PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

НЕДЮ И. ПОПИВАНОВ

Для одного класса гиперболо-параболических уравнений дается постановка и исследуются краевые задачи в произвольной области, ограниченной относительно временной переменной. Выводятся априорные оценки и доказывается единственность сильного решения поставленных задач. Доказано существование слабого решения из W_2^1. Получены необходимые условия для существования сильного решения. Доказывается существование и единственность сильного решения $u \in W_2^1$ для следующих краевых задач: для задачи Коши, для задачи с начальными данными на характеристическом конусе и на поверхностях временного типа, для смешанной задачи, для некоторых многомерных аналогов задачи Дарбу и задачи Гурса и др.

В настоящей работе исследуются краевые задачи в ограниченных и неограниченных областях, которые содержатся в полупространстве $x_m \geqq 0$, где $m \geqq 2$. Рассматриваются уравнения

$$(1) \qquad Lu \equiv K(x)u_{x_m x_m} - M(x_m)a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + a_i(x)u_{x_i} + a_m(x)u_{x_m} + a_0(x)u = f(x),$$

где $K(x) \geqq 0$, матрица (a_{ij}) симметрична и положительно определена; функция $M(x_m) > 0$ для $x_m > 0$ и $M(0) \geqq 0$. Здесь $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до $m-1$. В этом классе уравнений (1) входят: строго гиперболические уравнения ($K > 0$, $M > 0$), параболические уравнения ($K \equiv 0$, $M > 0$), некоторые вырождающиеся гиперболические уравнения, некоторые вырождающиеся параболические уравнения ($K \equiv 0$, $M(0) = 0$) и др. Поэтому уравнения (1) называются гиперболо-параболическими.

Для гиперболо-параболических уравнений в многомерных областях, т. е. при $m \geqq 3$, исследованы в основном задача Коши и смешанная задача. Здесь отметим работы В. Н. Врагова [1, 2]. Краевые задачи в многомерных областях рассматривались только для строго гиперболических уравнений [3—14] и для гиперболических уравнений, которые вырождаются только на некоторой плоскости [15—20; 25—28]. Особо отметим работу [19], где исследуются краевые задачи для уравнений смешанного типа и в частности для гиперболо-параболических уравнений (1) при $M \equiv 1$. В том случае, когда вся старшая часть оператора L обращается в нуль, кроме исследования уравнения Эйлера — Дарбу, нам известна только работа [15].

Изложение построено следующим образом. Исследуя связанную с уравнением (1) систему, даем (п. 1) постановку одной граничной задачи (задача А) для уравнения (1). Показано, что сильное решение этой задачи

ПЛИСКА Български математически студии. Том 3, 1981, с. 88—119.

является единственным (п. 1). Для каждой функции $f \in L_2$ существует слабое решение задачи A (п. 2). Объединяя этого результата с результатами п. 6 о совпадении слабых и сильных решений, доказываем существование и единственность сильного решения некоторых более интересных задач (п. 7 — п. 12). Исследуя другую задачу (п. 5), в некоторых случаях доказываем и единственность слабого решения задачи A.

Сформулируем более подробно результаты настоящей работы. Пусть $D\subset\{0\leqq x_m\leqq T\}$, $T=\mathrm{const}$, произвольная ограниченная или неограниченная область, с кусочно-гладкой $(m-1)$-мерной границей S. Мы не предполагаем, что функцию $K(x)$ можно продолжить вне области D как неотрицательной и непрерывно дифференцируемой функции. Для уравнения (1) в области D в п. 1 даем постановку краевой задачи A. Вид граничных условий в каждой точки S определяется знаками n_m и характеристической формы $H=Kn_m^2-Ma_{ij}n_in_j$ в этой точке. Доказывается, что имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^1(D)}\leqq C\|Lu\|_{L_2(D)}.$$

Отсюда следует единственность сильного решения задачи A.

В п. 2 рассматриваем области D вида

$$D=\{x',x_m):\ x'\in D',\ \varphi_-(x')<x_m<\varphi_+(x')\},$$

где D' — ограниченная или неограниченная область в R^{m-1}. Обозначим через Γ_+ и Γ_- поверхности $\Gamma_\pm=\{x:\ x_m=\varphi_\pm(x')\}$. Через Γ_0 обозначаем цилиндрическую поверхность $\Gamma_0=S\diagdown(\Gamma_+\cup\Gamma_-)$, на которой $n_m=0$. В п. 2 предполагаем, что $H\leqq 0$ на Γ_+, $H\geqq 0$ на Γ_-. В этом случае краевые условия задачи A принимают вид

$$u=0 \ \text{на}\ \Gamma_+\cup\Gamma_0. \tag{2}$$

Для этой задачи имеет место

Теорема 2.1. *Для каждой функции $f\in L_2(D)$ существует слабое решение $u\in W_2^1(D)$ задачи A, которое удовлетворяет* (2).

В некоторых случаях теорема 2.1 доказана в [5; 20; 25; 26; 19]. Все эти результаты относятся для ограниченных областей D. В [28] мы доказали теорему 2.1 и для неограниченных областей D, в том случае, когда $K=K(x_m)$, и допускается вырождение только на $x_m=0$.

При некоторых дополнительных предположениях для границы S в п. 3 доказываем существование обобщенного решения $u\in W_2^1$ задачи A. Заметим, что каждое обобщенное решение является и слабым решением. Поэтому существование обобщенного решения может оказаться полезным при исследовании некоторых вопросов. В некоторых случаях существование обобщенного решения мы доказали в [25, 26].

В п. 4 доказывается, что условия, которые накладываем на функции K, M, a_{ij} и a_i, $i=1,\dots,m$, являются необходимыми в том смысле, что, если они не выполнены, надо накладывать ограничения на функции a_0. Достаточность этих условий для существования сильного решения показана в пп. 7—12 в некоторых случаях.

В п. 5 при $M(0)>0$ исследуем другую задачу A′, откуда в некоторых случаях доказываем единственность слабого решения задачи A.

В п. 6 рассматриваются (без доказательств) некоторые случаи, когда каждое слабое решение из W_2^1, удовлетворяющее граничным условиям, является сильным. Раньше результаты такого вида были получены Сорокиной [21; 22] и автором [26; 28; 29; 30]. В настоящей работе впервые рассматривается тот случай, когда на двух гранях некоторого угла одновременно задаются и граничные, и сопряженные граничные условия.

В пп. 7—12 предполагаем, что функции $K(x)$ и $a_{ij}(x)$ возрастают не быстрее $|x|$, т. е. что в $\bar{D}$ выполнено $|K(x)|\leqq C(1+|x|)$, $|a_{ij}(x)|\leqq C(1+|x|)$. В п. 7 рассматривается задача Коши для области $D=\{0<x_m<\varphi_+(x')\}$, где φ_+ — ограниченная и непрерывная функция с кусочно-непрерывными первыми производными. Предполагаем, что $\varphi_+(x')>0$ для $x'\in R^{m-1}$ и $H\geqq 0$ на $\Gamma_+=\{x_m=\varphi_+\}$.

Теорема 7.1. *Для каждой функции $f\in L_2(D)$ существует одно и только одно сильное решение $u\in W_2^1(D)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее граничным условиям*

$$(3)\qquad u=0 \text{ на } \Gamma_+,\ \partial u/\partial x_m=0 \text{ на } \Gamma_+\cap\{H>0\}.$$

Слабое решение этой задачи единственно, если $M(0)>0$.

В. Н. Врагов [1] доказал, что для полосы $D=\{0<x_m<T\}$ существует решение задачи (1), (3) из $W_2^2(D)$. Это он доказал при $M\equiv 1$, предполагая, что функции K и a_{ij} принадлежат C^∞ и их производные любого порядка ограничены в D. Заметим, что в настоящей работе функции K и a_{ij} могут быть и неограниченными. Когда область D не является полосой, некоторые примеры рассмотрены в п. 11.

В п. 8 рассматривается смешанная задача в области $D=G\times(0, T)$, где $G\subset R^{m-1}$ — ограниченная или неограниченная область с дважды гладкой границей. Краевые условия (2) здесь будут:

$$(4)\qquad u=0 \text{ на } \partial D\setminus\{x_m=0\};\ u_{x_m}(x', T)=0, \text{ если } K(x', T)>0.$$

Если $K(x', T)=0$ для $x'\in G$, условия (4) принимают вид

$$(4')\qquad u=0 \text{ на } \partial D\setminus\{x_m=0\}.$$

Теорема 8.1. *Пусть $K(x', T)=0$ для $x'\in G$. Тогда для каждой функции $f\in L_2(D)$ существует одно и только одно сильное решение $u\in W_2^1$ задачи* (1), (4').

Теорема 8.2. *Пусть $M(0)>0$. Тогда задача* (1), (4) *имеет одно и только одно сильное решение $u\in W_2^1(D)$ для каждой функции $f\in L_2(D)$. Слабое решение задачи* (1), (4) *тоже единственно.*

Раньше В. Н. Враговым [2] доказано, что задача (1), (4) имеет решение $u\in W_2^2(D)$, если $M\equiv 1$, $a_{ij}(x)=a_{ij}(x_1, \ldots, x_{m-1})$ и область G конечная с границей из C^∞.

В п. 9 рассматриваем многомерный аналог задачи Дарбу для уравнения (1). Доказываем, что эта задача имеет одно и только одно сильное решение $u\in W_2^1$ для каждой функции $f\in L_2$. Раньше в некоторых случаях доказано [18] существование слабого решения и единственность сильного решения этой задачи.

В п. 10 рассматриваем задачу с данными на ограниченном характеристическом конусе. Доказываем, что она имеет одно и только одно сильное решение $u \in W_2^1$. Эта задача раньше рассматривалась [3—7] только для строго гиперболических уравнений.

В п. 11 рассматриваем фамилию неограниченных конусов: пространственно-подобные, характеристические и временного типа. Доказываем теорему о сильной разрешимости. Отметим, что для строго гиперболических уравнений Соболев [4] рассматривал задачу с данными на конусе временного типа, неограниченном относительно x_m.

В п. 12 рассматривается область, полученная при пересечении двух характеристических конусов и плоскости $x_m=0$. В такой области многомерный аналог задачи Дарбу является некорректным [8—11] для волнового уравнения. В этой области Г. Д. Каратопраклиев дает постановку одного многомерного аналога задачи Гурса, когда данные задаются на двух характеристических конусах. В некоторых случаях он доказывает [17; 18] единственность сильного решения. Эта задача потом рассматривалась в работах Диденко [20] и автора [25; 26]. В настоящей работе доказываем что эта задача имеет одно и только одно сильное решение $u \in W_2^1$.

I. Единственность. Существование слабого и обобщенного решения

1. Постановка задачи. Вывод априорных оценок. Единственность. Предполагаем, что выполнены следующие условия:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{условия о гладкости: } a_{ij} \in C^2(\bar{D});\ K,\ K_{x_m},\ M,\ a_i \in C^1(D), \\ i=1,\ldots,m;\ a_0 \in C(\bar{D});\ \text{функции } K_{x_m},\ a_m, a_0, a_{ijx_i}, a_{ijx_m} \\ \text{и } a_i \text{ ограничены в } D \text{ для } i,j=1,\ldots,m-1; \end{array}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{можно найти постоянные } p_0 \text{ и } c_0>0, \text{ для которых} \\ K_{x_m}(x)-2a_m(x)+p_0K(x) \geq c_0>0,\ x \in \bar{D}. \end{array}\right.$$

Если $\varrho(\bar{D},\ \{x_m=0\})>0$ или $M(0)>0$, на коэффициенты уравнения (1) не накладываем других ограничений.

$$(7)\qquad \text{если } \varrho(\bar{D}, \{x_m=0\})=0 \text{ и } M(0)=0, \text{ тогда пусть } M'(0)>0.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{если } \varrho(\bar{D},\ \{x_m=0\})=0 \text{ и } M(0)=0, \text{ существуют постоянные } \varepsilon>0 \\ \text{и } p_1, \text{ так что для } \xi \in R^{m-1} \text{ в } \bar{D}\cap\{x_m\leqq\varepsilon\} \text{ имеем} \\ \text{и } (1+\varepsilon)(a_i\xi_i)^2 \leqq (K_{x_m}-2a_m+p_1K)M'(0)a_{ij}\xi_i\xi_j \end{array}\right.$$

Замечание. Если $K\geq c>0$ в $\bar{D}$, условия (6) и (8) выполнены без других ограничений на функции K и a_i. Для строго гиперболических уравнений ($K\geq c>0$, $M(0)>0$) из условий (5) — (8) остается только условие (5) о гладкости и ограниченности коэффициентов уравнения (1). Заметим также, что если область D ограничена или коэффициенты K и a_m зависят только от x_m, условие (6) принимает вид

(9) Если точка $x \in \bar{D}$ такая, что $K(x)=0$, то выполнено $K_{x_m}(x)-2a_m(x)>0$

Пусть функция $u\in C^2(\bar{D})$ удовлетворяет уравнению (1). Обозначая $\partial_i=\partial/\partial x_i$, $u_0=u$, $u_i=\partial_i u$, $i=1,\ldots,m$, функция $\hat{u}=(u_0,\ldots,u_m)$ удовлетворяет системе

$$
\begin{gathered}
u_m-\partial_m u_0=0,\\
\partial_i u_m-\partial_m u_i=0, \quad i=1,\ldots,m-1,\\
K\partial_m u_m-Ma_{ij}\partial_i u_j+\alpha_i u_i+\alpha_m u_m+\alpha_0 u_0=f.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Эту систему можно записать в матричном виде, и, умножая слева на матрицу

$$
E=b\begin{pmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
0 & Ma_{11} & \ldots & Ma_{m-1\,1} & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & Ma_{1\,m-1} & \ldots & Ma_{m-1\,m-1} & 0\\
0 & 0 & \ldots & 0 & -1
\end{pmatrix},
$$

получаем симметричную систему

$$
\hat{L}\hat{u}\equiv A_i\partial_i\hat{u}+A_m\partial_m\hat{u}+B\hat{u}=\hat{h}. \tag{11}
$$

Отметим, что, если $M(0)=0$, матрица E будет особой на $\{x_m=0\}\cap\bar{D}$ Функция $b=b(x_m)\in C^1(\bar{D})$ пока произвольная, $\hat{h}=(0,\ldots,0,-bf)$,

$$
A_i=bM\begin{pmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{i1}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{i\,m-1}\\
0 & a_{i1} & \ldots & a_{i\,m-1} & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
A_m=-b\begin{pmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
0 & Ma_{11} & \ldots & Ma_{m-1\,1} & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & Ma_{1\,m-1} & \ldots & Ma_{m-1\,m-1} & 0\\
0 & 0 & \ldots & 0 & K
\end{pmatrix}
$$

$$
B=-b\begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & -1\\
0 & \ldots & 0 & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & \ldots & 0 & 0\\
\alpha_0 & \ldots & \alpha_{m-1} & \alpha_m
\end{pmatrix}.
$$

Введем матрицу $\varkappa=B-(\partial_i A_i+\partial_m A_m)/2$ и рассмотрим $\varkappa+\varkappa'$, где $\varkappa'$ — транспонированная матрица. Имеем

$$\varkappa+\varkappa'=$$

$$\begin{pmatrix} b_{x_m} & 0 & \dots & 0 & b(1-\alpha_0) \\ 0 & \partial_m(Mba_{11}) & \dots & \partial_m(Mba_{m-1\,1}) & -b(\alpha_1+M\partial_i a_{i1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \partial_m(Mba_{1\,m-1}) & \dots & \partial_m(Mba_{m-1\,m-1}) & -b(\alpha_{m-1}+M\partial_i a_{i\,m-1}) \\ b(1-\alpha_0) & -b(\alpha_1+M\partial_i a_{i1}) & \dots & -b(\alpha_{m-1}+M\partial_i a_{i\,m-1}) & \partial_m(Kb)-2b\alpha_m \end{pmatrix}.$$

Определим $b(x_m)=\exp(px_m)$, где постоянную $p\geqq 1$ выберем попозже. Сейчас докажем, что при подходящем выборе p квадратичная форма $\varkappa+\varkappa'$ будет положительно-определенной в $\bar{D}$. Тогда система (11) будет положительно-симметричной по Фридрихсу [23]. Сначала рассмотрим тот случай, когда $\varrho(\bar{D}, \{x_m=0\})=0$ и $M(0)=0$. Тогда $M'(0)>0$ и для $p\geqq p_2$ в $\bar{D}$ имеем

$$\partial_m(Mb)\geqq 2^{-1}(|M'|+Mp)b\geqq c_1 b,\ c_1>0. \tag{12}$$

В $\bar{D}\cap\{x_m\leqq\varepsilon\}$ выполнено (8). Очевидно, $\sqrt{1+\varepsilon}M'(x_m)\geqq M'(0)$ для $0\leqq x_m\leqq\varepsilon_1$, где $0<\varepsilon_1\leqq\varepsilon$. Так как $M\geqq 0$ и $K\geqq 0$, для $p\geqq p_1$ в $\bar{D}\cap\{x_m\leqq\varepsilon_1\}$ выполнено

$$\sqrt{1+\varepsilon}\,(\alpha_i u_i)^2\leqq(K_{x_m}-2\alpha_m+pK)(M'+pM)a_{ij}u_iu_j,\ \forall\, u\in R^{m-1}. \tag{13}$$

Если $\varepsilon_1\leqq x_m\leqq T$, то $M(x_m)>0$ и для $p\geqq p_3$ имеем $M'+pM\geqq a_0 p$, $a_{ij}u_iu_j\geqq a_0\Sigma u_i^2$, $a_0>0$. Функции α_i ограничены, так что имеет место

$$\sqrt{1+\varepsilon}(\alpha_i u_i)^2\leqq A_0(pa_0^2)^{-1}(K_{x_m}-2\alpha_m+pK)(M'+pM)a_{ij}u_iu_j.$$

Следовательно, в $\bar{D}\cap\{x_m\geqq\varepsilon_1\}$ тоже выполнено (13) при $p\geqq p_4$, так что в $\bar{D}$ имеем

$$(1+\varepsilon)^{-1/4}\{[\partial_m(Kb)-2b\alpha_m]u_m^2+\partial_m(Mb)a_{ij}u_iu_j\}-2b\alpha_iu_iu_m\geqq 0.$$

Матрица (a_{ij}) является положительно-определенной, а функции $\partial_i a_{ij}$ и $\partial_m a_{ij}$ — ограниченными для $i, j=1, \dots, m-1$. Используя (12), для произвольной постоянной $\delta>0$ можно найти $p(\delta)$, так что, если $p\geqq p(\delta)$, имеем

$$|Mb(\partial_m a_{ij})u_iu_j|\leqq\delta M(\partial_m b)a_{ij}u_iu_j\leqq 2\delta\partial_m(Mb)a_{ij}u_iu_j,$$

$$|Mb(\partial_i a_{ij})u_ju_m|\leqq\delta bu_m^2+\delta\partial_m(Mb)a_{ij}u_iu_j.$$

Так как функция α_0 ограничена, имеем и $|b(1-\alpha_0)u_0u_m|\leqq\delta bu_m^2+\delta(\partial_m b)u_0^2$. Таким образом, если $\varrho(\bar{D}, \{x_m=0\})=0$ и $M(0)=0$, в $\bar{D}$ выполнено

$$\begin{aligned} \hat{u}\,.\,(\varkappa+\varkappa')\hat{u}&=(\partial_m b)u_0^2+\partial_m(Mba_{ij})u_iu_j+[\partial_m(Kb)-2b\alpha_m]u_m^2 \\ &+2b(1-\alpha_0)u_0u_m-2b\Sigma_j[\alpha_j+M\sum_i\partial_i a_{ij}]u_ju_m \\ &\geqq(1-2\delta)(\partial_m b)u_0^2+[1-(1+\varepsilon)^{-1/4}-4\delta]\partial_m(Mb)a_{ij}u_iu_j \\ &+[1-(1+\varepsilon)^{-1/4}-4\delta a_0^{-1}][\partial_m(Kb)-2\alpha_m b]u_m^2. \end{aligned}$$

Следовательно, если выберем $\delta>0$ достаточно малой и p — достаточно большой, матрица $\varkappa+\varkappa'$ будет положительно-определенной в $\bar{D}$.

Если $\varrho(\bar{D}, \{x_m=0\})>0$ или $M(0)>0$, в $\bar{D}$ имеем $\partial_m(Mb)\geqq m_0 pb$, где $m_0>0$. Легко доказать, что и в этом случае можно найти постоянную $p>0$, для которой матрица $\varkappa+\varkappa'$ будет положительно определенной в $\bar{D}$. Тогда система (11) будет положительно-симметричной в $\bar{D}$.

Рассмотрим характеристическую матрицу

$$\beta=-b\begin{pmatrix} n_m & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & Ma_{11}n_m & \ldots & Ma_{m-1\,1}n_m & -Ma_{i1}n_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & Ma_{1\,m-1}n_m & \ldots & Ma_{m-1\,m-1}n_m & -Ma_{im-1}n_i \\ 0 & -Ma_{i1}n_i & \ldots & -Ma_{i\,m-1}n_i & Kn_m \end{pmatrix}.$$

Предположим, что матрицу β можно представить в виде $\beta=\beta_++\beta_-$, так что имеют место

$$\mu+\mu'\geqq 0, \tag{14}$$

$$\operatorname{Ker}\beta_+ + \operatorname{Ker}\beta_- = R^{m+1}, \tag{15}$$

где $\mu=\beta_+-\beta_-$ и $\operatorname{Ker}\beta_\pm$ — ядро матрицы $\beta_\pm$. Тогда граничное условие $\beta_-\widehat{u}=0$ называется допустимым по Фридрихсу [23]. Сопряженное к ним граничное условие имеет вид $\beta'_+v=0$.

При $n_m\neq 0$ квадратичную форму $\widehat{u}\,.\,\beta\widehat{u}$ можно записать в виде

$$\widehat{u}\,.\,\beta\widehat{u}=-\frac{b}{n_m}\,[n_m^2u_0^2+Ma_{ij}(n_mu_i-n_iu_m)(n_mu_j-n_ju_m)+Hu_m^2], \tag{16}$$

где $H=Kn_m^2-Ma_{ij}n_iu_j$.

Отсюда видно, какие краевые условия будут допустимыми. Рассмотрим те части S, где $H\geqq 0$. Тогда выражение в квадратных скобках в представлении (16) будет неотрицательным. Поэтому при $n_m>0$ имеем $\widehat{u}\,.\,\beta\widehat{u}\leqq 0$ и можно положить $\beta_-=\beta$, $\beta_+=0$. Если $n_m<0$, имеем $\widehat{u}\,.\,\beta\widehat{u}\geqq 0$ и можно положить $\beta_-=0$, $\beta_+=\beta$. Условие (15), очевидно, выполнено. Условие (14) следует из представления (16).

На тех частях $S\cap\{n_m\neq 0\}$, где $H<0$, пусть матрицы β_+ и β_- симметричны и определяются при помощи форм

$$\widehat{u}\,.\,\beta_-\widehat{u}=-bHu_m^2/n_m,\quad \beta_+=\beta-\beta_-,\quad \text{если}\quad n_m<0,$$

$$\widehat{u}\,.\,\beta_+\widehat{u}=-bHu_m^2/n_m,\quad \beta_-=\beta-\beta_+,\quad \text{если}\quad n_m>0.$$

При таком выборе имеем $\widehat{u}\,.\,\beta_+\widehat{u}\geqq 0$, $\widehat{u}\,.\,\beta_-\widehat{u}\leqq 0$ и (14) выполнено. Так как матрицы β_+ и β_- симметричные, имеем $\operatorname{Ker}.\beta_\pm=\{\widehat{u}:\ \widehat{u}\,.\,\beta_\pm\widehat{u}=0\}$, откуда легко видно, что и в этом случае условие (15) выполнено.

На $S\cap\{n_m=0\}$ выберем

$$\beta_- = -Mb \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{i1}n_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{im-1}n_i \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_+ = \beta'_-.$$

При таком выборе условия (14) и (15) выполнены.

Следовательно, условие $\beta_- \widehat{u} = 0$ является допустимым. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} &u_0 = 0,\ n_m u_i - n_i u_m = 0,\ i = 1, \dots, m-1, && \text{на } S \cap \{n_m > 0,\ H \leq 0\}, \\ (17)\qquad &\widehat{u} = 0 && \text{на } S \cap \{n_m > 0,\ H > 0\}, \\ &u_m = 0 && \text{на } S \cap \{n_m \leq 0,\ H < 0\}. \end{aligned}$$

На остальной части S, где $n_m < 0$ и $H \geq 0$, не задаются граничных условий.

Из всего этого и из теории положительно-симметричных систем следует, что имеет место

Теорема 1.1. *Для всех функций $\widehat{u} \in \dot{C}^1(\overline{D})$, удовлетворяющих* (17), *выполнены оценки*

$$(18)\qquad |\widehat{u}|^2 \leq c(\widehat{L}\widehat{u}, \widehat{u}), \quad \|\widehat{u}\| \leq c\|\widehat{L}\widehat{u}\|.$$

Для всех функций $\widehat{v} \in \dot{C}^1(\overline{D})$, удовлетворяющих сопряженным к (17) *граничным условиям, выполнено*

$$(19)\qquad \|\widehat{v}\| \leq c\|\widehat{L}^*\widehat{v}\|.$$

Здесь $\widehat{L}^*$ — формально сопряженный к $\widehat{L}$ матричный оператор. Через $\dot{C}^1$ обозначаем совокупность функций из C^1, каждая из которых обращается в нуль вне некоторого ограниченного множества (для каждой функции свое), т. е. ее носитель ограничен.

Граничные условия для уравнении (1), соответствующие (17), имеют вид

$$\begin{aligned} &u = 0 && \text{на } S \cap \{n_m > 0,\ H \leq 0\}, \\ &u = 0,\ \partial_m u = 0 && \text{на } S \cap \{n_m > 0,\ H > 0\}, \\ (20)\qquad &u = 0 && \text{на } S \cap \{n_m = 0\}, \\ &\partial_m u = 0 && \text{на } S \cap \{n_m < 0,\ H < 0\}. \end{aligned}$$

На остальной части S, где $n_m < 0$ и $H \geq 0$, не задаются граничных условий. Отметим, что на поверхности временного типа, где $H < 0$, всегда задаются граничные условия. В пп. 7—12 рассмотрим конкретные области, где будет видно, на каких частях границы, какие условия задаются.

Задача А. *Найти в D решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (20).

Пусть функция $u \in \dot{C}^2(\overline{D})$ и удовлетворяет (20). Тогда из оценки (18) для функции $\widehat{u} = (u, \partial_1 u, \dots, \partial_m u)$ сразу получаем: для всех функций $u \in \dot{C}^2(\overline{D})$, удовлетворяющих граничным условиям (20), выполнены оценки

(21) $$\|u\|_1^2 \leq c_1 (bd_m u, Lu),$$

(22) $$\|u\|_1 \leq c_1 \|Lu\|_0.$$

Здесь и далее через $\|u\|_1$ обозначаем норму

$$\|u\|_1 = \{\int_D [u^2(x) + \sum_{i=1}^m u_{x_i}^2(x)] dx\}^{1/2}.$$

Пространство Соболева $W_2^1(D)$ определяется как замыкание множества $C^1(\bar{D})$ по норме $\|u\|_1$. Норму и скалярное произведение в $L_2(D)$ обозначаем через $\|u\| = \|u\|_0$ и $(,)$.

Определение 1.1. *Функция $u \in L_2(D)$ называется сильным решением задачи А, если существуют функции $u_k \in \dot{C}^2(\bar{D})$, удовлетворяющих граничным условиям* (20) *и* $\|u_k - u\|_0 \to 0$, $\|Lu_k - f\|_0 \to 0$, $k \to \infty$.

Из оценки (22) сразу следует

Теорема 1.2. *Сильное решение задачи А единственно.*

В пп. 7—12 при дополнительных предположениях для границы области D докажем, что для каждой функции $f \in L_2(D)$ существует сильное решение задачи А.

2. Существование слабого решения. Рассмотрим в R^{m-1} ограниченную или неограниченную область D'. Пусть в области D' функции $\varphi_+(x')$ и $\varphi_-(x')$ непрерывны и выполнено $\varphi_-(x') < \varphi_+(x')$. Предполагаем, что функция $\varphi_+(x')$ дважды кусочно-непрерывно дифференцируема за исключением тех точек x', где $\varphi_+(x') = 0$. Последнее дает нам возможность взять в качестве поверхности $x_m = \Phi_+(x')$ некоторые характеристические для уравнения (1) поверхности, на которых при $K \geq c > 0$ и $M(0) = 0$ первые производные φ_+ являются неограниченными (см., например, п. 12). Первые производные функции φ_+ могут быть неограниченными и на нехарактеристических поверхностях границы. Пусть область D имеет вид

$$D = \{(x', x_m):\ x' \in D',\ \varphi_-(x') < x_m < \varphi_+(x')\}.$$

Обозначим через Γ_+ и Γ_- соответственно поверхности $x_m = \varphi_+(x')$ и $x_m = \varphi_-(x')$ для $x' \in \bar{D}'$. Через Γ_0 обозначаем цилиндрическую поверхность $\Gamma_0 = S \setminus (\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$, на которой $n_m = 0$. При этом можно $\Gamma_0 = \varnothing$. В п. 2 предполагаем, что $H \leq 0$ на Γ_+ и $H \geq 0$ на Γ_-. Тогда условия (20) принимают вид

(23) $$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_+ \cup \Gamma_0 = S \setminus \Gamma_-.$$

Обозначим через B совокупность всех функций из $\dot{C}^2(\bar{D})$, удовлетворяющих (23). Для функций $u \in B$ выполнены оценки (21) и (22). Рассмотрим открытые части Γ_+ и Γ_-, на которых выполнено $H = 0$. Их замыкание в S обозначаем соответственно через Γ_x^+ и Γ_x^-. Обозначим через B_* совокупность всех функций из $\dot{C}^2(D)$, удовлетворяющих условиям:

$$v = 0 \quad \text{на} \quad S \setminus \Gamma_x^+;\ \partial_m v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_- \setminus \Gamma_x^-.$$

Определение 2.1. *Функция $u \in L_2(D)$ называется слабым решением задачи А, если выполнено $(u, L^* v) = (f, v)$ для $v \in B_*$.*

Здесь L^* — формально сопряженный к L оператор. Рассмотрим множество функций из $\dot{C}(\bar{D}) \cap W_2^1(D)$, удовлетворяющих (23). Его замыкание по норме $W_2^1(D)$ обозначаем через W^1. Через W^{-1} обозначаем сопряженное пространство к W^1 относительно $L_2(D)$.

Теорема 2.1. *Для каждой функции $f \in L_2(D)$ существует слабое решение $u \in W^1$ задачи* А.

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из оценки

$$\| v \|_0 \leq c \| L^*v \|_{W^{-1}}, \quad \forall v \in B_*. \tag{24}$$

Действительно, рассмотрим функции $w = L^*v$. Из оценки (24) видно, что w определяет однозначно v. Для $f \in L_2(D)$ рассмотрим $l(w) = (f, v)$. Из оценки (24) следует, что $l(w)$ можно продолжить до непрерывного функционала l_1 на пространстве W^{-1}. Следовательно, существует функция $u \in W^1$, для которой $l_1(w) = (u, w)$, $w \in W^{-1}$. В частности, для $w = L^*v$ имеем $(f, v) = (u, L^*v)$, т. е. функция $u \in W^1$ является слабым решением задачи А.

Сейчас, используя неравенство (21), докажем, что оценка (24) выполнена. Идея доказательства состоит в следующем. Пусть функция $v \in B_*$ такая, что решение u_v уравнения $b(x)\partial_m u_v = v$, удовлетворяющее граничным условиям (23), принадлежит $\dot{C}^2(\bar{D})$, т. е. $u_v \in B$. Легко доказывается, что $(Lu_v, v) = (u_v, L^*v)$, и из неравенства (21) получаем

$$\| L^*v \|_{W^{-1}} = \sup_{u \in W^1} \frac{|(L^*v, u)|}{\| u \|_1} \geq \frac{|(L^*v, u_v)|}{\| u_v \|_1} = \frac{|(v, Lu_v)|}{\| u_v \|_1} \tag{25}$$

$$= \frac{|b\partial_m u_v, Lu_v)|}{\| u_v \|_1} \geq c_1^{-1} \| u_v \|_1 \geq c_2 \| v \|_0,$$

где постоянная $c_2 = c_1^{-1} \exp(-pT) > 0$ и не зависит от v. Так как не для всех $v \in B_*$ имеем $u_v \in B$ (см. ниже), путь доказательства (24) более сложный.

Пусть G произвольная ограниченная подобласть $\bar{D}$ и $v \in B_*$, $\operatorname{supp} v \subset \bar{G}$. Тогда функция

$$u_v(x) = \int_{\varphi_+(x')}^{x_m} v(x', t) b^{-1}(t) dt$$

является решением уравнения $b\partial_m u = v$ в D и обращается в нуль на Γ_+. Очевидно, $u_v \in \dot{C}(\bar{D})$ и $u_v = 0$ на Γ_0, так как $v = 0$. Следовательно, u_v удовлетворяет (23). Сейчас докажем, что $u_v \in W_2^1(D)$, т. е. $u_v \in \dot{C}(\bar{D}) \cap W^1$. Так как $\partial_m u_v = b^{-1} v \in W_2^1(D)$, надо исследовать функцию

$$\partial_i u_v = \int_{\varphi_+}^{x_m} b^{-1}(t) (\partial_i v)(x', t) dt - (\partial_i \varphi_+)(x') v(x', \varphi_+(x')) b^{-1}(\varphi_+(x')), \tag{26}$$

$i = 1, \ldots, m-1$. Сначала заметим, что выполнено

$$\| \int_{\varphi_+}^{x_m} b^{-1}(t) w(x', t) dt \| \leq T \| w \|, \quad \forall w \in L_2(D). \tag{27}$$

Рассмотрим $(\partial_i \varphi_+) v(x', \varphi_+)$, где функция $\partial_i \varphi_+(x')$ может обращаться в бесконечность в точках x', где $\varphi_+(x') = 0$. Обозначая через Π ортогональную проекцию на $\{x_m=0\}$, имеем $v(x', \varphi_+(x'))=0$ для $x' \in \Pi(\Gamma_+ \setminus \Gamma_x^+)$. Кроме этого, имеем $v=0$ на Γ_- и, следовательно,

$$(28) \qquad \|(\partial_i\varphi_+)v(x', \varphi_+)\|^2 = \int\limits_{\Pi(\Gamma_x^+ \cap \overline{G})} v^2(x', \varphi_+) \int\limits_{\varphi_-}^{\varphi_+} (\partial_i\varphi_+)^2(x')dx_m dx'$$

$$= \int\limits_{\Pi(\Gamma_x^+ \cap \overline{G})} [\int\limits_{\varphi_-}^{\varphi_+} (\partial_m v)(x', t)dt]^2(\varphi_+ - \varphi_-)(\partial_i\varphi_+)^2 dx' \leqq c(G)\|\partial_m v\|^2.$$

Здесь использовали, что на Γ_x^+ имеем

$$(29) \qquad c_1\varphi_+ \Sigma(\partial_i\varphi_+)^2 \leqq M(\varphi_+)a_{ij}\partial_i\varphi_+\partial_j\varphi_+ = K(x', \varphi_+).$$

Таким образом доказали, что для каждой функции $v \in B_*$, $\operatorname{supp} v \subset \overline{G}$, имеем $u_v \in W^1$ и выполнено

$$(30) \qquad \|u_v\|_1 \leqq c(G)\|v\|_1,$$

$$(31) \qquad \|L^*v\|_{W^{-1}} \geqq |(L^*v, u_v)|/\|u_v\|_1, \quad \|u_v\|_1 \geqq c\|v\|_0,$$

где $c=\exp(-pT)$ не зависит от v и G. Здесь заметим, что не для всех $v \in B_*$ имеем $u_v \in B$. Действительно, функция $(\partial_i\varphi_+)(x')$ может быть разрывной в некоторых точках x' и если $v(x', \varphi_+(x')) \neq 0$, выражение $(\partial_i\varphi_+)v(x', \varphi_+)$ не всегда принадлежит $W_2^1(D)$ (см. замечание 12.1). Поэтому оценка (25) имеет место не для всех $v \in B_*$. Однако заметим, имея в виду (31), что оценка (24) вытекает из следующей оценки:

$$(32) \qquad |(L^*v, u_v)| \geqq c_1^{-1}\|u_v\|_1^2, \quad v \in B_*.$$

В (25) доказали, что (32) выполнено для всех функций $v \in B_*$, для которых $u_v \in B$.

Лемма 2.1. *Каждую функцию $v \in B_*$ можно аппроксимировать в $W_2^1(D)$ функциями $v_k \in B_*$, $v_k=0$ в окрестности $\{x_m=0\}$ и в окрестности тех точек Γ_+, где функция φ_+ не является дважды гладкой. Кроме этого,* $\operatorname{supp} v_k \subset \operatorname{supp} v$.

Лемму 2.1 докажем ниже, а сейчас с ее помощью закончим доказательство теоремы 2.1. Легко видно, что $u_{v_k} \in B$. Следовательно, (32) выполнено для $v=v_k$. Тогда неравенство (32), а с ним и оценка (24), будет выполнено, если докажем, что

$$\|u_{v_k} - v_v\|_1 \to 0, \quad (L^*v_k, u_{v_k}) \to (L^*v, u_v), \quad k \to \infty.$$

Первое следует из (30). Обозначим $u_k = u_{v_k}$ и $w_k = v_k - v$. Так как $(L^*v, u_k - u_v) \to 0$, осталось доказать, что $(L^*w_k, u_k) \to 0$. Однако $w_k \in B_*$, $u_k \in B$ и, следовательно, имеем

$$(L^*w_k, u_k) = (w_k, Lu_k)$$

$$= \int\limits_D \{-\partial_m(Kw_k)\partial_m u_k + M\partial_j(a_{ij}w_k)\partial_i u_k + \sum_{i=1}^m a_i w_k \partial_i u_k + a_0 w_k u_k\}dx$$

$$+ \int\limits_{\partial D} [Kn_m\partial_m u_k - Ma_{ij}n_j\partial_i u_k]w_k ds = I_{1k} + I_{2k}.$$

Очевидно, $|I_{1k}| \leq c \| w_k \|_1 \| u_k \|_1 \to 0$, $k \to \infty$. Рассмотрим I_{2k}. На Γ_x^+ имеем $u_k = 0$ и, следовательно, $\partial_i u_k = n_i \partial u_k / \partial \nu$ (ν-вектор внешней нормали). Таким образом, подынтегральное выражение в I_{2k} на Γ_x^+ имеет вид $H w_k \partial u_k / \partial \nu = 0$, так как здесь $H = 0$. На $S \setminus \Gamma_x^+$ имеем $w_k = 0$. Следовательно, $I_{2k} = 0$. Оценка (32) доказана.

Доказательство леммы 2.1. Пусть $v \in B_*$. Функции v_k построим, умножая v на функции, которые обращаются в нуль в окрестности соответственных точек и в единицы вне более широкой окрестности. Так как $v(x', \varphi_-(x')) = 0$ для $x' \in \Pi(D)$, имеем

$$|v(x', x_m)| \leq c x_m, \quad (x', x_m) \in D. \tag{33}$$

Возьмем функцию $\Phi \in C^\infty(R^1)$, $0 \leq \Phi \leq 1$, $\Phi(s) = 0$ для $|s| \leq 1$, $\Phi(s) = 1$ для $|s| \geq 2$. Рассмотрим функции $w_k(x', x_m) = \Phi(k x_m) v(x', x_m)$, $k > 0$. Очевидно, $w_k \in B_*$ и $w_k = 0$ для $0 \leq x_m \leq k^{-1}$. Так как $\operatorname{mes}\{x \in \operatorname{supp} v : \Phi(k x_m) \neq 1\} \to 0$, $k \to \infty$, используя (33), получаем

$$\| w_k - v \|_0 \to 0, \quad \| \Phi(k x_m) \partial_i v - \partial_i v \|_0 \to 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$\| v \partial_m \Phi(k x_m) \|_0 \leq c \| k x_m \Phi' \|_{L_2(\operatorname{supp} v)} \leq c_1 k^{-1/2} \to 0,$$

т. е. $\| w_k - v \|_1 \to 0$ при $k \to \infty$. Лемма 2.1 будет доказана, если каждую из функций w_k аппроксимируем в $W_2^1(D)$ функциями $v_k \in B_*$, $v_k = 0$ в окрестности тех точек $(x', \varphi_+(x'))$, где $\varphi_+(x')$ не является дважды гладкой.

Обозначим через S_1 множество точек $x' \in \Pi(\operatorname{supp} v)$, для которых $\varphi_+(x') \geq k^{-1}$. Для $x' \in S_1$ функция $\varphi_+(x')$ будет дважды кусочно-гладкой. Рассмотрим совокупность S_1' тех точек $(x', \varphi_+(x'))$, где $x' \in S_1$, для которых $\varphi_+(x')$ не является дважды гладкой. Заметим, что S_1' можно представить как конечное объединение таких частей S, каждая из которых отображается в $\{(y_1, \ldots, y_m) : y_1 = 0, y_2 = 0\}$ или в $\{(y_1, \ldots, y_m) : y_1 = 0, y_2 y_3 = 0\}$ при помощи неособого преобразования $Q \in C^2$. Функции w_k будем приближать в $Q(D)$. Рассмотрим первый случай (второй является аналогичным). Для $0 < \varepsilon < 1$ определяем: $\Phi_\varepsilon(y) = 0$, если $\varrho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq \varepsilon^2$, $\Phi_\varepsilon(y) = 1$, если $\varrho \geq \varepsilon$, $\Phi_\varepsilon(y) = \Phi(4 \ln \varepsilon / \ln(y_1^2 + y_2^2))$, если $\varepsilon^2 < \varrho < \varepsilon$. Легко проверить, что $\Phi_\varepsilon \in C^\infty(R^m)$. Рассмотрим функции $v_\varepsilon^k(y) = \Phi_\varepsilon(y) w_k(y)$. Сразу видно, что $v_\varepsilon^k \in B_*$ и $v_\varepsilon^k(x) = 0$ в окрестности той части S, которую отобразили в $\{y_1 = 0, y_2 = 0\}$. Так как носитель функции v ограничен, при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\| v_\varepsilon^k - w_k \|_0 \to 0, \quad \| \Phi_\varepsilon \partial_i w_k - \partial_i w_k \|_0 \to 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{34}$$
$$\| (\Phi_\varepsilon)_{y_1} w_k \|_0^2 \leq c \max_{\overline{D}} |v| \int_{\varepsilon^2 < \varrho < \varepsilon} \left\{ \frac{\ln \varepsilon}{[\ln(y_1^2 + y_2^2)]^2} \frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2} \right\}^2 dy_1 dy^2 \leq \frac{c_1}{|\ln \varepsilon|} \max_{\overline{D}} |v|,$$

т. е. $\| v_\varepsilon^k - w_k \|_1 \to 0$. Следовательно, функции $v_\varepsilon^k(x)$ удовлетворяют всем условиям леммы 2.1 и в частности $\| v_\varepsilon^k - v \|_1 \to 0$ и $\operatorname{supp} v_\varepsilon^k \subset \operatorname{supp} v$.

Лемма 2.1 доказана. Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.1. *До сих пор мы предполагали, что $K_{x_m} \in C^1(\overline{D})$. Сейчас допустим, что на некотором множестве точек $G \subset \overline{D}$ имеем*

$K_{x_m} \bar{\in} C^1$ (например, производная $K_{x_m x_m}$ может быть неограниченной). Тогда имеет место такой результат: для каждой функции $f \in L_2(D)$ существует такая функция $u \in W^1$, что равенство $(u, L^*v) = (f, v)$ выполнено для всех функций $v \in B_*$, $v = 0$, в окрестности G. Чтобы показать это, достаточно проследить доказательство теоремы 2.1. Следствие 2.1 будем использовать в п. 10.

Замечание 2.1. Рассмотрим снова совокупность S_1' из леммы 2.1. Она оказалась конечным объединением поверхностей, размерность которых меньше или равна $(m-2)$ (см. замечание 12.1). Нам удалось произвольную функцию $v \in B_*$ аппроксимировать в $\dot{W}_2^1(D)$ функциями v_k, $v_k = 0$ в окрестности S_1'. Для нас было бы гораздо более удобнее аппроксимировать v в $\dot{W}_2^2(D)$. Однако это невозможно, так как из теорем вложения следовало бы $v = 0$ на $(m-2)$-мерных частях S_1', а это в общем случае не так (если S_1' находится на Γ_x^+ — см. замечание 12.1).

3. Существование обобщенного решения. Будем рассматривать область D, удовлетворяющая условиям теоремы 2.1. Пространство B_*^1 определяем так: $v \in B_*^1$, когда $v \in \dot{C}^2(\bar{D})$, и

$$(Lu, v) = (u, L^*v), \quad \forall u \in B. \tag{35}$$

Рассмотрим куски сильной характеристики уравнения (1), по терминологии Березанского [24, стр. 89]. Оказывается, что это открытые части Γ_x^- (где $H = 0$) вида $x_m = \text{const}$. Их замыкание в S обозначаем через Γ'. Замыкание $\Gamma_x^- \setminus \Gamma'$ обозначим через Γ''. Дальше предполагаем, что открытые подобласти Γ'' дважды гладкие.

Рассмотрим вопрос, какие условия удовлетворяют функции $v \in B_*^1$ на различных участках S? Этот вопрос исследуется в [24, гл. II, п. 1]. Показано, что если выполнено (35), на Γ' имеем $\beta v = 0$, где

$$\beta(x) = \sum_{i=1}^{m-1} [a_i(x) + \sum_{j=1}^{m-1} M \partial_j a_{ij}] n_i(x) + [a_m(x) - K_{x_m}(x)] n_m(x).$$

Так как $2\beta(x) = 2(K_{x_m} - a_m) \geqq K_{x_m} - 2a_m > 0$ на Γ', то $v = 0$ на Γ'. Следовательно, если выполнено (35), имеем [24]: $v = 0$ на $S \setminus (\Gamma'' U \Gamma_x^+)$, $\partial v / \partial \nu = 0$ на $\Gamma_- \setminus \Gamma_x^-$, а на Γ'' функция v удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка. С другой стороной, если некоторая функция $v \in \dot{C}^2(\bar{D})$ удовлетворяет этим условиям, равенство (35) выполнено. Это доказано [24], если множества Γ' и Γ'' находятся на положительном расстоянии. Здесь равенство (35) можно получить и без этого предположения, так как $v = 0$ на Γ'.

Определение 3. 1. *Функция $u \in L_2(D)$ называется обобщенным решением задачи А, если $(u, L^*v) = (f, v)$ для $v \in B_*^1$.*

Так как $B_* \subset B_*^1$, каждое обобщенное решение задачи А, является и слабым решением этой задачи. Однако $B_* \neq B_*^1$ для некоторых областей D, когда не все функции $v \in B_*^1$ обращаются в нуль на Γ''.

Теорема 3.1. *Пусть область D удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Пусть открытые подобласти множества Γ'' дважды гладкие. Предпо-*

лагаем, что пересечение $\Gamma_+ \cap \Gamma''$ содержится в $x_m > 0$ и во всех точках его проекции на $x_m = 0$ функция $\varphi_+(x')$ дважды гладкая. Предполагаем также, что в никакой точке $\Gamma_x^+ \cap \{x_m > 0\}$ нет острия и ребра с нулевыми углами. Тогда для каждой функции $f \in L_2(D)$ существует обобщенное решение $u \in W^1$ задачи A.

Доказательство. Оно является аналогичным, однако более сложым, чем доказательство теоремы 2.1. Теорема 3.1 следует из оценки

$$\| L^*v \|_{W^{-1}} \geqq c_2 \| v \|_0, \quad v \in B^1_*, \quad c_2 = \text{const} > 0. \tag{36}$$

Для доказательства оценки (36) сначала заметим следующее. Для $v \in B^1_*$ обозначим через u_v решение уравнения $b(x)\partial_m u = v$, удовлетворяющее условиям $u = 0$ на Γ_+, т. е.

$$u_v(x) = \int\limits_{\varphi_+(x')}^{x_m} b^{-1}(t) v(x', t) dt.$$

Очевидно $u_v \in \dot{C}(\bar{D})$ и удовлетворяет граничным условиям (23). Если функция v такая, что $u_v \in B$, из (17) и (35) получаем оценку (36), с той же постоянной c_2 из оценки (25). Однако не для всех $v \in B^1_*$ имеем $u_v \in B$, так что надо исследовать свойства функции u_v. Заметим, что здесь обычные теоремы Соболева о вложении не имеют места [26, стр. 464], так как мы допускаем и нулевые углы на $\{x_m = 0\} \cap \bar{D}$. Поэтому сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. *Для каждой ограниченной области $G \subset \bar{D}$ можно найти постоянную $C(G)$, так что для всех функций $v \in B^1_*$, $\operatorname{supp} v \subset G$, выполнено*

$$\| v \|_{L_2(\Gamma_x^+)} + \| dv \|_{L_2(\Gamma'')} \leqq c(G) \| v \|_1, \tag{37}$$

где $d(x) = [1 + \Sigma_{i=1}^{m-1} (\partial_i \varphi_-)^2]^{-1/4}$.

Замечание. Функция $d(x')$ может обращаться в нуль в тех точках x', где $\varphi_-(x') = 0$.

Доказательство. Будем рассматривать только область $\bar{G}$. Используя условие $\Gamma_x^+ \cap \Gamma'' \subset \{x_m > 0\}$; легко показать, что можно найти постоянную $\varepsilon > 0$, так что $\Pi(\Gamma_x^+ \cap \{x_m < \varepsilon\}) \subset \Pi(\Gamma_- \diagdown \Gamma'')$. Так как $v = 0$ на $\Gamma_- \diagdown \Gamma''$, на $\Gamma_x^+ \cap \{x_m < \varepsilon\}$ имеем $v = \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \partial_m v(x', t) dt$. Отсюда, аналогично (28), получаем

$$\| v \|_{L_2(\Gamma_x^+ \cap \{x_m < \varepsilon\})} \leqq c(G) \| v \|_1, \quad v \in B^1_*.$$

На $\Gamma_x^+ \cap \{x_m > 0\}$ нет острия и ребра с нулевыми углами. Тогда из теоремы вложения следует, что аналогичная оценка выполнена в $\Gamma_x^+ \cap \{x_m > \varepsilon\}$ и, следовательно,

$$\| v \|_{L_2(\Gamma_x^+)} \leqq c \| v \|_1, \quad v \in B^1_*. \tag{38}$$

На Γ'' имеем $v = \int_{\varphi_+}^{\varphi_-} \partial_m v(x', t) dt + v(x', \varphi_+(x'))$ и так как $v = 0$ на $\Gamma_+ \diagdown \Gamma_x^+$, из (38) получаем оценку (37). Лемма 3.1 доказана.

Пусть G произвольная ограниченная область в $\bar{D}$ и $v \in B^1_*$, $\operatorname{supp} v \subset \bar{G}$. Сейчас докажем, что $u_v \in W^1 \cap \dot{C}(\bar{D})$. Для этого осталось доказать, что $u_v \in W^1_2(D)$. Так как $\partial_m u_v \in W^1_2(D)$, надо исследовать $\partial_i u_v$, $i=1,\ldots,m-1$. Имея в виду (26) и (27), осталось рассмотреть $(\partial_i\varphi_+)v(x',\varphi_+)$. Так как $v=0$ на $\Gamma_+\setminus\Gamma^+_x$, из (29) и леммы 3.1 имеем

$$\|(\partial_i\varphi_+)v(x',\varphi_+(x'))\| = \|v(x',\varphi_+(x'))(\partial_i\varphi_+)\sqrt{\varphi_+-\varphi_-}\|_{L_2(\Pi(\Gamma^+_x\cap\bar{G}))}$$

$$\leqq c\|v\|_{L_2(\Gamma^+_x)} \leqq c_1\|v\|_1.$$

Таким образом доказали, что

$$u_v \in \dot{W}^1, \quad \|u_v\|_1 \leqq c(G)\|u\|_1, \quad v \in B^1_*. \tag{39}$$

Продолжая, как в теореме 2.1, осталось доказать оценку (32) для всех $v \in B^1_*$. Эта оценка заведомо выполнена для тех v, для которых $u_v \in B$.

Лемма 3.2. *Каждую функцию $v \in B^1_*$ можно аппроксимировать в $W^1_2(D)$ функциями $v_k \in B^1_*$, $v_k=0$ в окрестности $\Gamma_+\cap\{x_m=0\}$ и в окрестности тех точек Γ_+, где функция φ_+ не является дважды гладкой. При этом* $\operatorname{supp} v_k \subset \operatorname{supp} v$.

Доказательство. Из условия теоремы замкнутое множество $\Gamma_+\cap\{x_m=0\}\cap\operatorname{supp} v$ находится на положительном расстоянии от Γ''. Поэтому не меняя функцию v на Γ'', ее можно аппроксимировать, как в лемме 2.1, функциями v'_k, обращающиеся в нуль в окрестности $\Gamma_+\cap\{x_m=0\}$. Так как $v'_k=v$ на Γ'', имеем $v'_k \in B^1_*$. Каждую функцию v'_k можно аппроксимировать, как в лемме 2.1, функциями v_k с необходимыми свойствами. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Легко видно, что для функций v_k имеем $u_{v_k} \in B$ и оценка (31) выполнена для $v=v_k$. Осталось доказать, что

$$\|u_{v_k}-u_v\|_1\to 0, \quad (L^*v_k, u_{v_k})\to(L^*v, u_v), \quad k\to\infty.$$

Первое следует из (39) и остается доказать, что $(L^*(v_k-v), u_{v_k})\to 0$. Обозначая $u_k=u_{v_k}\in B$ и $w_k=v_k-v\in B^1_*$, имеем

$$(L^*w_k, u_k)=(w_k, Lu_k)=\int_D[-\partial_m(Kw_k)\partial_m u_k+\partial_j(Ma_{ij}w_k)\partial_i u_k$$

$$+a_i w_k\partial_i u_k+a_m w_k\partial_m u_k+a_0 w_k u_k]dx$$

$$+\int_{\partial D}[Kn_m\partial_m u_k-Ma_{ij}n_j\partial_i u_k]w_k ds=I_{1k}+I_{2k}.$$

Очевидно, $|I_{1k}|\leqq c\|u_k\|_1\|w_k\|_1$. Легко показать, что

$$I_{2k}=\int_{\Gamma''}[Kn_m v_k b^{-1}-Ma_{ij}n_j\int_{\varphi_+}^{x_m}(\partial_i v_k)b^{-1}dt$$

$$+Ma_{ij}n_j(\partial_i\varphi_+)v_k(x',\varphi_+)b^{-1}]w_k ds=I'_{2k}+I''_{2k}+I'''_{2k}.$$

Так как $n_m=d^2$, из (29) получаем

$$|I'_{2k}|\leqq c\|dv_k\|_{L_2(\Gamma'')}\|dw_k\|_{L_2(\Gamma'')}\leqq c_1\|v_k\|_1\|w_k\|_1.$$

Из неравенства $M(\varphi_-)|n_j|=M(\varphi_-)|\partial_j\varphi_-|d^2\leqq cd$ следует

$$|I''_{2k}|\leqq c\,\Sigma\|\partial_i v_k\|\,\|dw_k\|_{L_2(\Gamma'')}\leqq c_1\|v_k\|_1\|w_k\|_1.$$

Замечая, что $v_k=0$ на $\Gamma_+\diagdown\Gamma_x^+$, имеем

$$|I'''_{2k}|\leqq c\,\|dw_k\|_{L_2(\Gamma'')}\{\int\limits_{\Pi(\Gamma_x^+)\cap\Pi(\Gamma'')} T^2(\varphi)v_k^2(x',\varphi_+)\sqrt{1+\Sigma(\partial_i\varphi_+)^2}dx'\}^{1/2}$$

где

$$T(\varphi)=M(\varphi_-)[1+\Sigma(\partial_i\varphi_+)^2]^{1/4}[1+\Sigma(\partial_i\varphi_-)^2]^{1/2}.$$

Так как $M(\varphi_-)[1+\Sigma(\partial_i\varphi_-)^2]\leqq c$ на $\Pi(\Gamma'')$, легко доказывается, что $T(\varphi)\leqq c$ и $|I'''_{2k}|\leqq c\|w_k\|_1\|v_k\|_1\to 0$. Из всех этих оценок получаем

$$|(L^*w_k,u_k)|\leqq c\|w_k\|_1\|v_k\|_1\to 0,\ k\to\infty,$$

чем оценка (36) доказана. Теорема 3.1 доказана.

4. Необходимые условия для существования сильного решения. Здесь рассмотрим вопрос о необходимости условия (3) для коэффициентов K и a_m. Будем предполагать, что $K=K(x_m)$ и $a_m=a_m(x_m)$. Тогда условие (6) принимает вид

(9) Если t_0 такое, что $K(t_0)=0$, то выполнено $K'(t_0)-2a_m(t_0)>0$.

Докажем, что если условие (9) не выполнено, вопрос о существовании сильного решения задачи А для всех функций $f\in L_2(D)$ уже зависит от функции a_0. Заметим, что в условиях (5)—(8) a_0 была произвольная ограниченная функция. В п. 4 будем предполагать, что функции $\partial^2_{ij}a_{ij}$ и $\partial_i a_i$ ограничены в D для $i,j=1,\dots,m-1$. Предполагаем также, что функции a_{ij} возрастают не быстрее $|x|^2$, т. е. $|a_{ij}(x)|\leqq C(1+|x|^2)$.

Теорема 4.1. *Пусть $K\in C^1$, $K(x_m)>0$ для $t_1<x_m<t_2$, $K(t_1)=0$, $K(t_2)=0$ и $K'(t_2)-a_m(t_2)>0$. Пусть область D такая, что на $\partial D\cap\{t_1<x_m<t_2\}$ выполнено $n_m>0$, $H\geqq 0$. Тогда, если $K'(t_1)-a_m(t_1)<0$, можно выбрать ограниченную функцию $a_0\in C(\bar D)$ и функцию $v_0\in L_2(D)\cap C(\bar D)$ таким образом, что задача А не имеет сильного решения для $f=v_0$.*

Замечание. Для $x_m\leqq t_1$ и $x_m\geqq t_2$ область D может быть произвольной. Заметим также, что можно $\bar D\subset\{x_m<t_2\}$. Понятно, что для таких областей D условия функции K при $x_m=t_2$ не имеют никакого значения. Все рассмотренные в п. 7, пп. 9—12 области удовлетворяют условиям для границы в теореме 4.1.

Доказательство теоремы 4.1. Теорема будет доказана, если найдем функцию $v_0\not\equiv 0$, для которой $(Lu,v_0)=0$ для всех функций $u\in \dot C^2(\bar D)$, удовлетворяющих граничным условиям (20) задачи А. Тогда для $f=v_0$ не существует сильное решение задачи А. Функцию v_0 определяем так:

$$v_0(x)=0 \text{ для } x_m\bar\in(t_1,t_2),\ v_0(x)=\varphi(x')\psi(x_m) \text{ для } x_m\in(t_1,t_2), \text{ где}$$

$$\varphi(x')=(1+\sum_{i=1}^{m-1}x_i^2)^{-\gamma},\quad \psi(x_m)=\exp\left[\int\limits_{x_m}^{t_3}\frac{K'(t)-a_m(t)}{K(t)}dt\right],$$

и $t_3\in(t_1,t_2)$. Легко проверить, что $v_0\in C(\bar D)$ и $|v_0(x)|\leqq C_2(1+\Sigma x_i^2)^{-\gamma}$. Выбираем и фиксируем такое число $\gamma>0$, что $v_0 \in L_2(D)$. Функцию v_0 мы выбрали таким образом, чтобы она была решением уравнения

$$\partial_m(Kv_0)-a_m v_0=0, \quad t_1<x_m<t_2. \tag{40}$$

Для $t_1<\xi<\eta<t_2$ обозначим $D_{\xi\eta}=D\cap\{\xi<x_m<\eta\}$. Пусть $u\in \dot{C}^2(\bar{D})$ и удовлетворяет граничным условиям (20). На $\partial D_{\xi\eta}\diagdown[\{x_m=\xi\}\cup\{x_m=\eta\}]$ они имеют вид: $u=0$ на характеристических частях S, где $H=0$, а на остальных частях $u=0$, $\partial u/\partial\nu=0$. Тогда

$$\begin{aligned}\int_{D_{\xi\eta}} v_0 Lu\,dx &= \int_{D_{\xi\eta}}[-M\partial^2_{ij}(a_{ij}v_0)-\partial_i(a_i v_0)+a_0 v_0]u\,dx \\ &+\int_{D_{\xi\eta}}[-\partial_m(Kv_0)+a_m v_0]\partial_m u\,dx+\int_{\partial D_{\xi\eta}} Mn_j\partial_i(a_{ij}v_0)u\,ds \\ &+\int_{\partial D_{\xi\eta}}[Kn_m\partial_m u-Ma_{ij}n_i\partial_j u+a_i n_i u]v_0\,ds=I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned} \tag{41}$$

Из (40) имеем, что $I_2=0$. Очевидно, $I_3=0$. Рассмотрим I_4. На $\partial D_{\xi\eta}\diagdown[\{x_m=\xi\}\cup\{x_m=\eta\}]$ имеем $u=0$ и, следовательно, здесь подынтегральное выражение в I_4 имеет вид $Hv_0\partial u/\partial\nu=0$. Таким образом при $\xi\to t_1$, $\eta\to t_2$ имеем

$$I_4=K(\eta)\int_{D\cap\{x_m=\eta\}} v_0(\partial_m u)ds-K(\xi)\int_{D\cap\{x_m=\xi\}} v_0(\partial_m u)ds\to 0,$$

так как функция v_0 ограничена. Рассмотрим интеграл I_1. Приравняя подынтегральное выражение нулю, получаем, что надо определить $a_0(x)=a(x)$, где

$$a(x)=\partial_i a_i+M\partial^2_{ij}a_{ij}+\varphi^{-1}(x')\,[a_i\partial_i\varphi+2M(\partial_i a_{ij})\partial_j\varphi+Ma_{ij}\partial^2_{ij}\varphi]. \tag{42}$$

Так как

$$|\partial_i\varphi|\leq c(1+\Sigma x_i^2)^{-\gamma-1/2}, \qquad |\partial^2_{ij}\varphi|\leq c(1+\Sigma x_i^2)^{-\gamma-1},$$

определенная таким образом функция $a_0\in C(\bar{D})$ и является ограниченной в D. Следовательно, $(v_0, Lu)=0$, чем теорема 4.1 доказана.

Следствие 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Тогда условие* $K'(t_1)-a_m(t_1)\geq 0$ *является необходимым для того, чтобы для произвольной ограниченной функции* $a_0\in C(\bar{D})$ *существовало сильное решение задачи А для каждой функции* $f\in L_2(D)$.

Теорема 4.2. *Пусть* $K\in C^2$, $K(t_1)=0$ *и область* D *такая, что на* $\partial D\cap\{x_m>t_1\}$ *выполнено* $n_m>0$, $H\geq 0$. *Тогда, если* $K'(t_1)-a_m(t_1)=0$, *можно найти такую ограниченную функцию* $a_0\in C(\bar{D})$ *и функцию* $v_0\in L_2(D)$, *что задача А не имеет сильного решения для* $f=v_0$.

Доказательство. Функцию v_0 определяем следующим образом: $v_0=0$ для $x_m\leq t_1$,

$$v_0(x)=(1+\sum_{i=1}^{m-1}x_i^2)^{-\gamma}, \quad x_m>t_1.$$

Выберем и фиксируем такое $\gamma>0$, что $v_0\in L_2(D)$. Функцию a_0 определим так, чтобы выполнялось

$$(Lu, v_0)=0. \tag{43}$$

Отсюда следует, что для $f=v_0$ не существует сильное решение задачи А. Пусть $\eta=T$, $D_{\xi\eta}=D\cap\{x_m>\xi\}$. В представлении (41) рассмотрим I_2:

$$I_2=\int\limits_{\partial D_{\xi\eta}}[-K'+a_m]v_0un_m ds+\int\limits_{D_{\xi\eta}}[K''-a'_m]v_0u dx=I'_2+I''_2.$$

Граничные условия задачи А и предположения теоремы дают $u=0$ на $\partial D_{\xi\eta}\diagdown\{x_m=\xi\}$. Следовательно, $I'_2\to 0$ при $\xi\to t_1$, так как $K'(t_1)-a_m(t_1)=0$. Тогда в этим случае выбираем

$$a_0(x)=a(x)-K''(x_m)+a'_m(x_m),$$

где функция $a(x)$ определена в (42). Используя (41), при $\xi\to t_1$ получаем (43), чем теорема 4.2 доказана.

Теорема 4.3. *Пусть $K\in C^2[0, T]$, $K(t)\neq 0$ для $t\neq t_i$, $t\in[0, T]$ и $K(t_i)=0$, где $0\leq t_1<\cdots<t_N<T$. Пусть область $D\subset\{0\leq x_m\leq T\}$ такая, что $n_m>0$ и $H\geq 0$ на $\partial D\cap\{x_m>t_1\}$. Тогда условие $K'(t_i)-a_m(t_i)>0$ для $i=1,\dots,N$ является необходимым для того, чтобы для произвольной ограниченной функции $a_0\in C(\bar{D})$ существовало сильное решение задачи А для каждой функции $f\in L_2(D)$.*

Доказательство. Допустим, что $K'(t_i)-a_m(t_i)\leq 0$ для некоторого t_i. Обозначим $t_{i_0}=\max t_i$, для которых $K'(t_i)-a_m(t_i)\leq 0$. Тогда, если $K'(t_{i_0})-a_m(t_{i_0})=0$, можно применить теорему 4.2. Если $i_0<N$ и $K'(t_{i_0})-a_m(t_{i_0})<0$, можно применить теорему 4.1. Наконец, если $i_0=N$, функции $a_0\in C(\bar{D})$ и $v_0\in L_2(D)$ можно определить, как в теореме 4.1, только надо иметь в виду, что здесь $K(T)>0$ и рассмотреть область $D_{\xi T}$. Теорема доказана.

Замечание 4.1. В теореме 4.3 рассматриваем условие.

(9′) Если t_i такое, что $K(t_i)=0$, то выполнено $K'(t_i)-a_m(t_i)>0$.

Доказываем, что условие (9′) является необходимым. Это мы показываем для всех $t_i<T$, если область $D\subset\{x_m\leq T\}$. В пп. 7—12 докажем, что в некоторых случаях условие (9) является достаточным для существования сильного решения задачи А для каждой функции $f\in L_2(D)$. Для $x\in D$ из $K(x)=0$ следует $K_{x_m}(x)=0$. Следовательно, для внутренних точек $x\in D$ условия (9) и (9′) совпадают и являются необходимыми и достаточными. Для функции $K(x)$ мы не предполагаем, что она является продолжимой вне области D как неотрицательной и непрерывно дифференцируемой функции. Поэтому условие (9′) при $t_i=T$ уже не является необходимым. Действительно, легко видно, что условие (9′) может быть нарушено, а в то же время достаточное условие (9) может быть выполнено.

Здесь остается открытым следующий вопрос: можно ли утверждать, что условие $K'(t_i)-a_m(t_i)>0$ в теореме 4.3 является необходимым, если предполагаем только, что $K\in C^1$. Тогда результат был бы закончен и для рассмотренной в п. 10 задачи, где $K\in C^1$.

5. Постановка и исследование другой краевой задачи. В п. 5 предполагаем, что $M(0)>0$. Тогда можно исследовать другую задачу, которая в некоторых случаях является сопряженной к задаче А. Расматриваем уравнение

(44) $$L^*v=g$$

в некоторой области $D\subset\{0\leqq x_m\leqq T\}$. Замена переменных $y'=x'$, $y_m=T-x_m$ переводит область D в D' и уравнение (44) в уравнение

$$(45)\qquad L_1u\equiv K'u_{y_my_m}-M'a'_{ij}u_{y_iy_j}-(M\partial_ja'_{ij}+\alpha'_i)u_{y_i}$$

$$+(2K'_{y_m}+\alpha'_m)u_{y_m}+\left(\alpha'_0+K'_{y_my_m}+\frac{\partial\alpha'_i}{\partial y_i}+\frac{\partial\alpha'_m}{\partial y_m}-M'\frac{\partial^2a'_{ij}}{\partial y_i\partial y_j}\right)u=g'.$$

Через b' обозначаем функцию b после замены переменных, т. е. $b'(y)=b(y', T-y_m)$; $u=v'$. Условия (5)—(8) для уравнения (45) будут

(46) Функции $K_{x_mx_m}$, $(a_{ij})_{x_ix_j}$, $(\alpha_i)_{x_i}$, $(\alpha_m)_{x_m}$ ограничены в D;

$$(47)\qquad 3K_{x_m}(x)-2\alpha_m(x)+q_0K(x)\geqq c_0>0,\quad x\in\bar D\quad(q_0,\ c_0=\mathrm{const}).$$

Заметим, что если D ограниченная область или функции K и α_m зависят только от x_m, условие (47) принимает вид

(47′) Если точка $x\in\bar D$ такая, что $K(x)=0$, то выполнено $3K_{x_m}(x)-2\alpha_m(x)>0$.

Это условие следует из (9) для $x\in\bar D\setminus\Gamma_+$. Для уравнения (44) в области D сейчас сформулируем краевую задачу A', которая переходит в задачу А для уравнения (45) в области D'. Тогда, если мы можем исследовать задачу А в D', потом можно перенести результаты и для задачи А′.

Задача А′. *Найти в D решение уравнения* (44), *удовлетворяющее условиям*:

$$(48)\qquad\begin{array}{lll} v=0 & \text{на} & S\cap\{n_m<0,\ H\leqq 0\},\\ v=0,\ \partial_mv=0 & \text{на} & S\cap\{n_m<0,\ H>0\},\\ v=0 & \text{на} & S\cap\{n_m=0\},\\ \partial_mv=0 & \text{на} & S\cap\{n_m>0,\ H<0\}.\end{array}$$

На остальной части S, где $n_m>0$ и $H\geqq 0$, не задаются граничных условий. Слабое и сильное решения задачи А′ *определяются, как в задаче А, только здесь имеем в виду условия* (48).

Теорема 5.1. *Если выполнены условия* (46) *и* (47), *сильное решение задачи А′ единственно.*

Замечание 5.1. Понятно, что если в области D' задача А для уравнения (45) имеет слабое или сильное решение, то в области D задача А′ тоже имеет такое решение. Это мы будем использовать в пп. 7—12 в тех случаях, когда задача А′ является сопряженной к задаче А. Например, в области $D=\{0<x_m<T\}$ задача А′ имеет вид

$$v=0\quad\text{на}\quad\{x_m=0\},\ \partial_mv=0\quad\text{на}\quad\{x_m=0\}\cap\{k>0\}.$$

Эта задача является сопряженной к задаче А для области D (задача Коши с данными на $x_m=T$).

II. Существование сильного решения

6. Слабое решение из W_2^1 является сильным. Здесь сформулируем некоторые результаты о совпадении слабых и сильных решений для уравнений второго порядка. В ограниченной или неограниченной области $D\subset R^m$ рассматриваем уравнение

$$(49)\qquad Pu\equiv\sum_{i,j=1}^{m}c_{ij}(x)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{m}c_i(x)u_{x_i}+c_0(x)u=f(x),$$

где (c_{ij}) — симметричная матрица с кусочно-гладкими элементами, функции $c_{ij}(x)$ — кусочно-гладкие, а c_0 — кусочно непрерывная функция. Предполагаем такую же гладкость и для коэффициентов формально сопряженного оператора P^*. Рассматриваем следующую задачу: найти в D решение уравнения (49), удовлетворяющее граничным условиям

$$(50)\qquad u=0 \quad \text{на} \quad S_1; \quad u=0,\ \partial u/\partial\nu=0 \quad \text{на} \quad S_2.$$

Здесь $S=S_1\cup S_2\cup S_3$ является границей области D. На S_3 не задаются граничных условий. Обозначим через S' нехарактеристические части S_1. Через N обозначаем совокупность всех функций из $\dot{C}^2(\bar{D})$, удовлетворяющих (50). Через N_* обозначаем совокупность функций $v\in\dot{C}^2(\bar{D})$, удовлетворяющих условию

$$v=0 \quad \text{на} \quad S'; \quad v=0 \quad \text{в окрестности } S_3.$$

На S_2 и на $S_1\diagdown S'_1$ на функции из N_* не накладываем никаких граничных условий. Пусть $f\in L_2(D)$.

Определение 6.1. *Функция* $u\in L_2(D)$ *называется слабым решением задачи* (49), (50), *если*

$$(51)\qquad (u,P^*v)=(f,v),\qquad v\in N_*.$$

Определение 6.2. *Функция* $u\in L_2(D)$ *называется сильным решением задачи* (49), (50), *если существуют функции* $u_k\in N$, $k=1,2,\ldots$, *для которых* $\|u_k-u\|\to 0$, $\|P_{u_k}-f\|\to 0$, $k\to\infty$.

Заметим, что каждое слабое решение в смысле определения 2.1 является слабым решением в смысле определения 6.1. Разница состоит в том, что функции из N_* обращаются в нуль в окрестности S_3.

Совпадение слабого и сильного решения задачи (49), (50) является локальным свойством. Оно зависит от поведения дифференциального оператора P в окрестности границы S. Здесь укажем для областей какого вида можно доказать, что слабое решение является сильным.

Пусть точка $x_0\in S$, O_{x_0} — ее окрестность в $\bar{D}$ и $y=Q(x)$ является таким дважды гладким неособым преобразованием, что $Q(x_0)=(0,\ldots,0)$, $Q(\bar{O}_{x_0})\subset\bar{D}_1$, $Q(\bar{O}_{x_0}\cap S)\subset\partial D_1$. При этом преобразовании уравнение (49) переходит в

$$(49')\qquad \sum_{i,j=1}^{m}b_{ij}(y)u_{y_iy_j}+\sum_{i=1}^{m}b_i(x)u_{y_i}+b_0(y)u=g(y).$$

Предполагаем, что для каждой точки границы S соответствующие область D_1 и преобразование Q так выбраны, что выполнено одно из следующих условий С (о совпадении):

С1. $D_1=\{y_1\geq F(y_2,\ldots,y_m)\}$, где функция F удовлетворяет условию Липшица и на поверхности $y_1=F$ не задаются граничных или сопряженных граничных условий.

С2. $D_2=\{y_1\geqq 0\}$ и выполнено одно из условий:

$$(52)\quad \text{а)}\qquad b_{11}(y)=b(y_1)c(y),\quad \text{где}\quad c(y)\neq 0,\quad c(y)\in C^1,$$

или

(53) б) $$b_{1k}=0 \quad \text{на} \quad y_1=0, \quad \text{для} \quad k=2,\dots,m.$$

С3. $D_1=\{y_1\geqq 0,\ y_2\geqq F(y_1, y')\}$, где $y'=(y_3,\dots,y_m)$ и на поверхности $y_2=F$ не задаются граничных или сопряженных граничных условий. Предполагаем также, что имеет место или

а) выполнено условие (53) и функция F удовлетворяет условию Липшица, или

б) выполнено (52) и функция F удовлетворяет более слабому условию

(54) $$|F(y_1, y')-F(z_1, z')|\leqq \varphi(|y_1-z_1|)+E|y'-z'|,$$

где $E=\text{const}$, функция $\varphi(\varepsilon)$ ограничена и $\varphi(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

С4. $D_1=\{y_1\geqq 0,\ y_2\geqq 0\}$ и выполнены условия (52) и

(55) $$b_{21}=0,\ b_{2k}=0 \quad \text{на} \quad y_2=0 \quad \text{для} \quad k=3,\dots,m.$$

С5. $D_1=\{y_1\geqq 0,\ y_2\geqq 0,\ y_3\geqq F(y_1, y')\}$, где здесь обозначили $y'=(y_2, y_4, \dots, y_m)$. На поверхности $y_3=F$ не задаются граничных или сопряженных граничных условий. Функция F является липшицовой. Пусть имеет место и одно из следующих условий:

а) выполнены (52) и (55); в этом случае функция F может удовлетворять только более слабому (чем условие Липшица) условию (54);

б) выполнено (52) и на $y_2=0$ не задаются граничных или сопряженных граничных условий;

в) выполнено (53) и на $y_2=0$ не задаются граничных или сопряженных граничных условий;

г) на некоторых из граней $y_1=0$ и $y_2=0$ не задаются граничных, а на остальных — сопряженных граничных условий.

Теорема 6.1. *Пусть S удовлетворяет этим условиям. Пусть коэффициенты c_{ij} и c_i возрастают не быстрее $|x|$, а функция c_0 — ограничена. Предположим, что функция $u\in W_2^1(D)$ и $u=0$ на $S_1\cup S_2$ в том смысле, что если ее продолжим через $S_1\cup S_2$ как нуль вне области D, полученная функция принадлежит W_2^1. Тогда, если функция u является слабым решением задачи* (49), (50), *она будет сильным решением этой задачи.*

Замечание 6.1. В случае С2 б) коэффициент b_{11} может быть произвольным на $y_1=0$; в некоторых точках $b_{11}=0$, а в других $b_{11}\neq 0$.

Замечание 6.2. В том случае, когда функция $F(y_1, y')$ не зависит от y' (например, $D\subset R^2$), каждая непрерывная функция с ограниченным носителем удовлетворяет (54), так как можно определить

$$\varphi(\varepsilon)=\max_{|y-z|\leqq\varepsilon}|F(y)-F(z)|,\qquad \varepsilon\geqq 0.$$

Замечание 6.3. Аппроксимирующую сильного решения последовательность можно выбрать из функций, каждая из которых обращается в нуль в окрестности $S_2\cup(S_1\setminus S')$.

Замечание 6.4. Слабое решение $u\in W^1$ из теоремы 2.1 удовлетворяет условию $u=0$ и $\Gamma_+\cup\Gamma_0$ в смысле теоремы 6.1. Действительно, так как функция $u\in W^1$, по определению W^1 существуют функции $u_k\in\dot{C}(\bar{D})\cap W_2^1$, $u_k=0$

на $\Gamma_+ \cup \Gamma_0$, которые аппроксимируют u в $W_2^1(D)$. Тогда продолженные как нуль вне области D через $\Gamma_+ \cup \Gamma_0$ функции u_k принадлежат W_2^1. Они аппроксимируют в пространстве W_2^1 продолженную как нуль через $\Gamma_+ \cup \Gamma_0$ функцию u.

7. Задача Коши. В пп. 7—12 предполагаем, что $|K(x)| \leq C(|x|+1)$, $|a_{ij}(x)| \leq C(|x|+1)$.

Пусть область D имеет вид $D=\{x \in R^m : 0 < x_m < \varphi_+(x')\}$, где $\varphi_+(x')$ ограниченная и непрерывная функция с кусочно-непрерывными первыми производными. Для простоты предполагаем, что $\varphi_+(x')>0$ для $x' \in R^{m-1}$. Пусть $H = Kn_m^2 - Ma_{ij}n_i n_j \geq 0$ на $\Gamma_+ = \{x_m = \varphi_+(x')\}$. Тогда задача А здесь имеет такой вид

Задача Коши (1), (56). *Найти в D решение уравнения* (1), *удовлетворяющее граничным условиям*

$$u=0 \quad \textit{на} \quad \Gamma_+; \quad \partial u/\partial x_m = 0 \quad \textit{на} \quad \Gamma_+ \cap \{H>0\}. \tag{56}$$

Теорема 7.1. *Для каждой функции $f \in L_2(D)$ задача Коши* (1), (56) *имеет одно и только одно сильное решение $u \in W_2^1$. Для функций u_k из аппроксимирующей последовательности имеем $u_k \in \dot{C}^\infty(\bar{D})$, $u_k = 0$ в окрестности Γ_+.*

Доказательство. Заметим, что в теореме 2.1 мы предполагали, что $H \leq 0$ на Γ_+. Поэтому ее здесь нельзя применить, если $H>0$ в некоторых точках Γ_+. Для исследования задачи Коши будем использовать полученные в п. 1 результаты для системы первого порядка (11), к которой свели уравнение (1).

Определение 7.1. *Функция $\hat{u} \in L_2(D)$ называется слабым решением задачи* (11), (17), *если для всех функций $\hat{v} \in \dot{C}^1(\bar{D})$, удовлетворяющих сопряженным к* (17) *граничным условиям, выполнено* $(\hat{u}, \widehat{L^*}\hat{v}) = (\hat{h}, \hat{v})$.

Определение 7.2. *Функция $\hat{u} \in L_2(D)$ называется сильным решением задачи* (11), (17), *если существуют функции $\hat{u}_k \in \dot{C}^1(\bar{D})$, удовлетворяющие* (17) *и*

$$\|\hat{u}_k - \hat{u}\| \to 0, \quad \|\hat{L}\hat{u}_k - \hat{h}\| \to 0, \quad k \to \infty. \tag{57}$$

Пусть $f \in L_2(D)$. Тогда $\hat{h} = (0, \ldots, 0, -bf) \in L_2$ и из оценки (19) теоремы 1.1 следует, что задача (11), (17) имеет слабое решение. Очевидно, функция φ_+ локально удовлетворяет условию Липшица. На $\{x_m = 0\}$ не задаются граничных условий. На Γ_+ не задаются сопряженных граничных условий. Следовательно, граница области D локально удовлетворяет условиям о совпадении слабого и сильного решения [31]. Кроме этого, элементы матриц A_i возрастают не быстрее $|x|$. Используя леммы 1 [30], получаем: существует сильное решение $\hat{u} = (u_0, \ldots, u_m)$ задачи (11), (17). Так как на $x_m = 0$ не задаются граничных условий, а на Γ_+ — сопряженных условий, на самом деле функции $\hat{u}_k = (u_{0k}, \ldots, u_{mk})$ можно взять из $\dot{C}^\infty(\bar{D})$, $\hat{u}_k = 0$ в окрестности Γ_+ [31]. Запишем (57) в виде

$$\|u_{ik} - u_i\| \to 0, \quad i = 0, \ldots, m,$$

$$(58)\qquad \left\| E \begin{pmatrix} u_{mk}-\partial_m u_{0k} \\ \partial_1 u_{mk}-\partial_m u_{1k} \\ \cdots\cdots \\ \partial_{m-1} u_{mk}-\partial_m u_{m-1\,k} \\ K\overset{*}{\partial}_m u_{mk}-Ma_{ij}\,\partial_i u_{jk}+\sum_{i=0}^{m} a_i u_{ik}-f \end{pmatrix} \right\| \to 0.$$

Отсюда легко следует

$$(59)\qquad \| u_{mk}-\partial_m u_{0k} \| \to 0, \quad \| x_m(\partial_i u_{mk}-\partial_m u_{ik}) \| \to 0,$$
$$\| K\partial_m u_{mk}-Ma_{ij}\partial_i u_{jk}+\Sigma a_i u_{ik}-f \| \to 0.$$

Рассмотрим функции из $\dot{C}^\infty(\bar{D})$

$$w_k(x)=\int_{\varphi_+(x')}^{x_m} u_{mk}(x',t)dt, \qquad k=1,2,\ldots$$

Имеет место

Лемма 7.1. *Пусть носитель каждой из функций $v_k\in L_2(D)$ ограничен и $\| x_m v_k \| \to 0$ при $k\to\infty$. Тогда*

$$\left\| \int_{\varphi_+}^{x_m} v_k(x',t)dt \right\| \le 2\| x_m v_k \| \to 0, \quad k\to\infty.$$

Из этой леммы, (58), (59) и представлении

$$w_k-u_{0k}=\int_{\varphi_+}^{x_m}[u_{mk}-\partial_m u_{0k}]dt, \quad \partial_i w_k-u_{ik}=\int_{\varphi_+}^{x_m}[\partial_i u_{mk}-\partial_m u_{ik}]dt$$

получаем

$$(60)\qquad \| w_k-u_{0k} \| \to 0, \quad \| \partial_i w_k-u_{ik} \| \to 0, \quad i=1,\ldots,m.$$

Из всех этих результатов легко следует, что функция $u_0\in W_2^1$, $u_0=0$ на Γ_+ в смысле теоремы 6.1 является слабым решением задачи Коши (1), (56). Все условия теоремы 6.1 выполнены. Действительно, например, в каждой точке границы выполнено условие С1. Следовательно, функция u_0 является сильным решением задачи Коши. Единственность сильного решения следует из теоремы 1.2. Теорема 7.1 доказана.

Рассмотрим сопряженную задачу к задаче (1), (56):

$$(61)\qquad \begin{aligned} &L^*v=g && \text{в}\quad D, \\ &v=0,\ K\partial_m v=0 && \text{на}\quad x_m=0. \end{aligned}$$

Она является частным случаем задачи A′, рассмотренной в п. 5. Тогда из теоремы 7.1 и замечания 5.1 вытекает

Теорема 7.2. *Пусть $M(0)>0$ и выполнены* (46) *и* (47). *Тогда задача* (61) *имеет одно и только одно сильное решение $v\in W_2^1(D)$ для каждой* *функции* $g \in L_2(D)$. *Обе задачи* (1), (56) *и* (61) *имеют единственное слабое решение.*

Последнее утверждение следует из сильной разрешимости сопряженной задачи.

Пример. Рассмотрим полосу $D=\{0<x_m<T\}$, т. е. $\varphi_+(x')=T$. Тогда $H=K\geq 0$ на Γ_+ и для этой области D имеют место теоремы 7.1 и 7.2. Другие примеры можно найти в п. 11.

8. Смешанная задача. Пусть G ограниченная или неограниченная область в R^{m-1} с дважды гладкой границей Γ. Рассмотрим уравнение (1) в цилиндре $D=G\times[0, T]$. Обозначим $S'=\{(x', T); x' \in \overline{G}, K(x', T)>0\}$. Краевые условия (20) здесь будут:

$$u=0 \quad \text{на} \quad \partial D\setminus\{x_m=0\}; \quad u_{x_m}=0 \quad \text{на} \quad S'. \tag{62}$$

Если $K(x', T)=0$ для $x' \in G$, условия (62) принимают вид

$$u=0 \quad \text{на} \quad \partial D\setminus\{x_m=0\}. \tag{62'}$$

Теорема 8.1. *Пусть* $K(x', T)=0$ *для* $x' \in G$. *Тогда для каждой функции* $f \in L_2(D)$ *существует одно и только одно сильное решение* $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ *задачи* (1), (62').

Доказательство. Так как $H=K(x', T)=0$ на $x_m=T$ и $H=K\geq 0$ на $x_m=0$, можно применить теорему 2.1. Следовательно, для каждой функции $f \in L_2(D)$ существует слабое решение $u \in W^1$ задачи (1), (62). Докажем, что оно является сильным. Для этого надо исследовать каждую точку границы и указать в какого вида области D_1 из рассмотренных в теореме 6.1 можно отобразить некоторую ее окрестность.

1. Для $x' \in G$ рассмотрим точку (x', T). Так как на $x_m=T$ не задаются сопряженных граничных условий, здесь выполнено условие C1.

2. Для $x' \in G$ рассмотрим точку $(x', 0)$. На $x_m=0$ не задаются граничных условий и здесь тоже выполнено условие C1.

3. Пусть $x' \in \Gamma$. В окрестности точки (x', x_m), где $x_m \in (0, T)$, граница D дважды гладкой и нехарактеристической $(H<0)$. Следовательно, применимо условие C2 а).

4. Для каждой точки (x', T), $x' \in \Gamma$, можно применить условие C3 б), так как здесь матрица (Ma_{ij}) положительно-определена.

5. Осталось рассмотреть точки $(x'_0, 0)$ для $x'_0 \in \Gamma$. В некоторой окрестности точки $x'_0 \in \Gamma$ выпрямляем Γ в $\{y_1=0\}$ преобразованием $y'=Q(x')$, $Q(x'_0)=0$. Надо рассмотреть угол $\{y_1>0, y_m>0\}$, где обозначили $y_m=x_m$. Уравнение (1) переходит в уравнение того же вида, так что для коэффициентов сохраняем прежние обозначения. Только заметим, что $a_{11}\neq 0$, так что можно считать $a_{11}=1$. Мы хотим применить C3 а). Выполним преобразование $Q_1: z_1=y_1$, $z_m=y_m$, $z_i=\varphi_i(y)$. Уравнение переходит в виде (49') и условие (53) здесь будет

$$b_{1j}(y)=-M\sum_{i=1}^{m-1} a_{1i}(y)\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}=0 \quad \text{на} \quad y_1=0, \quad j=2, \ldots, m-1, \tag{63}$$

так как $b_{1m}=0$. Выберем $\varphi_j(y)=y_j-y_1a_{1j}(y)$, $j=2, \ldots, m-1$. Тогда условие (63) выполнено. В малой окрестности точки $(0, \ldots, 0)$ преобразование Q_1

неособое, угол переходит в себя и, следовательно, можно применить условие С3 а), так как на $x_m=0$ не задаются граничных условий.

Таким образом все точки ∂D удовлетворяют условиям теоремы 6.1. Так как коэффициенты a_{ij} и K возрастают не быстрее $|x|$, можно применить теорему 6.1, чем теорема 8.1 доказана.

Рассмотрим случай, когда условие $K=0$ на $\bar{D}\cap\{x_m=T\}$ не выполнено.

Теорема 8.2. *Пусть $M(0)>0$. Тогда задача* (1), (62) *имеет одно и только одно сильное решение $u\in W_2^1(D)$ для каждой функции $f\in L_2(D)$. Слабое решение задачи* (1), (62) — *тоже единственно.*

Доказательство. Как и в п. 7 будем использовать результаты п. 1 для системы первого порядка (11). Пусть $f\in L_2(D)$. Тогда $\hat{h}=(0,\ldots, 0, -bf)\in L_2$ и из оценки (19) теоремы 1.1 следует, что задача (11), (17) имеет слабое решение $\hat{u}\in L_2(D)$. Надо доказать, что оно является сильным. Рассмотрим поверхн сть $\Gamma\times[0, T]$. Пусть в окрестности точки $x_0'\in\Gamma$, Γ задается уравнением $\Phi(x_1,\ldots, x_{m-1})=0$, где $\Phi\in C^2$, и, например, $\Phi_{x_1}\neq 0$. После замены $y_1=\Phi(x_1,\ldots, x_{m-1})$, $y_k=x_k(k=2,\ldots, m)$ граница локально переходит в $y_1=0$, а система (11) — в виде

$$\sum_{i=1}^{m} A^i\partial\hat{u}/\partial y_i+\hat{B}\hat{u}=\hat{h},\quad A^1\equiv\sum_{i=1}^{m-1}\Phi_{x_i}A_i.$$

Заметим, что $M(0)>0$, т. е. $M\geq\delta>0$ на $\Gamma\times[0, T]$. Тогда легко доказывается, что ранг матрицы A^1 сохраняется постоянным (равным двум) в окрестности $y_1=0$. Граничное пространство $N=\{u_m=0\}$, очевидно, сохраняет размерность и меняется гладко на $y_1=0$. Следовательно, поверхность $\Gamma\times[0, T]$ удовлетворяет локально условиям о совпадении слабого и сильного решения. Это следует из результатов П. Лакса, Р. Филипса и Г. Пейзера (см., например, [31, теорему 1]). Так как на $\{x_m=0\}\cap\bar{D}$ не задаются граничных условий, а на $\{x_m=T\}\cap\bar{D}$ сопряженных граничных условий, здесь тоже применимы результаты тех же авторов [31, теорема 2]. Для углов, полученных при пересечении этих трех поверхностей, тоже можно применить соответственных результатов тех же авторов [31, теорема 3]. Следовательно, функция $\hat{u}=(u_0,\ldots, u_m)$ будет сильным решением задачи (11), (17). При этом аппроксимирующие функции $\hat{u}_k$ можно взять таким и, что $\hat{u}_k=0$ в окрестности $\{x_m=T\}\cap\bar{D}$. Дальше, как в п. 7, доказывается, что на самом деле функция $u_0\in W_2^1(D)$ удовлетворяет граничным условиям (62) в смысле теоремы 6.1 и является слабым решением задачи (1), (62). Как в теореме 8.1, доказывается, что оно будет и сильным. Сопряженная задача является аналогичной и поэтому сильно разрешимой. Следовательно, слабое решение (1), (62) — единственно.

9. Многомерный аналог задачи Дарбу. Рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv K(x_1)u_{x_3x_3}-u_{x_1x_1}-u_{x_2x_2}+\sum_{i=1}^{3}a_i(x)u_{x_i}+a_0(x)u=f(x) \tag{64}$$

в области

$$D=\{x\in R^3\colon x_1>0,\ 0<x_2<1,\ \int_0^{x_1}\sqrt{K(\xi)}d\xi<x_3<T-\int_0^{x_1}\sqrt{K(\xi)}d\xi\}.$$

Заметим, что обе поверхности $\partial D \cap \{n_3 > 0\}$ и $\partial D \cap \{n_3 < 0\}$ являются характеристическими для уравнения (64). Предполагаем, что $K \not\equiv 0$. При $K \equiv 0$ получается $D = G \times [0, T]$ и смешанная задача, которую мы рассмотрели в п. 8. Будем предполагать также, что $T < 2\int_0^\infty \sqrt{K(\xi)}d\xi$, т. е. что область D ограничена. Случай, когда область D неограничена, рассматривается аналогично. Граничные условия (23) здесь имеют вид

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial D \setminus \{x_3 = \int_0^{x_1} \sqrt{K(\xi)}d\xi\}, \tag{65}$$

так что задача (64), (65) является многомерным аналогом задачи Дарбу. Двумерную задачу Дарбу можно получить пересечением области плоскостью $x_2 = a$, $0 < a < 1$.

Теорема 9.1. *Задача* (64), (65) *имеет одно и только одно сильное решение $u \in W_2^1(D)$ для каждой функции $f \in L_2(D)$. Слабое решение этой задачи тоже единственно.*

Доказательство. Второе утверждение теоремы следует из первого. Действительно, здесь сопряженная к (64), (65) задача совпадает с задачей А′ и имеет такой же вид, как задача (64), (65). Кроме этого, сейчас $K_{x_m} \equiv 0$ и условие (47) для задачи А′ совпадает с условием (6). Следовательно, если первое утверждение теоремы доказано, сопряженная задача имеет сильное решение для всех функций $g \in L_2(D)$. Отсюда следует, что задача (64), (65) имеет не более одного слабого решения. Единственность сильного решения вытекает из теоремы 1.1.

Для доказательства существования сильного решения рассмотрим область

$$D' = \{x \in R^3:\ x_1 > 0,\ 0 < x_2 < 1,\ 0 < x_3 < T - \int_0^{x_1} \sqrt{K(\xi)}d\xi\}.$$

Для области D' граничные условия (23) имеют вид

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial D' \setminus \{x_3 = 0\}. \tag{66}$$

Следовательно, для доказательства теоремы 9.1 достаточно доказать сильную разрешимость задачи (64), (66). Пусть $f \in L_2(D')$. Условия теоремы 2.1 выполнены, и для функции f существует слабое решение $u \in W^1$ задачи (64), (66). Докажем, что это слабое решение является сильным. Так как область D ограничена, можно так продолжить функцию $K(x_1)$ вне D, что $T < \int_0^\infty \sqrt{K(\xi)}d\xi$. Тогда область D' будет тоже ограничена.

Рассмотрим точки границы $\partial D'$. Сначала будем использовать теоремы 6.1. Заметим, что для поверхности $\Gamma_+ = \bar{D}' \cap \{n_3 > 0\}$ имеем $\Gamma_+ \in C^1$ (однако $\Gamma_+ \bar{\in} C^2$ в некоторых точках, где $K = 0$). На Γ_+ не задаются сопряженных граничных условий и для ее внутренних точек применимо условие С1 теоремы 6.1. Это условие применимо и на $\{x_3 = 0\} \cap \partial D'$, где не задаются граничных условий. Далее заметим, что поверхности $\{x_1 = 0\} \cap \partial D'$, $\{x_2 = 0\} \cap \partial D'$ и $\{x_2 = 1\} \cap \partial D'$ являются нехарактеристическими для уравнения (64) и для их внутренних точек применимо условие С2 а). Для углов на границе D', за исключением точек из $\Gamma_+ \cap \{x_3 = 0\}$, выполнены условия С3, С4 и С5 теоремы 6.1. Если в точках из $\Gamma_+ \cap \{x_3 = 0\}$ выполнено $K \neq 0$, здесь применимо условие С5 в) для двух точек $\Gamma_+ \cap \{x_3=0, x_2=0\}$ и $\Gamma_+ \cap \{x_3=0, x_2=1\}$, а С3 а) — для остальных. Следовательно, в этом случае задача имеет сильное решение.

Рассмотрим случай, когда $K(x_1^0)=0$ в точке x_1^0, для которой

$$T=\int_0^{x_1^0}\sqrt{K(\xi)}d\xi \tag{67}$$

и нет точек $x_1<x_1^0$, для которых (67) выполнено. В этом случае Γ_+ касает $x_3=0$ в $x_1=x_1^0$. Теорему 6.1 применить нельзя. Заметим, однако, что существуют точки $x_1^n\to x_1^0$, $x_1^n<x_1^0$, для которых $K(x_1^n)>0$. В каждой из областей $D_n=D'\cap\{x_3<\int_{x_1}^{x_1^n}\sqrt{K(\xi)}d\xi\}$ существует сильное решение соответственной задачи для рестрикции функции f в области D_n. На поверхности $\partial D_n\cap\{n_3>0\}$ не задаются сопряженных граничных условий. Следовательно, аппроксимирующие функции u_i^n обращаются в нуль в окрестности этой поверхности (см. замечание 6.3). Продолженные по формуле $\widetilde{u}_i^n=0$ в $D'\setminus D_n$ функции $\widetilde{u}_i^n\in C^2(\bar{D}')$ и удовлетворяют (66). Тогда $\|L\widetilde{u}_i^n-f\|\to 0$, если выберем $n\to\infty$ и потом $i=i(n)$ подходящим образом. Из оценки (22) следует, что задача (64), (66) имеет сильное решение.

Таким образом показали, что во всех случаях задача (64), (65) тоже имеет одно и только одно сильное решение. Теорема 9.1 доказана.

Аналогичным способом можно рассмотреть и случай, когда $M(x_3)\not\equiv 1$. Он является наиболее интересным, когда $M(0)=0$.

10. Задача с начальными данными на характеристическом конусе. Здесь и далее, пп. 10—12, рассматриваем уравнение (1) при $K=K(x_m)$ и матрица (a_{ij}) единичная. В п. 10 не будем предполагать, что $K\in C^2$. Пусть $K\in C^1[0, T]$ и для некоторых точек $t_i\in[0, T]$, $i=1,\dots,N$ выполнено: $K(t_i)=0$, $K\in C^2([0, T]\setminus[\cup_{i=1}^N t_i])$. В п. 10 будем предполагать, что

$$(M/K)^{1/2}\in L(0, T), \tag{68}$$

т. е. что каждая точка (x', x_m), $x_m>0$, имеет конечную область зависимости на плоскости $\{x_m=0\}$. В п. 11 рассмотрим случай, когда область зависимости является неограниченной. Рассмотрим некоторые примеры функции K, удовлетворяющие сформулированным условиям для произвольной функции $M\in C^1$.

Пример 10.1. $K(x_m)=|x_m-t_0|^\gamma$, $t_0\in[0, T]$, $1<\gamma<2$.

Пример 10.2. $K(x_m)=(x_m-t_0)^2\ln^4|x_m-t_0|$.

Рассмотрим характеристический конус

$$\Gamma_+ : \varrho=\int_{x_m}^{T}[M(t)/K(t)]^{1/2}dt,\quad x_m\geq 0,\quad \varrho=\sqrt{x_1^2+\dots+x_{m-1}^2}$$

и ограниченную область D, граница которой состоит из Γ_+ и из некоторой части $x_m=0$. Граничные условия (23) имеют вид

$$u=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_+. \tag{69}$$

Теорема 10.1. *Граничная задача* (1), (69) *имеет одно и только одно сильное решение для каждой функции* $f \in L_2(D)$. *При* $M(0)>0$ *слабое решение этой задачи является единственным.*

Доказательство. Последнее утверждение теоремы следует из сильной разрешимости задачи Коши с начальными данными на $x_m=0$ для всех функций $g \in L_2(D)$ (теорема 7.2). Сейчас докажем первое утверждение. Однако при этом мы не можем использовать теорему 2.1, так как функция K'' может быть неограниченной.

Пусть $f \in L_2(D)$. Из следствия 2.1 получаем: существует функция $u \in W^1$, для которой выполнено

(70) $$(u, L^*v)=(f, v)$$

для всех функций $v \in C^2(\bar{D})$, $v=0$ в окрестности $x_m=t_i$, $i=0, \dots, N$, где $t_0=0$. Так как $u \in W^1$, если определим

$$l(u, v)=\int_D[-\partial_m(Kv)\partial_m u+M(\partial_i v)\partial_i u-\sum_{i=1}^{m}\partial_i(a_i v)u+a_0 vu]dx,$$

из (70) получаем, что выполнено

(71) $$l(u, v)=(f, v)$$

для этих функций v. Пусть сейчас $v \in C^2(\bar{D})$, $v=0$ в окрестности $x_m=0$. Определим

$$v_n(x)=v(x)\prod_{i=1}^{N}\Phi(n(x_m-t_i)),$$

где функция $\Phi \in C^\infty(R^1)$, $\Phi(s)=0$ для $|s|\leq 1$, $\Phi(s)=1$ для $|s|\geq 2$. Тогда функция v_n удовлетворяет (71). Легко показать, что выполнены

(72) $$\|v_n-v\|\to 0, \quad \|\partial_i v_n-\partial_i v\|\to 0, \quad i=1, \dots, m-1,$$

(73) $$\|\partial_m[K(v_n-v)]\|\leq\|(\partial_m K)(v_n-v)\|+\|K\prod_{i=1}^{N}(\Phi-1)\partial_m v\|+\sum_{i=1}^{N}\|Kn\Phi' v\|\to 0,$$

так как $K(t_i)=0$, $i=1, \dots, N$. Вспоминая определение $l(u, v)$, из (72) и (73) получаем, что равенство (71) выполнено и для функции v.

Сейчас рассмотрим точки границы и укажем, в какую область D_1 из теоремы 6.1 можно отобразить их окрестности. Сначала заметим, что $\Gamma_+\cap\{x_m>0\}$ можно записать в виде $x_m=\psi(\varrho)$, где функция ψ локально удовлетворяет условию Липшица. Так как на Γ_+ не задаются сопряженных условий, для всех точек $\Gamma_+\cap\{x_m>0\}$ можно применить условие C1. Для внутренних точек $\bar{D}\cap\{x_m=0\}$ тоже можно применить C1. Остались точки $\Gamma_+\cap\{x_m=0\}$. Заметим, что угол пересечения может быть и нулевой. Например, для $M\equiv 1$ и функции K из примера 10.2 при $t_0=0$ функция ψ будет $\psi(\varrho)=\exp(\varrho-\varepsilon)^{-1}$, $\varepsilon>0$, так что поверхность Γ_+ имеет касание бесконечного порядка с плоскостью $x_m=0$. Введем цилиндрические координаты $x_m, \varrho, \theta_1, \dots, \theta_{m-2}$. Тогда окрестность произвольной точки $\Gamma_+\cap\{x_m=0\}$ переходит в

$$\{x_m\geq 0,\ l_i\leq\theta_i\leq n_i,\ \varrho\leq F(x_m)\},\quad F(x_m)=\int_{x_m}^{T}[M(t)/K(t)]^{1/2}dt.$$

Коэффициент $K(x_m)$ перед производной $\partial^2 u/\partial x_m \partial x_m$ зависит только от x_m. Функция F непрерывна и, следовательно, удовлетворяет условию (54) (см. замечание 6.2). Поэтому для таких точек выполнено условие С3 б). Таким образом показали, что все точки границы удовлетворяют условиям теоремы 6.1 о совпадении слабого и сильного решения.

Дальше наметим только путь доказательства. Используя разбиение единицы, можно считать, что носитель функции u содержится в достаточно малой окрестности внутренней точки D или точки границы, которая отображается в соответственную область D_1. В области D_1, в равенстве (71) для функции v поставим такое же усреднение, как в доказательстве совпадения слабого и сильного решения. Доказывается сходимость полученных выражений. Функция $u \in W_2^1$ будет сильным решением задачи. Теорема 10.1 доказана.

11. Бесконечная область зависимости. В пп. 11 и 12 для простоты предположим, что $K(x_m) > 0$ для $x_m > 0$. Предполагаем также, что выполнено

$$[M/K]^{1/2} \overline{\in} L(0, T), \tag{74}$$

т. е. область зависимости на плоскости $x_m = 0$ для каждой точки (x', x_m), $x_m > 0$, будет неограниченной. Напомним, что тот случай, когда (74) не выполнено, т. е. когда выполнено (68), рассмотрен в п. 10. Рассмотрим конусы

$$D_\lambda = \{x:\ 0 < x_m < T,\quad \lambda\varrho < \int_{x_m}^{T} [M(t)/K(t)]^{1/2} dt = \psi(x_m, T)\},$$

где λ — неотрицательный параметр. На $\Gamma_\lambda: \lambda\varrho = \psi(x_m, T)$ имеем

$$H = (1-\lambda^2) MK(M + \lambda^2 K)^{-1},$$

т. е. поверхность Γ_λ будет: пространственно-подобной ($H > 0$) при $\lambda < 1$, характеристической ($H = 0$) при $\lambda = 1$ и временного типа ($H < 0$) при $\lambda > 1$. Условия (23) принимают вид

$$\begin{aligned} &u = 0 && \text{на } \Gamma_\lambda \text{ для } \lambda \geq 1, \\ &u = 0, \quad \partial_m u = 0 && \text{на } \Gamma_\lambda \text{ для } \lambda < 1. \end{aligned} \tag{75}$$

При $\lambda \leq 1$ это примеры областей, для которых задача Коши (1), (56) разрешима (теорема 7.1). При $\lambda > 1$ это примеры областей, когда на поверхности временного типа задаются граничные и сопряженные граничные условия.

Теорема 11.1. *Задача* (1), (75) *имеет одно и только одно сильное решение* $u \in W_2^1(D_\lambda)$ *для каждой функции* $f \in L_2(D_\lambda)$.

Доказательство. При $H \geq 0$ на Γ_λ этот результат следует из теоремы 7.1. Рассмотрим случай $\lambda > 1$, когда $H < 0$ на Γ_λ. Для $f_0 \in L_2(D_\lambda)$ из теоремы 2.1 следует существование слабого решения $v \in W^1$. Заметим, что $\Gamma_\lambda \overline{\in} C^2$ в окрестности точки $(0, \ldots, 0, T)$. Так как на Γ_λ задаются граничные и сопряженные граничные условия, теорему 6.1 применить нельзя. Будем идти другим путем.

Рассмотрим фамилию областей

$$D_{\lambda\varepsilon} = \{x \in D_\lambda : \varrho < \psi(x_m, T - \varepsilon)\}, \quad 0 \leq \varepsilon < T.$$

Очевидно, $D_{\lambda 0}=D_\lambda$ и $\operatorname{mes}(D_\lambda \setminus D_{\lambda\varepsilon}) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для областей $D_{\lambda\varepsilon}$ условия (23) имеют вид

$$u=0 \quad \text{на} \quad \partial D_{\lambda\varepsilon} \setminus \{x_m=0\}, \tag{76}$$

Для областей $D_{\lambda\varepsilon}$ условия теоремы 2.1 выполнены. Следовательно, для функции $f_0\,{}_{D_{\lambda\varepsilon}}$ существует слабое решение $u_{\lambda\varepsilon} \in W_2^1(D_{\lambda\varepsilon})$, которое удовлетворяет условиям (76) в смысле теоремы 6.1. Однако для областей $D_{\lambda\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, условия теоремы 6.1 выполнены. Действительно, на $x_m=0$ применимо условие С1. Так как Γ_λ вне точки $(0, \ldots, 0, T)$ является дважды гладкой и нехарактеристической, для ее точек выполнено условие С2 а). В окрестности произвольной точки $x_0 \in \Gamma_\lambda \cap \{\varrho=\psi(x_m, T-\varepsilon)\}$ граница записывается в виде $\{x_m=\varphi(\varrho),\ \varrho=\psi(x_m, T-\varepsilon)\}$. Со стороны области этот угол будет ненулевым и меньше π. Следовательно, его можно отобразить в угле $\{y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0\}$ и применить условие С3 б). Таким образом функция $u_{\lambda\varepsilon}$ является сильным решением задачи (1), (76). Так как на $\Gamma_{\lambda\varepsilon} \setminus \Gamma_\lambda$ не задаются сопряженных граничных условий, аппроксимирующие $u_{\lambda\varepsilon}$ функции $u^n_{\lambda\varepsilon}$ обращаются в нуль в окрестности $\Gamma_{\lambda\varepsilon} \setminus \Gamma_\lambda$. Если их продолжим по формуле $\tilde{u}_{\lambda\varepsilon}=0$ в $D_\lambda \setminus D_{\lambda\varepsilon}$, будет выполнено $\tilde{u}^n_{\lambda\varepsilon} \in C^2(\bar{D}_\lambda)$ и функции $\tilde{u}^n_{\lambda\varepsilon}$ удовлетворяют условию (75). Так как

$$\| L\tilde{u}^n_{\lambda\varepsilon} - f_0 \|_{L_2(D_\lambda)} \leqq \| Lu^n_{\lambda\varepsilon} - f_0 \|_{L_2(D_{\lambda\varepsilon})} + \| f \|_{L_2(D_\lambda \setminus D_{\lambda\varepsilon})} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$ и $n=n(\varepsilon) \to \infty$, из оценки (22) следует существование сильного решения задачи (1), (75). Теорема 11.1 доказана.

Очевидно и здесь можно, как в п. 10, исследовать тот случай, когда $K(t_i)=0$ для $t_i \in [0, T)$ и $K \in C^2(\bar{D})$.

12. Многомерный аналог задачи Гурса. Пусть $(M/K)^{1/2} \in L(0, T)$ и $m \geqq 3$. Обозначим

$$\psi(t)=\int_0^t [M(t)/K(t)]^{1/2}dt, \quad t>0; \qquad R_0=\lim_{t\to\infty} \psi(t) \leqq \infty.$$

Для $R<R_0$ рассмотрим область D, ограниченная плоскостью $S_0: x_m=0$ и характеристическими поверхностями $S_1: \varrho=\psi(x_m)$, $0 \leqq x_m \leqq d$ и $S_2: \varrho=2R-\psi(x_m)$, $0 \leqq x_m \leqq d$. Через d обозначили решение уравнения $\psi(d)=R$. Условия (23) здесь будут

$$u=0 \quad \text{на} \quad S_1 \cup S_2. \tag{77}$$

Задача (1), (77) является одним из многомерных аналогов задачи Гурса, когда данные задаются на двух пересекающихся характеристических конусах.

Теорема 12.1. *Для каждой функции $f \in L_2(D)$ граничная задача (1), (77) имеет одно и только одно сильное решение $u \in W_2^1(D)$. Если $M(0)>0$, слабое решение этой задачи единственно.*

Доказательство этой теоремы является аналогичным доказательства теоремы 2 [26].

Сохраняя обозначения теоремы 2.1, определяем функцию $\varphi_+(x')$ следующим образом: $\varphi_+(x')=\psi^{-1}(\varrho)$, $\varrho \leqq R$; $\varphi_+(x')=\psi^{-1}(R-\varrho)$, $R \leqq \varrho \leqq 2R$. Тогда имеем $D=\{\varrho<2R,\ 0<x_m<\varphi_+(x')\}$. Заметим, что на S_2 имеем $d\varrho/dx_m$

$=-\sqrt{M/K}\to 0$, при $x_m\to 0$, если $M(0)=0$ и $K(0)>0$. Следовательно, первые производные функции $\varphi_+(x')$ будут неограниченными при $\varrho\to 2R$, где $\varphi_+(x')=0$.

Замечание 12.1. Легко видно, что при $\varrho=R$ у первых производных функций $\varphi_+(x')$ происходит разрыв первого рода. Пусть v_0 такая функция из $C^2(\bar{D})$, что $v_0=0$ в некоторой окрестности $x_m=0$ и $v_0=1$ в некоторой окрестности $S_1\cap S_2$. Тогда функция v_0 удовлетворяет сопряженным граничным условиям, однако очевидно, что $(\partial_i\varphi_+)v_0(x', \varphi_+(x'))\bar{\in} W_2^1(D)$. Следовательно, в доказательстве теоремы 2.1 функцию v_0 надо аппроксимировать функциями v_k, $v_k=0$ в окрестности $S_1\cap S_2$. Заметим, что размерность $S_1\cap S_2$ равняется $(m-2)$. Следовательно, нет таких функций v_k, сходящихся по норме $W_2^2(D)$ к выбранной функции v_0 (из теорем вложения следовало бы, что $v_0=0$ на $S_1\cap S_2$).

Замечание при корректуре. Сформулированная в настоящей работе теорема 6.1 о совпадении слабых и сильных решений уже вполне доказана в работах Н. Г. Сорокиной [21; 22] и автора [26; 30—34]. Локальные результаты о совпадении доказаны соответственно: случай С1 [22; 26], С2 а) [21; 32]. С2 б) [32], С3 а) [32], С3 б) [22; 26; 32], С4 [33], С5 [26; 32; 33]. Случай, когда область является неограниченной и для ее границы выполнены локальные условия о совпадении слабых и сильных решений, рассмотрен в [30].

Продолжениями настоящей работы являются [34; 35].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Врагов. О задаче Коши для некоторых параболо-гиперболических уравнений. *Доклады АН СССР*, **212**, 1973, 536—539.
2. В. Н. Врагов. О смешанной задаче для одного класса гиперболо-параболических уравнений. *Доклады АН СССР*, **224**, 1975, 273—276.
3. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, II. Москва, 1964.
4. С. Л. Соболев. Некоторые новые задачи теории уравнений в частных производных гиперболического типа. *Мат. сб.*, **11**, 1942, 155—200.
5. В. Н. Врагов. О задачах Гурса и Дарбу для одного класса гиперболических уравнений, *Дифф. уравн.*, **8**, 1972, 7—16.
6. F. Cagnas. Problem de Cauchy sur un conoide caracteristique. *Ann. Mat. Pura Appl. ser. 4a*, **104**, 1975, 355—393.
7. J. B. Diaz. E. C. Young. On the Characteristic initial value problem for the wave equation in odd spatial dimensions with radial initial data. *Ann. Mat. Pura Appl.*, **94**, 1972, 161—176.
8. M. H. Proter. New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type. *J. Math. Mech.*, **3**, 1954, 435—446.
9. Tong Kwang-chang. On a boundary value problem for the wave equation. *Sci. Rec. Acad. Sinica*, **1**, 1957, 1—3.
10. Wang Guang-Ying. The Goursat problem in space. *Sci. Rec. Acad. Sinica*, **1**, 1957, 7—10.
11. В. Ли. О пространственных задачах Коши — Гурса. Труды III Казахст. межвуз. науч. конф. мат. мех., 1967. Алма-Ата. 1970, 65—67.
12. А. В. Бицадзе. Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях. *Доклады АН СССР*, **143**, 1962, 1017—1019.
13. А. М. Нахушев. Многомерный аналог задачи Дарбу для гиперболических уравнений. *Доклады АН СССР*, **194**, 1970, 31—34.
14. А. М. Нахушев, В. И. Пашковский. О задаче А. В. Бицадзе для уравнения смешанного типа в многомерных областях. *Дифф. уравн.*, **7**, 1971, 55—63.

15. А. В. Бицадзе, А. М. Нахушев. К теории вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях. *Доклады АН СССР*, **204**, 1972, 1289—1291.
16. Г. Д. Каратопраклиев. Существование слабых решений одной краевой задачи для уравнения смешанного типа в многомерных областях. *Доклады АН СССР*, **193**, 1970, 1226—1230.
17. Г. Д. Каратопраклиев. Об уравнениях смешанного типа и вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях. *Дифф. уравн.*, **8**, 1972, 55—67.
18. Г. Д. Каратопраклиев. К теории уравнений смешанного типа и вырождающихся гиперболических уравнений. Докторская диссертация, Москва, 1972.
19. Г. Д. Каратопраклиев. Об одном классе уравнений смешанного типа в многомерных областях. *Доклады АН СССР*, **230**, 1976, 769—772.
20. В. П. Диденко. О краевых задачах для многомерных гиперболических уравнений с вырождением. *Доклады АН СССР*, **205**, 1972, 763—766.
21. Н. Г. Сорокина. О сильной разрешимости задачи Трикоми. *Укр. мат. ж.*, **18**, 1966, 65—77.
22. Н. Г. Сорокина. Сильная разрешимость граничной задачи для уравнения смешанного типа в многомерных областях, *Укр. мат. ж.*, **26**, 1974, 115—123.
23. K. O. Friedrichs. Symmetric positive linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, **11**, 1958, 333—418.
24. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
25. Н. И. Попиванов. О краевых задачах для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. *Дифф. уравн.*, **11**, 1975, 116—126.
26. Н. И. Попиванов. Об одном классе вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. *Годишник Соф. унив., Фак. мат. мех.*, **67**, 1972/73, 451—470.
27. Н. И. Попиванов. Краевые задачи для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. *Балканский мат. конгресс, Тезисы.* Белград, 1974, 228.
28. Н. И. Попиванов. Гранични задачи за уравнения от смесен тип и израждащи се хиперболични уравнения. Диссертация, София, 1975.
29. Н. И. Попиванов. Краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя линиями параболического вырождения. *Сердика*, **1**, 1975, 295—310.
30. Н. И. Попиванов. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в неограниченных областях II. *Дифф. уравн.*, **14**, 1978, 665—679.
31. Н. И. Попиванов. Совпадение слабого и сильного решений краевых задач для линейных систем первого порядка. *Сердика*, **1**, 1975, 121—133.
32. Н. И. Попиванов. Многомерный аналог задачи Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений. *Дифф. уравн.*, 14, 1978, 80—93.
33. Н. И. Попиванов. Многомерные аналоги задач Трикоми и Франкля. Математика и математ. образование. Доклади на Осма конференция на СМБ, 1979, София, 1979, 472—486.
34. Н. И. Попиванов. Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений в многомерных областях. (Математика и математ. образование. Доклади на Седма конференция на СМБ, 1978), София, 1978, 438—448.
35. Н. И. Попиванов. Некоторые краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений в многомерных областях. *Доклады АН СССР*, **243**, 1978, 584—587.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 7. 3. 1977