PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ЗАМЕТКА ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ НЕРСЕСЯНА — РОТА

ВАНЯ Х. ХАДЖИЙСКИ

В этой заметке известная теорема Нерсесяна — Рота [1] дополняется эквивалентными условиями, высказанными в терминах непрерывной аналитической емкости.

1. Всюду в этой работе D — открытой подмножество расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbf{C}}$, F — относительно замкнутое в D множество и F^0 — множество его внутренних точек. Как обычно, $C(F)$ обозначает алгебру непрерывных на F функций. Будем рассматривать следующие алгебры функций:

$$A(F)=\{f\in C(F)\ f \text{ аналитична на } F^0\},$$

$$M_F(D)=\{f:f \text{ мероморфна в } D \text{ с полюсами вне } F\},$$

$$\bar{M}_F(D)=\{f:f \text{ приближается равномерно на } F \text{ функциями из } M_F(D)\}.$$

Если E компакт в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, то

$R(E)=\{f\in C(E):f$ приближается равномерно на E рациональными функциями с полюсами вне $E\}$.

Одна из основных задач теории аппроксимации аналитических функций следующая:

Найти необходимые и достаточные условия на F так, чтобы каждая функция $f\in A(F)$ аппроксимировалась равномерно на F функциями из $M_F(D)$.

Эта задача решена А. А. Нерсесяном [1] и позже другими способами А. Ротом [2]. Они доказали следующую теорему.

Теорема (Нерсесян — Рот). *Следующие условия эквивалентны:*

1°. $A(F)=\bar{M}_F(D)$;

2°. $A(\bar{K}\cap F)=R(\bar{K}\cap F)$ *для любого открытого круга* K, $\bar{K}\subset D$.

Отметим, что А. Рот не доказала импликацию $1^\circ\Longrightarrow 2^\circ$, но ее доказательство импликации $2^\circ\Longrightarrow 1^\circ$ естественно и красиво. Доказательство Нерсесяна базируется на результатах Витушкина [3] о рациональной аппроксимации непрерывных на компакте функций и на технике, разработанной в оригинальной работе Мергеляна [7].

В этой заметке теорема Нерсесяна — Рота дополняется несколькими эквивалентными условиями, высказанными в терминах непрерывной аналитической емкости. Эти условия показывают, что известная теорема Витушкина [4, стр. 282, Т. 8.2] остается верной и в более общей ситуации, когда рассматривается не компакт, а относительно замкнутое подмножество области и приближаемые функции непрерывны на нем, но, вообще говоря, не ограничены. При этом приближение ведется не рациональными функциями, а мероморфными. Кроме того, эти условия дают возможность для непосредственного получения следствий, в которых условия имеют геометрический характер.

Отметим, кроме того, что, следуя идеи доказательства теоремы Витушкина, модифицированные в [5], можно перенести без изменения теоремы 8.1 и 8.2 из [4, стр. 278] в нашей ситуации независимо от теоремы Нерсесяна—Рота (см. [8]).

2. В этом пункте даются определения необходимых в дальнейшем понятий и приводится точная формулировка теоремы Витушкина, которую мы используем.

Пусть E — произвольное подмножество комплексной плоскости. Обозначим через $A(E, 1)$ класс функций f, которые аналитичны вне компактного подмножества E, и такие, что $f(\infty)=0$, $\|f\|_{\overline{C}}\leqq 1$ (здесь, как обычно, $\|f\|_S=\sup\{|f(z)|,\ z\in S\}$). Пусть $AC(E, 1)$ — подкласс $A(E, 1)$, состоящий из непрерывных в $\overline{C}$ функций. Для произвольной функции $f\in A(E, 1)$ положим $f'(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty} z\,.\,f(z)$. Аналитической, соответственно непрерывной аналитической, емкостью множества E называется число

$$\gamma(E)=\sup\{|f'(\infty)|:f\in A(E, 1)\},\quad \alpha(E)=\sup\{|f'(\infty)|:f\in AC(E, 1)\}.$$

Очевидно $\gamma(E)$ $(\alpha(E))$ — монотонная функция множества, т. е. если $E_1\subseteq E_2$, то $\gamma(E_1)\leqq\gamma(E_2)$. Приведем некоторые свойства аналитической емкости (см. более подробно [4, гл. 8]).

Лемма 1. *Для каждого множества E имеет место неравенство $\alpha(E)\leqq\gamma(E)$. Если E открытое, то в этом неравенстве имеет место равенство.*

Лемма 2. *Если E — круг с радиусом R, то $\gamma(E)=R$.*

Лемма 3. *Если множество E — компактно и связно, то $\gamma(E)\geqq(\operatorname{diam}(E))/4$.*

Следующая теорема доказана Витушкиным [3, стр. 183, Т. 1].

Теорема. *Пусть E — компакт в $\mathbf{C}$. Следующие условия эквивалентны:*

1^0. $A(E)=R(E)$;

2^0. $\alpha(G\setminus E)=\alpha(G\setminus E^0)$ *для каждого открытого ограниченного множества G;*

3. *Для каждого $z\in\partial E$ существует $r\geqq 1$ такое, что*

$$\lim_{\delta\to 0}\sup\frac{\alpha(\Delta(z, \delta)\setminus E^0))}{\alpha(\Delta(z, r\delta)\setminus E)}<\infty,$$

где $\Delta(z, \delta)$ открытый круг с центром в точке $z\in\mathbf{C}$ и радиусом $\delta>0$.

3. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1^0. $A(F)=\overline{M}_F(D)$;

2^0. $A(\overline{K}\cap F)=R(\overline{K}\cap F)$ *для каждого открытого круга K, $\overline{K}\subset D$;*

3^0. $\alpha(K\setminus F)=\alpha(K\setminus F^0)$ *для каждого открытого круга K, $\overline{K}\subset D$;*

4^0. *Для каждого $z\in\partial F\cap D$ существует $r\geqq 1$ такое, что*

$$\lim_{\delta\to 0}\sup\frac{\alpha(\Delta(z, \delta)\setminus F^0)}{\alpha(\Delta(z, r\delta)\setminus F)}<\infty.$$

Доказательство. $1^0 \Leftrightarrow 2^0$ составляет теорему Нерсесяна — Рота. Мы предпочитаем здесь привести независимое доказательство импликации $1^0 \Longrightarrow 2^0$, которое нам кажется новым и, может быть, проще, чем оригинальное.

Пусть K — произвольный открытый круг, $\bar{K} \subset D$. Известно [4, стр. 304, Сл. 13.2], что каждую функцию $f \in C(\bar{\mathbf{C}})$ можно аппроксимировать равномерно на $\bar{\mathbf{C}}$ функциями из $C(\bar{\mathbf{C}})$, которые аналитичны там, где аналитична функция f, и в окрестности границы круга K, ∂K. Поэтому мы будем с самого начала предполагать, что функция $f \in A(\bar{K} \cap F)$ аналитична в окрестности ∂K.

Пусть теперь K, K_1 и K_2 — концентрические круги, такие, что $\bar{K}_1 \subset K^0 \subset \bar{K} \subset K_2^0 \subset \bar{K}_2 \subset D$ и для которых функция f аналитическая в окрестности кольца, ограниченного кругами K_1 и K_2. Используя интегральную формулу Коши, функцию f можно представить в виде $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, $z \in \bar{\mathbf{C}}$, где функции f_1 и f_2 обладают следующими свойствами:

1) $f_1 \in C(\bar{\mathbf{C}})$, f_1 аналитична в K_2 и там, где f аналитична.

2) $f_2 \in C(\bar{\mathbf{C}})$, f_2 аналитична в $\bar{\mathbf{C}}/\bar{K}_1$ и там, где f аналитична.

По теореме Рунге из 1) сразу следует, что $f_1 \in R(\bar{K} \cap F)$. Очевидно $f_2 \in A(F)$ и из 1^0 получаем, что $f_2 \in \bar{M}_F(D)$. Но любая функция из $M_F(D)$ аналитична в окрестности $\bar{K} \cap F$ так, что снова применяя теорему Рунге, получим $f_2 \in R(\bar{K} \cap F)$, а это означает, что $f \in R(\bar{K} \cap F)$.

Покажем, что $2^0 \Longrightarrow 3^0$. По теореме Витушкина для каждого открытого множества G и каждого открытого круга $K(\bar{K} \subset D)$ выполнено $\alpha(G \setminus (\bar{K} \cap F)) = \alpha(G \setminus (\bar{K} \cap F)^0)$. Тогда, если положить $G = K$, то получим $\alpha(K \setminus F) = \alpha(K \setminus F^0)$, что составляет утверждение 3^0.

Очевидно из 3^0 следует 4^0, и нам остается показать, что $4^0 \Longrightarrow 2^0$. Для этого достаточно показать, что выполняется условие 3^0 в теореме Витушкина, где положено $E = \bar{K} \cap F$. Пусть сначала $z \in \partial(\bar{K} \cap F)$ и $z \in K^0$. Если r — число из условия 4^0 нашей теоремы, то для достаточно малого δ, $\overline{\Delta(z, r\delta)} \subset K^0$ и, следовательно,

$$\Delta(z, \delta) \setminus (\bar{K} \cap F)^0 = \Delta(z, \delta) \setminus F^0, \quad \Delta(z, r\delta) \setminus (\bar{K} \cap F) = \Delta(z, r\delta) \setminus F.$$

Тогда

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus (\bar{K} \cap F)^0)}{\alpha(\Delta(z, r\delta) \setminus (\bar{K} \cap F))} = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus F^0)}{\alpha(\Delta(z, r\delta) \setminus F)} < \infty.$$

Если $z \in \partial(\bar{K} \cap F)$ и $z \in \partial K$, то для достаточно малого δ открытое множество $\Delta(z, \delta) \setminus (\bar{K} \cap F)$ содержит дугу длиной не меньше δ. Тогда из свойств аналитической емкости, упомянутых в пункте 2, получаем, что

$$\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus (\bar{K} \cap F)) = \gamma(\Delta(z, \delta) \setminus (\bar{K} \cap F)) > \delta/4,$$

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus (\bar{K} \cap F)^0)}{\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus (K \cap F))} < \frac{\delta}{\delta/4} = 4 < \infty.$$

Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Если множество F такое, что для каждого $z \in \partial F \cap D$*

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus F)}{\delta} > 0,$$

то $A(F) = \overline{M}_F(D)$.

Доказательство. Покажем, что выполняется условие 4^0 теоремы 1. Пусть $z \in \partial F \cap D$. Тогда

$$0 < \liminf_{\delta \to 0} \frac{\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus F)}{\delta} < \liminf_{\delta \to 0} \frac{\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus F)}{\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus F^0)},$$

откуда следует

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus F^0)}{\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus F)} < \infty.$$

Следствие 2. *Если каждое $z \in \partial F \cap D$ является граничной точкой некоторой компоненты множества D/F, то* $A(F) = \overline{M}_F(D)$.

Доказательство. Пусть $z \in \partial F \cap D$ и $\delta > 0$ такое, что круг $\overline{\Delta(z, \delta)} \subset D$. Пусть z — граничная точка j-той компоненты $D \setminus F$ (которую обозначим через D_j), диаметр которой $d_j > 0$. Тогда для $\delta < d_j$ по крайней мере одна компонента открытого множества $\Delta(z, \delta) \cap D_j$ содержит дугу диаметром не меньше δ. Тогда $\alpha(\Delta(z, \delta) \setminus F) > \alpha(\Delta(z, \delta) \cap D_j) = \gamma(\Delta(z, \delta) \cap D_j) > \delta/4$ и, следовательно, выполнены условия следствия 1. Следствие 2 дает

Следствие 3. *Пусть D^* — одноточечная компактификация множества D. Если $D^* \setminus F$ имеет конечное число связных компонент, то* $A(F) = \overline{M}_F(D)$.

Следствие 3 (вместе с элегантным доказательством Рота) дает возможность получить элементарное доказательство известной теоремы Аракеляна [6].

Будем говорить, что множество F удовлетворяет условию (А) Аракеляна, если

1. Для каждого $z \in D \setminus F$ существует кривая $\gamma_z(t) : [0, 1) \to D \setminus F$ такая, что $\gamma_z(0) = z$ и $\lim_{t \to 1} d(\gamma_z(t), \partial D) = 0$, где d — сферическое расстояние.

2. Если K — произвольное компактное подмножество D, то существует компакт K_1, $K \subset K_1$ такой, что для любого $z \in D \setminus (K_1 \cup F)$ соответствующая из 1 кривая $\gamma_z(t)$ принадлежит $D \setminus (K \cup F)$.

С помощью одной очевидной модификации теоремы Рунге получаем следующее утверждение.

Предложение. *Пусть множество F удовлетворяет условию (А), K—компакт в D и K_1 — соответствующий ему согласно условию (А) компакт. Пусть $R(z)$ — рациональная функция с полюсами вне $K_1 \cup F$. Тогда ее можно приблизить равномерно на $K \cup F$ функциями, аналитическими в D.*

Теорема Аракеляна. *Если F удовлетворяет условию (А), то каждую функцию $f \in A(F)$ можно равномерно на F аппроксимировать функциями, аналитическими в D.*

Доказательство. Пусть $f \in A(F)$ и $\varepsilon > 0$ произвольное. Из условия теоремы следует, что $D^* \setminus F$ связно (даже линейно-связно) и на основании следствия 3 существует функция $f_0 \in \overline{M}_F(D)$ такая, что $|f(z)-f_0(z)|<\varepsilon/2$, $z\in F$. Пусть $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\overline{D}_n\subset D_{n+1}^0$, $\cup D_n=D$ — компактное исчерпывание D такое, что для каждого n $\overline{D}_{n+1}$ соответствующий $\overline{D}_n$ компакт из свойства (A). По индукции построим последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, обладающих следующими свойствами:

а) f_n мероморфна в D с полюсами вне $\overline{D}_{n+1}\cup F$.

б) $\|f_n-f_{n-1}\|_{\overline{D}_{n-1}\cup F}<\varepsilon/2^n$, $n=1, 2, \ldots$ ($D_0=\emptyset$).

Допустим, что функции $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ уже построены. Пусть ψ_{n-1} — сумма главных частей функции f_{n-1}, соответствующих полюсам f_{n-1} в $\overline{D}_{n+1}$. Тогда $f_{n-1}=\psi_{n-1}+\varphi_{n-1}$, где φ_{n-1} — функция, мероморфная в D с полюсами вне $\overline{D}_{n+1}\cup F$. Согласно сформулированному выше предложению существует функция h_{n-1}, аналитическая в D и такая, что $\|\psi_{n-1}-h_{n-1}\|_{\overline{D}_{n-1}\cup F}<\varepsilon/2^n$. Функцию f_n определяем следующим образом: $f_n(z)=f_{n-1}(z)-(\psi_{n-1}(z)-h_{n-1}(z))=\varphi_{n-1}(z)+h_{n-1}(z)$. Очевидно f_n удовлетворяет условия а) и б). Таким образом функция

$$g(z)=f_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(z)-f_{n-1}(z))$$

аналитична в D и $|f(z)-g(z)|<\varepsilon$, $z\in F$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Нерсесян. О мероморфной и касательной аппроксимации мероморфными функциями. *Известия АН Арм. ССР. Математика*, **7**, 1972, 405—412.
2. A. Rot. Uniform and tangential approximation by meromorphic functions on closed sets. *Can. J. Math.*, **28**, 1976, 104—111.
3. А. Г. Витушкин. Аналитическая емкость в задачах теорий приближения. *Успехи мат; наук.* **22**, 1967, № 6, 142—198.
4. Т. Гамелин. Равномерные алгебры. Москва, 1973.
5. A. M. Davie. Approximation problems and analytic capacity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **171**, 1972, 409—444.
6. Н. У. Аракелян. Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями, *Известия АН Арм. ССР. Математика*, **3**, 1968, 273—286.
7. С. Н. Мергелян. Равномерные приближения функций комплексного переменного. *Успехи мат. наук.* **7**, 1952, № 2, 31—122.
8. В. Х. Хаджийски. О мероморфной аппроксимации аналитических функций на относительно замкнутых множествах. *Доклады БАН*, **30**, 1977, 1679—1680.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 19. 6. 1978;
в переработанном виде 13. 2. 1979