PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

О СОВПАДЕНИИ ТОЧНЫХ И ЧЕХОВСКИХ ГОМОЛОГИЙ

СТАНИСЛАВА В. ПЕТКОВА

В работе исследуется ядро естественного эпиморфизма $\gamma_*: H_* \to \check{H}_*$ точных (канонических) гомологий в индуцированные ими гомологии Чеха. Показано, что если группа коэффициентов G редуцированная и без торзии, а (X, A) — компактная пара, то $\operatorname{Ker} \gamma_*$ — максимальная делимая подгруппа в $H_*(X, A, G)$. Установлено, что если $|H_n(X, A, B)| < 2^{\aleph_0}$, где редуцированная часть группы $B/{+B}$ ($+B$ — торзионная подгруппа B) — счетная, неделимая на никаком простом p группа, то γ_n — изоморфизм для каждой группы G, а если γ_n — изоморфизм для B и компактной пары (X, A), то γ_n — изоморфизм и для всех торзионно свободных групп G. Рассмотрены и другие ситуации, когда $\operatorname{Ker} \gamma_n = 0$: например, когда группа когомологий Чеха с компактными носителями $\check{H}_c^{n+1}(X, A, Z)$ — торзионная, а G — торзионно свободная; $\check{H}_c^{n+1}(X, A)$ — торзионная без элементов бесконечной высоты; $H_n(X, A, G)$ — счетная, а $\check{H}_c^{n+1}(X, A, Z)$ — торзионная или G — свободная и др.

Пусть H_* и $\check{H}_*$ — точные (канонические) гомологии и индуцированные ими гомологии Чеха на категории $\mathscr{B}$ локально компактных метризуемых пространств и их собственных отображений (см. [1, 2]), а $\gamma_*: H_* \to \check{H}_*$ — естественное преобразование первой теории во второй (как известно, γ_* — эпиморфизм).

Отметим, что на категории $\mathscr{B}_0$ компактных метризуемых пространств и их непрерывных отображений отображение γ_* совпадает с естественным преобразованием H_* в обычные гомологии Чеха.

Начнем с доказательства следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть* $(X, A) \in \mathscr{B}_0$. *Тогда для* $\gamma_n(X, A, G): H_n(X, A, G) \to \check{H}_n(X, A, G)$, $\operatorname{Ker} \gamma_n(X, A, G) = \operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A, Z), G)$ *где* $\check{H}^*$ — *когомологии Чеха, а* G — *произвольная группа.*

Доказательство. Будем следовать [3] и [2]. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — топологически конфинальная последовательность вписанных друг в друга конечных канонических покрытий (X, A), а φ'_k — ограничение φ_k на A. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \operatorname{Ext}(\varinjlim \check{H}^{n+1}(N_{\varphi_k}, N_{\varphi'_k}, Z), G) & \to & H_n(X, A, G) & \to & \operatorname{Hom}(\check{H}^n(X, A, Z), G) & \to 0 \\
& \downarrow \nu_n & & \downarrow \gamma_n & & \| & \\
0 \to & \varprojlim \operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(N_{\varphi_k}, N_{\varphi'_k}, Z), G) & \to & \check{H}_n(X, A, G) & \to & \operatorname{Hom}(\check{H}^n(X, A, Z), G) & \to 0
\end{array}$$

коммутативна.

Первая строка в диаграмме — формула универсальных коэффициентов для (X, A) и G, $\varinjlim \check{H}^{n+1}(N_{\varphi_k}, N_{\varphi'_k}, Z) = \check{H}^{n+1}(X, A, Z)$. Вторая строка получена из формул универсальных коэффициентов для пар $(N_{\varphi_k}, N_{\varphi'_k})$ при переходе к обратному пределу. Обе строки точны. Кроме этого, группы $\check{H}^*(N_{\varphi_k}, N_{\varphi'_k}, Z)$ — прямые суммы циклических групп, так как $(N_{\varphi_k}, N_{\varphi'_k})$ — пара конечных полиэдров. Тогда из [3] заключаем, что ν_n — эпиморфизм, для которого $\operatorname{Ker}\nu_n$ совпадает с подгруппой $\operatorname{Pext}\check{H}^{n+1}(X, A, Z), G)$ сервантных расширений в $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A, Z), G)$. Как известно [4], группу $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A, Z), G)$ можно описать еще как максимальную подгруппу, элементы которой делятся в $\operatorname{Ext}\check{H}^{n+1}(X, A, Z), G)$ на все натуральные числа, т. е. $\operatorname{Pext}\check{H}^{n+1}(X, A, Z), G) = \bigcap_{n \in Z} n \operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A, Z), G) = \operatorname{Ext}^1(\check{H}^{n+1}(X, A, Z), G)$. Осталось отметить, что $\operatorname{Ker}\gamma_n = \operatorname{Ker}\nu_n$.

Рассмотрим теперь соотношение точных и Чеховских гомологий в некоторых ситуациях.

Отметим сначала следующий факт: Пусть (X, A) — пара из $\mathscr{B}$, для которой X — некомпактное, а $\bar{X}$ и $\bar{A}$—одноточечные компактификации пространств X и A (если A — компактное, то $\bar{A} = A \cup *$). Исходя из фиксированной конфинальной последовательности покрытий пары (X, A), можно построить подходящим образом (см. [1]) конфинальную последовательность пары $(\bar{X}, \bar{A})$ и, соответственно, коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A, G) & \longrightarrow & \check{H}_n(\bar{X}, \bar{A}, G), \\ \downarrow \gamma_n(X, A, G) & & \downarrow \gamma_n(\bar{X}, \bar{A}, G), \\ \check{H}_n(X, A, G) & \longrightarrow & \check{H}_n(\bar{X}, \bar{A}, G), \end{array}$$

в которой верхний горизонтальный гомоморфизм — изоморфизм. Из этой диаграммы видно, что $\gamma_n(X, A, G)$ — изоморфизм каждый раз, когда $\gamma_n(\bar{X}, \bar{A}, G)$ — изоморфизм. Это дает возможность иногда при доказательствах ограничиваться на категории компактных пар, пользуясь описанием $\operatorname{Ker}\gamma_*$ в $\mathscr{B}_0$.

Утверждение 1. *Пусть для* $(X, A) \in \mathscr{B}_0$ *либо* $\check{H}^{n+1}(X, A)$, *либо* G — *группа без торзии. Тогда* $\operatorname{Ker}\gamma_n(X, A, G)$ — *делимая группа.*

Доказательство. Обозначим группу $\check{H}^{n+1}(X, A)$ коротко через H. Если H свободна от торзии, то $\operatorname{Ext}(H, G)$ — делимая для каждой группы G. Но тогда группа $\operatorname{Pext}(H, G) = \operatorname{Ext}(H, G)$ и, следовательно, тоже делимая.

Предположим теперь, что G — без торзии и рассмотрим короткую последовательность

$$0 \to {}^+H \to H \to H/{}^+H \to 0,$$

где ${}^+H$ — максимальная торзионная подгруппа в H. Так как эта последовательность сервантно точная, она индуцирует точную последовательность (см. [4]),

$$\operatorname{Hom}({}^+H, G) \to \operatorname{Pext}(H/{}^+H, G) \to \operatorname{Pext}(H, G) \to \operatorname{Pext}({}^+H, G) \to 0,$$

где $\operatorname{Hom}({}^+H, G) = 0$ (${}^+H$ — торзионная, G — торзионно свободная). Кроме этого, $\operatorname{Pext}(H/{}^+H, G)$ — делимая (она совпадает с делимой группой $\operatorname{Ext}(H/{}^+H, G)$). Следовательно, она отделяется прямым слагаемым в $\operatorname{Pext}(H, G)$,

$$\operatorname{Pext}(H, G) = \operatorname{Pext}(H/{}^{+}H, G) \oplus \operatorname{Pext}({}^{+}H, G).$$

Но $\operatorname{Pext}({}^{+}H, G) = 0$ в силу того, что не существует ненулевое сервантное расширение торзионно свободной группы G при помощи торзионной группы ${}^{+}H$ (см. [5]). Оказалось, что $\operatorname{Ker}\gamma_n = \operatorname{Pext}(H/{}^{+}H, G)$, где $\operatorname{Pext}(H/{}^{+}H, G)$ — делимая. Этим утверждение доказано.

Замечание 1. Если для $(X, A) \in \mathscr{B}_0$ группа $\check{H}^{n+1}(X, A)$ — торзионно свободная, из равенства $\operatorname{Ker}\gamma_n = \operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G)$ и делимости последней группы видно, что последовательность

$$0 \to \operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G) \to H_n(X, A, G) \to \check{H}_n(X, A, G) \to 0$$

точна и расщепляется.

Теорема 1. *Пусть $(X, A) \in \mathscr{B}_0$, группа G — торзионно свободная и r_0 — ранг без торзии группы $\check{H}^n(X, A)$. Тогда:*

1) *Если $r_0 = 0$ (т. е. $\check{H}^n(X, A)$ — торзионная), $\operatorname{Ker}\gamma_n$ — максимальная делимая подгруппа в $H_n(X, A, G)$.*

2) *Если $r_0 > 0$, $\operatorname{Ker}\gamma_n$ — максимальная делимая подгруппа в $H_n(X, A, G)$ тогда и только тогда, когда G — редуцированная.*

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся формулой универсальных коэффициентов

$$0 \to \operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G) \to H_n(X, A, G) \to \operatorname{Hom}(\check{H}^n(X, A,), G) \to 0,$$

которая расщепляется.

Для группы $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G)$, как в утверждении 1, можно показать что если G — торзионно свободная, то

$$\operatorname{Ext}(H, G) = \operatorname{Ext}(H/{}^{+}H, G) \oplus \operatorname{Ext}({}^{+}H, G)$$

($\hat{H}^{n+1}(X, A)$ обозначена через H). Здесь $\operatorname{Ext}(H/{}^{+}H, G)$ — делимая группа, а $\operatorname{Ext}({}^{+}H, G)$ не имеет элементов бесконечной высоты. Таким образом $\operatorname{Ker}\gamma_n = \operatorname{Ext}(H/{}^{+}H, G)$ совпадает с максимальной делимой подгруппой в $H_n(X, A, G)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Hom}(\check{H}^n(X, A), G)$ — редуцированная.

Рассмотрим теперь обе возможности для r_0:

1) Если $r_0 = 0$, т. е. $\check{H}^n(X, A)$ — торзионная, то $\operatorname{Hom}(\check{H}^n(X, A), G) = 0$ и $\operatorname{Ker}\gamma_n$ — максимальная делимая подгруппа в $H_n(X, A, G)$.

2) Предположим, что $r_0 > 0$. Тогда в точной последовательности

$$0 \to \sum_{r_0} Z \to \check{H}^n(X, A) \to T \to 0,$$

T — торзионная.

Рассмотрим индуцированную последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(T, G) \to \operatorname{Hom}(\check{H}^n(X, A), G) \to \operatorname{Hom}(\Sigma_{r_0} Z, G) \xrightarrow{\sigma} \operatorname{Ext}(T, G) \to \cdots.$$

В ней $\operatorname{Hom}(T, G) = 0$, $\operatorname{Hom}(\Sigma_{r_0} Z, G) = \Pi_{r_0} G$, а $\operatorname{Ext}(T, G)$ — редуцицированная группа ($\operatorname{Pext}(T, G) = 0$). Тогда $\operatorname{Jm}\sigma \subset \operatorname{Ext}(T, G)$ — тоже редуцированная. Итак, в короткой последовательности

$$0 \to \operatorname{Hom}(\check{H}^n(X, A), G) \to \prod_{r_0} G \xrightarrow{\sigma} \operatorname{Jm}\sigma \to 0,$$

группа $\operatorname{Jm}\sigma$ редуцированна.

Докажем сначала необходимость условия из 2. Предположим, что $\operatorname{Ker} \gamma_n$ — максимальная делимая подгруппа в $H_n(X, A, G)$, т. е. $\operatorname{Hom}(\check{H}^n(X, A), G)$ — редуцированная. Но тогда в верхней последовательности левая и правая группы — редуцированные. Отсюда получаем, что $\Pi_{r_0} G$, а, следовательно, и G — редуцированная.

Если, наоборот, G — редуцированная, тогда $\Pi_{r_0} G$ — тоже редуцированная, и из вложения $0 \to \operatorname{Hom}(\check{H}^n(X, A), G) \prod\limits_{r_0} G$ следует, что $\operatorname{Hom}(\check{H}(X, A), G)$ — редуцированная, т. е. $\operatorname{Ker} \gamma_n$ — максимальная делимая подгруппа в $H_n(X, A, G)$. Этим теорема 1 доказана.

Замечание 2. Из теоремы 1 видно, что если G — торзионно свободная и редуцированная группа, то для компактных пар $\operatorname{Ker} \gamma_n$ — максимальная делимая подгруппа в $H_n(X, A, G)$. Это утверждение в случае $G = Z$ доказано Мирюком, [6].

Из теоремы 1 получаем еще и

Следствие 1. *Если $(X, A) \in \mathscr{B}_0$, а G — торзионно свободная редуцированная группа* (например Z), *то $\gamma_n(X, A, G): H_n(X, A, G) \to \check{H}_n(X, A, G)$ — изоморфизм тогда и только тогда, когда $H_n(X, A, G)$ — редуцированная группа.*

Сформулируем теперь несколько условий о изоморфности γ_*.

Теорема 2. Пусть $(X, A) \in \mathscr{B}$. *Эпиморфизм $\gamma_n(X, A, G): H_n(X, A, G) \to \hat{H}_n(X, A, G)$ — изоморфизм, если:*

1. *$\check{H}_c^{n+1}(X, A)$ — прямая сумма циклических групп (в частности свободная группа; конечнопорожденная группа).*

2. *$\check{H}_c^{n+1}(X, A)$ — торзионная группа без элементов бесконечной высоты.*

3. *G — алгебраически компактная (делимая; ограниченная группа).*

4. *Если $(X, A) \in \mathscr{B}_0$* и *$\check{H}^{n+1}(X, A)$ — торзионно свободная делимая группа, то* $\operatorname{Ker} \gamma_n = 0$ *тогда и только тогда, когда G — копериодическая.*

5. *$\check{H}_0^{n+1}(X, A)$ — торзионная, G — торзионно свободная группа.*

Доказательство. Имея в виду сделанное выше замечание о связи гомоморфизмов $\gamma_*(X, A, G)$ и $\gamma_*(\bar{X}, \bar{A}, G)$, а также и равенства $\check{H}_c^*(X, A) = \check{H}^*(\bar{X}, \bar{A})$, можем предполагать, что пара (X, A) — компактная. Тогда $\operatorname{Ker} \gamma_n(X, A, G)$ — группа сервантных расширений группы G при помощи $\check{H}^{n+1}(X, A)$.

1. Это утверждение доказано в [7]. Для полноты отметим, что оно получается из теоремы Куликова (см. [4]), которая утверждает, что всякое сервантное расширение группы G при помощи прямой суммы циклических групп расщепляется. Следовательно, $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G) = 0$.

2. Пусть $\check{H}^{n+1}(X, A) = \sum\limits_p T_p$, где p — простое, а T_p — p-примарная группа. Тогда $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G) = \prod\limits_p \operatorname{Pext}(T_p, G)$. Отметим еще, что группа $\check{H}^{n+1}(X, A)$, — счетная (как прямой предел конечнопорожденных групп). Но тогда и группы T_p — счетные. Кроме этого, они не имеют элементов бесконечной высоты, так как группа $\check{H}^{n+1}(X, A)$ не имеет таких элементов. В таком случае, по теореме Прюфера (см. [4]), каждая из групп T_p распадается в пря-

мую сумму циклических групп, откуда как в п. 1 теоремы следует, что $\operatorname{Pext}(T_p, G)=0$. Таким образом доказано, что $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G)=0$, т. е. что $\gamma_n(X, A, G)$ — изоморфизм.

3. В этом случае равенство $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G)=0$ следует из того, что группа G указанного вида является прямым слагаемым всякой группы, которая содержит ее в качестве сервантной подгруппы.

4. Если $\check{H}^{n+1}(X, A)$ — торзионно свободная и делимая группа, то $\check{H}^{n+1}(X,A)=\Sigma Q$, где Q — группа рациональных чисел. Тогда $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X\ A), G)=\Pi \operatorname{Pext}(Q, G))$ и $\operatorname{Ker}\gamma_n=0 \Leftrightarrow \operatorname{Pext}(Q, G)=\operatorname{Ext}(Q, G)=0$, т. е. $\operatorname{Ker}\gamma_n=0$ тогда и только тогда, когда G — копериодическая группа.

5. $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G)=0$ (см. [5]).

В связи с 1) отметим, что случай, когда $\check{H}_c^{n+1}(X, A)$ и G — конечнопорожденные, рассмотрен в [1].

Случай, когда $\check{H}_c^{n+1}(X,A)$—конечнопорожденная, а G — произвольная, по существу рассмотрен в [8]. Там на $H_k(X, A)$ наложено условие быть конечнопорожденной для $k=n-1$, n и $n+1$, чтобы получить, что $\check{H}_c^{n+1}(X, A)$ и $\check{H}_c^n(X, A)$ — конечнопорожденные. Проведенные там рассуждения о мономорфности γ_n можно провести, однако, если потребовать только, чтобы $H_n(X, A)$ и $H_{n+1}(X, A)$ (или $\check{H}_c^{n+1}(X, A)$) были конечнопорожденными.

В связи с 3) сделаем следующее замечание: если $(X, A)\in\mathscr{B}_0$, $\gamma_n(X, A, G)$ — изоморфизм тогда и только тогда, когда $\gamma_n(X, A, P)$ — изоморфизм, P — редуцированная часть группы G. Действительно, если D — максимальная делимая подгруппа в G, то $G=D\oplus P$ и $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G)=\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), D)$ $\oplus \operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), P)$. Но, как показано в 3), $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), D)=0$.

В связи с условием 5) дадим примеры, которые показывают, что γ_* может и не быть изоморфизмом, если:

а) $\check{H}_c^{n+1}(X, A)$ и G — торзионные;

б) $\check{H}_c^{n+1}(X, A)$ — торзионно свободная, G — торзионная;

в) $\check{H}_c^{n+1}(X, A)$ и G — торзионно свободные группы.

Пример случая а) показан в [7]. Там построено компактное пространство X и торзионная группа T, такие, что $\check{H}^2(X, A)$ — торзионная и $\operatorname{Ker}\gamma_1(X, T)\neq 0$.

Пример случая б) дает дваадический соленоид S. Для него $\check{H}^1(S)=Q^{(2)}$ ($Q^{(2)}$ — группа рациональных чисел с знаменателями, равными степеням 2). Эта группа — торзионно свободная группа ранга 1, которая не является циклической. Для нее существует [9] счетная торзионная группа T, такая, что $\operatorname{Ext}(Q^{(2)}, T)$ — несчетная (в частности не равна нулю). Но так как $Q^{(2)}$ — торзионно свободная группа, то $\operatorname{Ext} Q^{(2)}, T)$ — делимая и $\operatorname{Ker}\gamma_0(S, T)$ $=\operatorname{Ext}(Q^{(2)}, T)$. Следовательно, $\operatorname{Ker}\gamma_0(S, T)\neq 0$.

Случай вида в) показан в [1] — нульмерные точные и Чеховские гомологии дваадического соленоида неизоморфные, если группа коэффициентов — группа целых чисел.

Отметим, что о существовании случаев вида а), б) и в), когда точные и Чеховские гомологии изоморфны, заключаем из того факта, что эти гомологии совпадают, если группа коэффициентов, например, делимая группа

(Q или квазициклическая группа $Z(p^\infty)$, p — простое число).

Отметим еще следующее утверждение:

Утверждение 2. *Если $\gamma_n(X, A, G)$ — изоморфизм, то $\gamma_n(X, A, G/{}^+G)$ — тоже изоморфизм, $(X, A) \in \mathscr{B}_0$.*

Действительно, из сервантно точной последовательности $0 \to {}^+G \to G \to G/{}^+G \to 0$ получаем, что

$$\ldots \operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G) \to \operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G/{}^+G) \to 0$$

тоже точна. Следовательно, если $\operatorname{Ker}\gamma_n(X, A, G) = 0$, то и $\operatorname{Ker}\gamma_n(X, A, G/{}^+G) = 0$.

Остановимся теперь на случае, когда группа $H_n(X, A, G)$ — счетная для данной группы G. (Как видно из формулы универсальных коэффициентов, тогда группа $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}_c(X, A), G)$ — тоже счетная).

Лемма 2. *Пусть $(X, A) \in \mathscr{B}$ и $|\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}_c(X, A), B)| < 2^{\aleph_0}$ (в частности $|H_n(X, A, B)| < 2^{\aleph_0}$), где редуцированная часть группы $B/{}^+B$ — счетная, неделимая на никаком простом p группа. Тогда $\check{H}^{n+1}_c(X, A) = T \oplus F$, где T — конечная, F — свободная, а $\gamma_n(X, A, G)$ — изоморфизм для каждой группы G.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $(X, A) \in \mathscr{B}_0$. Отметим сначала, что если $|\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B)| < 2^{\aleph_0}$, то из эпиморфизма

$$\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B) \to \operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B/{}^+B) \to 0,$$

индуцированного эпиморфизмом $B \to B/{}^+B \to 0$, получаем, что и $|\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B/{}^+B)| < 2^{\aleph_0}$.

Пользуясь еще фактом, что группа сервантных расширений данной группы (при помощи фиксированной группы) совпадает с группой сервантных расширений ее редуцированной части, дальше будем предполагать, что $B/{}^+B$ — редуцированная.

Обозначим коротко группу $\check{H}^{n+1}(X, A)$ через H. Так как $B/{}^+B$ — торзионно свободная, имеем

$$\operatorname{Ext}(H, B/{}^+B) = \operatorname{Ext}({}^+H, B/{}^+B) \oplus \operatorname{Ext}(H/{}^+H, B/{}^+B),$$

откуда видно, что мощность групп в правой сумме тоже меньше $2^{\aleph_0}$.

Сейчас покажем, как из условия $|\operatorname{Ext}({}^+H, B/{}^+B)| < 2^{\aleph_0}$ (при данных предположениях о $B/{}^+B$, без требования о счетности) следует, что ${}^+H$ — конечная группа. С этой целью рассмотрим точную последовательность $0 \to C \to {}^+H \to D \to 0$, где C — базисная группа, а D — делимая группа.

Эта последовательность индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Ext}(D, B/{}^+B) \to \operatorname{Ext}({}^+H, B/{}^+B) \to \operatorname{Ext}(C, B/{}^+B) \to 0$$

($\operatorname{Hom}(C, B/{}^+B) = 0$). Но если мощность средней группы в ней меньше $2^{\aleph_0}$, то мощность ее левой и правой группы тоже меньше $2^{\aleph_0}$. Покажем теперь, что $D = 0$. Предположим, что делимая торзионная группа D имеет хотя бы одну компоненту вида $Z(p^\infty)$. Тогда $\operatorname{Ext}(Z(p^\infty), B/{}^+B)$ будет прямым слагаемым в $\operatorname{Ext}(D, B/{}^+B)$ и тоже будет иметь мощность меньше $2^{\aleph_0}$. С другой стороны, группа $\mathrm{Ext}(Z(p^\infty), B/^+B)$ изоморфна p-адическому пополнению группы $\sum_m Z_p$ (напомним, что Z_p — группа целых p-адических чисел), где m — ранг p-базисной подгруппы торзионно свободной группы $B/^+B$ (см. [4]. При этом $m \neq 0$, так как $B/^+B$ не является p-делимой. Но p-адическое пополнение группы $\sum_m Z_p$ содержит группу Z_p, мощность которой равна $2^{\aleph_0}$. Отсюда получаем, что $|\mathrm{Ext}(Z(p^\infty), B/^+B)| \geq 2^{\aleph_0}$. Из этого противоречия следует, что $D=0$. Осталось показать, что C — конечная. Как базисная группа, $C=\sum_{p,k} Z(p^k)$, p — простое. Тогда $\mathrm{Ext}(C, B/^+B) = \prod_{p,k} \mathrm{Ext}(Z(p^k), B/^+B)$. С другой стороны, каждая группа $\mathrm{Ext}(Z(p^k), B/^+B)$ изоморфна факторгруппе группы $B/^+B$ по подгруппе вида $p^k(B/^+B)$ и, следовательно, не равна нулю, так как $B/^+B$ не делится ни на какое p. Отсюда видно, что если $|\mathrm{Ext}(C, B/^+B)| < 2^{\aleph_0}$, то число компонент $Z(p^k)$ в C — конечное.

Итак, доказано, что ${}^+\check{H}^{n+1}(X, A)$ — конечная группа.

Покажем теперь, как из $|\mathrm{Ext}(H/^+H, B/^+B)| < 2^{\aleph_0}$ следует, что группа $H/^+H$ — свободная. Так как $H/^+H$ — счетная, то, по теореме Понтрягина, достаточно показать, что каждая ее подгруппа конечного ранга — свободная.

Итак, пусть F — произвольная подгруппа в $H/^+H$ с конечном рангом r. Так как мономорфизм $0 \to F \to H/^+H$ индуцирует эпиморфизм

$$\mathrm{Ext}(H/^+H, B/^+B) \to \mathrm{Ext}(F, B/^+B) \to 0$$

то ясно, что $|\mathrm{Ext}(F, B/^+B)| < 2^{\aleph_0}$

Рассмотрим последовательность

$$0 \to \sum_r Z \to F \to T \to 0,$$

где группа T — периодическая.

В индуцированной последовательности

$$\mathrm{Hom}(\sum_r Z, B/^+B) \to \mathrm{Ext}(T, B/^+B) \to \mathrm{Ext}(F, B/^+B) \to 0$$

группа $\mathrm{Hom}(\sum_r Z, B/^+B) = \prod_{r<\aleph_0} B/^+B$ — счетная, а $|\mathrm{Ext}(F, B/^+B)| < 2^{\aleph_0}$. Следовательно, и $|\mathrm{Ext}(T, B/^+B)| < 2^{\aleph_0}$. Но в группе $\mathrm{Ext}(T, B/^+B)$, T — периодическая, $B/^+B$ — неделимая ни на какое p группа. Тогда, как в первой части доказательства, можно показать, что T — конечная. В таком случае, группа конечного ранга F — конечнопорожденная. А так как она еще и торзионно свободная, то очевидно, что F — свободная. Но тогда и группа $H/^+H$ — свободная.

Показано, что $\check{H}^{n+1}(X, A) = {}^+\check{H}^{n+1}(X, A) \oplus \check{H}^{n+1}(X, A)/{}^+\check{H}^{n+1}(X, A)$, где первая группа — конечная, а вторая — свободная.

Осталось показать, что в условиях леммы, $\gamma_n(X, A, G)$ — изоморфизм для каждой группы G.

Рассмотрим $\mathrm{Ker}\,\gamma_n(X, A, G) = \mathrm{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G)$. Но если $\check{H}^{n+1}(X, A) = T \oplus F$, где T — конечная, а F — свободная, то $\mathrm{Ker}\,\gamma_n(X, A, G) = \mathrm{Pext}(T, G)$. С другой стороны, $\mathrm{Ext}(T, G)$ — ограниченная (T — конечная) и подгруппа $\mathrm{Pext}(T, G)$ ее элементов бесконечной высоты — нулевая. Этим лемма доказана.

Следствие 2. *Если* $(X, A) \in \mathscr{B}$ *и* $|H_n(X, A, B)| < 2^{\aleph_0}$ *для* B — *торзионно свободной, счетной, неделимой ни на какое* p *группы, то* $\gamma_n(X, A, G)$— *изоморфизм для каждой группы* G.

Отметим специальный случай $B = Z$.

Теорема 3. *Если для* $(X, A) \in \mathscr{B}$, $|H_n(X, A, Z)| < 2^{\aleph_0}$, *то* $\gamma_n(X, A, G)$ — *изоморфизм для любой группы* G.

В [10] доказано, что если гомологии Стинрода с коэффициентами в группе Z данного компактного пространства —конечнопорожденные, то эти гомологии совпадают с гомологиями Чеха для произвольной группы G (напомним, что гомологии Стинрода совпадают с рассматриваемыми здесь точными гомологиями с точностью до размерности).

Замечание 3. Если группа $H_n(X, A, Z)$ — счетная, то она сама представима в виде прямой суммы конечной и свободной группы.

Действительно,

$$H_n(X, A) = \operatorname{Ext}(\check{H}_c^{n+1}(X, A), Z) \oplus \operatorname{Hom}(\check{H}_c^n(X, A), Z),$$

где, по лемме 2, $\check{H}_c^{n+1}(X, A) = {}^+\check{H}_c^{n+1}(X, A) \oplus F$, ${}^+\check{H}_c^{n+1}(X, A)$ — конечная, F — свободная группа. Тогда $\operatorname{Ext}(\check{H}_c^{n+1}(X, A), Z) = \operatorname{Ext}({}^+\check{H}_c^{n+1}(X, A), Z)$ тоже конечная. С другой стороны, счетная группа $\operatorname{Hom}(\check{H}_c^n(X, A), Z)$ содержится в $\prod_{r_0 \leq \aleph_0} Z$, где r_0 — ранг без торзии группы $\check{H}_c^n(X, A)$.Следовательно, $\check{H}_c^n(X, A)$ — свободная (напомним [4], что группа $\prod_{r_0 \leq \aleph_0} Z$ — $\aleph_1$-свободная.

Лемма 3. *Пусть* $(X, A) \in \mathscr{B}_0$, $\gamma_n(X, A, B)$ — *изоморфизм и редуцированная часть группы* $B/{}^+B$ — *счетная, неделимая ни на какое число группа. Тогда* $\check{H}_c^{n+1}(X, A) = T \oplus F$, *где* T — *торзионная,* F — *свободная, а* $\gamma_n(X, A, G)$ — *изоморфизм для каждой торзионно свободной группы* G.

Доказательство. Если $\gamma_n(X, A, B)$ — изоморфизм, то, по утверждению 2, $\gamma_n(X, A, B/{}^+B)$ — тоже изоморфизм, т. е. $\operatorname{Pext}(\check{H}_c^{n+1}(X, A), B^+B) = 0$. Кроме этого, так как $B/{}^+B$ торзионно свободная, то

$$\operatorname{Pext}(H, B/{}^+B) = \operatorname{Pext}({}^+H, B/{}^+B) \oplus \operatorname{Pext}(H/{}^+H, B/{}^+B)$$

(через H обозначена группа $\check{H}^{n+1}(X, A)$) и, следовательно, $\operatorname{Pext}(H/{}^+H, B/{}^+B) = 0$. Но тогда $\operatorname{Ext}(H/{}^+H, B/{}^+B) = \operatorname{Pext}(H/{}^+H, B/{}^+B) = 0$, в частности $|\operatorname{Ext}(H/{}^+H, B/{}^+B)| < 2^{\aleph_0}$. В таком случае, как в лемме 2, видно, что группа $F = H/{}^+H$ — свободная. Таким образом установлено, что $\check{H}^{n+1}(X, A) = {}^+\check{H}^{n+1}(X, A) \oplus F$.

Осталось показать, что если G — торзионно свободная, то $\operatorname{Ker}\gamma_n(X, A, G) = \operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G) = 0$. Но это действительно так, в силу равенства $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G) = \operatorname{Pext}({}^+\check{H}^{n+1}(X, A), G) = 0$ (${}^+\check{H}^{n+1}(X, A)$ — торзионная, G — торзионно свободная).

Следствие 3. *Если* $(X, A) \in \mathscr{B}_0$, *а* B — *торзионно свободная, счетная, неделимая на никаком* p *группа и* $\gamma_n(X, A, B)$ — *изоморфизм, то* $\check{H}^{n+1}(X, A) = T \oplus F$, *где* T — *торзионная, а* F — *свободная группа. Тогда* $\gamma_n(X, A, G)$ — *изоморфизм для каждой торзионно свободной группы* G.

При $B = Z$ получаем

Теорема 4. *Для* $(X, A) \in \mathscr{B}_0$ *гомоморфизм* $\gamma_n(X, A, Z)$ — *изоморфизм тогда и только тогда, когда* $\check{H}^{n+1}(X, A) = T \oplus F$, *где* T —*торзионная, а* F — *свободная группа. Если* $\gamma_n(X, A, Z)$ — *изоморфизм, то* $\gamma_n(X, A, G)$ — *изоморфизм и для каждой торзионно свободной группы* G.

Отметим еще несколько случаев, когда точные и Чеховские гомологии совпадают.

Теорема 5. *Пусть для* $(X, A) \in \mathscr{B}$, $|H_n(X, A, B)| < 2^{\aleph_0}$. *Тогда* $\gamma_n(X, A, B)$ — *изоморфизм, если:*

1) B *отображается эпиморфно на* Z *(т. е.* Z *отделяется прямым слагаемым в* B*).*

2) B — *свободная группа;*

3) $\check{H}_c^{n+1}(X, A)$ — *торзионная;*

4) $\check{H}_c^{n+1}(X, A)$ — *торзионно свободная,* B — *торзионная с конечном числом* p*-компонент;*

5) *Редуцированная часть группы* B *имеет мощность, меньше* $2^{\aleph_0}$.

В случаях 1) *и* 2) $\gamma_n(X, A, G)$ — *изоморфизм для каждой группы* G

Доказательство. И здесь достаточно рассмотреть только компактные пары.

1. Пусть $B = Z \oplus$ P. Тогда $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), Z)$ отделяется прямым слагаемым в $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B)$. Таким образом, если $|\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B)| < 2^{\aleph_0}$ (что следует, как уже отметили, по формуле универсальных коэффициентов из $|H_n(X, A, B)| < 2^{\aleph_0}$), то и $|\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), Z)| < 2^{\aleph_0}$. Но тогда, по лемме 2, $\gamma_n(X, A, G)$ — изоморфизм для любой группы G.

2. Это утверждение является очевидным следствием п. 1).

3. Пусть $\check{H}^{n+1}(X, A) = \Sigma_p T_p$, где T_p — p-компонента торзионной группы $\check{H}^{n+1}(X, A)$. Тогда $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B) = \prod_p \operatorname{Ext}(T_p, B)$. Но если $|\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B)| < 2^{\aleph_0}$ (из-за $|H_n(X, A, B)| < 2^{\aleph_0}$), то $\operatorname{Ext}(T_p, B) \neq 0$ только для конечного числа простых p. Для них $|\operatorname{Ext}(T_p, B)| < 2^{\aleph_0}$. Отсюда видно, что группы $\operatorname{Ext}(T_p, B)$ — торзионные. Действительно, $\operatorname{Ext}(T_p, B)$ является Z_p-модулем, так как T_p — Z_p модуль. Пусть теперь $a \in \operatorname{Ext}(T_p, B)$. Рассмотрим обобщенную циклическую группу $\{\alpha a\}_{\alpha \in Z_p}$, порожденную элементом a. Она либо изоморфна Z_p, либо является циклической группой вида $Z(p^k)$. Но если $|\operatorname{Ext}(T_p, B)| < 2^{\aleph_0}$, то $\{\alpha a\}_{\alpha \in Z_p}$ — конечная циклическая группа и a — торзионный элемент. Итак, группа $\operatorname{Ext}(T_p, B)$ — торзионная. С другой стороны, она — редуцированная (T_p — торзионная), копериодическая группа (каждая группа вида $\operatorname{Ext}(A, B)$ — копериодическая). Тогда (см. [4]), $\operatorname{Ext}(T_p, B)$ — ограниченная. Оказалось, что $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B)$ — конечная сумма ограниченных групп. Следовательно, она тоже ограниченная и $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B) = 0$.

4. Рассмотрим группу $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B)$. Пусть $B = \sum_{p \in I} T_p$, где T_p — p-компонента торзионной группы B, p — простое, I — конечное. Тогда $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B) = \sum_{p \in I} \operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), T_p)$ и, следовательно, $|\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), T_p)| < 2^{\aleph_0}$ для каждого $p \in I$. Отсюда, как в 3), видно, что $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), T_p)$ — торзионная. Но так как $\check{H}^{n+1}(X, A)$ счетная, торзионно свобод-

ная группа, а T_p — торзионная, то $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), T_p)$ — торзионно свободная (см. [11]). Следовательно, $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), T_p)=0$. Отсюда и $\operatorname{Ker}\gamma_n(X, A, B) = \operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B)=0$.

5. Пусть $B=D\oplus P$, где D — максимальная делимая подгруппа в B, а P — редуцированная часть B. Имеем $\operatorname{Ker}\gamma_n(X, A, B)=\operatorname{Ker}\gamma_n(X, A, P)$. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — топологически конфинальная последовательность вписанных друг в друга конечных канонических покрытий (X, A), φ'_k — ограничение φ_k на A. Так как группы $\check{H}^{n+1}(N_{\varphi_k}, N_{\varphi'_k})$ — конечнопорожденные, то $\operatorname{Ker}\gamma_n(X, A, P)$ можно представить [3] в виде

$$\operatorname{Ker}\gamma_n(X, A, P)=\varprojlim{}^{(1)}\operatorname{Hom}(\check{H}^{n+1}(N_{\varphi_k}, N_{\varphi'_k}), P).$$

Теперь, если $|P|<2^{\aleph_0}$, то и $|\operatorname{Hom}(\check{H}^{n+1}N_{\varphi_k}, N_{\varphi'_k})p|<2^{\aleph_0}$. Кроме этого, по условию $|\varprojlim{}^{(1)}\operatorname{Hom}(\check{H}^{n+1}(N_{\varphi_k}, N_{\varphi'_k})P|<2^{\aleph_0}$. Тогда (см. [12]), $\varprojlim{}^{(1)}\operatorname{Hom}(\check{H}^{n+1}(N_{\varphi_k}, N_{\varphi'_k}), P)=0$. Получили, что $\operatorname{Ker}\gamma_n(X, A, P)=0$, т. е. $\gamma_n(X, A, B)$ — изоморфизм.

Замечание 4. В [1] другим способом доказано, что если $H_n(X, A, B)$ и B — счетные, то $\gamma_n(X, A, B)$ — изоморфизм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Скляренко. Теория гомологий и аксиома точности. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5, 87—140.
2. Е. Г. Скляренко. Теоремы единственности в теории гомологий. *Мат. сб.*, **85**, 1971, 201—223.
3. В. И. Кузьминов. О производных функторах функтора проективного предела. *Сиб. мат. ж.*, **8**, 1967, 333—345.
4. Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы, т. 1. Москва, 1974.
5. L. Fuchs. Abelian Groups, *Int. Ser. Monographs in Pure and App. Math.*, 12, 1967.
6. В. Г. Мирюк. Гомологии и когомологии множеств и их окрестностей. *Мат. сб.*, **92**, 1973, 306—318.
7. С. В. Петкова. Об соотношении точных и Чеховских гомологий. *Доклады БАН*, **35**, 1982.
8. С. В. Петкова. Пространства с конечнопорожденными гомологиями и когомологиями. *Сердика*, **3**, 1977, 349—358.
9. J. Rotman. On a problem of Baer and a problem of Whitehead in abelian groups. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12**, 1961, 243—254.
10. N. E. Steenrod. Regular cycles of compact metric spaces. *Ann. Math.*, **41**, 1940, 833—851.
11. В. С. Журовский. О группах абелевых расширений периодических абелевых групп с помощью абелевых групп без кручения. *Успехи мат. наук*, **16**, 1961, № 4, 161—166.
12. А. Э. Харлап. Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обобщенные многообразия. *Мат. об.*, **96**, 1975, 347—373.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 9. 6. 1981;
в переработанном виде 5. 10. 1981