(0, 0, x_3)$. При этом легко видно, что при достаточно малых $|t|>0$ эта траектория лежит только в полупространстве $x_1>0$.

Итак, траектория $\varphi(t, x)$ $(x \in \bar{D}_1)$ при $t>0$ входит в полупространство $x_1>0$.

Аналогично проверяется, что траектория $\varphi(t, x)$ $(x \in \bar{D}_2)$ при $t=0$ входит в полупространство $x_1<0$.

Теперь докажем, что любая траектория $\varphi(t, x_0)$ $(x_0 \in D_1)$ пересекает D_2 при положительном t.

В самом деле, так как система (2) диссипативна, то траектория $\varphi(t, x_0)$, $t \geqq 0$, ограничена. Пусть K_{x_0} — замкнутый шар с центром в начале координат и достаточно большим радиусом, такой, что $\varphi(t, x_0) \in K_{x_0}$ при $t \geqq 0$. Обозначим через G_{x_0} пересечение множеств $G_{x_0}=\bar{G} \cap K_{x_0}$. Через S будем обозначать поверхности конусов (12). Положим $S_{x_0}=G_{x_0} \cap S$.

Мы показали, что для любой точки $x \in S$ и $x \neq 0$ траектория $\varphi(t, x)$ пересекает S. В силу непрерывной зависимости решения от начальных значений и теоремы существования неявных функций следует, что для любой точки $x \in S_{x_0}$ существует шар с центром в точке x и достаточно малым радиусом, такой, что любая траектория, выходящая при $t=0$ из точки этого шара, пересекает S в момент t, для которого $|t|<1/2$. И так как S_{x_0} компактное множество, то по лемме Бореля о покрытиях существует число $\varepsilon_1>0$, такое, что любая траектория $\varphi(t, x)$ при $x \in G_{x_0}$ и $\varrho(S_{x_0}, x)<\varepsilon_1$ пересекает S в момент t, для которого $|t|<1/2$. Отсюда легко следует, что решение $\varphi(t, x_0)$ удовлетворяет условию $\varrho(\varphi(t, x_0), S_{x_0}) \geqq \varepsilon_1$ при $t \geqq 1$.

Обозначим через R множество точек $x \in C_{x_0}$, удовлетворяющих условию $\varrho(S, x) \geqq \varepsilon_1$.

Положим $D_R=R \cap D_i$, $i=1, 2$. Так как D_R компактное множество, то существует число $\varepsilon_2>0$ такое, что любая траектория $\varphi(t, x)$ при $x \in G_{x_0}$ и $\varrho(D_R, x)<\varepsilon_2$ пресекает D_i в момент t, для которого $|t|<1/2$.

Теперь предположим, что рассматриваемая траектория $\varphi(t, x_0)$ $(x_0 \in \bar{D}_1)$ лежит в полупространстве $x_1>0$ при любом $t>0$. Тогда из доказанного следует, что $x_1(\varphi(t, x_0)) \geqq \varepsilon$ при $t \geqq 1$, где $\varepsilon=\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Действительно, пусть $x_1(\varphi(t, x_0))<\varepsilon$ при некотором $t \geqq 1$. Тогда или $\varrho(\varphi(t, x_0), S_{x_0})<\varepsilon_1$, или $\varrho(\varphi(t, x_0), D_R)<\varepsilon_2$, Но тогда траектория $\varphi(t, x_0)$, $t \geqq 0$, пресекает S или D_i в момент t, для которого $t \geqq 1/2$, что невозможно.

Отсюда легко видно, что вдоль траектории $\varphi(t, x_0)$, $t \geqq 1$, в силу (2) имеем $\dot{x}_3 \leqq (k-ab)\varepsilon$. Интегрируя последнее неравенство, находим

$$x_3(t)-x_3(1) \leqq (k-ab)\varepsilon(t-1), \quad t \geqq 1. \tag{18}$$

Переходя к пределу при $t \to +\infty$ в неравенстве (18) получим $x_3(\varphi(t, x_0)) \to -\infty$, что противоречит ограниченности решения $\varphi(t, x_0)$. Это противоречие доказывает, что решение $\varphi(t, x_0)$ $(x_0 \in \bar{D}_1)$ при возрастании t переходит в множество $x_1<0$. Так как $\varphi(t, x_0)$ не может попасть на сечение D_1 из полупространства $x_1>0$, то $\varphi(t, x_0)$ пересекает D_2 при возрастании t.

Теперь докажем, что любая траектория $\varphi(t, x)$, $t \geqq 0$ при $x \in \bar{D}_2$ пресекает D_1 при возрастании t.

Доказательство будем проводить из обратного предположения. Пусть $\varphi(t, x_0)$ $(x_0 \in \bar{D}_2)$ не пересекает D_1 при положительном t. Тогда $\varphi(t, x_0)$ находится в полупространстве $x_1<0$ при всех $t>0$. Из системы (2) в силу нечетности функции $g(x_1)$ следует, что если $\varphi(t, x_0)$ решение системы (2), то $-\varphi(t, x_0)$ является тоже решением этой системы. Иными словами, кривая, симметричная траектории относительно начала координат, сама является траекторией. Отсюда, в силу того, что $\varphi(t, x_0)$ находится в полупространстве $x_1<0$ при $t>0$, вытекает, что существует положительная полутраектория системы (2), которая лежит в полупространстве $x_1>0$, что противоречить доказанному. Этим завершается доказательство утверждения.

Пусть $x \in D_1$ произвольная точка. Тогда из доказанного следует, что $\varphi(t, x)$ при возрастании t пересекает D_1. Обозначим через $t=\sigma>0$ первый после $t=0$ момент пересечения траектории нашего решения $\varphi(t, x)$ с D_1. Поставим в соответствие точке x точку $\varphi(\sigma, x)$. Таким образом, мы получим отображение T сечения D_1 в себя. Это отображение, как легко видеть, непрерывно и сохраняет ориентацию. В самом деле, возьмем произвольный замкнутый контур $C\subset D_1$ и каким-нибудь образом его ориентируем. Проведем через C при $t=0$ всевозможные траектории. Эти траектории образуют поверхность L, лежащую в фазовом пространстве R_3. Поверхность L пересекает D_1 при $t>0$. Первое пересечение будет контур TC. Ориентация контура TC может не совпасть с ориентацией контура C только в том случае, если на поверхности L произошло пересечение траекторий. С другой стороны, как известно, траектории не пересекаются. Итак, отображение ориентируемое.

Если $x \in D_1$, то в силу диссипативности системы (2) последовательность $T^n x_0$ имеет сходящуюся подпоследовательность, предел которой, очевидно, принадлежит множеству D_1. Отсюда следует, в силу теоремы Брауэра в несколько измененной форме (см. [8]), что отображение T имеет неподвижную точку $\widetilde{x}$. Таким образом мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Если $g(\xi)$ удовлетворяет условиям 1(—5), то система (2) имеет периодическое решение $\varphi(t, \widetilde{x})$, отличное от положения равновесия.*

Пусть K_r — шар диссипативности системы (2) с центром в начале координат радиуса r. Из доказанного видно, что траектория $\varphi(t, \widetilde{x})$ лежит в топологическом торе $G_r = G \cap K_r$.

Замечание 1. Теорему о существовании периодического решения можно доказать с помощью обычной теоремы Брауэра о непрерывном отображении ограниченного, замкнутого и выпуклого множества в себя. В самом деле, пусть $x \in D_0 = D_1 \cap \overline{K}_r$. Обозначим через $t=\sigma_n>0$ n-той после $t=0$ момент пересечения траектории нашего решения $\varphi(t, x)$ с D_1. Поставим в соответствие точке x точку $\varphi(\sigma_n, x)$. Таким оброзом, получаем при достаточно большом n отображение T_0 сечения D_0 в себя. В силу теоремы Брауэра T_0 имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку $\overline{x}$. Траектория движения точки $\overline{x}$ под действием фазового потока g^t является замкнутой. При этом получится, что она сделает не больше n оборотов в торе G_r до своего замыкания.

Замечание 2. Имеет место следующее обстоятельство. Характеристическое уравнение линеаризованной системы (4) имеет один отрицательный корень и два с положительными действительными частями. Так как при достаточно малых $|x_1|$ система (2) весьма близка к системе (4), то „большинство" решений системы (2) „отталкиваются" от начала координат.

При достаточно больших $|x_1|$ система (2) сколь угодно близка к системе $\dot{x}_1 = x_2 - ax_1$, $\dot{x}_2 = x_3 - bx_1$, $\dot{x}_3 = (l-ab)x_1$.

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид $\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+ab-l=0$.

Условия Гурвица отрицательности действительных частей корней последнего уравнения имеют вид $a>0$, $ab>l>0$. Так как эти условия выполнены, то корени последнего характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. Следовально, при больших $|x_1|$ система (2) такова, что все ее решения „притягиваются“ к началу.

Поведение траекторий системы (2) при больших и малых $|x_1|$ позволило нам построить торообразную область G_r с указанными свойствами.

Докажем теперь следующее утверждение:

Теорема 2. *Если траектория $\varphi(t, x)$ системы (2) не стремится к началу координат при $t\to+\infty$, то при возрастании t эта траектория попадает в топологический тор G_r и при дальнейшем возрастании времени не покидает его.*

Доказательство. Если для некоторого t имеем $\varphi(t, x)\in G$, то в силу диссипативности системы (2) и того обстоятельства, что G является инвариантным множеством относительно преобразования g^t при $t\geqq 0$, следует, что $\varphi(t, x)\in G_r$ при $t\geqq t_1$.

Обозначим через H множество точек $x\in R_3$, удовлетворяющих неравенству $v(x)>0$, т. е. H — множество внутренних точек конусов (12).

Предположим, что $\varphi(t, x)\in H$ для любого $t\geqq 0$. Докажем, что $\varphi(t, x)$ стремится к началу координат при $t\to+\infty$. Действительно, так как $\varphi(t, x)$ ограниченная траектория при $t\geqq 0$, то она имеет ω-предельную точку x_0. Пусть x_{10}, x_{20}, x_{30} — координаты точки x_0. Обозначим через H_1 сечение множества H полуплоскостью $x_1=0$, $x_2>0$, а через H_2 — сечение H с полуплоскостью $x_1=0$, $x_2<0$. Траектории системы (2) пересекают сечение H_1, переходя из полупространства $x_1<0$ в полупространство $x_1>0$; сечение H_2 пересекается траекториям в обратном направлении.

Для определенности предположим, что траектория $\varphi(t, x)$ лежит в конусе, который содержит внутри себя множество H_1. В силу того, что траектории системы (2) прересекают H_1 в одну и ту же сторону, следует, что при всех достаточно больших t или $x_1(\varphi(t, x))<0$, или $x_1(\varphi(t, x))>0$. Но тогда, в силу условия 3), из третьего уравнения системы (2) вытекает, что $\dot{x}_3$ вдоль траектории $\varphi(t, x)$ при достаточно больших t сохраняет один и тот же знак. Тогда в силу ограниченности решения $\varphi(t, x)$ при $t\geqq 0$ следует, что существует

$$\lim_{t\to+\infty} x_3(\varphi(t, x))=x_{30}. \tag{19}$$

Рассмотрим предельную траекторую $\varphi(t, x_0)$. Так как Ω — предельное множество движения $\varphi(t, x)$ является инвариантным по отношению к динамической системе, определяемой системой (2 (см. [9]), то любая точка траектории $\varphi(t, x_0)$ является ω-предельной для $\varphi(t, x)$. Отсюда в силу равенства (19) следует, что $x_3(\varphi(t, x_0))=x_{30}$ для любого t. Тогда вдоль траектории $\varphi(t, x_0)$ имеем $\dot{x}_3=0$. Отсюда в силу системы (2) получаем $x_1(\varphi(t, x_0))=0$ для любого t. Тогда из первого уравнения системы (2) имеем $x_2(\varphi(t, x_0))=0=x_{20}$, а из второго $x_3(\varphi(t, x_0))=0=x_{30}$.

Итак, ограниченная траектория $\varphi(t, x)$ системы (2) имеет единственную предельную точку $x=0$. Отсюда вытекает, что $\varphi(t, x)$ стремится к началу координат при $t\to+\infty$.

Предложим теперь, что $x \in R_3 \setminus (\bar{G} \cup \bar{H})$. Так как область $v<0$ является инвариантным множеством относительно преобразования g^t при $t \geqq 0$, то траектория $\varphi(t, x)$ при $t \geqq 0$ будет лежать в области $v<0$.

Допустим, что $\varphi(t, x) \in R_3 \setminus (\bar{G} \cup \bar{H})$ для любого $t \geqq 0$. Тогда получим противоречие. Действительно, так как траектория $\varphi(t, x)$, $t \geqq 0$ ограничена, то оно имеет ω-предельную точку $x_0 \in R_3 \setminus (\bar{G} \cup \bar{H})$. Рассмотрим тот цилиндр Γ_1 из семейства (8) с радиусом $r_1>0$, на поверхности $\tilde{\Gamma}_1$ которого лежит точка x_0. Траектория $\varphi(t, x_0)$ пересекает поверхность цилиндра Γ_1. В силу непрерывности решений из начальных условий следует, что существует шар с центром в точке x_0 и с достаточно малым радиусом, такой, что любая траектория, которая имеет общую точку с этим шаром, тоже пересекает поверхность $\tilde{\Gamma}_1$ цилиндра Γ_1. Отсюда вытекает, что $\varphi(t, x)$ тоже пересекает $\tilde{\Gamma}_1$ при некотором $t_1>0$. Но тогда существует цилиндр Γ_2 из семейства (8) с радиусом $r_2>r_1$, такой, что $\varphi(t_2, x) \in \tilde{\Gamma}_2$ при $t_2>t_1$. В силу свойства цилиндров (8) отсюда следует, что траектория $\varphi(t, x)$ при $t \geqq t_2$ будет лежать в множестве точек, удовлетворяющих условиям $u \geqq r_2^2$ и $v<0$. А это противоречит тому, что x_0 является ω-предельной для полутраектории $\varphi(t, x)$, $t \geqq 0$. Противоречие доказывает, что $\varphi(t, x)$ попадает в топологический тор G_r.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Плисс. Об ограниченности решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. *Доклады АН СССР,* **139**, 1961, 302—304.
2. В. А. Плисс. Нелокальные проблемы теории колебаний, Москва, 1964.
3. I. O. C. Ezeilo. On the stability of the solutions of some third order differential equations. *J. London Math. Soc.*, **43**. 1968, 161—167.
4. Е. А. Барбашин. Функция Ляпунова. Москва, 1970.
5. Н. Н. Георгиев. Исследование одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка. *Доклады БАН,* **29**, 1976, 17—19.
6. A. Wintner. The nonlocal existence problem of ordinary differential equations. *Amer. J Math.*, 67, 1945, 277—284.
7. М. А. Красносельский. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, Москва, 1966.
8. J. L. Massera. The existence of periodic solutions of systems of differential equations *Duke Math. J.*, **17**, 1950, 457—475.
9. К. С. Сибирский. Введение в топологическую динамику. Кишенев, 1970.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 31. 1. 1977