PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

О НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЯХ МЕТОДА Л. ЭРЛИХА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

НИКОЛАЙ В. КЮРКЧИЕВ

В статье выводится итерационная формула, являющаяся модификацией метода Л. Эрлиха для одновременного нахождения всех корней данного алгебраического уравнения, и производится оценка скорости сходимости итерационного процесса. Приведен пример применения этого метода. Показано, что метод продолжения по параметру можно рассматривать как один из способов улучшения скорости сходимости.

Пусть дано алгебраическое уравнение $f(x)=0$ степени n

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0. \tag{1}$$

Предполагаем, что корни $\{x_i\}_1^n$ уравнения (1) различные (действительные или комплексные). В [1;2] К. Дочев предложил следующий метод с квадратической скоростью сходимости:

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-f(x_i^{(k)})\Big/\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)}),\quad i=1,\ldots,n, \tag{2}$$

для одновременного нахождения всех корней уравнения (1).

Дальнейшие результаты этого рода принадлежат Л. Илиеву и К. Дочеву [3]. Существуют другие модификации метода Ньютона. В [4] дано рекуррентное выражение, связывающее три последовательных приближения, получаемых по формуле (2), и несколько других, аналогичных, модификаций метода Ньютона, а также рассмотрена возможность применения описанных процессов в вычислительной практике. Как, например, отметили К. Дочев и П. Бърнев [4], формула третьего порядка имеет вид

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-f(x_i^{(k)})\Big(2\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})-f'(x_i^{(k)})+f(x_i^{(k)})\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}\Big)$$
$$\times\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-2}. \tag{3}$$

Исследования К. Дочева продолжил Л. Эрлих [5]. Он показал, что итерационный процесс

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-f(x_i^{(k)})\Big/\Big(f'(x_i^{(k)})-f(x_i^{(k)})\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}\Big)\,(i=1,\ldots,n;\ k=0,1,\ldots) \tag{4}$$

обладает свойством кубической сходимости при некоторых ограничительных условиях. Первые идеи подобного рода были высказаны еще Л. Илиевым [6], а С. Савенко [7] попутно предложил процесс Эрлиха.

Идеи, выдвинутые К. Дочевым в созданной им теории приближенного решения уравнений, успешно развиваются и в настоящее время.

Можно продолжить исследования К. Дочева следующим образом.

В [8;9] показано, что можно получить скорость сходимости выше квадратической, используя только информацию — $\{f(x_i^{(k)})\}_1^n$. Так, например, процесс

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-f(x_i^{(k)})\Big/\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}f(x_j^{(k)})(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}\times\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j\\ s\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_s^{(k)})(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1}\Big) \tag{5}$$

сходится с кубической скоростью.

В ряде случаев (например, если $f(x)=\det(xE-A)$, A — квадратная матрица, E — единичная матрица) вычисление $f(x_\nu^{(k)})$ затруднительно. Поэтому иногда оказывается удобным использовать рекуррентную формулу, которая связывает системы последовательных приближений, получаемых по формуле (5). Так, например, если $n=2$, верно соотношение

$$\frac{x_1^{(k+1)}+x_2^{(k+1)}-(x_1+x_2)}{x_1^{(k)}+x_2^{(k)}-(x_1+x_2)}=\frac{x_1^{(k+1)}x_2^{(k+1)}-x_1x_2}{x_1^{(k)}x_2^{(k)}-x_1x_2},$$

и мы получаем возможность контролировать попутно каждый шаг расчета.

Нетрудно проверить, что приведенные вычислительные правила можно получить и следующим способом. Рассмотрим однопараметрическое множество полиномов

$$P_t(x)=(1-t)(Q(x)+L(x))+tf(x), \tag{6}$$

где параметр $t\in[0,1]$ и

$$Q(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i^{(0)});\quad L(x)=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}Q(x)f(x_j^{(0)})/(x-x_j^{(0)})Q'(x_j^0).$$

Очевидно, что полином P совпадает с $Q+L$ при $t=0$ и с f при $t=1$. Нули полинома P являются функциями от $t: x_1(t),\ldots, x_n(t)$.

Дифференцируя тождества $P(x_i(t))\equiv 0$, $i=1,\ldots,n$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x_i'(t)=\frac{Q(x_i(t))+L(x_i(t))-f(x_i(t))}{(1-t)(Q'(x_i(t))+L'(x_i(t)))+tf'(x_i(t))};\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{7}$$

Систему (7) надо решать при начальных условиях $x_i(0)=x_i^{(0)}$, $i=1,\ldots,n$.

Для того, чтобы найти $x_i(1)$, $i=1,\ldots,n$, можно интегрировать систему (7) каким-нибудь методом решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, двигаясь по параметру t от 0 до 1 некоторым шагом. Вместо этого, однако, найдем приближенно $x_i(1)$, $i=1, \ldots, n$, применяя метод Эйлера $x_i(1) = x_i(0)+hx'_i(0)$, т. е. $x_i^{(1)}=x_i^{(0)}-f(x_i^{(0)})/(Q'(x_i^{(0)}) + L'(x_i^{(0)}))$, $i=1, \ldots, n$, где $x_i(1)$ обозначено через $x_i^{(1)}$.

Таким образом, получаем итерационную формулу (5). Если проинтегрировать систему (7), применяя метод Тейлора $x_i(1)=x_i(0)+hx'_i(0)+\frac{h^2}{2}x''_i(0)$, можно получить формулы, дающие приближения более высокого порядка.

Например, формула четвертого порядка имеет вид

$$x_i^{(1)}=x_i^{(0)}-2\frac{f}{Q'+L'}+\frac{ff'}{(Q'+L')^2}-\frac{f^2}{2}\frac{(Q''+L'')}{(Q'+L')^3},$$

а формула пятого порядка

$$x_i^{(1)}=x_i^{(0)}-\frac{7}{3}\frac{f}{Q'+L'}+\frac{7}{3}\frac{ff'}{(Q'+L')^2}-\frac{3}{2}\frac{f^2(Q''+L'')}{(Q'+L')^3}-\frac{1}{3}\frac{ff'^2}{(Q'+L')^3}$$
$$-\frac{f^2}{2(Q'+L')^4}\{f''(Q'+L')+3f'(Q''+L'')\}+\frac{f^3}{6(Q'+L')^5}\{(Q'''+L''')(Q'+L')$$
$$-3(Q''+L'')^2\}.$$

Каждая новая формула, привлекающая информацию о значениях производных более высокого порядка, будет аналогом метода Чебышева. Первые идеи подобного рода были высказаны еще Дочевым. Метод продолжения решения по параметру можно рассматривать как один из способов улучшения скорости сходимости итерационного процесса. Отметим, что улучшение итерационного процесса для одновременного уточнения всех корней уравнения $f(x)=0$ можно получить путем изменения однопараметрического множества полиномов типа (6), а полученную при этом дифференциальную систему интегрировать методом Адамса.

Как частные случаи можно получить методы для нахождения всех корней тригонометрических и экспоненциальных уравнений.

Выводим другую итерационную формулу, являющуюся модификацией метода Ньютона. Аналогично можно поставить вопрос о том, как следует изменить вычислительное правило Л. Эрлиха, чтобы улучшить его сходимость, используя на каждом шагу только информацию — $f(x_i^{(k)})$, $f'(x_i^{(k)})$. Попытки добиться ускорения сходимости путем модификации основной итеративной процедуры привели к успеху. Общие итерационные схемы можно получить из следующих формул:

$$(8)\qquad x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-f(x_i^{(k)})/(\lambda(f'(x_i^{(k)})-f(x_i^{(k)})\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1})-\mu f(x_i^{(k)})$$
$$\times\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f(x_i^{(k)})(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-3}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j\\ s\neq i}}^{n}(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1});\ i=1, \ldots, n,\ k=0, 1, \ldots.$$

Для параметров существуют различные эвристические схемы выбора, на которых мы останавливаться не будем. Отметим только, что большое влияние на скорость сходимости оказывает характер изменения параметров.

В предельном случае при $\lambda=1$, $\mu=0$ получается, конечно, метод Л. Эрлиха. Пусть для итерационного решения уравнения (1) задан процесс

$$(9)\qquad x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-f(x_i^{(k)})\Big(f'(x_i^{(k)})-f(x_i^{(k)})\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}-f'(x_i^{(k)})$$

$$\times\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f(x_j^{(k)})(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-3}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j\\ s\neq i}}^{n}(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1}\Big)^{-1},\ i=1,\ldots,n,\ k=0,1,\ldots,$$

который можно получить из (8) при $\lambda=\mu=1$.

Сейчас выясним вопрос о скорости сходимости последовательности $\{x_i^{(k)}\}$ на (9). Для этого нам потребуется следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $0<q<1$, $\min\limits_{i\neq j}|x_i-x_j|=d$, *где* $\{x_i\}_1^n$ — *нули многочлена* $f(x)$ *и* c *такое, что выполнено*

$$(10)\qquad n^2e^2c^2/(d-2c)^2<1.$$

Если начальные приближения $\{x_i^{(0)}\}_1^n$ *корней уравнения* (1) *удовлетворяют неравенствам* $|x_i^{(0)}-x_i|\leq cq$, $i=1,\ldots,n$, *то для всех* k *будем иметь*

$$(11)\qquad |x_i^{(k)}-x_i|\leq cq^{4^k};\ i=1,\ldots,n.$$

Доказательство. Неравенства (11) докажем методом математической индукции. Если из обеих частей (9) вычесть x_i, получаем

$$x_i^{(k+1)}-x_i=x_i^{(k)}-x_i-\Big(\sum_{j=1}^{n}(x_i^{(k)}-x_j)^{-1}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-3}$$

$$\times\prod_{s=1}^{n}(x_j^{(k)}-x_s)\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j\\ s\neq i}}^{n}(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1}\Big)^{-1}=x_i^{(k)}-x_i-\Big((x_i^{(k)}-x_i)^{-1}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j)^{-1}$$

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_j^{(k)}-x_j)(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-2}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n}(x_j^{(k)}-x_s)(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1}\Big)^{-1}$$

$$=(x_i^{(k)}-x_i)^2\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j)^{-1}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_j^{(k)}-x_j)(x_i^{(k)}-x_j)^{-1}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}(x_i^{(k)}-x_j)(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}$$

$$\times\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n}(x_j^{(k)}-x_s)(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1}\Big)\Big/\Big(1+(x_i^{(k)}-x_i)\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j)^{-1}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_j^{(k)}-x_j)(x_i^{(k)}-x_j)^{-1}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}(x_i^{(k)}-x_j)(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}$$

$$\times \prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} (x_j^{(k)}-x_s)(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1})) = -(x_i^{(k)}-x_i)^2 \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x_j^{(k)}-x_j)(x_i^{(k)}-x_j)^{-1}$$

$$\times (x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}(1-(1+(x_j^{(k)}-x_j)/(x_i^{(k)}-x_j^{(k)}))\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} (x_j^{(k)}-x_s)(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1})/$$

$$(1+(x_i^{(k)}-x_i)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x_j-x_j^{(k)})(x_i^{(k)}-x_j)^{-1}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}(1-(1+(x_j^{(k)}-x_j)/$$

$$(x_i^{(k)}-x_j^{(k)}))\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} (x_j^{(k)}-x_s)(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1})).$$

Ввиду представления

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x_i^{(k)}-x_j)(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}-1 = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n} (x_s^{(k)}-x_s)(x_i^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1}$$

$$\times \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s-1} (x_i^{(k)}-x_j)(x_i^{(k)}+x_j^{(k)})^{-1}$$

после некоторых преобразований получаем

$$x_i^{(k+1)}-x_i = -(x_i^{(k)}-x_i)^2 \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x_j^{(k)}-x_j)(x_i^{(k)}-x_j)^{-1}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1} \tag{12}$$

$$\times\Big(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} (x_l-x_l^{(k)})(x_j^{(k)}-x_l^{(k)})^{-1}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{l-1} (x_j^{(k)}-x_s)(x_i^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1}+(x_j-x_j^{(k)})(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}$$

$$\times \prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} (x_j^{(k)}-x_s)(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1})/(1+(x_i^{(k)}-x_i)\sum_{\substack{j=1\\ i\neq i}}^{n} (x_j-x_j^{(k)})(x_i^{(k)}-x_j)^{-1}(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}$$

$$\times\Big(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} (x_l-x_l^{(k)})(x_i^{(k)}-x_l^{(k)})^{-1}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{l-1} (x_j^{(k)}-x_s)(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1}+(x_j-x_j^{(k)})(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}$$

$$\times \prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} (x_j^{(k)}-x_s)(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1})).$$

Допустим, что (11) выполнены для $k=m$. Используя ограничение (10) и неравенства

$$|x_i^{(m)}-x_i| \leq cq^{4^m};\ i=1,2,\ldots,n,$$

$$|x_i^{(m)}-x_j^{(m)}| \geq |x_i-x_j|-|x_i^{(m)}-x_i|-|x_j^{(m)}-x_j| > d-2c,$$

$$\left|\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} (x_j^{(k)}-x_s)(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1}\right| \leq \left(1+\frac{cq^{4^m}}{d-2c}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{ne}\right)^n \leq e^{1/e},$$

$$|x_i^{(k)}-x_i|\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_j^{(k)}-x_j)(x_i^{(k)}-x_j)^{-1})(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}(x_l-x_l^{(k)})(x_j^{(k)}-x_l^{(k)})^{-1}\right.$$

$$\times\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{l-1}(x_j^{(k)}-x_s)(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1}+(x_j-x_j^{(k)})(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^{-1}$$

$$\left.\times\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n}(x_j^{(k)}-x_s)(x_j^{(k)}-x_s^{(k)})^{-1})\right|\leq q^{3.4^m}e^{1/e-3},$$

из (12) получаем

$$|x_i^{(m+1)}-x_i|\leq cq^{4^{m+1}},$$

то есть последовательность $\{x_i^{(k)}\}_1^n$ имеет порядок $p=4$.

Отметим, что более общие методы получения таких оценок имеются (например, [8; 9]). Возможны и другие приемы ускорения сходимости. Подчеркнем, что вычислительные правила очевидным образом могут быть обобщены, например, на тот случай, когда при разыскании x_i^{k+1} привлекается информация и о значениях производных более высокого порядка.

Перечень подобных правил нетрудно продолжить, но анализ таких методов трудоемок и в силу более сложной реализации эти модификации были отвергнуты в дальнейших экспериментах.

Иногда для уменьшения вычислений можно перейти к вычислению f' на каждом втором шагу.

Приведем пример применения метода (9). Рассмотрим уравнение $f(x)=x^3-6x^2+11x-6=0$. Корни этого уравнения $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. В качестве начальных приближений выбрано $x_1^{(0)}=0.9$; $x_2^{(0)}=2.1$; $x_3^{(0)}=2.9$. В табл. 1 приведены значения двух последовательных приближений, полученных методом (5) и методом (9). Все вычисления выполнены на ЭВМ ЕС-1040 с двойной точностью. Табл. 1 приведена в полном объеме только из-за методических соображений, проанализировав рост числа верных знаков в нескольких шагах. Если цифра l последовательно повторяется в записи данного числа m раз, то в табл. 1 это записывается как $(m*l)$. После проведения серии экспериментов стало ясным, что метод (9) сходится и тогда, когда начальные приближения выбраны далеко от корней уравнения (1). Скорость сходимости процесса слабо коррелирована с начальными приближениями $\{x_i^{(0)}\}_1^n$. Численные эксперименты, проведенные для других примеров, показывают, что метод (9) вполне пригоден для практических целей.

Отметим, что в процессе вычисления приближений $x_\alpha^{(k+1)}$ можно использовать те $x_\beta^{(k+1)}$, которые уже вычислены (аналог метода Зайделя). Индекс эффективности в смысле А. Островского будет — $4^{1/n(1+\theta_1)}$, где θ_1 — дополнительный объем работы при вычислении производной f'.

Таблица 1

k	i	$x_i^{(k)}$ по схеме (5) $f(x_i^{(k)})$	$x_i^{(k)}$ по схеме (9) $f(x_i^{(k)})$
0	1	0.9 —0.2310100627040882	0.9 —0.2310000627040382
1	1	0./3 9/4832087907639 —0./2 0/3438377595477	0./4 9/295282951106 —0./3 0/1409583089122532
2	1	1./8 0/2594623 0./8 0/51892534	0./14 9/64 —0./14 0/71054273576009
0	2	2.1 —0.0989994449614499 7	2.1 —0.0989994449614499 7
1	2	1./2 9/1901649738485 0./2 0/80978191451634	1./2 9/8701869355957 0./2 0/1298128456490131
2	2	2./5 0/4650573106 —0./5 0/46505731070505	1./9 9/876723 0./9 0/123268506513341
0	3	2.9 —0.1710005455013182	2.9 —0.1710005455013182
1	3	2./2 9/3780228388789 —0.01232372716108541	3./2 0/1043646693708 0./2 0/2090562119409609
2	3	3./4 0/53096002086 0./3 0/10620046188947	2./8 9/8571339 —0./8 0/28573374777352

Автор считает своим долгом поблагодарить С. Ташева и Р. Иванова за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Дочев. Видоизменен метод на Нютон за едновременно приблизително пресмятане на всички корени на дадено алгебрично уравнение. *Физ.-мат. сп.*, **5**, 1962, 136—139.
2. K. Dočev. Über Newtonsche Iterationen. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **15**, 1962, 695—701.

3. L. Ilieff, K Dočev. Über Newtonsche Iterationen. *Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden*, **12**, 1963, 117—118.
4. К. Дочев, П. Бырнев. О некоторых модификациях метода Ньютона для приближенного решения алгебраических уравнений. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, **4**, 1964, 915—920.
5. L. W. Ehrlich. A Modified Newton Method for Polynomials. *Communs. ACM*, **10**, 1967, 107—108.
6. Л. Илиев. Върху приближенията на Нютон. *Годишник Соф. унив.*, **46**, кн. 1, 1950, 167—171.
7. С. Савенко. Об одном итерационном методе решения алгебраических и трансцендентных уравнений. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, **4**, 1964, 738—744.
8. Н. Кюркчиев, С. Ташев. Один метод одновременного приближенного вычисления всех корней алгебраического уравнения. *Доклады БАН*, **34**, 1981 (в печати).
9. С. Ташев, Н. Кюркчиев. О некоторых модификациях метода Ньютона для приближенного решения алгебраических уравнений. *Сердика* (в печати).

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 11. 1981