PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

О НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ЗАВИСИМОСТЯХ МЕЖДУ ГОЛОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

НЕДЕЛЧО В. МИЛЕВ

Доказано, что для двух сходящихся степенных рядов понятия функциональной зависимости, формально-аналитической зависимости, аналитической зависимости и целой зависимости эквивалентны. Указано и достаточное условие для того, чтобы три и больше трех голоморфных функций были аналитически зависимыми. Получены и ряды Бюрмана многих комплексных переменных.

Введение. Функциональная, формально-аналитическая, аналитическая и целая зависимости для голоморфных функций имеют разную природу, и их взаимная связь достаточно комплицирована. Три и больше голоморфных функций могут быть функционально зависимыми и одновременно не быть формально-аналитически зависимыми. Есть и аналитически зависимые функции, между которыми нет целой зависимости (см. п. 1). Вопрос об эквивалентности формально-аналитической и аналитической зависимостей совпадает с известной гипотезой Абьянкара [1; 2; 3]. В [1] Абьянкар и М. Ван дер Пут доказывают аналогичную гипотезу для K-аналитических колец с $\dim\leqq 2$.

В п. 1 показано, что для двух голоморфных функций верхние четыре вида зависимостей эквивалентны между собой. Эта эквивалентность содержит гипотезу Абьянкара для двух голоморфных функций. Для четырех голоморфных функций имеется отрицательный результат Габриэлова [7].

В п. 2 дано достаточное условие для аналитической зависимости трех и больше функций.

В п. 3 получены ряды Бюрмана многих комплексных переменных. Указано и другое доказательство гипотезы Абьянкара для двух голоморфных функций.

Я признателен С. Димиеву за его многочисленные советы и полезные обсуждения.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел;

$\mathbf{C}[[x_1,\ldots,x_n]]$ — локальное кольцо формальных степенных рядов с коэффициентами из поля $\mathbf{C}$;

$\mathbf{C}[\langle x_1,\ldots,x_n\rangle]$ — локальное кольцо сходящихся степенных рядов в окрестности нуля с коэффициентами из поля $\mathbf{C}$;

$\mathbf{C}_*[[x_1,\ldots,x_n]]$ и $\mathbf{C}_*[\langle x_1,\ldots,x_n\rangle]$ — соответствующие им максимальные идеалы, т. е. степенные ряды без свободного члена;

$H_{n,m}(\mathbf{C})=\{f=(f_1,\ldots,f_m)\mid f_i\in\mathbf{C}_*[\langle x_1,\ldots,x_n\rangle],\ 1\leqq i\leqq m\}$ — голоморфные отображения в окрестности нуля, для которых $f(0)=0$;

$J\{f\}$ — матрица Якоби голоморфного отображения f;

$H_n(\mathbf{C})=\{f\ f\in H_{n,n}(\mathbf{C}),\ \det J\{f\}(0)\neq 0\}$ — группа локальных биголоморфных отображений в окрестности нуля;

$O(D)$ — алгебра голоморфных функций в области $D\subset\mathbf{C}^n$.

Для облегчения изложения, там, где нет опасности двусмыслия, $(f_1,\ldots,f_m)$ будем обозначать через f, $(x_1,\ldots,x_n)$ — через x и $(a_1,\ldots,a_n)$ — через a.

1. Функциональная, формально-аналитическая, аналитическая и целая зависимости. Сначала отметим основные понятия и утверждения, которые встречаются в одной или другой форме, но не особенно популярны.

Определение 1.1 (см. [6, 1. 4. 12]). *Голоморфные функции $f_1,\ldots,f_n\in O(D)$ называются функционально зависимыми на подмножестве $S\subset D$, если существует открытое множество $U\supset f(S)$ и бесконечно $\mathbf{R}$-гладкая функция g в U, такая, что $g^{-1}(0)$ нигде не плотно в U и $g(f(x))=0$ для всех $x\in S$.*

С понятием функциональной зависимости естественно связывается глобальный ранг в области D соответствующей матрицы Якоби, который определим так:

$\operatorname{Rang} J\{f\}(D)=k$, *если каждый минор порядка $k+1$ тождественно равен нулю в области D и существует минор порядка k, который не равняется тождественно нулю в D. Надо отметить, что если U — подобласть в D, то* $\operatorname{Rang} J\{f\}(u)=\operatorname{Rang} J\{f\}(D)$.

Теорема 1.2 (см. [6, теорема 1.4.14]). *Если* $\operatorname{Rang} J\{f\}(D)<m$, *то $f_1,\ldots,f_m$ функционально зависимы на каждом компактном подмножестве $S\subset D$. Если* $\operatorname{Rang} J\{f\}(D)=m$, *то $f_1,\ldots,f_m$ функционально независимы в окрестности каждой точки из D.*

Следствие 1.3. *Любые $n+1$ голоморфные функции n переменных функционально зависимы.*

Надо отметить, что если голоморфные функции функционально зависимы в окрестности одной точки из D, то они функционально зависимы в окрестности каждой точки из D, а для бесконечно $\mathbf{R}$-гладких функций возможно, чтобы в окрестности одной точки существовала функциональная зависимость, а в окрестности другой — функциональная независимость.

В дальнейшем, говоря о функциональной зависимости, мы будем иметь ввиду функциональную зависимость в окрестности нуля, а также, говоря о голоморфных функциях g, мы будем иметь в виду локально голоморфные функции в окрестности нуля.

Определение 1.4. *Голоморфные функции $f_1,\ldots,f_m\in\mathbf{C}_*[\langle x_1,\ldots,x_n\rangle]$ называются формально-аналитически зависимыми, если существует формальный степенной ряд $F\in\mathbf{C}_*[[x_1,\ldots,x_m]]\setminus\{0\}$, так что $F(f_1,\ldots,f_m)=\mathbf{0}$.*

Определение 1.5. *Голоморфные функции $f_1,\ldots,f_m\in\mathbf{C}_*[\langle x_1,\ldots,x_n\rangle]$ называются аналитически зависимыми, если существует голоморфная функция $F\in\mathbf{C}_*[\langle x_1,\ldots,x_m\rangle]$, $F\not\equiv 0$, так что $F(f_1,\ldots,f_m)\equiv 0$ в окрестности нуля.*

Обозначим через $B(f)$ кольцо $\{b(f)\mid b\in\mathbf{C}^*[\langle x_1,\ldots,x_m\rangle]\}$. $B(f)$ имеет и структуру алгебры над $\mathbf{C}$.

Определение 1.6. *Голоморфную функцию $g\in\mathbf{C}_*[\langle x_1,\ldots,x_n\rangle]$ будем называть целой над $f_1,\ldots,f_m$, если g целая над кольцом $B(f)$ или другими словами, если существует многочлен Вейерщрасса $P(u,v)=v^k+a_1(u)v^{k-1}+\cdots+a_k(u)$, такой, что $P(f,g)\equiv 0$ в некоторой окрестности начала.*

Без уточнения, будем говорить, что между $f_1, \ldots, f_m$ существует целая зависимость, если одна из них целая над остальными.

Предложение 1.7 *Для голоморфных функций* $f_1, \ldots, f_m \in \mathbf{C}_*[\langle x_1, \ldots, x_n \rangle]$ *имеют место следующие импликации: целая зависимость* $\Rightarrow$ *аналитическая зависимость* $\Rightarrow$ *формально-аналитическая зависимость* $\Rightarrow$ *функциональная зависимость.*

Доказательство. Первые две импликации очевидны. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ формально-аналитически зависимы. Допустим, что $f_1, \ldots, f_m$ функционально независимы. Из теоремы 1.2 $\operatorname{Rang} J\{f\} = m$ и без ограничения общности можем предполагать, что $\Delta = \det(\partial f_i / \partial z_j) \neq 0$ в окрестности начала, $1 \leq i, j \leq m$. Дифференцируем формально равенство $F(f) = \mathbf{0}$ относительно $z_1, \ldots, z_m$, откуда получаем, что $\partial F / \partial u_i \,.\, \Delta = \mathbf{0}$, $1 \leq i \leq m$. Но кольцо формальных степенных рядов — область целостности, т. е. $\partial F / \partial u_i (f_1, \ldots, f_m) = \mathbf{0}$. Дифференцируя последние равенства, получаем, что и производные высших порядков равны $\mathbf{0}$, откуда следует, что и $F = \mathbf{0}$, а это противоречит допущению формально-аналитической зависимости между $f_1, \ldots, f_m$.

Для двух голоморфных функций справедливы и обратные импликации, но для доказательства этого нам необходимы некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1.8. *Пусть* $p \in H_n(\mathbf{C})$, *а* $q \in H_m(\mathbf{C})$. *Если* $f_1, \ldots, f_m$ *функционально (формально-аналитически или аналитически) зависимы, то и компоненты* $q \circ f \circ p$ — *функционально (формально-аналитически или аналитически) зависимы.*

Доказательство. Утверждение для функциональной зависимости следует из того, что $\det J\{q\}(0) \neq 0$, $\det J\{p\}(0) \neq 0$ и из теоремы 1. 2. Пусть теперь $f_1, \ldots, f_m$ — формально-аналитически зависимы, т. е. существует $F \in \mathbf{C}_*[[x_1, \ldots, x_m]] \setminus \{\mathbf{0}\}$, так что $F \circ f = \mathbf{0}$. Тогда $(F \circ q^{-1}) \circ q_0 f \circ p = \mathbf{0} \circ p = \mathbf{0}$, но $F \circ q^{-1} \in \mathbf{C}_*[[x_1, \ldots, x_m]] \setminus \{0\}$, т. е. компоненты $q \circ f \circ p$ — формально-аналитически зависимы.

Аналогично и для аналитически зависимых.

Из леммы 1.8 видно, что если компоненты f функционально (формально-аналитически или аналитически) зависимы, то и между компонентами любого элемента орбиты f, порожденной действием групп $H_m(\mathbf{C})$ и $H_n(\mathbf{C})$, есть такая же зависимость.

Лемма 1.9. *Если между* $f_1, \ldots, f_m$ *существует целая зависимость, то и между* $f_1 \circ p, \ldots, f_m \circ p$ *существует такая же. Если* $f_1, \ldots, f_m$ *аналитически зависимы, то существует обратимая линейная трансформация* l, *так что между компонентами* $l \circ f$ *есть целая зависимость.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно, а второе следует из подготовительной теоремы Вейерщрасса.

Лемма 1.10. *Пусть* $h(u_1, \ldots, u_m, v) \in \mathbf{C}_*[\langle u_1, \ldots, u_m, v \rangle]$. *Если голоморфная функция* z *целая над* $f_1, \ldots, f_m$, *то и* $h(f, z)$ — *целая над* f.

Доказательство. Пусть $h(u, v) = \Sigma_{\alpha, n} c_{\alpha, n} u^\alpha v^n$. Так как и λz целая над $f\,(\lambda \in \mathbf{C})$, то можно варьировать v и без ограничения общности предположить, что ряд абсолютно сходится в точке $(u_0, 1)$. Перегруппируя, запишем h в виде $h(u, v) = \Sigma\, c_n(u) v^n$. Тогда в поликруге $W = \{(u, v) \mid |u| \leq |u_0|, |v| \leq 1\}$, $|c_n(u)| < \gamma_n$ и мажорирующий ряд $\Sigma_n \gamma_n$ — абсолютно сходящийся степенной ряд.

Пусть $z^k = a_1(f) + a_2(f)z + \cdots + a_k(f)z^{k-1}$, где $a_i(u) \in \mathbf{C}_*[\langle u_1, \ldots, u_m\rangle]$, $1 \leq i \leq m$. Определим голоморфные функции $A_{i,n}(u)$, $1 \leq i \leq k$, $k \leq n$, рекуррентными формулами: $A_{i,k}(u) = a_i(u)$; $A_{1,n+1}(u) = A_{k,n}(u)a_1(u)$, $A_{i,n+1}(u) = A_{k,n}(u)a_i(u) + A_{i-1\,n}(u)$, $2 \leq i \leq k$. Тогда $z^n = A_{1,n}(f) + A_{2,n}(f)z + \cdots + A_{k,n}(f)z^{k-1}$, $n \geq k$. Из $a_i(0) = 0$, в достаточно малой окрестности U начала, можно предполагать, что $|a_i(u)| \leq 1/k$. Покажем индуктивно, что в U имеем $|A_{i,n}(u)| \leq i/k$. Достаточно проверить:

$$|A_{1,n+1}(u)| \leq |A_{kn}(u)|\,|a_1(u)| \leq \frac{k}{k}\,\frac{1}{k} = \frac{1}{k},$$

$$|A_{i,n+1}(u)| \leq |A_{kn}(u)|\,|a_i(u)| + |A_{i-1,n}(u)| \leq \frac{k}{k}\,\frac{1}{k} + \frac{i-1}{k} = \frac{i}{k}.$$

Ряды $A_i(u) = c_{i-1}(u) + \Sigma_{n=k}^{\infty} c_n(u)A_{in}(u)$, $1 \leq i \leq k$, определяют голоморфные функции в $W \cap V$, потому что их члены голоморфные функции и мажорируются сходящимся числовым рядом:

$$|A_i(u)| \leq |c_{i-1}(u)| + \Sigma_{n=k}^{\infty} |c_n(u)|\,|A_{in}(u)| \leq \gamma_{i-1} + \Sigma_{n=k}^{\infty} \gamma_n.$$

Тогда $h(f, z) = A_1(f) + A_2(f)z + \cdots + A_k(f)z^{k-1}$ и из того, что z целая над f следует, что и $A_1(f) + A_2(f)z + \ldots + A_k(f)z^{k-1}$ целая над f.

Следствие 1.11. *Пусть $h(u, v_1, \ldots, v_s) \in \mathbf{C}_*[\langle u, v_1, \ldots, v_s\rangle]$. Если $z_1, \ldots, z_s$ целые над f, то и $h(f, z_1, \ldots, z_s)$ — целая над f.*

Утверждение следует из транзитивности целой зависимости: $h(f, z_1, \ldots, z_s)$ целая над $B(f, z_1, \ldots, z_{s-1})$, который целый над $B(f, z_1, \ldots, z_{s-2}), \ldots$, который целый над $B(f)$.

Теперь мы докажем, что для голоморфных функций одной переменной четыре определения для функциональной, формально-аналитической, аналитической и целой зависимости эквивалентны. Имея в виду предложение 1.7 и следствие 1.3, достаточно доказать, дто между любыми двумя голоморфными функциями одной переменной есть целая зависимость.

Предложение 1.12. *Пусть f_1 и $f_2 \in \mathbf{C}_*[\langle x_1\rangle]$. Тогда между f_1 и f_2 существует целая зависимость.*

Доказательство. Можно предполагать, что $f_1 \not\equiv 0$. Тогда $F(u, v) = f_1(u) - v$ осуществляет аналитичную зависимость между x и f_1. Принимая во внимание лемму 1.9 и то, что $F(u, 0) = f_1(u) \not\equiv 0$, получаем, что x — целая над $f_1(x)$. Следовательно, и $f_2(x)$ — целая над $f_1(x)$ (лемма 1.10).

Пусть $f_1, \ldots, f_m \in \mathbf{C}_*[\langle x_1, \ldots, x_n\rangle]$. Гипотеза Абьянкара утверждает, что если $f_1, \ldots, f_m$ формально-аналитически зависимы, то они и аналитически зависимы. Здесь отметим одну лемму, которая утверждает, что гипотеза Абьянкара эквивалентна гипотезе Абьянкара для голоморфных функций двух переменных.

Известно (Осгуд), что существует бесконечное множество сходящихся степенных рядов даже двух переменных, которые формально-аналитически независимы (см. также и [5, гл. 7., стр. 256]).

Лемма 1.13. *Пусть $p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{C}_*[\langle x_1, x_2\rangle]$ формално-аналитически независимы. Если $f_1, \ldots, f_m \in \mathbf{C}_*[\langle x_1, \ldots, x_n\rangle]$ формально-аналитически (аналитически) зависимы, то и компоненты $f \circ p$ — формально-аналитически (аналитически) зависимы и наоборот.*

Доказательство. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ формально-аналитически зависимы, т. е. существует $F \in \mathbf{C}_*[[x_1, \ldots, x_n]] \setminus \{0\}$, так что $F \circ f = \mathbf{0}$. Но тогда и

$F\circ(f\circ p)=0\circ p=0$, т. е. и компоненты $f\circ p$ формально-аналитически зависимы. Наоборот, пусть $f_1\circ p,\ldots,f_m\circ p$ формально-аналитически зависимы, т. е. существует $F\in \mathbf{C}_*[\langle x_1,\ldots,x_m\rangle]\diagdown\{0\}$, так что $F\circ f\circ p=0$. Но компоненты p формално-аналитически независимы, следовательно, $F\circ f=0$.

Аналогично протекает доказательство и для случая, когда $f_1,\ldots,f_m$ аналитически зависимы, с той разницей, что вместо равенства между формальными рядами имеем тождества в окрестности нуля.

Теперь мы докажем, что для двух голоморфных функций f_1 и f_2 четыре определения для функциональной, формально-аналитической, аналитической и целой зависимости эквивалентны. Для этого достаточно доказать, что если f_1 и f_2 функционально зависимы, то между ними существует и целая зависимость.

Для более двух функций это утверждение неверно. Существуют три голоморфные функции, например, x, xy, xe^y, которые функционально зависимы, но не формально-аналитически зависимы (см. [5, гл. 7, стр. 256]). Так же три функции могут быть аналитически зависимы, но при условии, чтобы между ними не было целой зависимости. Например, $u=xy$, $v=x(x+y)$, $w=(x+y)y$. Они аналитически зависимы, потому что $F(u,v,w)=u(v+w)-vw$ осуществляет эту зависимость. Но если допустим, что $w=(x+y)y$ целая над $u=xy$ и $v=x(x+y)$, т. е. существует полином Вейерштрасса относительно w, $P(u,v,w)=w^k+a_1(u,v)w^{k-1}+\cdots+a_k(u,v)$, так что $P(xy,x(x+y),(x+y)y)\equiv 0$, получаем, что x должно делить $[(x+y)y]^k$, что невозможно. Аналогично рассуждаем и относительно u или v.

Теорема 1.14. *Пусть $f_1,f_2\in \mathbf{C}_*[\langle x_1,\ldots,x_n\rangle]$. Если f_1 и f_2 функционально зависимы, то между ними существует и целая зависимость.*

Доказательство. Эвентуально после применения справа обратимой линейной трансформации можно предполагать, что $f_1(x_1,0,\ldots,0)\not\equiv 0$. Голоморфная $F(u_1,\ldots,u_n,v)=f_1(u_1,\ldots,u_n)-v$ осуществляет аналитическую зависимость между $x_1,\ldots,x_n$ и f_1. Так как $F(u_1,0,\ldots,0)=f_1(u_1,0,\ldots,0)\not\equiv 0$, из леммы 1.9 следует, что x_1 целый над $f_1,x_2,\ldots,x_n$, а из леммы 1.10 получаем, что и f_2 целая над $f_1,x_2,\ldots,x_n$. Пусть $G(v_1,v_2,u_2,\ldots,u_n)$ осуществляет эту зависимость, $G(0,v_2,0,\ldots,0)\not\equiv 0$. Дифференцируем $G(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_n)\equiv$ относительно x_1 и x_n:

$$\frac{\partial G}{\partial v_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial G}{\partial v_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\equiv 0,\quad \frac{\partial G}{\partial v_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_n}+\frac{\partial G}{\partial v_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_n}+\frac{\partial G}{\partial u_n}1\equiv 0.$$

Используя то, что f_1 и f_2 функционально зависимы, в частности, что $\det(\partial f_i/\partial x_j)\equiv 0$ $(i=1,2,\ j=1,n)$, получаем $\partial G/\partial u_n\,.\,\partial f_1/\partial x_1\equiv 0$. Но $\partial f_1/\partial x_1\not\equiv 0$, потому что $f_1(x_1,0,\ldots,0)\not\equiv 0$. Следовательно, $\partial G/\partial u_n(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_n)\equiv 0$. Аналогично и для производных высшего порядка относительно u_n.

Развиваем G по степеням u_n и подставляем: $0\equiv G(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_n)=a_0(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_{n-1})+a_1(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_{n-1})\,.\,x_n+\cdots+a_k(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_{n-1})x_n^k+\ldots$ Допустим, что $a_0(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_{n-1})\not\equiv 0$. Тогда существует степень x_n^k, которая не делит $a_0(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_{n-1})$. Но из $\partial^{k-1}G/\partial u_n^{k-1}(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_{n-1})\equiv 0$ получаем, что x_n делит $a_{k-1}(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_{n-1})$; из $\partial^{k-2}G/\partial u_n^{k-2}(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_{n-1})\equiv 0$ получаем, что x_n^2 делит $a_{k-2}(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_{n-1}),\ldots,$ x_n^k делит $a_0(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_{n-1})$, т. е. $a_0(f_1,f_2,x_2,\ldots,x_{n-1})\equiv 0$. Применяя верхнюю процедуру последовательно для $x_{n-1},\ldots,x_2$, получаем, что $G(f_1,f_2,0,\ldots,0)\equiv 0$. Из $G(0,v_2,0,\ldots,0)\not\equiv 0$ получаем, что f_2 — целая над f_1.

2. Достаточное условие для аналитической зависимости. В этом параграфе докажем утверждение, что любые три функции двух переменных, у которых нет общего делителя, аналитически зависимы. Это предложение справедливо и для $n+1$ функций n переменных. Здесь под делителем $d(x, y)$ понимаем степенной ряд, который не ассоциирован с единицей, т. е. $d(0, 0)=0$.

Пусть $f_1, \ldots, f_m \in \mathbf{C}_*[\langle x, y\rangle]$. Можно предполагать, что f — голоморфное отображение в окрестности U начала. Обозначим через $K\{f\}=\{(x, y) \mid (x, y) \in U$ и $f(x, y)=0\}$ множество нулей f.

Лемма 2.1. *Если у $f_1(x, y), \ldots, f_m(x, y)$ общий делитель, то* $(0, 0)$ *не изолированная точка для $K\{f\}$ и наоборот.*

Доказательство. Если у $f_1, \ldots, f_m$ общий делитель, то очевидно $(0, 0)$ не изолированная точка для $K\{f\}$. Обратное утверждение доказываем индуктивно. Пусть $(0, 0)$ не изолированная точка для $K\{f_1, f_2\}$. Эвентуально после применения справа обратимой линейной трансформации подготвительная теорема Вейерштрасса дает нам представления: $f_1=g_1 h_1$ и $f_2=g_2 h_2$, где g и g_2 — полиномы Вейерштрасса относительно y, а $h_1(0, 0) \neq 0$ и $h_2(0, 0) \neq 0$. Тогда в достаточно малой окрестности нуля $h_1 \neq 0$ и $h_2 \neq 0$, т. е. $f_1(x, y)=0 \Longleftrightarrow g_1(x, y)=0$ и $f_2(x, y)=0 \Longleftrightarrow g_2(x, y)=0$, т. е. $(0, 0)$ — не изолированная точка $K\{g_1, g_2\}$, причем $(0, 0)$ — изолированная точка для $K\{g_1(0, y), g_2(0, y)\}$, потому что $g_1(0, y) \not\equiv 0$ и $g_2(0, y) \not\equiv 0$. Допустим, что f_1 и f_2 не имеют общего делителя, тогда и g_1 и g_2 не будут иметь общего делителя. Но в этом случае существуют голоморфные функции $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ и $\gamma(x) \not\equiv 0$ такие, что $\alpha g_1+\beta g_2=\gamma(x)$, и оказывается, что 0 не изолированная точка для $K\{\gamma\}$, т. е. $\gamma(x) \equiv 0$; получаем противоречие.

Пусть $(0, 0)$ не является изолированной точкой для $K\{f_1, \ldots, f_m\}$. Тогда $(0, 0)$ не будет изолированной точкой и для $K\{f_1, \ldots, f_{m-1}\}$ и пусть $f_1, \ldots, f_{m-1}$ имеют наибольший общий делитель d. Так как $(0, 0)$ не будет изолированной точкой для $K\{d, f_m\}$, то d и f_m будут иметь общий делитель.

Замечание 2.2. Возможно, чтобы у $f_1, \ldots, f_m$ не было общего делителя, но любые две из них имели бы общий делитель. При помощи применения слева обратимой линейной трансформации этот случай приводит к случаю, когда две из них не имеют общего делителя. Покажем это индуктивно. Обозначим через $\langle f_1, \ldots, f_m\rangle$ наибольший общий делитель (с точностью до ассоциированного) $f_1, \ldots, f_m$. Пусть $\langle f_1, f_2, f_3\rangle=1$, но $\langle f_1, f_2\rangle=p$. Тогда $\langle p, f_3\rangle=1$. Но $\langle f_1+\lambda_1 f_2, f_1+\lambda_2 f_2\rangle=p$ для разных постоянных λ_1 и λ_2. Тогда допустим, что для любого λ $\langle f_1+\lambda f_2, f_3\rangle=r_\lambda$, r_λ — не ассоциированный с единицей. Но $\langle r_\lambda, p\rangle=1$, т. е. $\langle r_{\lambda_1}, r_{\lambda_2}\rangle=1$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, т. е. f_3 имеет бесконечно много различных делителей r_λ. В самом деле счет различных делителей f_3 не превосходит порядка f_3. Пусть $\langle f_1, \ldots, f_m\rangle=1$, но $\langle f_1, \ldots, f_{m-1}\rangle=p$. Тогда $\langle f_m, p\rangle=1$. Пусть $f_i=p g_i$, $1 \leq i \leq m-1$. Тогда $\langle g_1, \ldots, g_{m-1}\rangle=1$ и существует обратимая линейная трансформация, примененная слева (в силу индуктивного предположения), так что $\langle g_1^*, g_2^*\rangle=1$, где g_1^* и g_2^* две из линейных комбинаций $g_1, g_2, \ldots, g_{m-1}$. Но $\langle p g_1^*, p g_2^*, f_m\rangle=1$ и применяем доказанное утверждение для трех функций.

Теорема 2.3. *Если $f_1, \ldots, f_m \in \mathbf{C}_*[\langle x, y\rangle]$ и у них нет общего делителя, то они аналитически зависимы.*

Доказательство. Можно предполагать, что $(0, 0)$ — изолированная точка для $K\{f_1, f_2\}$. Если это не выполнено, имея в виду лемму 1.8 и замечание 2.2, можно применить слева обратимую линейную трансформацию и получим, что $(0, 0)$ — изолированная точка для $K\{f_1, f_2\}$.

Если якобиян $\det J\{f_1, f_2\}(0, 0) \neq 0$, тогда отображение локально биголоморфно, т. е. существуют φ и $\psi \in \mathbf{C}_*[\langle u, v\rangle]$, так что: $x = \varphi(f, g)$ и $y = \psi(f, g)$. Если якобиян $\det J\{f_1, f_2\}(0, 0) = 0$, в силу того, что $(0, 0)$ — изолированная точка для $K\{f_1, f_2\}$, то для отображения (f_1, f_2) можно применить теорему Осгуда (см. [4, гл. V, т. 49, теорема 3]). Эвентуально после применения справа обратимой линейной трансформации (эту трансформацию применяем и к $f_3, \ldots, f_m$) получаем, что x и y удовлетворяют уравнениям $P(x, f_1, f_2) = 0$ и $Q(y, f_1, f_2) = 0$, где P и Q — полиномы Вейерштрасса относительно x и y соответственно, т. е. x и y — целые над f_1 и f_2. Но тогда (следствие 1.11) и $f_3, \ldots, f_m$ — целые над f_1 и f_2.

В процессе доказательства мы получили и следующие утверждения.

Предложение 2.4. *Если f_1 и f_2 не имеют общего делителя ($(0, 0)$ — изолированная точка $K\{f_1, f_2\}$), то целое замыкание кольца $B(f_1, f_2)$ в $\mathbf{C}_*[\langle x, y\rangle]$ совпадает с $\mathbf{C}_*[\langle x, y\rangle]$, т. е. любой сходящийся степенной ряд двух переменных — целый над f_1 и f_2.*

Если $f_1, \ldots, f_n \in \mathbf{C}_*[\langle x_1, \ldots, x_n\rangle]$ и $(0, \ldots, 0)$ — изолированная точка для $K\{f\}$, то аналогично, используя теорему Осгуда и следствие 1,11, получаем, что целое замыкание кольца $B(f_1, \ldots, f_n)$ в $\mathbf{C}_*[\langle x_1, \ldots, x_n\rangle]$ совпадает с $\mathbf{C}_*[\langle x_1, \ldots, x_n\rangle]$.

3. Ряды Бюрмана. Для сходящихся рядов одной переменной известно такое предложение:

Если $f(x), g(x) \in \mathbf{C}_*[\langle x_1\rangle]$ и точка 0 — простой ноль для $f(x)$, то существует $F \in \mathbf{C}_*[\langle u_1\rangle]$, так что $g(x) = F(f(x))$, т. е. $g(x)$ развивается в сходящийся ряд по степеням $f(x)$ в некоторой окрестности нуля.

Докажем аналогичное утверждение для голоморфных функций многих комплексных переменных.

Рассмотрим множество $\mathrm{Deg} = \{h^i \mid i \geqq 2, h \in \mathbf{C}_*[\langle x_1, \ldots, x_n\rangle]\}$. Условие $f \notin \mathrm{Deg}$ означает, что f не является точной степенью некоторого степенного ряда. Разложим f на неприводимые сомножители: $f = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$. Это разложение однозначно с точностью до ассоциированности ($\mathbf{C}[\langle x_1, \ldots, x_n\rangle]$ — факториальное кольцо). В этих терминах условие $f \notin \mathrm{Deg}$ означает, что целые положительные числа $a_1, \ldots, a_k$ не имеют общих делителей, т. е. $\langle a_1, \ldots, a_k\rangle = 1$.

Теорема 3.1. *Если f и $g \in \mathbf{C}_*[\langle x_1, \ldots, x_n\rangle]$ функционально зависимы и $f \notin \mathrm{Deg}$, то существует $F \in \mathbf{C}_*[\langle u_1\rangle]$, так что $g = F(f)$, т. е. g развивается в сходящийся степенной ряд по степеням f.*

Нужно отметить, что и обратное утверждение справедливо, т. е. если любая голоморфная функция g, которая функционально зависима от f, развивается в сходящийся степенной ряд по степеням f, то $f \notin \mathrm{Deg}$. Это так, потому что если $f \in \mathrm{Deg}$, т. е. существует g так, что $g^n = f$, то g — функционально зависима от f и, очевидно, не развивается в ряд по степеням f. Для этого достаточно сравнить их порядок.

Доказательство. Поскольку f и g — функционально зависимы, то можно предполагать, что g целая над f (теорема 1.14). Пусть это выражается зависимостью:

$$g^m + a_1(f) g^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(f) g + a_m(f) \equiv 0. \tag{1}$$

Отсюда получаем, что f делит g^m и что g делит f^r, т. е. если

$$f = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}, \quad \text{то} \quad g = p_i^{\beta_i} \ldots p_k^{\beta_k} \cdot \varepsilon, \tag{2}$$

где ε — ассоциированный с единицей и $\beta_i > 0$, $1 \leq i \leq k$. Докажем, что существует положительное число s, такое, что для упорядоченных k-наборов выполнено $(\beta_1, \ldots, \beta_k) = s(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Допустим противное. При помощи матрицы Якоби тривиально проверяется, что если f и g функционально зависимы, то и f^n и g^m функционально зависимы, а также если g делит f, то и fg^{-1} функционально зависима от f или g. Рассмотрим всевозможные выражения $f^{\beta_i} g^{-\alpha_i} = p^{a_{1i}} p_2^{a_{2i}} \ldots p_k^{a_{ki}} \varepsilon^{-\alpha_i}$, $1 \leq i \leq k$, где $a_{ji} = \alpha_j \beta_i - \alpha_i \beta_j$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq i \leq k$. Очевидно $a_{ji} = -a_{ij}$ (в частности $a_{ii} = 0$) и

(3) $$\alpha_n a_{\nu\eta} - \alpha_\nu a_{\mu\eta} = \alpha_\eta a_{\nu\mu} \text{ для любых } \mu, \eta, \nu \in \{1, \ldots, k\}.$$

Из допущения получаем, что a_{ij} не равно нулю для любых i, j. Если докажем, что существует i, такое, что $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ki}$ неотрицательны, то $f^{\beta_i} g^{-\alpha_i}$ — функционально зависит от f и не содержит множителя p_i, чем получим противоречие с (2). Если существует i, так что $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ki}$ — неположительны, то рассматривая $f^{-\beta_i} g^{\alpha_i}$, приходим к верхнему случаю.

Рассмотрим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{k-1,1}, & a_{k,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,k-1} & a_{2,k-1} & \ldots & a_{k-1,k-1}, & a_{k,k-1} \\ \hline a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{k-1,k}, & a_{kk} \end{array}\right).$$

Нужно доказать, что у нее имеется строка или столб с неотрицательными элементами. При $k=2$ это очевидно. Индуктивный шаг — пусть для первой главной матрицы $(k-1)$-го порядка это выполнено. Без ограничения общности можно предполагать, что $a_{11}, a_{21}, \ldots . a_{k-1,1}$ — неотрицательны, в противном случае перенумеруем. Если a_{k1} отрицательный, то используя (3), получаем, что $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{k-i,k}, a_{kk}$ неотрицательны.

Итак, мы доказали, что $g = f^s \varepsilon$. Пуст b_0 — свободный член ε. Тогда $g - f^s b_0$ функционально зависит от f и, следовательно, $g - f^s b_0 = f^{s_1} b_1$ и т. д. и получаем, что $g = F(f)$. Но поскольку f и g — сходящиеся степенные ряды и F — формальный ряд одной переменной, то и F — сходящийся степенной ряд.

Доказательство теоремы 3.1 является еще одним доказательством гипотезы Абьянкара для двух функций, потому что можно всегда добиться условия $f \notin \mathrm{Deg}$, а зависимость (1) можно считать формальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. S. Abhyankar, M. van der Put. Homomorphisms of analytic local rings. *J. reine und Angew. Math.*, **242**, 1970, 26—60.
2. S. S. Abhyankar, T. T. Moh. On analytic independence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **219**, 1976, 77—87.
3. M. Артин. Алгебраические пространства. *Успехи мат. наук*, **26**, 1971, № 1, 181—205.
4. Б. Шабат. Введение в комплексный анализ, часть II. Москва, 1976.
5. О. Зарисский, П. Самюэль. Коммутативная алгебра, том II. Москва, 1963.
6. Р. Нарасимхан. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. Москва, 1971.
7. А. М. Габриэлов. О формальных соотношениях между аналитическими функциями. *Функц. анализ и его прилож.*, **5**, 1971, № 4, 64—65.

Пловдивский университет „П. Хилендарски"
4000 Пловдив ул. Цар. Асен № 24

Поступила 21. 3. 1978