PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЗАРЕЛУА

ГЕНЧО С. СКОРДЕВ

В [15] для любого замкнутого отображения f пространства X на Y и модуля L были определены резольвенты постоянного пучка $\mathsf{L}=Y\times L$ — резольвенты Зарелуа замкнутого отображения f. В настоящей работе рассматриваются спектральные последовательности, индуцированные этими резольвентами. Хотя для данного f имеются очень много резольвент, то соответствующие им спектральные последовательности оказываются в ряде случаев изоморфными и тем самым получается одна единственная спектральная последовательность для замкнутого отображения f — спектральная последовательность Зарелуа отображения f (см. ПП1. и 2).

В п. 3 рассматриваются резольвенты замкнутого отображения f, где f — естественная проекция $f:X\to X/G$, G — вполне-несвязная компактная группа, X — G-пространство, X/G — пространство орбит. Полученные результаты мы применим в другом месте для исследования пространства орбит и отображения f.

В пп.4, 5, 6 изучается $f:X\to X/G$ в случае, когда группа G конечна и действует свободно или полусвободно в пространстве X. Вычислена спектральная последовательность Зарелуа отображения f — в первом случае она изоморфна спектральной последовательности Картана регулярного накрытия f, а во втором случае — спектральной последовательности Бореля полусвободного G-пространства X.

В п.8 рассматривается гомоморфизм рестрикции резольвенты замкнутого отображения и находится его связь с гомоморфизмом ограничения в когомологиях групп.

В п.9 рассматривается гомоморфизм инфляции резольвенты Зарелуа замкнутого отображения и находится его связь с гомоморфизмом инфляции в когомологиях групп.

В п.10 по аналогии с резольвентами Зарелуа определяется дифференциальный пучок для произвольного непрерывного отображения.

В п.11 определяется резольвента Зарелуа для произвольного бесконечного накрытия f. Если f — регулярное накрытие, то спектральная последовательность, индуцированная этой резольвентой, изоморфна спектральной последовательности Картана регулярного накрытия f.

В п.12 вычисляются резольвенты и соответствующие им спектральные последовательности Зарелуа конечнолистных, нерегулярных накрытий.

В п.13 находится связь между спектральной последовательностью Зарелуа отображения $p(G, H): B(H)\to B(G)$ (где $B(G)$ и $B(H)$ — классифицирующие пространства конечных групп G и H, а H — подгруппа G) и когомологиями, и спектральной последовательностью Снаппера G-множества G/H.

Основные результаты этой работы были получены до 1978 г., докладовались на Международной топологической конференции в Москве 1979 г. и опубликованы без доказательств в [14, 16].

1. Категория Ф. Через Ф будем обозначать категорию всех двуместных функторов $\mathscr{F}:\Delta\times M(K)\to\partial GM(K)$, контравариантных относительно первого и ковариантные относительно второго аргумента и удовлетворяющие условиям $F1$, $F2$, $F3$ [15, п1.] Если $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2\in\Phi$, то морфизм $\alpha:\mathscr{F}_1\to\mathscr{F}_2$ — естественное преобразование функтора $\mathscr{F}_1$ в функтор $\mathscr{F}_2$, такое, что для любого симплекса $\Delta_t\in\Delta$ следующая диаграма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_1^{-1}(\Delta_t, L) \arrow[rr, "\alpha^{-1}(\Delta_t, L)"] \arrow[dr, equal] & & \mathscr{F}_2^{-1}(\Delta_t, L) \arrow[dl, equal] \\ & H^\circ(\Delta_t, L) & \end{tikzcd}$$

ПЛИСКА Български математически студии. Том 6, 1983, с. 121—149.

Здесь $\mathscr{F}_k=\{\mathscr{F}^i_k,\ \delta^i_k,\ \ i=0, \pm 1, \ldots\}$, $k=1,\ 2,\ L\in M(K)$ и $\alpha(\Delta_t, L)=\{\alpha^i(\Delta_t, L),\ i=0, \pm 1, \ldots\}$.

Пусть α и β — морфизмы $\mathscr{F}_1$ в $\mathscr{F}_2$. Будем говорить, что морфизмы α и β гомотопны, если существует естественое преобразование $\theta=\{\theta^i,\ i=0, \pm 1, \ldots\}$, $\theta^i : \mathscr{F}^i_1 \to \mathscr{F}^{i-1}_2$, такое, что

$$\alpha^i(\Delta_t, L)-\beta^i(\Delta_t, L)=\delta^{i-1}_2(\Delta_t, L)\,\theta^i(\Delta_t, L)+\theta^{i+1}(\Delta_t, L)\,\delta^i_1(\Delta_t, L). \tag{1.1}$$

Здесь $\theta^{-1}=0$, а $\delta_k(\Delta_t, L)=\{\delta^i_k\ (\Delta_t,\ L), i=0, \pm 1, \ldots\}$ — дифференциал в коцепном комплексе $\mathscr{F}_k(\Delta_t, L)$.

Очевидно, гомотопия в классе морфизмов объектов Φ является реляцией эквивалентности.

В [15] мы построили функтор $\mathscr{D}^* : C\mathscr{M}\times\Phi\times M(K)\to\partial GS(Y)$. Этот функтор ковариантный и точный относительно второго аргумента.

В этом параграфе рассмотрим следующий вопрос: пусть $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2\in\Phi$ и $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ гомотопны в Φ. Что можно сказать о резольвентах $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}_1, L)$ и $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}_2, L)$? При этом будем считать отображение f и модуль L фиксированными.

Рассмотрим функтор $\mathscr{D}^*_2 : \Phi\to\partial GS(Y)$, определенный следующим образом: $\mathscr{D}^*_2(\mathscr{F})=\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)$. Знаем, что $\mathscr{D}^*_2$ — ковариантный и точный функтор.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2\in\Phi$ и $\alpha, \beta : \mathscr{F}_1\to\mathscr{F}_2$ — морфизм в Φ. Если морфизмы α и β гомотопны, то морфизмы $\mathscr{D}^*_2(\alpha)$ и $\mathscr{D}^*_2(\beta)$ гомотопны.*

Доказательство. Пусть $\theta=\{\theta^i,\ i=0, \pm 1, \ldots\}$ — гомотопия, связывающая морфизмы α и β, т. е. для любого $\Delta_t\in\Delta$ имеем морфизмы $\theta^i(\Delta_t)$: $\mathscr{F}^i_1(\Delta_t, L)\to\mathscr{F}^{i-1}_2(\Delta_t, L)$, которые естественны и удовлетворяют (1.1). Пусть $(U, \sigma)\in Z(f)$. По определению $\mathscr{D}^*(U_\sigma, \mathscr{F}_k, L)=U\times\mathscr{F}_k(P(\sigma), L)$, $k=1, 2$. Пусть $\theta^i(U,\ \sigma)\,(P(\sigma))=\mathrm{id}\ (U)\times\theta^i(P\ (\sigma))$. Проверим, что $\{\theta^i(U, \sigma), (U, \sigma)\in Z(f)\}$ — морфизм $D^*(f, \mathscr{F}_1, L)$ в $D^*(f, \mathscr{F}_2, L)$. Пусть $(U', \sigma')\in Z(f)$ и $(U', \sigma')>(U, \sigma)$. Так как θ^i — естественное преобразование, то имеем

$$\theta^{i+1}(P(\sigma'))\,\mathscr{F}^{i+1}_1(i(\sigma', \sigma), \mathrm{id})=\mathscr{F}^i_2\ (i(\sigma', \sigma), \mathrm{id})\ \theta^{i+1}(P(\sigma)).$$

Отсюда получаем $\theta^{i+1}(U', \sigma')\,\rho^{i+1}_1(\sigma', \sigma)=\rho^i_2\ (\sigma',\ \sigma)\ \theta^{i+1}\ (U,\ \sigma)$. Здесь $\rho^i_k(\sigma', \sigma)$ — гомоморфизм ограничения в $D^*(f, \mathscr{F}_k, L)$.

Положим $\Xi^i=\varinjlim\{\theta^i(U, \sigma) : (U, \sigma)\in Z(f)\}$. Тогда Ξ^i есть гомоморфизм пучка $\mathscr{D}^i_2\ (\mathscr{F}_1)$ в пучок $\mathscr{D}^{i-1}_2\ (\mathscr{F}_2)$. Так как $\theta^{-1}=0$, то $\Xi^{-1}=0$.

Из (1.1) следует, что $\mathscr{D}^i_2\ (\alpha)-\mathscr{D}^i_2\ (\beta)=\delta^{i-1}_2\,\Xi^i+\Xi^{i+1}\,\delta^i_1$. Здесь $\mathscr{D}^*_2(\alpha)=\{\mathscr{D}^i_2(\alpha), i=0, \pm 1, \ldots\}$ и $\mathscr{D}^*_2(\beta)=\{\mathscr{D}^i_2(\beta),\ i=0, \pm 1, \ldots\}$.

Лемма доказана.

Следовательно, если через $\mathrm{H}\Phi$ обозначим категорию, в которой объекты являются гомотопическими классами объектов из Φ, а морфизмы — гомотопические классы морфизмов из Φ, и аналогично определим и категорию $\mathrm{H}\partial GS(Y)$, то можем рассматривать функтор $\mathscr{D}^*_2$ как функтор из $\mathrm{H}\Phi$ в $\mathrm{H}\partial GS(Y)$.

Следствие 1.2 *Пусть $\mathscr{F}\in\Phi$ и $\alpha : \mathscr{F}\to\mathscr{F}$ — морфизм из Φ. Если α гомотопен идентитету, то морфизм $\mathscr{D}^*_2(\alpha)$ гомотопен идентитету.*

Следствие 1.3. *Пусть $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2\in\Phi$ и $\alpha : \mathscr{F}_1\to\mathscr{F}_2$ — морфизм из Φ. Если α — гомотопическая эквивалентность, то $\mathscr{D}^*_2(\alpha)$ — гомотопическая эквивалентность.*

Пусть $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2 \in \Phi$. Так как L — фиксированный модуль, то мы можем рассматривать $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ как функторы из категории Δ в $\partial GM(K)$. При этом $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ удовлетворяют условиям $F1$, $F2$, $F3$. Так как категория Δ есть категория с моделями, то из теоремы об ациклических моделях [2, с. 41—44] получаем

Лемма 1.4 *Если $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2 \in \Phi'$, то они гомотопически эквивалентны в* Φ(Φ' — все представительные функторы из Φ).

Теперь, из леммы 1.4. и следствия 1.3 получаем

Теорема 1.5 *Если $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2 \in \Phi'$, то $\mathscr{D}_2^*(\mathscr{F}_1)$ и $\mathscr{D}_2^*(\mathscr{F}_2)$ — гомотопически эквивалентны.*

Другими словами, имеем

Теорема 1.5′. *Пусть f — замкнутое отображение пространства X на Y, $L \in M(K)$. Если $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in \Phi'$, то резольвенты $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}_1, L)$ и $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}_2, L)$ гомотопически эквивалентны.*

В частности получаем

Следствие 1.6. *Резольвенты $\mathscr{D}^*(f, \Delta^*, L)$ и $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}^*, L)$ — гомотопически эквивалентны, $\mathscr{F} \in \Phi'$.*

Резольвенты $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)$ будем называть резольвентами Зарелуа, $\mathscr{F} \in \Phi'$.

2. Спектральная последовательность Зарелуа. Пусть f — замкнутое отображение Хаусдорфового пространства X на пространство Y, К — пучок $Y \times K$ и $\mathscr{F} \in \Phi$. Тогда пучок $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, K)$ есть резольвента пучка К. По стандартной схеме [2, с. 201—204] резольвента $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, K)$ определяет две спектральные последовательности

$\mathrm{I}(f, \mathscr{F}, K) = \{\mathrm{I}_r^{p,q} : p, q = 0, \pm 1, \ldots, r = 1, 2, \ldots\}$ и $\mathrm{II}(f, \mathscr{F}, K) = \{\mathrm{II}_r^{p,q} : p, q = 0, \pm 1, \ldots . r = 1, 2, \ldots\}$. Отметим только, что $\mathrm{I}(f, \mathscr{F}, K)$ и $\mathrm{II}(f, \mathscr{F}, K)$ являются трехместными функторами, контравариантными относительно первого и ковариантными относительно второго и третьего аргументов.

Здесь мы рассмотрим следующий вопрос: если $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2 \in \Phi'$, то какова связь между $\mathrm{I}(f, \mathscr{F}_1, K)$ и $\mathrm{I}(f, \mathscr{F}_2, K)$ (соответственно, между $\mathrm{II}(f, \mathscr{F}_1, K)$ и $\mathrm{II}(f, \mathscr{F}_2, K)$)?

Начнем с общих замечаний. Пусть $\mathscr{L}^* = \{\mathscr{L}^q, \delta^q(\mathscr{L}^*) : q = -1, 0, 1, \ldots\}$ и $\mathscr{M}^* = \{\mathscr{M}^q, \delta^q(\mathscr{M}^*) : q = -1, 0, 1, \ldots\}$ принадлежат $\partial GS(Y)$, т. е. это — коцепные комплексы из пучков $S(Y)$. Пусть даны коцепные отображения α^*, β^* из $\mathscr{L}^*$ в $\mathscr{M}^*$, $\alpha^* = \{\alpha^q : q = -1, 0, 1, \ldots\}$, $\beta^* = \{\beta^q : q = -1, 0, 1, \ldots\}$. Предположим, что эти коцепные отображения гомотопны, т. е. существуют гомоморфизмы $s^n : \mathscr{L}^n \to \mathscr{M}^{n-1}$, $n = 0, 1, \ldots$ и $s^{-1} = 0$ такое, что выполнено $\alpha^n - \beta^n = s^{n+1}\delta^n(\mathscr{L}^*) + \delta^{n-1}(\mathscr{M}^*)s^n$ при $n = -1, 0, \ldots$

Рассмотрим первые спектральные последовательности, соответствующие коцепным комплексам $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$: $I(\mathscr{L}^*)$ и $I(\mathscr{M}^*)$, [2, с.201—204]. Эти спектральные последовательности определяются при помощи следующих дифференциальных градуированных бикомплексов: $L = \{L^{p,q} : p, q = 0, 1, \ldots\}$ и $M = \{M^{p,q} : p, q = 0, 1, \ldots\}$, где $L^{p,q} = \Gamma(Y, \mathscr{C}^p(\mathscr{L}^q))$ и $M^{p,q} = \Gamma(Y, \mathscr{C}^p(\mathscr{M}^q))$. Здесь $\mathscr{C}^* = \{\mathscr{C}^p : p = 0, 1, \ldots\}$ — функтор Годемана (каноническая вялая резольвента Годемана [2, с. 192—198).

Первый дифференциал $d'(L) = \{d'(L)^{p,q}\}$ в бикомплексе L определяется дифференциалом канонической вялой резольвенты Годемана $\mathscr{C}^*(\mathscr{L}^q)$ пучка $\mathscr{L}^q$:

$$d'(L)^{p,q} = \Gamma(\delta^p(\mathscr{C}^*)(\mathscr{L}^q)),$$

где $\delta^p(\mathscr{C}^*)(\mathscr{L}^q) : \mathscr{C}^p(\mathscr{F}^q) \to \mathscr{C}^{p+1}(\mathscr{L}^q)$ — p-ый дифференциал в коцепном комплексе $\mathscr{C}^*(\mathscr{L}^q)$.

Второй дифференциал $d''(L)=\{d''(L)^{p,q}\}$ бикомплекса L порождается дифференциалом коцепного комплекса $\mathscr{L}^*$:

$$d''(L)^{p,q}=(-1)^p\,\Gamma(\delta^{p,q}(L)),$$

где
$$\delta^{p,q}(L)=\mathscr{C}^p(\delta^q(\mathscr{L}^*)).$$

Тогда по определению

$$\mathrm{I}_1^{p,q}(\mathscr{L}^*)=H_{\mathrm{II}}(L^{p,*}) \text{ и } \mathrm{I}_1^{p,q}(\mathscr{M}^*)=H_{\mathrm{II}}(M^{p,*}).$$

Здесь $H_{\mathrm{II}}(L^{p,*})$ (соответственно, $H_{\mathrm{II}}(M^{p,*})$ — когомологии коцепного комплекса $L^{p,*}=\{\Gamma(Y,\mathscr{C}^p(\mathscr{L}^*)),d''(L)\}$ (соответственно, $M^{p,*}=\{\Gamma(Y,\mathscr{C}^p(\mathscr{M}^*)),d''(M)\}$.

Рассмотрим коцепное отображение $\alpha^*=\{\alpha^q:q=-1,0,\dots\}$. Оно индуцирует морфизм $\alpha^{*,*}=\{\alpha^{p,q}\}:L\to M$, где $\alpha^{p,q}=(-1)^p\,\Gamma(\mathscr{C}^p(\alpha^q))$.

Аналогично, цепное отображение $\beta^*=\{\beta^q:q=-1,0,\dots\}$ индуцирует морфизм $\beta^{*,*}=\{\beta^{p,q}\}:L\to M$, где $\beta^{p,q}=(-1)^p\,\Gamma(\mathscr{C}^p(\beta^q))$.

Рассмотрим гомотопию $s=\{s^n\}$. Пусть $s^{p,q}=\Gamma(\mathscr{C}^p(s^q)):L^{p,q}\to M^{p,q-1}$. Заметим, что гомоморфизм $s^{*,q}:L^{*,q}\to M^{*,q-1}$ (при фиксированном q) является коцепным отображением.

Пусть $t^p=\{s^{p,*}\}:L^{p,*}\to M^{p,*}$. Проверим, что t^p — гомотопия, связывающая коцепные отображения $\alpha^{p,*}=\{\alpha^{p,q}:q=0,1,\dots\}$ и $\beta^{p,*}=\{\beta^{p,q}:q=0,1,\dots\}$.

Действительно, имеем $\alpha^q-\beta^q=s^{q+1}\,\delta^q(\mathscr{L}^*)+\delta^{q-1}(\mathscr{M}^*)\,s^q$ при $q=-1,0,\dots$ Применяя к этому равенству функтор $(-1)^p\,\Gamma\mathscr{C}^p$, получаем

$$\alpha^{p,q}-\beta^{p,q}=s^{p,q+1}\,d''(L)^{p,q}+d''(M)^{p,q-1}\,s^{p,q}$$

(здесь p фиксировано), т. е. $\alpha^{p,*}$ и $\beta^{p,*}$ гомотопны.

Пусть $\alpha_1^{p,*}(\mathrm{I})$ и $\beta_1^{p,*}(\mathrm{I})$ — гомоморфизмы в когомологиях, индуцированные $\alpha^{p,*}$ и $\beta^{p,*}$: $\alpha_1^{p,*}(\mathrm{I}),\beta^{p,*}(\mathrm{I}):H_{\mathrm{II}}(L^{p,*})\to H_{\mathrm{II}}(M^{p,*})$.

Так как гомоморфизмы $\alpha^{p,*}$ и $\beta^{p,*}$ гомотопны, то имеем

$$\alpha_1^{p,*}(\mathrm{I})=\beta_1^{p,*}(\mathrm{I}) \tag{2.1}$$

для любого p. Тем самым доказана

Лемма 2.1. *Если α^* и β^* — гомотопные цепные отображения $\mathscr{L}^*$ в $\mathscr{M}^*$, то они индуцируют один и тот же гомоморфизм $\mathrm{I}_1(\mathscr{L}^*)$ в $\mathrm{I}_1(\mathscr{M}^*)$.*

Следствие 2.2 *Пусть $\gamma^*:\mathscr{L}^*\to\mathscr{F}^*$ — коцепное отображение, гомотопное идентитету. Тогда γ^* индуцирует тождественное отображение $\mathrm{I}_1(\mathscr{L}^*)$ в себя.*

Следствие 2. 3. *Пусть $\gamma^*:\mathscr{L}^*\to\mathscr{M}^*$ — гомотопическая эквивалентность. Тогда γ^* индуцирует изоморфное отображение $\mathrm{I}_1(\mathscr{L}^*)$ в $\mathrm{I}_1(\mathscr{M}^*)$.*

Следствие 2.4. *Пусть $\alpha^*,\beta^*:\mathscr{L}^*\to\mathscr{M}^*$ — гомотопные цепные отображения и $\alpha(\mathrm{I}),\beta(\mathrm{I})$ — гомоморфизмы первых спектральных последовательностей $\alpha(\mathrm{I}),\beta(\mathrm{I}):\mathrm{I}(\mathscr{L}^*)\to\mathrm{I}(\mathscr{M}^*)$, индуцированные α^* и β^*. Тогда $\alpha(\mathrm{I})=\beta(\mathrm{I})$.*

Рассмотрим вторые спектральные последовательности, индуцированные $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$:

$$\mathrm{II}(\mathscr{L}^*)=\{\mathrm{II}_r^{p,q}(\mathscr{L}^*)\},\ \mathrm{II}(\mathscr{M}^*)=\{\mathrm{II}_r^{p,q}(\mathscr{M}^*)\}.$$

По определению, $\mathrm{II}_1^{p,q}(\mathscr{L}^*)=H_{\mathrm{I}}(L^{*,q})$ и $\mathrm{II}_1^{p,q}(\mathscr{M}^*)=H_{\mathrm{I}}(M^{*,q})$.

Здесь $H_{\mathrm{I}}(L^{*,q}),H_{\mathrm{I}}(M^{*,q})$ — когомологии коцепных комплексов $L^{*,q}$ и $M^{*,q}$, с дифференциалами $d'(L)$ и $d'(M)$, соответственно. Вспомним, что $s^{*,q}:L^{*,q}$

$\longrightarrow M^{*,q-1}$ есть коцепное отображение. Это коцепное отображение индуцирует гомоморфизм

$$s^{*,q}(\mathrm{I}): H_I(L^{*,q}) \longrightarrow H_I(M^{*,q-1}),$$

где $s^{*,q}(\mathrm{I}) = \{s^{p,q}(\mathrm{I})\}$ и $s^{p,q}(\mathrm{I}): \mathrm{II}_1^{p,q}(\mathscr{L}^*) \to \mathrm{II}_1^{p,q-1}(\mathscr{M}^*)$. Коцепные отображения α^* и β^* индуцируют коцепные отображения

$$\alpha_1^{p,*}(\mathrm{II}),\ \beta_1^{p,*}(\mathrm{II}): \mathrm{II}_1^{p,*}(\mathscr{L}^*) \longrightarrow \mathrm{II}_1^{p,*}(\mathscr{M}^*).$$

Проверим, что $\alpha_1^{p,*}(\mathrm{II})$ и $\beta_1^{p,*}(\mathrm{II})$ гомотопны.

Имеем $\alpha^q - \beta^q = s^{q+1}\,\delta^q(\mathscr{L}^*) + \delta^{q-1}(\mathscr{M}^*)\,s^q$. Применяя к этому равенству функтор $(-1)^p\,\Gamma\,\mathscr{C}^p$, получаем $\alpha^{p,q} - \beta^{p,q} = s^{p,q+1}\,d''(L)^{p,q} + d''(M)^{p,q-1}\,s^{p,q}$. Переходя в этом равенстве к когомологиям H_I и используя, что $\alpha^{*,q}$, $\beta^{*,q}$, $s^{*,q}$, $s^{*,q-1}$, $d''(L)$, $d''(M)$ являются коцепными отображениями, получаем $\alpha_1^{p,q}(\mathrm{II}) - \beta_1^{p,q}(\mathrm{II}) = s^{p,q+1}(I)\,d_\mathrm{I}''(L)^{p,q} + d_\mathrm{I}''(M)^{p,q-1}\,s^{p,q}(\mathrm{I})$. Здесь $d_\mathrm{I}''(L)^{p,q}: H(L^{p,q}) \to H_I(L^{p,q+1})$ — индуцирован $d''(L)$. Аналогично, $d_\mathrm{I}''(M)^{p,q-1}: H_\mathrm{I}(M^{p,q-1}) \to H_\mathrm{I}(M^{p,q})$ — индуцирован $d''(M)$. При этом $d_\mathrm{I}''(L)$ (соответственно, $d_\mathrm{I}''(M)$— дифференциал в $\mathrm{II}_1(L)$ (соответственно, $\mathrm{II}_1(M)$). Тем самым проверено, что $\alpha_1^{p,*}(\mathrm{II})$ и $\beta_1^{p,*}(\mathrm{II})$ гомотопны.

Пусть $\alpha(\mathrm{II}) = \{\alpha_r(\mathrm{II}): r = 1, 2, \ldots\}$ и $\beta(\mathrm{II}) = \{\beta_r(\mathrm{II}): r = 1, 2, \ldots\}$ — гомоморфизмы $\mathrm{II}(\mathscr{L}^*)$ в $\mathrm{II}(\mathscr{M}^*)$, индуцированные α^* и β^*. Имеем

Лемма 2.5. *Если α^* и β^* — гомотопные цепные отображения, $\mathscr{L}^*$ в $\mathscr{M}^*$, то $\alpha_r(\mathrm{II}) = \beta_r(\mathrm{II})$ при $r \geqq 2$.*

Следствие 2.6. *Если $\gamma^*: \mathscr{L}^* \to \mathscr{L}^*$ — гомотопное идентитету коцепное отображение, то γ^* индуцирует тождественное отображение $\mathrm{II}_r(\mathscr{L}^*)$ в себя при $r \geqq 2$.*

Следствие 2.7. *Пусть $\gamma^*: \mathscr{L}^* \to \mathscr{M}^*$ — гомотопическая эквивалентность. Тогда γ^* индуцирует изоморфизм $\mathrm{II}_r(\mathscr{L}^*)$ в $\mathrm{II}_r(\mathscr{M}^*)$ при $r \geqq 2$.*

Рассмотрим теперь резольвенту Зарелуа $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)$. Эта резольвента порождает две спектральные последовательности

$$\mathrm{I}(f, \mathscr{F}, L) = \{\mathrm{I}_r^{p,q}(f, \mathscr{F}, L): p, q, r\} \text{ и } \mathrm{II}(f, \mathscr{F}, L) = \{\mathrm{II}_r^{p,q}(f, \mathscr{F}, L): p, q, r\}.$$

Следствие 2.8. *Пусть $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in \Phi$ и $\alpha, \beta: \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ — гомотопные морфизмы. Если*

$$\mathrm{I}_r^{p,q}(\alpha),\ \mathrm{I}_r^{p,q}(\beta): \mathrm{I}_r^{p,q}(f, \mathscr{F}_1, L) \longrightarrow \mathrm{I}_r^{p,q}(f, \mathscr{F}_2, L)$$

и

$$\mathrm{II}_r^{p,q}(\alpha),\ \mathrm{II}_r^{p,q}(\beta): \mathrm{II}_r^{p,q}(f, \mathscr{F}_1, L) \longrightarrow \mathrm{II}_r^{p,q}(f, \mathscr{F}_2, L) —$$

гомоморфизмы, индуцированные α и β, то

$$\mathrm{I}_r^{p,q}(\alpha) = \mathrm{I}_r^{p,q}(\beta) \text{ при } r \geqq 1,$$

$$\mathrm{II}_r^{p,q}(\alpha) = \mathrm{II}_r^{p,q}(\beta) \text{ при } r \geqq 2.$$

Так как любые два функтора $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in \Phi'$ гомотопически эквивалентны, то имеем

Следствие 2.9. *$\mathrm{I}_r^{p,q}(f, \mathscr{F}_1, L)$ изоморфна $\mathrm{I}_r^{p,q}(f, \mathscr{F}_2, L)$ при $r \geqq 1$ и $\mathrm{II}_r^{p,q}(f, \mathscr{F}_1, L)$ изоморфна $\mathrm{II}_r^{p,q}(f, \mathscr{F}_2, L)$ при $r \geqq 2$, $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in \Phi'$.*

Следствие 2.10. *$\mathrm{I}_r^{p,q}(f, \mathscr{F}^*, L)$ изоморфна $\mathrm{I}_r^{p,q}(f, \Delta^*, L)$ при $r \geqq 1$ и $\mathrm{II}_r^{p,q}(f, \mathscr{F}^*, L)$ изоморфна $\mathrm{II}_r^{p,q}(f, \Delta^*, L)$ при $r \geqq 2$, $\mathscr{F} \in \Phi'$.*

Имеем $\mathrm{I}_2^{p,q}(f, \mathscr{F}, L) = H_{\mathrm{I}}^p H_{\mathrm{II}}^q (\Gamma(Y, \mathscr{C}^*(\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L))))$ [2, гл. II. П.4.5]. Отсюда получаем

$$\mathrm{I}_2^{p,q}(f, \mathscr{F}, L) = H^p(Y, \mathscr{H}^q(\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L))).$$

Так как $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F} L)$ — резольвента, то

$$\mathscr{H}^q(\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, F)) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad q > 0 \\ L & \text{при} \quad q = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mathrm{I}_r^{p,q}(f, \mathscr{F}, L) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad q > 0 \\ H^p(Y, L) & \text{при} \quad q = 0. \end{cases}$$

Для второй спектральной последовательности имеем

$$\mathrm{II}_2^{p,q}(f, \mathscr{F}, L) = H^p(H^q(Y, \mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)).$$

Так как $\mathscr{D}^q(f, \mathscr{F}, L) = 0$ при $q \leqq -2$, то вторая спектральная последовательность и ее предельный член ассоциированы с $H^*(Y, L)$. Тем самым получаем спектральную последовательность $E(f, \mathscr{F}, L) = \{E_r^{p,q}(f, \mathscr{F}, L) : r = 2, 3, \ldots; \ p, q = 0, 1 \ldots\}$, для которой $E_\infty^{p,q}(f, \mathscr{F}, L)$ ассоциирован с $H^*(Y, L)$. Эту спектральную последовательность назовем спектральной последовательностью Зарелура замкнутого отображения f, соответствующей функтору $\mathscr{F}$.

Лемма 2.11. *Пусть $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in \Phi$ и $\alpha, \beta : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ — гомотопные морфизмы. Тогда, если $E(\alpha), E(\beta) : E(f, \mathscr{F}_1, L) \to E(f, \mathscr{F}_2, L)$ — гомоморфизмы, индуцированные α и β, то $E(\alpha) = E(\beta)$.*

Лемма 2.11 следует непосредственно из следствия 2.4, леммы 2.5 и определения спектральной последовательности Зарелуа.

Тем самым получаем:

Теорема 2.12. *Если $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in \Phi'$, то спектральные последовательности Зарелуа $E(f, \mathscr{F}_1, L)$ и $E(f, \mathscr{F}_2, L)$ изоморфны.*

Другими словами, спектральная последовательность Зарелуа $E(f, \mathscr{F}, L)$ не зависит от функтора $\mathscr{F} \ni \Phi'$, а только от замкнутого отображения f и модуля L.

В частности имеем

Следствие 2.13. *Спектральные последовательности Зарелуа $E(f, \mathscr{F}, L)$ и $E(f, \Delta^*, L)$ изоморфны, $\mathscr{F} \in \Phi'$.*

3. G-пространства и резольвенты Зарелуа. Пусть X — нормальное пространство и G-вполне-несвязная, компактная группа, действующая на пространстве X. Через Y обозначим пространство орбит X/G действия G в X. Через $f : X \to Y$ обозначим естественную проекцию, сопоставляющую любой точке ее орбиту.

Пусть $\Delta(G)$ — категория, чьи объекты — симплексы с транзитивным и симплициальным действием группы G. Морфизмы категории $\Delta(G)$ — G-инвариантные симплициальные отображения.

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей. Будем рассматривать K как G-модуль с тривиальным действием G (для $g \in G$ и $x \in K$, $gx = x$). Через $\partial GM(K)$ обозначим категорию G-коцепных комплексов из K-модулей, а через Φ — категорию всех функторов $\mathscr{F} : \Delta(G) \to \partial GM(K)$, удовлетворяющих условиям $F1$, $F2$, $F3$. При этом будем рассматривать нульмерные когомологии $H^0(\Delta_t, K)$ с естественной структурой G-модуля индуцированной G-структуры симплекса Δ_t.

Пусть $Z(f, G)=\{(U, \sigma,)\in Z(f): P(\sigma)\in \Delta(G)\}$, при этом в $P(\sigma)$ действие группы G индуцировано действием G в пространстве X.

Множество $Z(f, G)$ частично упорядочено (как подмножество $Z(f)$. Проверим, что имеем:

Лемма 3.1. *Пусть X — нормальное пространство и G — компактная, вполне-несвязная группа, действующая на пространстве X. Если $f: X \to Y$ — естественная проекция X на пространстве орбит, то множество $Z(f, G)$ — конфинальное подмножество $Z(f)$.*

Доказательство. Пусть $(U, \sigma)\in Z(f)$, $\sigma=\{U_0, \ldots, U_s\}$, $x_0\in U_0$ и $f^{-1}(f(x_0))\cap U_i \neq \varnothing$ при $i=1, \ldots, s$. Через G_{x_0} обозначим стационарную подгруппу точки x_0, т. е. $G_{x_0}=\{g\in G: gx_0=x_0\}$, а через Gx_0 — орбиту точки x_0, т. е. $Gx_o=\{gx_0: g\in G\}$. Пусть $x_i\in U_i$, $g_i\in G$ такие, что $g_i x_0=x_i$ при $i=0, \ldots, s$. Обозначим через H_0 следующую группу:

$$H_0=\{g\in G: gh_0\in G,\ g_i g g_i^{-1} h_i\in U_i \text{ при } h_i\in Gx_0\cap U_i\}.$$

Группа H_0 — открытая подгруппа G. Так как G вполне-несвязна, то в G существует нормальный делитель H такой, что а) $H\subset H_0$ и б) группа $G_1=G/H$ конечна, см [11].

Пусть X_1 — пространство орбит действия группы H на пространстве X т. е. $X_1=X/H$ и p_1: $X\to X_1$ — естественная проекция. Так как H — нормальный делитель группы G и $G_1=G/H$, то в пространстве X_1 действует группа G_1, и пространство ее орбит совпадает с Y. Пусть p_2: $X_1\to Y$ — естественная проекция, и $V_i=\{x\in U_i: gx\in U_i \text{ при } g\in H_0\}$, $i=0, \ldots, s$.

Через $\tilde{V}_i$ обозначим множество $p_1(V_i)$, $i=0, \ldots, s$. Множества $\tilde{V}_i$ открыты в пространстве X_1 и $\tilde{V}_i\cap\tilde{V}_j=\varnothing$ при $i\neq j$. Пусть $p_1(\sigma)=\{\tilde{V}_0, \ldots, \tilde{V}_s\}$. Так как G_1 — конечная группа, то существует (W, τ), где $\tau=\{W_0, \ldots, W_s\}$ такое, что $(W, \tau)\in Z(p_2, G_1)$ и $(W, \tau)>(U, p_1(\sigma))$. Пусть $\Gamma_i=p_1^{-1}(W_i)$ и $\bar{\sigma}=\{\Gamma_0, \ldots, \Gamma_s\}$. Очевидно, $(W, \bar{\sigma})\in Z(f, G)$ и $(W, \bar{\sigma})>(U, \sigma)$. Лемма доказана.

Пусть $\mathscr{F}\in\Phi(G)$, $L\in\mathscr{M}(K)$ и $(U, \sigma)\in Z(f, G)$. Положим $\mathscr{D}^*(U_\sigma, \mathscr{F}, G)=U\times\mathscr{F}(P(\sigma), L)$. Если (U, σ), $(U', \sigma')\in Z(f, G)$ и $(U', \sigma')>(U, \sigma)$, то имеем G-симплициальное отображение $i(\sigma', \sigma)$: $P(\sigma')\to P(\sigma)$.

Положим $\rho^*(\sigma', \sigma)=\mathrm{id}\,(U')\times\mathscr{F}(i(\sigma', \sigma), \mathrm{id})$. Тем самым получаем индуктивную систему частичных пучков (и. с. ч. п.)

$$D^*(f, \mathscr{F}, G)=\{\mathscr{D}^*(U_\sigma, \mathscr{F}, G), \rho^*(\sigma', \sigma), (U, \sigma)\in Z(f, G)\}.$$

Через $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, G)$ обозначим ее предел. Из леммы 3.1 следует, что $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, G)=\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)$.

Пусть $\mathscr{F}=\Delta^*$ (отметим, что функтор Δ^* принадлежит $\Phi(G)$). Рассмотрим отображение f: $X\to Y$ и пучок $f_*\mathsf{K}$. Так как f — естественная проекция X на пространство орбит, то в пучке $f_*\mathsf{K}$ действует группа G. Коротко напомним определения этого действия. Пусть U — открытое подмножество пространства Y. По определению $\Gamma(U, f_*\mathsf{K})=\Gamma(f^{-1}(U), \mathsf{K})$.

Группа G действует в $\Gamma(U, f_*\mathsf{K})$ следующим образом: если $s\in\Gamma(f^{-1}(U), \mathsf{K})$ и $g\in G$, то $gs(x)=s(g^{-1}x)$ при $x\in f^{-1}(U)$.

Знаем, что пучки $\mathscr{D}^0(f, \Delta^*, G)$ и $f_*\mathsf{K}$ изоморфны как K-модули. Имеем также:

Лемма 3.2. *Пусть G — вполне-несвязная компактная группа, действующая в нормальном пространстве X, и $f: X \to Y = X/G$ — естественная проекция. Гомоморфизм $\omega: \mathscr{D}^0(f, \Delta^*, G) \to f_*\mathsf{K}$ является G-изоморфизмом.*

Об определении ω см. [15]. Эта лемма проверяется непосредственно.

Следствие 3.3. *В предположениях леммы 3.2 пучок $\mathscr{D}^{-1}(f, \Delta^*, G)$ изоморфен пучку $\mathscr{D}^0(f, \Delta^*, G)^G$.*

Здесь $\mathscr{D}^0(f, \Delta^*, G)^G$ — подпучок пучка $\mathscr{D}^0(f, \Delta^*, G)$ всех неподвижных точек действия G в $\mathscr{D}^0(f, \Delta^*, G)$.

Действительно, знаем, что пучок $\mathscr{D}^{-1}(f, \Delta^*, G)$ изоморфен образу гомоморфизма $\delta^{-1}: \mathscr{D}^{-1}(f, \Delta^*, G) \to \mathscr{D}^0(f, \Delta^*, G)$ и изоморфен K. С другой стороны, нам известно, что этот гомоморфизм совпадает с естественным вложением пучка K в пучок $f_*\mathsf{K}$, и образ при этом вложении совпадает с $(f_*\mathsf{K})^G$. Следовательно,

$$\mathscr{D}^{-1}(f, \Delta^*, G) = \operatorname{Im}\delta^{-1} = \operatorname{Im}(\mathsf{K} \hookrightarrow f_*\mathsf{K}) = (f_*\mathsf{K})^G = \mathscr{D}^0(f, \Delta^*, G)^G.$$

4. Накрытия и резольвенты Зарелуа. Здесь будем предполагать, что отображение $f: X \to Y$ есть $(s+1)$-листное накрытие. Пусть

$$Z(f, C) = \{(U, \sigma) \in Z(f): \sigma = \{U_0, \ldots, U_s\},\ f(U_i) = U,\ i = 0, \ldots, s\}.$$

Непосредственно проверяется, что $Z(f, C)$ — конфинальное подмножество в $Z(f)$. Пусть $(U, \sigma) \in Z(f, C)$. Тогда $P(\sigma)$ есть s-симплекс. Если $(U', \sigma') \in Z(f, C)$, $(U', \sigma') > (U, \sigma)$, то отображение $i(\sigma', \sigma): P(\sigma') \to P(\sigma)$ — симплициальный гомеоморфизм. Следовательно, $\rho^*(\sigma', \sigma)$ — изоморфизм, т. е. имеем:

Лемма 4.1. *Пусть f — $(s+1)$-листное накрытие, $\mathscr{F} \in \Phi$, $L \in \mathscr{M}(K)$. Тогда $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)$ — локально-постоянный пучок, и если $(U, \sigma) \in Z(f, C)$, то $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L) \mid U = U \times \mathscr{F}(P(\sigma), L)$.*

Предположим дополнительно, что накрытие f — регулярно. Тогда существует конечная группа G, действующая свободно слева в пространстве X, и такая, что ее пространство орбит совпадает с Y [10, п. 8]. Рассмотрим пучок $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, G)$, $\mathscr{F} \in \Phi(G)$. Знаем, что этот пучок есть G-пучок (см. п. 3). Цель настоящего параграфа получить непосредственное описание G-пучка $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, G)$. Сперва напомним несколько общих конструкций.

Будем предполагать, что пространство Y паракомпактно, линейно связно и локально стягивается в точку [8, 10]. Через $LCS(Y)$ будем обозначать категорию всех локально постоянных пучков с базой пространство Y. Через $L(Y)$ обозначим категорию всех систем локальных коэффициентов K-модулей с базой Y [17]. Напомним, что через $M(G)$ обозначаем категорию всех G-модулей.

Пусть $\mathscr{L} \in LCS(Y)$, $y_0 \in Y$ и $L = \mathscr{L}_{y_0}$. Так как пространство Y локально связно, то для любой точки $y \in Y$ слой $\mathscr{L}_y$ системы локальных коэффициентов $\mathscr{L}$ над точкой y изоморфен L (этот изоморфизм не является каноническим). Систему локальных коэффициентов $\mathscr{L}$ будем рассматривать как локально-тривиальное расслоение с базой — пространство Y, $\alpha: \mathscr{L} \to Y$, и слой — дискретное пространство L. Так как пространство Y паракомпактное, а L — дискретное пространство, то локально-тривиальное расслоение $\alpha: \mathscr{L} \to Y$ удовлетворяет аксиоме о поднятии пути единственным образом [18].

Пусть $\pi = \pi_1(Y, y_0)$ — фундаментальная группа пространства Y. Так как накрытие $f: X \to Y$ регулярно, то группа π действует в пространстве X, и группа G есть факторгруппа группы π [10, п. V. 8]. Пусть $\rho: \pi \to G$ — естественная проекция.

Рассмотрим замкнутый путь $\gamma: [0, 1] \to Y$ с началом y_0 и $l \in L$. Через $\tilde{\gamma}$ обозначим единственный путь $\tilde{\gamma}: [0, 1] \to \mathscr{L}$ в пространстве $\mathscr{L}$ с началом l, лежащий над путем γ, т. е. $\alpha\tilde{\gamma} = \gamma$ (α — проекция $\mathscr{L}$ на Y). Если $g \in \pi$ — класс пути γ, т. е. $g = [\gamma]$, то положим $gl = \tilde{\gamma}(1)$. Тем самым определено действие группы π в модуле L. Непосредственно проверяется, что это действие индуцирует действие группы G на L.

Так как пучок $\mathscr{D}^p(f, \mathscr{F}, G)$ локально-постоянен, то мы можем применить верхнюю конструкцию и тем самым получить некоторую π-структуру в $\mathscr{D}^p(f, \mathscr{F}, G)_{y_0}$. Эта π-структура порождает G-структуру в $\mathscr{D}^p(f, \mathscr{F}, G)_{y_0}$. Действительно, пусть $g \in \operatorname{Ker} \rho$ ($\rho: \pi \to G$ — естественная проекция). Так как накрытие f регулярно, то поднимая любого представителя g с началом y_0, всегда получим замкнутый путь в X. Тогда, чтобы поднять путь γ в $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, G)$, мы должны построить пути γ_i в X, такие, что $\gamma_i(0) = x_i$ и γ_i — поднятие γ. Тогда, если $x_i(t) = \gamma_i(t)$, $y(t) = f(x_i(t))$, то $\tilde{\gamma}(t) = y(t) \times \mathscr{F}(\Delta(y(t)), L)$ будет поднятием пути γ в $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, G)$. Ввиду того, что $\tilde{\gamma}(1) = y_0 \times \mathscr{F}(\Delta(y_0), L)$, то действие g тривиально в $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, G)$. Тем самым в $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, G)$ действует группа G.

С другой стороны, в $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, G)$ имеем G-структуру, определенную в п. 3. Непосредственно проверяется, что эти две G-структуры совпадают. Мы только наметим доказательство этого факта.

Рассмотрим множество $f^{-1}(y_0)$. Так как f — регулярное накрытие с группой скольжения G, то мы можем отождествить множества $f^{-1}(y_0)$ с группой G. В $f^{-1}(y_0)$ с помощью поднятия путей определяется структура G-пространства — она совпадает с правыми сдвигами G. С другой стороны, правые сдвиги на G индуцируют определенную в этом параграфе G-структуру в $\mathscr{D}^p(f, \mathscr{F}, G)_{y_0}$. Определенная в п. 3 G-структура в $\mathscr{D}^p(f, \mathscr{F}, G)_{y_0}$ индуцирована действием группы G в пространстве X. При отождествлении множества $f^{-1}(y_0)$ с G это действие отождествляется с левыми трансляциями G на себя. Отсюда следует изоморфность рассматриваемых двух G структур в $\mathscr{D}^p(f, \mathscr{F}, G)_{y_0}$.

Теперь определим несколько функторов между категориями локально-постоянных пучков $LCS(Y)$, систем локальных коэффициентов и π-модулей $M(\pi)$. Эти функторы будем использовать для непосредственного описания пучка $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, G)$.

Пусть $\mathscr{L} \in LCS(Y)$ и $y_0 \in Y$. Положив $m(\mathscr{L}) = \mathscr{L}_{y_0}$, получаем функтор $m: LCS(Y) \to M(\pi)$.

Определим функтор $l: LCS(Y) \to L(Y)$. Для этого для любой точки $y \in Y$ выберем и фиксируем путь $\gamma(y): [0, 1] \to Y$ с началом y_0 и концом y. При этом предположим, что $\gamma(y_0)$ — постоянный путь. Пусть $\Gamma = \{\gamma(y): y \in Y\}$. Любой точке $y \in Y$ сопоставим модуль $\mathscr{L}_{y_0}$. Пусть y_1 и $y_2 \in Y$ и γ — путь, соединяющий эти точки. Этому пути сопоставим изоморфизм

$$l(\gamma) = [\gamma(y_2)^{-1} \circ \gamma \circ \gamma(y_1)]: \mathscr{L}_{y_0} \to \mathscr{L}_{y_0}.$$

Здесь $[\gamma(y_2)^{-1} \circ \gamma \circ \gamma(y_1)]$ — гомотопный класс замкнутого пути $\gamma(y_2)^{-1} \circ \gamma \circ \gamma(y_1)$.

Тем самым локально-постоянному пучку $\mathscr{L}$ сопоставляется система локальных коэффициентов $\{\mathscr{L}_{y_0}, l(\gamma)\}$ и определен функтор $l: LCS(Y) \to L(Y)$

Определим и функтор $\mu: L(Y) \to M(\pi)$ следующим образом: $\mu(\{L_y: y \in Y\}) = L_{y_0}$.

Очевидно имеем

Лемма 4.2. $\mu l = m$.

Имеем также и функтор $\lambda: M(\pi) \to L(Y)$ (если $A \in M(\pi)$, то положим $L_y = A$ для $y \in Y$). Для y_1 и $y_2 \in Y$ и γ — путь, соединяющий эти точки; положим $\lambda(\gamma) = [\gamma(y_2)^{-1} \circ \gamma \circ \gamma(y_1)]: L_{y_1} \to L_{y_2}$ (здесь мы рассматриваем гомотопный класс $[\gamma(y_2)^{-1} \circ \gamma \circ \gamma(y_1)]$ как элемент группы π, а $\gamma(y_1)$, $\gamma(y_2)$ — пути семейства Γ).

Лемма 4.3. $\lambda\mu = \mathrm{id}$, $\mu\lambda = \mathrm{id}$, $\lambda m = l$, $\mu l = m$, *т. е. следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} LCS(Y) \arrow[rr, "l"] \arrow[dr, "m"'] & & L(Y) \arrow[dl, shift right, "\mu"'] \\ & M(\pi) \arrow[ur, shift right, "\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

Определим функтор $s: M(\pi) \to LCS(Y)$. Если $A \in M(\pi)$ и $p: \tilde{Y} \to Y$ — универсальное накрытие пространства Y, [10, п. V. 6], то $\tilde{Y} \times A$ является π-пространством. При этом группа π действует в $\tilde{Y} \times A$ следующим образом: $g(y, a) = (gy, ga)$ при $g \in \pi$, $y \in \tilde{Y}$, $a \in Y$. Пусть $s(A) = \tilde{Y} \times A/\pi$. Пучок $\tilde{Y} \times A/\pi$ будем обозначать еще $\tilde{Y} \times_\pi A$.

Проверим, что $s(A) \in LCS(Y)$. Пусть $\widehat{p}: \tilde{Y} \times A \to \tilde{Y}$ — проекция на первый множитель. Отображение $\widehat{p}$ — π-эквивариантно. Мы рассмотрим $\widehat{p}$ как постоянный пучок со слоем A над пространством $\tilde{Y}$. Так как $p: \tilde{Y} \to Y$ — накрытие, то фактор постоянного пучка $\tilde{Y} \times A$ по группе π есть локально постоянный пучок $\tilde{Y} \times_\pi A$ со слоем A. Тем самым определен функтор s.

Так как $s(A)$ — локально-постоянный пучок над пространством Y, то слой $s(A)_{y_0}$ имеет структуру π-модуля, индуцированную $s(A)$. С другой стороны, $s(A)_{y_0}$ совпадает с A, и A также есть π-модуль. Непосредственно проверяется, что эти две структуры совпадают. Следовательно, имеем

Лемма 4.4. $ms = \mathrm{id}$, $ls = \mathrm{id}$.

Определим и функтор $t: L(Y) \to LCS(Y)$. Так как пространство Y локально стягивается в точку, то любая система локально-постоянных коэффициентов локально-постоянна. Пусть $\{L_y, y \in Y\}$ — система локальных коэффициентов. Положим $\mathscr{L} = \cup\{L_y: y \in Y\}$. В множестве $\mathscr{L}$ вводим топологию, которая порождается локально-постоянными сечениями. Полученный локально-постоянный пучок обозначим через $t(\{L_y, y \in Y\})$. Непосредственно проверяется

Лемма 4.5. $tl = \mathrm{id}$.

Теперь мы готовы предложить другое описание пучка $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, G)$. Напомним предположения: $f: X \to Y$ — регулярное $(s+1)$-листное накрытие, пространство Y — паракомпактно, линейно связно и локально-стягиваемо. Пусть $y_0 \in Y$ и $f^{-1}(y_0) = \{x_0, \ldots, x_s\}$, а Δ_s — симплекс с вершинами $x_0, \ldots, x_s$. Тогда $\Delta_s \in \Delta(G)$ и $\mathscr{F}^p(\Delta_s, K) \in M(G)$. Рассмотрим $\mathscr{F}^p(\Delta_s, K)$ как π-модуль, в котором действие группы π определяется эпиморфизмом $\rho: \pi \to G$.

Предложение 4.6. $s(\mathscr{F}^p(\Delta_s, K)) = \mathscr{D}^p(f, \mathscr{F}, G)$.

Доказательство. Знаем, что

$$m(\mathscr{D}^p(f,\ \mathscr{F},\ G))=\mathscr{D}^p(f,\ \mathscr{F},\ G)_{y_0}=\mathscr{F}^p(\Delta_s,\ K),$$

$$ls(\mathscr{F}^p(\Delta_s,K))=\lambda(\mathscr{F}^p(\Delta_s,K))=\lambda(\mathscr{D}^p(f,\mathscr{F},G)_{y_0})=\lambda m(\mathscr{D}^p(f,\mathscr{F},G))=l(\mathscr{D}^p(f,\mathscr{F},G)),$$

т. е. $l(\mathscr{D}^p(f,\ \mathscr{F},\ G))=ls(\mathscr{F}^p(\Delta_s,\ K))$. Следовательно, $tl(\mathscr{D}^p(f,\ \mathscr{F},\ G))=tls(\mathscr{F}^p(\Delta_s,\ K))$. Так как $tl=\mathrm{id}$, то $\mathscr{D}^p(f,\ \mathscr{F},\ G)=s(\mathscr{F}^p(\Delta_s,\ K))$. Предложение доказано.

5. Спектральные последовательности Картана и Зарелуа. Пусть X — паракомпактное, линейно связное и локально-стягиваемое пространство и G — конечная группа, действующая свободно в X. Через Y обозначим пространство орбит X/G, а через f — естественную проекцию X на Y.

Открытое множество U в пространстве Y будем называть отмеченным, если над ним накрытие f тривиально и для любой точки $x\in U$ любой путь в Y с началом и концом в x гомотопно тривиален во всем пространстве (как замкнутый путь). Пусть $\Omega(f,\ Y)$ — семейство всех линейно связных и отмеченных подмножеств в Y. Напомним, что пучок $\mathscr{D}^*(f,\ \Delta^*,\ G)$ — локально постоянен (над любым множеством из $\Omega\,(f,y)$ он постоянен). Рассмотрим систему локальных коэффициентов $l(\mathscr{D}^*)=l(\mathscr{D}^*(f,\ \Delta^*,\ G))$. Напомним, что эта система локальных коэффициентов определяется при помощи фиксированной точкой y_0 и системой путей $\Gamma=\{\gamma(y):\ y\in Y\}$, (см. п. 4). Будем предполагать, что когда точка y принадлежит элементу $\Omega(f,\ Y)$, содержащему y_0, то путь $\gamma(y)$ содержится в элементе $\Omega(f,\ Y)$.

Пусть B — подмножество пространства Y. Будем говорить, что $\operatorname{diam} B<\Omega(f,\ Y)$, если существует U в $\Omega(f,\ Y)$, такое, что $B\subset U$.

Через $U(\Omega,\ k)$ обозначим множество всех точек $(y_0,\dots,y_k)$ пространства $Y^{k+1}=Y\times\dots\times Y$ ($(k+1)$ множителей), для которых $\operatorname{diam}\{y_0,\dots,y_k\}<\Omega(f,\ Y)$.

Пусть $A^k(Y,\ l(\mathscr{D}^t))$ — группа всех функций, определенных на множестве $U(\Omega,\ k)$, и такие, что если $\varphi\in A^k\ (Y,\ l(\mathscr{D}^t))$ и $(y_0,\dots,y_k)\in U(\Omega,\ k)$, то $\varphi(y_0,\ \dots,\ y_k)\in l(\mathscr{D}^t)_{y_0}$.

Напомним, что $l(\mathscr{D}^t)=\mathscr{D}^t(f,\ \Delta^*,\ K)_{y_0}=\Delta^t(\Delta(y_0),\ K)$ (здесь $\Delta(y_0)$ — симплекс с вершинами элементов множества $f^{-1}(y_0)=\{x_0,\ \dots,\ x_s\}$).

В группе $A^*(Y,\ l(\mathscr{D}^*))=\{A^s(Y,\ l(\mathscr{D}^t)):\ s,t=0,\ 1,\dots\}$ определяется дифференциал следующим образом. Пусть φ из $A^k(Y,\ l(\mathscr{D}^t))$. По определению

$$\delta^k\varphi(y_0,\dots,y_{k+1})=\gamma(y_1)\varphi(y_1,\dots,y_{k+1})+\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i\varphi\,(y_0,\dots,\widehat{y_i},\dots,y_{k+1})$$

при $(y_0,\dots,y_{k+1})\in U(\Omega,\ k+1)$. Здесь через $\gamma(y_1)$ обозначен изоморфизм $l(\mathscr{D}^t)_{y_1}$ на $l(\mathscr{D}^t)_{y_0}$, соответствующим путем $\gamma(y_1)$ из Γ. В $A^*(Y,\ l(\mathscr{D}^*))$ мы имеем и второй дифференциал, индуцированый дифференциалом $\mathscr{D}^*(f,\ \mathscr{F},\ G)$. Непосредственно проверяется, что $A^*(Y,\ l(\mathscr{D}^*))$ является дифференциальным бикомплексом. Через $A^k_0(Y,\ l(\mathscr{D}^*))$ обозначим подгруппу всех элементов $A^k(Y,\ l(\mathscr{D}^*))$, которые аннулируются локально, т. е. $\psi\in A^k_0(Y,\ l(\mathscr{D}^*))$, если $\psi\in A^k(Y,\ l(\mathscr{D}^*))$ и существует открытое покрытие пространства ν, элементы которого имеют диаметр меньше $\Omega(f,\ Y)$, и такие, что $\psi(y_0,\dots,y_k)=0$, если $\operatorname{diam}\{y_0,\ \dots,\ y_k\}<\nu$ и $(y_0,\dots,y_k)\in Y^{k+1}=Y\times\dots\times Y$.

Непосредственно проверяется, что $A^*_0(Y,\ l(\mathscr{D}^*))=\{A^k_0(Y,\ l(\mathscr{D}^*)),\ k=0,\ 1,\dots\}$ есть коцепной комплекс, подкомплекс $A^*(Y,\ l(\mathscr{D}^*))$.

Через $\bar{A}^*(Y,\ l(\mathscr{D}^*))$ обозначим фактор-комплекс $\bar{A}^*(Y,\ l(\mathscr{D}^*)) = A^*(Y,\ l(\mathscr{D}^*))/A^*_0(Y,\ l(\mathscr{D}^*))$. По определению когомологии $\bar{A}^*(Y,\ l(\mathscr{D}^*)) = \{\bar{A}^k(Y,\ l(\mathscr{D}^*)),\ \bar{\delta}^k,\ k=0,\ 1, \ldots\}$ — это когомологии Александера — Спаньера пространства Y с коэффициентами в локальной системе коэффициентов $l(\mathscr{D}^*)$. Дифференциал $\bar{\delta}^k$ индуцирован дифференциалом δ^k.

В этом параграфе мы найдем удобное описание дифференциального бикомплекса $\bar{A}^*(Y,\ l(\mathscr{D}^*))$, которое позволит нам непосредственно сравнить спектральную последовательность Картана регулярного накрытия [9] со спектральной последовательностью Зарелуа $E(f,\ \Delta^*,\ K)$. Пусть f — $(s+1)$-листное накрытие. Тогда порядок группы G равен $s+1$. Через Δ_s обозначим симплекс с вершинами элементов группы G. Группа G действует в пространстве Δ_s следующим образом: если $g \in G$ и $[h_0, \ldots, h_t]$ — упорядоченный t-симплекс в Δ_s, то $g[h_0, \ldots, h_t] = [h_0 g^{-1}, \ldots, h_t g^{-1}]$.

Через $\Delta_*(G)$ обозначим цепной комплекс с целыми коэффициентами симплекса Δ_s. Напомним, что цепной комплекс $\Delta_*(G)$ — это каноническая свободная резольвента группы G [9].

Пусть $\Delta^p(G) = \mathrm{Hom}_G(\Delta_p(G),\ K)$ — p-мерные упорядоченные коцепи с коэффициентами в K.

Группа G действует в $\Delta^p(G)$ следующим образом: пусть $\varphi \in \Delta^p(G)$, $g \in G$, $[g_0, \ldots, g_p]$ — упорядоченный p-симплекс, тогда $g\varphi[g_0, \ldots, g_p] = \varphi[g_0 g^{-1}, \ldots, g_p g^{-1}]$. Пусть $\tilde{\Omega}(f,\ Y)$ — множество всех открытых и линейно-связных подмножеств пространства X, которые отображаются f на элементы $\Omega(f,\ Y)$. Через $U(\tilde{\Omega},\ k)$ обозначим множество всех точек $(x_0, \ldots, x_k)$ пространства $X^{k+1} = X \times \cdots \times$ ($(k+1)$-множителей) таких, что $\operatorname{diam}\{x_0, \ldots, x_k\} < \tilde{\Omega}(f,\ Y)$.

Через $A^k(X,\ \Delta^p(G))$ обозначим k-мерные коцепи Александера—Спаньера пространства X с коэффициентами в $\Delta^p(G)$, т. е. группу всех отображений $U(\tilde{\Omega},\ k)$ в $\Delta^p(G)$. Пусть $A^*(X,\ \Delta^p(G)) = \{A^k(X,\ \Delta^p(G)),\ \delta^k,\ k=0,\ 1, \ldots\}$ — коцепной комплекс Александера — Спаньера. Через $A^*_0(X,\ \Delta^p(G))$ обозначим подкомплекс $A^*(X,\ \Delta^p(G))$ локально-нулевых коцепей. Пусть $\bar{A}^*(X,\ \Delta^p(G))$ — фактор-комплекс

$$\bar{A}(X,\ \Delta^p(G)) = A^*(X,\ \Delta^p(G))/A^*_0(X,\ \Delta^p(G)).$$

Когомологии $\bar{A}^*(X,\ \Delta^p(G))$ — когомологии Александера—Спаньера пространства X с коэффициентами в $\Delta^p(G)$.

Определим G-структуру в $\bar{A}^*(X,\ \Delta^p(G))$. Для этого рассмотрим следующую G структуру в $A^*(X,\ \Delta^p(G))$: если $\varphi \in A^k(X,\ \Delta^p(G))$, $g \in G$, $(x_0, \ldots, x_k) \in U(\tilde{\Omega},\ k)$ и $[g_0, \ldots, g_p]$ — упорядоченный p-симплекс в $\Delta_p(G)$, то положим

$$g\varphi(x_0, \ldots, x_k)[g_0, \ldots, g_p] = \varphi(gx_0, \ldots, gx_k)[g_0 g^{-1}, \ldots, g_p g^{-1}].$$

Эта G-структура в $A^*(X,\ \Delta^p(G))$ индуцирует G-структуру в $\bar{A}^*(X,\ \Delta^p(G))$.

Через $A^*_G(X,\ \Delta^p(G))$ обозначим коцепной комплекс в $A^*(X,\ \Delta^p(G))$ всех G-инвариантных элементов, т. е. $\varphi \in A^*_G(X,\ \Delta^p(G))$, если $\varphi \in A^k(X^p, \Delta^p(G))$ и выполнено

$$\varphi(gx_0, \ldots, gx_k)[g_0 g^{-1}, \ldots, g_p g^{-1}] = \varphi(x_0, \ldots, x_k)[g_0, \ldots, g_p]$$

для всех $(x_0, \ldots, x_k) \in U(\tilde{\Omega},\ k)$ и $g,\ g_0, \ldots, g_p \in G$.

Пусть

$$\bar{A}_G(X,\ \Delta^p(G)) = A^*_G(X,\ \Delta^p(G))/A^*_G(X, \Delta^p(G)) \cap A^*_0(X,\ \Delta^p(G)).$$

Через $\bar{A}^*_G(X,\ \Delta^*(G))$ будем обозначать дифференциальный бикомплекс $\{\bar{A}^G_p(X,\ \Delta^q(G)),\ p,\ q=0,\ 1, \ldots\}$.

Лемма 5.1. *Дифференциальные бикомплексы $\bar{A}^*_G(X,\ \Delta^*(G))$ и $\bar{A}^*(Y,\ l(\mathcal{D}^*))$ изоморфны.*

Доказательство. Сначала построим коцепной гомоморфизм

$$\theta^* = \{\theta^k,\ k=0,\ 1, \ldots\}:\ A^*(Y,\ l(\mathcal{D}^*)) \longrightarrow A^*_G(X,\ \Delta^*(G)).$$

Пусть $\varphi \in A^k(Y, l(\mathcal{D}^*))$, $(x_0, \ldots, x_k) \in U(\tilde{\Omega},\ k)$ и $g_0, \ldots, g_p \in G$. Положим

$$\theta^k(\varphi)(x_0, \ldots, x_k)[g_0, \ldots, g_p] = \varphi(f(x_0), \ldots, f(x_k))[g_0x_0, \ldots, g_px_0].$$

Непосредственно можно убедиться, что $\theta^k(\varphi) \in A^k_G(X,\ \Delta^p(G))$ и что $\theta^* = \{\theta^k,\ k=0,\ 1, \ldots\}$ — коцепной гомоморфизм.

Определим и коцепной гомоморфизм $\bar{\theta}^* = \{\bar{\theta}^k,\ k=0,\ 1, \ldots\}$: $\bar{A}^*_G(X, \Delta^*(G)) \longrightarrow A^*(Y,\ l(\mathcal{D}^*))$ следующим образом: пусть $\psi \in A^k_G(X,\ \Delta^p(G))$, $(y_0, \ldots, y_k) \in U(\Omega,\ k)$. Так как $\operatorname{diam}\{y_0, \ldots, y_k\} < \Omega(f,\ Y)$, то существует $U \in \Omega(f,\ Y)$, содержащее точки $y_0, \ldots, y_k$. Пусть $f^{-1}(y_0) = \{x_0, \ldots, x_s\}$. Через $\tilde{V}$ обозначим ту окрестность точки x_0, которая принадлежит покрытию $\tilde{\Omega}(f,\ Y)$ и которая отображается f гомеоморфно на U. Через g_i обозначим тот элемент G, для которого $x_i = g_ix_0$ при $i=1, \ldots, s$. Пусть $z_0 = x_0$ и z_i — те точки из V, для которых $f(z_i) = y_i$ при $i=0,\ 1, \ldots, k$. Напомним, что $l(\mathcal{D}^p)_{y_0} = \Delta^p(\Delta(y_0),\ K)$ ($\Delta(y_0)$ — это s-мерный симплекс с вершинами точки множества $f^{-1}(y_0)$). Тогда положим

$$\bar{\theta}^k(\psi)(y_0, \ldots y_k)[x_0, \ldots, x_p] = \psi(z_0, \ldots, z_k)[e,\ g_1, \ldots, g_p].$$

Непосредственно проверяется, что это определение корректно. Имеем

$$\bar{\theta}^*\theta^*(\varphi)(y_0, \ldots, y_k)[x_0, \ldots, x_p] = \theta^*(\varphi)(z_0, \ldots, z_k)[e,\ g_1, \ldots, g_p]$$
$$= \varphi(y_0, \ldots, y_k)[x_0,\ g_1x_0, \ldots, g_px_0] = \varphi(y_0, \ldots, y_k)[x_0, \ldots, x_p],$$

т. е. $\bar{\theta}^*\theta^* = \mathrm{id}$.

С другой стороны, пусть $(u_0, \ldots, u_k) \in U(\tilde{\Omega},\ k)$; $h_0, \ldots, h_p \in G$ и $z_i = h_0u_i$, $i=1, \ldots, k$. Тогда

$$\theta^*\bar{\theta}^*(\psi)(u_0, \ldots, u_k)[h_0, \ldots, h_p] = \bar{\theta}^*(\psi)(f(u_0)), \ldots, f(u_k))[h_0u_0, \ldots, h_pu_0]$$
$$= \psi(h_0u_0, \ldots, h_0u_k)[e,\ h_1h_0^{-1}, \ldots, h_p h_0^{-1}] = \psi(u_0, \ldots, u_k)[h_0, \ldots, h_p],$$

т. е. $\theta^*\bar{\theta}^* = \mathrm{id}$.

Имея в виду, что

$$\theta^*(A^*_0(Y,\ l(\mathcal{D}^*))) \subset A^*_G(X,\ \Delta^*(G)) \cap A^*_0(X,\ \Delta^*(G))$$

и

$$\bar{\theta}^*(A^*_G(X,\ \Delta^*(G)) \cap A^*_0(X,\ \Delta^*(G))) \subset A^*_0(Y,\ l(\mathcal{D}^*)),$$

получаем лемму.

Отметим, что изоморфизмы θ^* и $\bar{\theta}^*$ естественны относительно аргументов $\Delta^*(G)$ и $l(\mathscr{D}^*)$.

Через $\bar{A}^*(X, K)$ обозначим коцепной комплекс Александера—Спаньера пространства X с коэффициентами в кольце K. Подробнее — $A^s(X, K)$ — группа всех функций, определенных на множестве $U(\tilde{\Omega}, k)$ со значениями в K, а $A_0^s(X, K)$ — множество локально-нулевых из них. Тогда по определению $\bar{A}^*(X, K) = A^*(x, K)/A_0^*(X, K)$.

Группа G действует в $A^*(X, K)$ следующим образом. Пусть $\varphi \in A^s(X, K)$ и $(x_0, \ldots, x_k) \in U(\tilde{\Omega}, k)$, $g \in G$, тогда $g\varphi(x_0, \ldots, x_k) = \varphi(gx_0, \ldots, gx_k)$. Это действие индуцирует G-структуру в $\bar{A}^*(X, K)$.

Напомним, что через $\Delta_*(G)$ обозначаем каноническую свободную G-резольвенту группы целых чисел [9]. $\Delta_p(G)$ имеет аддитивные образующие все упорядоченые p-симплексы из Δ_s. Группа G действует в $\Delta_p(G)$ следующим образом: если $g, g_0, \ldots, g_p \in G$, то $g[g_0, \ldots, g_p] = [g_0g^{-1}, \ldots, g_pg^{-1}]$.

Через $\mathrm{Hom}_G(\Delta_q(G), \bar{A}^p(X, K))$ обозначим группу всех G гомоморфизмов $\Delta_q(G)$ в $\bar{A}^p(X, K)$, а через $\mathrm{Hom}_G(\Delta_*(G), \bar{A}^*(X, K))$ — дифференциальный бикомплекс $\{\mathrm{Hom}_G(\Delta_p(G), \bar{A}^q(X, K)) : p, q = 0, 1, \ldots\}$.

Лемма 5.2. *Дифференциальные бикомплексы* $\bar{A}_G^*(X, \Delta^*(G))$ *и* $\mathrm{Hom}_G(\Delta_*(G), \bar{A}^*(X, K))$ *изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{Hom}(\Delta_p(G), A^k(X, K))$, тогда $\alpha \in \mathrm{Hom}_G(\Delta_p(G), A^k(X, K))$, если выполнено

$$\alpha[g_0g^{-1}, \ldots, g_pg^{-1}](gx_0, \ldots, gx_k) = \alpha[g_0, \ldots, g_p](x_0, \ldots, x_k)$$

при $g, g_0, \ldots, g_p \in G$ и $(x_0, \ldots, x_k) \in U(\tilde{\Omega}, k)$.

Сначала построим гомоморфизм

$$\beta^k : A_G^k(X, \Delta^p(G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\Delta_p(G), A^k(X, K)).$$

Пусть $\varphi \in A_G^k(X, \Delta^p(G))$, $g_0, \ldots, g_p \in G$, $(x_0, \ldots, x_k) \in U(\tilde{\Omega}, k)$. Положим

$$\beta^k(\varphi)[g_0, \ldots, g_p](x_0, \ldots, x_k) = \varphi(x_0, \ldots x_k)[g_0, \ldots, g_p].$$

Непосредственно проверяется, что определение корректно и гомоморфизм β^* индуцирует гомоморфизм

$$\tilde{\beta}^* : \bar{A}_G^*(X, \Delta^p(G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\Delta_p(G), \bar{A}^*(X, K)).$$

Определим и гомоморфизм

$$\gamma^* = \{\gamma^k : k = 0, 1, \ldots\} : \mathrm{Hom}_G(\Delta_p(G), A^k(X, K)) \longrightarrow A_G^k(X, \Delta^p(G)).$$

Пусть $\psi \in \mathrm{Hom}_G(\Delta_p(G), A^k(X, K))$, $(x_0, \ldots, x_k) \in U(\tilde{\Omega}, k)$, $g, g_0, \ldots, g_p \in G$. Положим

$$\gamma^k(\psi)(x_0, \ldots, x_k)[g_0, \ldots, g_p] = \psi[g_0, \ldots, g_p](x_0, \ldots, x_k).$$

Непосредственно проверяется, что определение корректно. Гомоморфизм γ^* индуцирует гомоморфизм $\tilde{\gamma}^* : \mathrm{Hom}_G(\Delta_p(G), \bar{A}^k(X, K)) \to \bar{A}_G^k(X, \Delta^p(G))$.

Проверим, что $\tilde{\gamma}^k\,\tilde{\beta}^k = \mathrm{id}$, $\tilde{\beta}^k\,\tilde{\gamma}^k = \mathrm{id}$. Для этого вычислим $\beta^k\gamma^k$. Пусть g, $g_0, \ldots, g_p \in G$, $x_0, \ldots, x_k \in U(\tilde{\Omega}, k)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_G(\Delta_p(G), A^s(X, K))$. Тогда

$$\beta^k\gamma^k(\psi)[g_0, \ldots, g_p](x_0, \ldots, x_k) = \gamma(\psi)(x_0, \ldots, x_k)[g_0, \ldots, g_p]$$
$$= \psi[g_0, \ldots, g_p](x_0, \ldots, x_k),$$

т. е. $\beta^k\gamma^k = \mathrm{id}$. Отсюда следует, что $\tilde{\beta}^k\tilde{\gamma}^k = \mathrm{id}$. Аналогично проверяется, что $\tilde{\gamma}^k\,\tilde{\beta}^k = \mathrm{id}$. Так как гомоморфизмы $\tilde{\beta}^*$ и $\tilde{\gamma}^*$ естественны, то они — изоморфизмы дифференциальных бикомплексов. Лемма доказана.

Из лемм 5.1 и 5.2 получаем

Следствие 5.3. *Дифференциальные бикомплексы* $\bar{A}^*(Y, l(\mathscr{D}^*))$ *и* $\mathrm{Hom}_G(\Delta_*(G), \bar{A}^*(X, K))$ *изоморфны.*

Напомним, что первая спектральная последовательность бикомплекса $\mathrm{Hom}_G(\Delta_*(G), \bar{A}^*(X, K))$ по определению — спектральная последовательность Картана регулярного накрытия $f\colon X \to Y$. С другой стороны, первая спектральная последовательность бикомплекса $\bar{A}^*(Y, l(\mathscr{D}^*))$ — спектральная последовательность Зарелуа $E(f, \Delta^*, k)$. Тем самым получаем:

Теорема 5.5. *Пусть X — паракомпактное, линейно связное и локально-стягиваемое в точку пространство, а G — конечная группа, свободно действующая в X. Если f — естественная проекция X на пространство орбит X/G, то спектральная последовательность Зарелуа $E(f, \Delta^*, K)$ изоморфна спектральной последовательности Картана регулярного накрытия f.*

Другие доказательства этой теоремы даны в [13] и [5].

6. Резольвенты Зарелуа полусвободных G-пространств, спектральные последовательности Бореля и Зарелуа. Пусть X — локально-компактное, метризуемое и локально-стягиваемое пространство и G — конечная группа, действующая на пространстве X. Через $\mathrm{Fix}(X, G)$ будем обозначать множество неподвижных точек действия $\mathrm{Fix}(X, G) = \{x \in X\colon gx = x$ для любого $g \in G\}$. Пусть G группа порядка $s+1$. Будем говорить, что G действует полусвободно на пространстве X, если орбита любой точки x из $X \setminus \mathrm{Fix}(X, G)$ состоит из $s+1$ точек, т. е. если группа G действует свободно на пространстве $X \setminus \mathrm{Fix}(X, G)$.

Пусть $U = X \setminus \mathrm{Fix}(X, G)$, $Y = X/G$, $V = Y \setminus \mathrm{Fix}(X, G)$. Через $f_U\colon U \to V$ обозначим проекцию U на V (здесь $V = U/G$). Отображение f_U является $(s+1)$-листным регулярным накрытием.

Рассмотрим резольвенту $\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K)^Y$ пучка K^Y ($\mathsf{K} = V \times K$). В этом пункте мы изучим спектральную последовательность $E(X, G, K)$, индуцированную этой резольвентой. Назовем эту спектральную последовательность спектральной последовательностью Зарелуа полусвободного G пространства X.

Здесь мы будем пользоваться когомологиями Александрова—Чеха с компатными носителями [2, 5].

Для первого члена этой спектральной последовательности имеем

$$E_1^{p,q}(X, G) = H_c^p(Y, \mathscr{D}^q(f_U, \Delta^*, K)^Y).$$

Так как $\mathscr{D}^*(f, \Delta^*, K)_V = \mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K)^Y$, $E_1^{p,q}(X, G) = H_c^p(Y, \mathscr{D}^q(f, \Delta^*, K)_V)$. Как знаем, $H_c^p(Y, \mathscr{D}^q(f, \Delta^*, K)_V) = H_c^p(V, \mathscr{D}^q(f, \Delta^*, K) \mid V)$ [2, п. 5].

Так как $\mathscr{D}^*(f, \Delta^*, K)|V=\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K)$, то имеем

$$E_1^{p,q}(X, G)=H_c^p(V, \mathscr{D}^q(f_U, \Delta^*, K)).$$

Через $A_c^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K))$ будем обозначать те элементы коцепного комплекса Александера — Спаньера $A^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K))$, которые аннулируются на коограниченные множества, т. е. $\varphi \in A_c^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K))$, если $\varphi \in A^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K))$ и существует W, лежащее в V, такое, что $\overline{V\setminus W}$ — компактно, и если $x_0, \ldots, x_k \in W$, то $\varphi(x_0, \ldots, x_k)=0$. Пусть

$$A_{0,c}^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K)))=A^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K)))\cap A_0^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K))).$$

Положим

$$\overline{A}_c^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K)))=A_c^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K)))/A_{0,c}^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K))).$$

По определению, когомологии коцепного комплекса

$$\overline{A}_c^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K))) \text{ — это } H_c^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K))).$$

Подсчитаем коцепной комплекс $\overline{A}_c^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K)))$. Через $A_c^*(U, \Delta^q(G))$ обозначим те коцепии из $A^*(U, \Delta^q(G))$, которые аннулируются на коограниченных множествах пространства U. Пусть

$$A_{0,c}^*(U, \Delta^q(G))=A_0^*(U, \Delta^q(G))\cap A_c^*(U, \Delta^q(G)).$$

Положим $\overline{A}_c^*(U, \Delta^q(G))=A_c^*(U, \Delta^q(G))/A_{0,c}^*(U, \Delta^q(G))$. Пусть $A_{cG}^*(U, \Delta^q(G))=A_c^*(U, \Delta^q(G))\cap A_G^*(U, \Delta^q(G))$ и

$$\overline{A}_{cG}^*(U, \Delta^q(G))=A_{cG}^*(U, \Delta^q(G))/A_{0c}^*(U, \Delta^q(G))\cap A_{cG}^*(U, \Delta^q(G)).$$

Лемма 6.1. *Дифференциальные бикомплексы* $\overline{A}_{cG}^*(U, \Delta^*(G))$ и $\overline{A}_c^*(V, l(\mathscr{D}^*(f_U, \Delta^*, K)))$ *изоморфны.*

Действительно, построенные в п. 5 гомоморфизмы θ^* и $\overline{\theta}^*$ индуцируют изоморфизм между этими бикомплексами.

Аналогично убеждаемся, что справедлива и

Лемма 6.2. *Дифференциальные бикомплексы* $\overline{A}_{*G}(U, \Delta^*(G))$ *и* $\mathrm{Hom}_G(\Delta_*(G, K), \overline{A}_c^*(U, K))$ *изоморфны.*

Из этих лемм получаем для спектральной последовательности Зарелуа полусвободное G-пространство X:

$$E_2^{p,q}(X, G)=H^p(G, H_c^q(U, K)),$$

и $E_\infty(X, G)$ ассоциирован с $H_c^*(U, K)$. Так как

$$H_c^q(U, K)=H_c^q(X, \mathbf{K}_U)=H_c^q(X, \mathrm{Fix}(X, G), K),$$

и

$$H_c^q(V, K)=H_c^q(Y, \mathrm{Fix}(X, G), K),$$

то получаем:

Теорема 6.3. *Пусть X — метризуемое, линейно-связное и локально-стягиваемое пространство. Пусть G — конечная группа, действующая в* *пространстве X полусвободно, и* $\operatorname{Fix}(X, G)$ *— множество неподвижных точек действия G, а Y — пространство орбит. Спектральная последовательность Зарелуа полусвободного G-пространства X имеет второй член*

$$E_2^{p,q}(X, G) = H^p(G, H_c^q(X, \operatorname{Fix}(X, G), K)),$$

и член $E_\infty(X, G)$ ассоциирован с $H_c^*(Y, \operatorname{Fix}(Y, G), K)$.

Из этого непосредственно следует, что спектральная последовательность Зарелуа полусвободного G-пространства X изоморфна спектральной последовательности А. Бореля [1, 22] — G-пространства X. Эта спектральная последовательность имеет интересные приложения при изучении множеств неподвижных точек эквивариантных отображений, см. [1, 20, 22].

7. Ограничение резольвент Зарелуа. Пусть f — замкнутое отображение пространства X на пространство Y и A — замкнутое подмножество в Y. Обозначим через B множество $f^{-1}(A)$ и через f_A отображение $f \mid B : B \to A$. Очевидно f_A — замкнутое отображение B на A. Пусть $U = Y \setminus A$ и $V = X \setminus B$ и f_U — отображение $f \mid V : V \to U$ — оно тоже замкнуто.

Непосредственно из определений резольвент Зарелуа следует

Лемма 7.1. *Резольвенты* $\mathscr{D}^*(f_U, \mathscr{F}, L)^Y$ и $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)_U$ *изоморфны для* $\mathscr{F} \in \Phi$ *и* $L \in M(K)$.

Действительно, пучок $\mathscr{D}^*(f_U, \mathscr{F}, L)^Y$ — нулевой над A и совпадает с пучком $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L) \mid U$ над U ($\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L) \mid U$ — ограничение пучка $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)$ на U). С другой стороны, $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)_U$ по определению совпадает с $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L) \mid U$ над U и нулевым над A.

Следствие 7.2. *Пусть U — открытое множество в пространстве Y, тогда существует гомоморфизм*

$$i^*(U) : \mathscr{D}^*(f_U, \mathscr{F}, L)^Y \longrightarrow \mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)$$

и последовательность

$$0 \to \mathscr{D}^*(f_U, \mathscr{F}, L)^Y \xrightarrow{i^*(U)} \mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L) \to \mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)_A \to 0.$$

Сравним пучки $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)_A$ и $\mathscr{D}^*(f_A, \mathscr{F}, L)^Y$. Пусть $i : A \to Y$ и $j : B \to X$ — тождественные вложения. Имеем $if_A = fj$. Так как $\mathscr{D}^*$ — контравариантный функтор относительно первого аргумента, [15], то имеем гомоморфизм $k^*(A) : \mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L) \to i_*\mathscr{D}^*(f_A, \mathscr{F}, L)$. Так как $i_*\mathscr{D}^*(f_A, \mathscr{F}, L) \mid U = 0$, то гомоморфизм $k^*(A)$ пропускается через пучок $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)_A$, т. е. существует гомоморфизм $l^*(A)$ такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L) \arrow[rr, "k^*(A)"] \arrow[dr] & & i_* \mathscr{D}^*(f_A, \mathscr{F}, L) \\
& \mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)_A \arrow[ur, "l^*(A)"'] &
\end{tikzcd}$$

(левая стрелка — естественная проекция).

Непосредственно проверяется, что гомоморфизм $l^*(A)$ — изоморфизм. С другой стороны, имеем $i_*\mathscr{D}^*(f_A, \mathscr{F}, L) = \mathscr{D}^*(f_A, \mathscr{F}, L)^Y$. Этим получаем

Лемма 7.3. *Пучки* $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)_A$ *и* $\mathscr{D}^*(f_A, \mathscr{F}, L)^Y$ *изоморфны.*

Следствие 7.4. *Последовательность*

$$0 \to \mathscr{D}^*((f_U, \mathscr{F}, L)^Y \xrightarrow{i^*(U)} \mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L) \xrightarrow{i^*(A)} \mathscr{D}^*(f_A, \mathscr{F}, L)^Y \to 0$$

точна.

8. Гомоморфизм ограничения $\mathrm{Res}^*(f, G, H)$ **резольвенты Зарелуа.** Пусть G — конечная группа порядка $(s+1)$ и H — подгруппа G порядка $t+1$. Предположим, что группа G действует свободно на линейно-связном и локально-стягиваемом пространстве X и что X — паракомпакт. Через Y обозначим фактор-пространство X/G, а через Y_1 — фактор-пространство X/H. Имеем естественные проекции $f: X \to Y$, $f_1: X \to Y_1$ и $\psi: Y_1 \to Y$. Очевидно, $\psi f_1 = f$. Отображение f — $(s+1)$-листное накрытие, f_1 — $(t+1)$-листное накрытие, ψ—конечнолистное накрытие и накрытия f и f_1 — регулярные.

Используя, что $\mathscr{D}^*$ — контравариантный функтор относительно своего первого аргумента, получаем

Лемма 8.1. *Существует гомоморфизм*

$$\mathrm{Res}^*(f, G, H): \mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, K) \longrightarrow \psi_*\mathscr{D}^*(f_1, \mathscr{F}, K),$$

такой, что $\mathrm{Res}^{-1}(f, G, H)$ *совпадает с каноническим вложением пучка* $\mathsf{K} = Y \times \mathsf{K}$ *в* $\psi_*\mathsf{K}$.

Гомоморфизм $\mathrm{Res}^*(f, G\ H)$ будем называть гомоморфизмом ограничения резольвенты Зарелуа $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, K)$.

Лемму 8.1 можем сформулировать следующим образом:

Лемма 8.1′. *Существует* ψ*-когоморфизм*

$$\widehat{\mathrm{Res}}^*(f, G, H): \mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, K) \longrightarrow \mathscr{D}^*(f_1, \mathscr{F}, K),$$

такой, что $\widehat{\mathrm{Res}}^{-1}(f, G, H) = \mathrm{id}$.

Теперь дадим непосредственное определение гомоморфизма $\mathrm{Res}^*(f, G, H)$ Пусть $\tilde{y}_0$ — точка пространства Y_1 и $y_0 = \psi(\tilde{y}_0)$. Множество $f^{-1}(y_0)$ состоит из $(s+1)$ точек и является свободным G-пространством. Множество $f_1^{-1}(\tilde{y}_0)$ состоит из $(t+1)$ точек и является свободным H-пространством. Знаем, что (см. п. 4).

$$\mathscr{D}^p(f, \mathscr{F}, K) = X \times_G \mathscr{F}(\Delta(y_0), K) \text{ и } \mathscr{D}^p(f_1, \mathscr{F}, K) = X \times_H \mathscr{F}(\Delta(\tilde{y}_0), K).$$

Множество $f_1^{-1}(\tilde{y}_0)$ лежит в $f^{-1}(y_0)$. Пусть $i(y_0): \Delta(\tilde{y}_0) \to \Delta(y_0)$ — тождественное вложение. Отображение $i(y_0)$ H-эквивариантно. Здесь $\Delta(y_0)$ (соответственно $\Delta(\tilde{y}_0)$) — симплекс с вершинами элементов $f^{-1}(y_0)$ (соответственно $f_1^{-1}(\tilde{y}_0)$). Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
X \times \mathscr{F}(\Delta(y_0), K) & \longrightarrow & X \times_H \mathscr{F}(\Delta(y_0), K) \\
{\scriptstyle \mathrm{id} \times \mathscr{F}(i(y_0),\ \mathrm{id})} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{id} \times_H \mathscr{F}(i(y_0),\ \mathrm{id})} \\
X \times \mathscr{F}(\Delta(\tilde{y}_0), K) & \longrightarrow & X \times_H \mathscr{F}(\Delta(\tilde{y}_0), K)
\end{array}$$

(горизонтальные стрелки — естественные проекции фактор-пространств). Пусть

$$\pi(H,\ G):\ X\times_H\mathscr{F}(\Delta(y_0),\ K)\longrightarrow X\times_G\mathscr{F}(\Delta(y_0),\ K) —$$

естественная проекция фактор-пространств. Тогда ψ-когомоморфизм $\widehat{\mathrm{Res}}^*(f,$ $G,\ H)$ — единственный ψ-когомоморфизм, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X\times\mathscr{F}(\Delta(y_0), K) \arrow[rr, "\pi(H,\ G)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times\mathscr{F}(i(y_0),\ \mathrm{id})"'] & & X\times_G\mathscr{F}(\Delta(y_0), K) \arrow[dl, "\widehat{\mathrm{Res}}^*(f,\ G,\ H)"] \\
& X\times\mathscr{F}(\Delta(\tilde{y}_0),\ K) &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Гомоморфизм $\mathrm{Res}^*(f,\ G,\ H)$ индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Res}(f, G, H)^{**}=\{\mathrm{Res}(f,$ $G,\ H)^{p,q}:p,q=0,1,\ldots\}$ — спектральной последовательности Зарелуа $E(f,\ \Delta^*,$ $K)$ в спектральную последовательность Зарелуа $E(f_1,\ \Delta^*,\ K)$. Теперь на одном примере рассмотрим этот гомоморфизм.

Пусть $H^*(G)$ и $H^*(H)$—когомологии групп G и H с коэффициентами в тривиальном G-модуле K. Имеем гомоморфизм ограничения [9] $\mathrm{Res}(G,\ H)$: $H^*(G,\ K)\longrightarrow H^*(H, K)$.

Покажем, что этот гомоморфизм индуцируется гомоморфизмом ограничения резольвент Зарелуа. Действительно, пусть $p(G):\ E(G)\to B(G)$ — универсальное G-расслоение со структурной группой G [17,19]. Можно считать, что естественная $p(H)$: $E(G)\ \to\ E(G)/H=B(H)$ является универсальным расслоением со структурной группой H. Пусть $\varphi: B(H)\to B(G)$ — естественная проекция. Очевидно $\varphi p(H)=p(G)$. Рассмотрим спектральную последовательность Зарелуа отображения $p(G)$. Мы знаем, что она порождается дифференциальным бикомплексом $\mathrm{Hom}_G(\Delta_*(G),\ \bar{A}^*(E(G),\ K))$ (см. п. 5).

Спектральная последовательность Зарелуа отображения $p(H)$ порождается дифференциальным бикомплексом $\mathrm{Hom}_H(\Delta_*(H),\ \bar{A}^*(E(G),\ K))$. Пусть $i:\ H\to G$— тождественное вложение и $\Delta_*(i):\Delta_*(H)\to\Delta_*(G)$ — гомоморфизм, индуцированный отображением i. Гомоморфизм $\Delta_*(i)$ порождает гомоморфизм $\mathrm{Res}^*{}_*{}^*(G,$ $H)=\{\mathrm{Res}_r^{p,q}(G,\ H)\}$ в спектральной последовательности $E(p(G),\ \Delta^*,\ K)$.

Рассмотрим гомоморфизм

$$\mathrm{Res}_2^{p,q}(G,\ H):E_2^{p,q}(p(G),\ \Delta^*,\ K)\longrightarrow E_2^{p,q}(p(H),\ \Delta^*,\ K).$$

Из непосредственного описания гомоморфизма ограничения резольвенты $\mathscr{D}^*(p(G),\ \Delta^*,\ K)$ и определения $\mathrm{Res}_2^{p,q}(G,\ H)$ следует, что $\mathrm{Res}_2^{p,0}(G, H)$ $=\mathrm{Res}(p(G),\ G,\ H)_2^{p,0}$. С другой стороны, $\mathrm{Res}_2^{p,q}(G,\ H)=\mathrm{Res}(G,\ H)$. Следовательно $\mathrm{Res}(G,\ H)=\mathrm{Res}(p(G),\ G,\ H)_2^{p,0}$.

9. Гомоморфизм инфляции $\mathrm{Inf}^*(f,\ G,\ H)$ **резольвент Зарелуа.** Пусть G — конечная группа порядка $(s+1)$ и H — нормальный делитель группы G порядка $(t+1)$. Предположим, что группа G действует свободно на линейно-связном и локально-стягиваемом паракомпакте X. Через Y обозначим фактор-пространство X/G, а через Y_1 — фактор-пространство X/H. Пусть $f: X \to Y$, $f_1: X \to Y_1$ и $\psi: Y_1 \to Y$ — естественные проекции. Изображения f, f_1, ψ — регулярные конечнолистные накрытия.

В этом параграфе мы найдем связь между резольвентами Зарелуа $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, K)$ и $\mathscr{D}^*(f_1, \mathscr{F}, K)$ и $\mathscr{D}^*(\psi, \mathscr{F}, K)$. Эту связь мы найдем, использовов, что $\mathscr{D}^*$ — контравариантный функтор относительно первого аргумента.

Так как $\psi f_1 = f$, то из того, что функтор $\mathscr{D}^*$ — контравариантный относительно первого аргумента, существует гомоморфизм

$$\mathrm{Inf}^*(f_1, G, H): \mathscr{D}^*(\psi, \mathscr{F}, K) \longrightarrow \mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, K),$$

см. [15]

$$\mathrm{Inf}^*(f, G, H) = \mathscr{D}^*((f_1, \psi), \mathrm{id}, \mathrm{id}).$$

Этот гомоморфизм будем называть инфляцией резольвенты Зарелуа.

Опишем этот гомоморфизм подробнее. Как и раньше, через $\Delta(y_0)$ будем обозначать s-мерный симплекс с вершинами элементов множества $f^{-1}(y_0)$, $y_0 \in Y$. Симплекс $\Delta(y_0)$ является свободным G-пространством. Пусть $\Delta_1(y_0)$ — симплекс с вершинами элементов множества $\psi_1^{-1}(y_0)$ — он является свободным G/H-пространством. Через $\rho: G \to G/H$ обозначим естественную проекцию группы G на фактор-группу G/H. Можем считать, что пространство $\Delta_1(y_0)$ является G-пространством, имея в виду G-структуру, индуцированную G/H структурой и гомоморфизмом ρ.

Группа H действует в пространстве $\Delta(y_0)$, и пространство орбит $\Delta(y_0)/H$ совпадает с $\Delta_1(y_0)$. Пусть $\pi(v_0): \Delta(y_0) \to \Delta_1(y_0)$ — естественная проекция. Отображение $\pi(y_0)$ является G-отображением. Имеем (см. п. 4)

$$\mathscr{D}^*(\psi, \mathscr{F}, K) = Y_1 \times_{G/H} \mathscr{F}(\Delta_1(y_0), K) \text{ и } \mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, K) = X \times_G \mathscr{F}(\Delta(y_0), K).$$

Рассмотрим G-отображение

$$\mathrm{id} \times \mathscr{F}(\pi(y_0), \mathrm{id}): X \times \mathscr{F}(\Delta_1(y_0), K) \longrightarrow X \times \mathscr{F}(\Delta_0(y_0), K).$$

Это отображение индуцирует гомоморфизм инфляции

$$\mathrm{Inf}^*(f, G, H): \mathscr{D}^*(\psi, \mathscr{F}, K) \longrightarrow \mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, K)$$

резольвент Зарелуа. Отметим, что $\mathrm{Inf}^{-1}(f, G, H) = \mathrm{id}$. Рассмотрим теперь случай $\mathscr{F} = \Delta^*$. Естественная проекция $\rho: G \to G/H$ индуцирует коцепное отображение $\Delta^*(\rho): \Delta^*(G/H, K) \to \Delta^*(G, K)$. Непосредственно можно убедиться, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}^*(\psi, \Delta^*, K)_{y_0} \arrow[r, "\mathrm{Inf}^*(f,\, G,\, H)"] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & \mathscr{D}^*(f, \Delta^*, K)_{y_0} \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] \\
\Delta^*(G/H, K) \arrow[r, "\Delta^*(\rho)"] & \Delta^*(G, K)
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Здесь $\approx$ изоморфизмы, построенные в [15].

Пусть $H^*(G)$ и $H^*(G/H)$ — когомологии групп G и G/H, соответственно с коэффициентами в тривиальном G-модуле K. Напомним, [9], что имеем гомоморфизм инфляции $\mathrm{Inf}(G, H): H^*(G/H) \to H^*(G)$, Пусть $p(G): E(G) \to B(G)$ — универсальное расслоение со структурной группой G. Можем считать, что $p(H): E(G) \to E(G)/H = B(H)$ есть универсальное расслоение со структурной группой H. Пусть $\varphi: B(H) \to B(G)$ — естественная проекция. Очевидно, $\varphi p(H) = p(G)$. Вычислим гомоморфизм $\mathrm{Inf}(G, H)$ через гомоморфизм инфляции $\mathrm{Inf}^*(f, G, H)$ резольвент Зарелуа.

Спектральная последовательность Зарелуа отображения $p(G)$ имеет второй член $E_2^{p,q}(p(G), \Delta^*, K) = H^p(G, H^q(E(G), K))$ (см. п. 5).

Здесь $H^q(E(G), K)$ — тривиальный G-модуль. Тогда $E_2^{p,q}(p(G), \Delta^*, K) = 0$ при $q > 0$ и $E_2^{p,0}(p(G), \Delta^*, K) = H^p(G)$. Следовательно, $E_2^{p,0}(p(G), \Delta^*, K) = E_\infty^{p,0}(p(G), \Delta^*, K)$. Аналогично, $E_2^{p,q}(\varphi, \Delta^*, K) = H^p(G/H, H^q(B(H), K))$, при $q = 0$ имеем $E_2^{p,0}(\varphi, \Delta^*, K) = H^p(G/H)$. Гомоморфизм инфляции $\mathrm{Inf}(^*(f, G, H)$ резольвент Зарелуа индуцирует гомоморфизм

$$\mathrm{Inf}(p(G), G, H)_2^{p,0}: E_2^{p,0}(\varphi, \Delta^*, K) \longrightarrow E_2^{p,0}(p(G), \Delta^*, K).$$

Знаем, что спектральная последовательность Зарелуа отображения $p(G)$ — это первая спектральная последовательность дифференциального бикомплекса $\mathrm{Hom}_G(\Delta_*(G, K), \bar{A}^*(E(G), K))$, см. п. 5, а спектралная последовательность Зарелуа отображения φ — первая спектральная последовательность дифференциального бикомплекса $\mathrm{Hom}_{G/H}(\Delta_*(G/H, K), \bar{A}^*(B(H), K))$. Отображение $p(H): E(G) \to B(H)$ индуцирует G-отображение $p(H)^*: \bar{A}^*(B(H), K) \to \bar{A}^*(E(G), K)$. Проекция $\rho: G \to G/H$ индуцирует G-отображение $\Delta_*(\rho): \Delta_*(G, K) \to \Delta_*(G/H, K)$. Следовательно, имеем гомоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{G/H}(\Delta_*(\rho), p(H)^*): \mathrm{Hom}_{G/H}(\Delta_*(G/H, K), \bar{A}^*(B(H), K)) \to \mathrm{Hom}_G(\Delta_*(G, K), \bar{A}^*(E(G), K)).$$

Непосредственно проверяется, что этот гомоморфизм индуцирован гомоморфизмом инфляции резольвенты Зарелуа — $\mathrm{Inf}^*(p(G), G, H)$. Следовательно, $\mathrm{Hom}_{G/H}(\Delta_*(\rho), p(H)^*)$ индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Inf}(p(G), \Delta^*, K)_2^{p,q}$. Из определения гомоморфизма $\mathrm{Inf}(G, H)$ непосредственно следует, что

$$\mathrm{Inf}(G, H) = \mathrm{Inf}(p(G), \Delta^*, K)_2^{p,0}.$$

10. Дифференциальный градуированный пучок непрерывного отображения. Пусть f — непрерывное отображение Хаусдорфового пространства X на пространство Y. Через $\tilde{Z}(f)$ обозначим множество всех пар (U, σ), где

а) U — открытое подмножество пространства Y;

б) $\sigma = \{U_0, \dots, U_k\}$, $U_0, \dots, U_k$ — открыто-замкнутые подмножества пространства $f^{-1}(U)$;

в) $\bigcup\{U_i : i = 0, \dots, k\} = f^{-1}(U)$;

г) $U_i \cap U_j = \emptyset$, $i, j = 0, \dots, k$, $i \neq j$.

В $\tilde{Z}(f)$ вводим естественный частичный порядок — если (U, σ), $(U', \sigma') \in \tilde{Z}(f)$, то $(U', \sigma') > (U, \sigma)$, когда выполнены условия: $U' \subset U$ и σ' — подразбиение σ.

Множество $\tilde{Z}(f)$ частично упорядочено и направлено в следущем смысле: для $(U_1, \sigma_1), (U_2, \sigma_2) \in \tilde{Z}(f)$ и $y \in U_1 \cap U_2$ существует $(U, \sigma) \in \tilde{Z}(f)$ такое, что $y \in U$ и $(U, \sigma) > (U_i, \sigma_i)$, $i=1, 2$. Пусть $\sigma_1 = \{U_0, \ldots, U_m\}$ и $\sigma_2 = \{V_0, \ldots, V_n\}$. Через $\sigma_1 \cap \sigma_2$ обозначим семейство открыто-замкнутых множеств $\{U_i \cap V_j\colon i=0, \ldots, m, j=0, \ldots, n\}$. Имеем:

а) $f^{-1}(U_1 \cap U_2) = \cup \{U_i \cap U_j\colon i, j\}$;

б) система множеств $\{U_i \cap U_j\}$ — дизъюнктная.

Другими словами, $(U_1 \cap U_2, \sigma_1 \cap \sigma_2) \in \tilde{Z}(f)$ и, очевидно, $(U_1 \cap U_2, \sigma_1 \cap \sigma_2) > (U_i, \sigma_i)$. Пусть $\mathscr{P}$ — категория симплициальных комплексов и $\mathscr{F}$ — функтор из $\mathscr{P} \times M(K)$—принимающий значения в ∂GK, контравариантный относительно первого и ковариантный относительно второго аргумента. Будем предполагать, что этот функтор удовлетворяет условиям:

$F1)$ $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}^n, \delta^n, n=0, \pm 1, \ldots\}$ и $\mathscr{F}^{-n} = 0$ при $n \geq 2$,

$F2)$ $\mathscr{F}$ — ациклический, т. е. если $P \in \mathscr{P}$ и P — симплекс и $L \in M(K)$, то коцепной комплекс $\mathscr{F}(P, L)$ — ациклический,

$F3)$ $\Phi^{-1} = H^0$, т. е. для любого $P \in \mathscr{P}$ и $L \in M(K)$, $\Phi^{-1}(P, L) = H^0(P, L)$, где $H^0(P, L)$ — нульмерные когомологии P с коэффициентами в L.

Пусть $(U, \sigma) \in \tilde{Z}(f)$. Через $P(\sigma)$ будем обозначать симплициальный комплекс с вершинами элементов множеств $\sigma = \{U_0, \ldots, U_m\}$. При этом $[U_{i_0}, \ldots, U_{i_n}]$ будет симплексом тогда и только тогда, когда $\cap \{f(U_{i_s})\colon s=0, \ldots, n\} \neq \emptyset$. Пусть (U, σ), $(U', \sigma') \in \tilde{Z}(f)$ и $(U', \sigma') > (U, \sigma)$. Определим симплициальное отображение $i(\sigma', \sigma)\colon P(\sigma') \to P(\sigma)$ следующим образом: для $U'_i \in \sigma'$ положим $i(\sigma', \sigma)(U'_i)$ —единственный элемент σ, содержащий U'_i. Дальше $i(\sigma', \sigma)$ распространяется линейно на симплексах.

Пусть $(U, \sigma) \in \tilde{Z}(f)$. Положим $\mathscr{D}^*(U_\sigma, \mathscr{F}, L) = U \times \mathscr{F}(P(\sigma), L)$. Если $(U', \sigma') > (U, \sigma)$, положим $\rho^*(\sigma', \sigma) = \mathrm{id}\,(U') \times \mathscr{F}(i(\sigma', \sigma), \mathrm{id}(L))$. Гомоморфизм $\rho^*(\sigma', \sigma)$ отображает пучок $\mathscr{D}^*(U_\sigma, \mathscr{F}, L) \mid U'$ в пучок $\mathscr{D}^*(U'_{\sigma'}, \mathscr{F}, L)$. Тогда

$$D^*(f, \mathscr{F}, L) = \{U_\sigma, \mathscr{D}^*(U_\sigma, \mathscr{F}, L), \rho^*(\sigma', \sigma), (U, \sigma) \in \tilde{Z}(f)\}.$$

есть индуктивная система частичных пучков над пространством Y. Пусть $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L) = \lim D^*(f, \mathscr{F}, L)$. Имеем:

1) $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)$ — дифференциальный градуированный пучок;

2) $\mathscr{D}^{-n}(f, \mathscr{F}, L) = 0$ при $n \geq 2$;

3) Пучок $\mathscr{D}^{-1}(f, \mathscr{F}, L)$ совпадает с постоянным пучком $\mathsf{L} = Y \times L$ тогда и только тогда, когда отображение обладает следующим свойством: для любого $(U, \sigma) \in \tilde{Z}(f)$ существует $(U', \sigma') \in \tilde{Z}(f)$ такое, что $(U', \sigma') > (U, \sigma)$ и $P(\sigma')$ — связный симплициальный комплекс.

Ряд свойств, которыми обладают резольвенты Зарелуа замкнутых отображений, остаются и у $\mathscr{D}^*(f, \mathscr{F}, L)$.

11. Резольвенты Зарелуа бесконечных накрытий. Резольвенты Зарелуа били построены для замкнутых отображений, поэтому рассматривая накрытия, мы предполагали, что они конечнолистные. Здесь мы предположим, что $f\colon X \to Y$ — бесконечно-листное накрытие, а пространство Y — локально-связный, локально-стягиваемый паракомпакт. Напомним, что в п. 10 мы построили дифференциальный пучок для любого непрерывного отображения. Здесь мы рассмотрим этот пучок для f. Так как f — накрытие, то для любой точки $y \in Y$ существует связная окрестность $U(y)$ этой точки, такая, что ее полный прообраз $f^{-1}(U(y))$ единственным способом представляется как сумма открыто-замкнутых, связных и непересекающихся множеств $f^{-1}(U(v))$

$= \bigcup\{V(y,\ \alpha):\ \alpha \in A\}$, при этом а) $V(y,\ \alpha)$ — открыто-замкнутые и связные; б) отображение $f \mid V(y,\ \alpha): V(y,\ \alpha) \to U(y)$ есть гомеоморфизм.

Окрестности $U(y)$ будем называть отмеченными окрестностями точки y.

Пусть $U(y)$ — отмеченная окрестность точки y и $\sigma=\{U_0,\ \ldots,\ U_n\}$ — подразбиение множества $f^{-1}(U(y))$ со следующими свойствами:

а) U_i — открыто-замкнутые и непересекающиеся;

б) $f^{-1}(U(y)) = \bigcup\{U_i,\ i=0, \ldots,\ n\}$.

Очевидно, $f(U_i)=U(y)$ для $i=0, \ldots,\ n$. Разбиение σ будем называть нормальным подразбиением $f^{-1}(U(\sigma))$. Через $Z(f)$ обозначим множество всех пар $(U,\ \sigma)$, где U—отмеченная окрестность y, а σ—нормальное подразбиение $f^{-1}(U)$. В множестве $Z(f)$ естественным образом вводится порядок. Пусть $(U,\ \sigma)$, $(V,\ \tau) \in Z(f)$, будем говорить, что $(V,\ \tau)>(U,\ \sigma)$, если $V \subset U$ и τ — подразбиение σ. Очевидно, частично упорядоченное множество $Z(f)$ удовлетворяет следующему условию: если $(U_1,\ \sigma_1)$, $(U_2,\ \sigma_2) \in Z(f)$ и $y \in U_1 \cap U_2$, то существует $(W,\ \tau) \in Z(f)$, такое, что $(W,\ \tau)>(U_i,\ \sigma_i)$ и $y \in W$.

Если $(U,\ \sigma) \in Z(f)$ и $\sigma=\{U_0, \ldots,\ U_n\}$, то через $P(\sigma)$ обозначим n-мерный симплекс с вершинами $U_0, \ldots,\ U_n$. Если $(U_1,\ \sigma_1)$, $(U_2,\ \sigma_2) \in Z(f)$ и $(U_2,\ \sigma_2)>(U_1,\ \sigma_1)$, то тогда $U_2 \subset U_1$ и σ_2 является подразбиением σ_1. Тогда $P(\sigma_1)$ есть n-мерный симплекс, а $P(\sigma_2)$ — m-мерный симплекс, $m \geqq n$. Через $i(\sigma_2,\ \sigma_1)$ обозначим естественное симплициальное отображение $i(\sigma_2,\ \sigma_1): P(\sigma_2) \to P(\sigma_1)$. Пусть $\mathscr{F}$ — функтор, удовлетворяющий условиям $F1$, $F2$, $F3$ и $L \in M(K)$. Если $(U,\ \sigma) \in Z(f)$, положим $\mathscr{D}^*(U_\sigma,\ \mathscr{F},\ L)=U \times \mathscr{F}(P(\sigma),\ L)$. Для $(U_1,\ \sigma_1)$, $(U_2,\ \sigma_2) \in Z(f)$ и $(U_2,\ \sigma_2)>(U_1,\ \sigma_1)$ положим $\rho^*(\sigma_2,\ \sigma_1)=\mathrm{id} \times \mathscr{F}(i\ (\sigma_2,\ \sigma_1),\ \mathrm{id})$. Тогда

$$\mathrm{D}^*(f,\ \mathscr{F},\ L)=\{\mathscr{D}^*(U_\sigma,\ \mathscr{F},\ L),\ \rho^*(\sigma_2,\ \sigma_1),\ (U,\ \tau) \in Z(f)\}$$

есть индуктивная система частичных пучков над пространством. Так как функтор $\mathscr{F}$ удовлетворяет условию $F2$, то для любого $(U,\ \sigma) \in Z(f)$ последовательность $0 \to \mathscr{D}^{-1}(f,\ \mathscr{F},\ L) \to \mathscr{D}^0(f,\ \mathscr{F},\ L) \to \ldots$ точна.

Кроме того,

$$\mathscr{D}^{-1}(f,\ \mathscr{F},\ L)=\lim\{U \times H^0(P(\sigma),\ L),\ \mathrm{id},\ (U,\ \sigma) \in Z(f)\}.$$

Отсюда получаем $\mathscr{D}^{-1}(f,\ \mathscr{F},\ L)=Y \times L=\mathsf{L}$. Следовательно, $\mathscr{D}^*(f,\ \mathscr{F},\ L)$ есть резольвента пучка $\mathsf{L}=Y \times L$. Назовем эту резольвенту резольвентой Зарелуа накрытия f.

Заметим, что $Z(f)$ является конфинальным подмножеством $\check{Z}(f)$, см. п. 10. Следовательно, построенная в этом параграфе резольвента совпадает с построенным в п. 10 дифференциальным пучком для f.

Резольвента Зарелуа накрытия f, в случае, когда накрытие f бесконечнолистно, имеет следующий дефект: она не локально-постоянный пучок.

Здесь мы предложим другой способ построения резольвенты постоянного пучка при помощи бесконечнолистного накрытия f, состоящей из локально-постоянных пучков.

Пусть $f: X \to Y$ — бесконечно-листное накрытие и $y_0 \in Y$. Множество $f^{-1}(y_0)$ дискретно и бесконечно. Через $\Delta(y_0)$ обозначим симплициальный комплекс, в котором вершины элементов $f^{-1}(y_0)$ и любое конечное подмножество есть симплекс.

Пусть U — отмеченная окрестность в Y. Через $\Delta(U)$ обозначим симплициальный комплекс с вершинами $V(\alpha)$, $\alpha \in A$, в котором любое конечное подмножество есть симплекс. Здесь $V(\alpha)$ — открыто-замкнутые и связные и $f^{-1}(U)=\cup\{V(\alpha): \alpha\in A\}$.

Для любого отмеченного множества U положим $\mathscr{D}^*(U,\Delta^*,K)=U\times\Delta^*(\Delta(U),K)$. Если U_1 и U_2 — отмеченные множества и $U_1\subset U_2$, то имеем симплициальный гомеоморфизм $i(U_1, U_2)\colon \Delta(U_1)\to\Delta(U_2)$. Пусть $\rho^*(U_1, U_2)\colon \Delta^*(\Delta(U_2), K)\to\Delta^*(\Delta(U_1), K)$ — коцепное отображение, индуцированное $i(U_1, U_2)$. Пусть $\tilde{D}^*(f, \Delta^*, K)=\{\tilde{\mathscr{D}}^*(U, \Delta^*, K), \rho^*(U_1, U_2)\}$. Это индуктивная система частичных пучков.

Положим $\tilde{\mathscr{D}}^*(f, \Delta^*, K)=\lim \tilde{D}^*(f, \Delta^*, K)$. Очевидно $\tilde{\mathscr{D}}^{-n}(f, \Delta^*, K)=0$, $n\geqq 2$. Так как симплициальный комплекс $\Delta(U)$ — ациклический для любого отмеченного множества U, то пучок $\tilde{\mathscr{D}}^*(f, \Delta^*, K)$ — тоже ациклический.

Рассмотрим $\tilde{\mathscr{D}}^{-1}(f, \Delta^*, K)$. Непосредственно проверяется, что он изоморфен $\mathsf{K}=Y\times L$. Следовательно, $\tilde{\mathscr{D}}^*(f, \Delta^*, K)$ — резольвента пучка $\mathsf{K}=Y\times K$.

Из определения очевидно, что пучок $\tilde{\mathscr{D}}^*(f, \Delta^*, K)$ — локально-постоянен.

Пусть X —линейно-связный, локально-стягиваемый паракомпакт и G — дискретная группа, действующая свободно на X. Через Y обозначим фактор-пространство X/G, а через $f\colon X\to Y$ — естественную проекцию. Отображение f — регулярное накрытие.

Здесь, не входя в детали, рассмотрим спектральную последовательность, индуцированную резольвентой $\tilde{\mathscr{D}}^*(f, \Delta^*, K)$. Используя рассуждения из п. 5, получаем

Теорема 11.1. *Пусть X — паракомпактное, линейно-связное и локально-стягиваемое пространство. Пусть G — дискретная группа, свободно действующая в пространстве X. Пусть Y — пространство орбит X/G, а $f\colon X\to Y$ — естественная проекция. Спектральная последовательность, индуцированная резольвенты $\tilde{\mathscr{D}}^*(f, \Delta^*, K)$, изоморфна спектральной последовательноси Картана регулярного накрытия f.*

12. Конечно-листные нерегулярные накрытия. Здесь рассмотрим резольвенты Зарелуа и спектральной последовательности Зарелуа данного нерегулярного накрытия $f\colon E\to B$. Будем предполагать, что B — линейно-связный, локально-стягиваемый парокомпакт и что накрытие f — $(t+1)$-листно. Напомним для удобства описания всех $(t+1)$-листных накрытий пространства B [27; 10, с. 179]. Пусть $y_0\in B$ и $f^{-1}(y_0)=\{x_0, \ldots, x_t\}$. Фундаментальная группа $\pi_1(B, y_0)$ действует на множество $f^{-1}(y_0)$ следующим образом: пусть $g\in\pi_1(B, y_0)$ и γ —замкнутый путь с началом y_0, лежащий в g. Рассмотрим путь $\tilde{\gamma}_i$ в пространстве E с началом x_i, лежащим над γ, т. е. $f\tilde{\gamma}_i=\gamma$ для $i=0, \ldots, t$. Положим $gx_i=\tilde{\gamma}_i(1)$. Через $S(y_0)$ обозначим группу перестановок множества $f^{-1}(y_0)$. Тем самым, мы получили гомоморфизм $\rho(f, y_0)\colon\pi_1(B, y_0)\to S(y_0)$. Группа $S(y_0)$ изоморфна симметрической группе $S(t+1)$. Если отождествить $S(y_0)$ с $S(t+1)$, то для различных точек y_0 гомоморфизмы $\rho(f, y_0)$ (представления) будут сопряжены (эквивалентны). Отметим, что действие $\pi_1(B, y_0)$ на множестве $f^{-1}(y_0)$ транзитивно (так как пространство E — связно). Итак, любому $(t+1)$-листному накрытию пространства B соответствует транзитивное действие $\pi_1(B, y_0)$ в $f^{-1}(y_0)$ или класс эквивалентных представлений группы $\pi_1(B, y_0)$ в $S(t+1)$.

Пусть H_i—стационарная подгруппа точки x_i, т. е. $H_i=\{g\in\pi_1(B, y_0)\colon gx_i=x_i\}$. Так как группа $\pi_1(B, y_0)$ действует транзитивно в $f^{-1}(y_0)$, то подгруппы $H_0, \ldots, H_t$ сопряжены (эти группы определяют накрытие f).

Ядро представления $\rho(f, y_0)$ — это группа $H=\cap\{H_i: i=0, \dots, t\}$. Группа $G(f)=\pi_1(B, y_0)/H$ называется группой монодромии накрытия f.

Непосредственно проверяется, что если $(t+1)$-листные накрытия $f_1: E_1 \to B$ и $f_2: E_2 \to B$ эквивалентны, то индуцированные им представления $\rho(f_1, y_0)$ и $\rho(f_2, y_0)$ эквивалентны (т. е. существует элемент $\varphi \in S(t+1)$ такой, что $\varphi\rho(f_1, y_0)=\rho(f_2, y_0)\varphi$). Итак, любому классу эквивалентных $(t+1)$-листных накрытий соответствует класс эквивалентных представлений группы $\pi_1(B, y_0)$ в $S(t+1)$.

Наоборот, если дано транзитивное представление $\rho: \pi_1(B, y_0) \to S(t+1)$, через $f_\rho: E_\rho \to B$ обозначим накрытие, определенное подгруппой $\{g \in \pi_1(B, y_0): g(0)=0\}$.

Непосредственно проверяется, что накрытию f_ρ соответствует представление ρ. При этом эквивалентным накрытиям соответствуют эквивалентные накрытия.

Пусть $f: E \to B$ — $(t+1)$-листное накрытие и $G(f)$ — его группа монодромии. Порядок группы $G(f)$ больше $(t+1)$, так как накрытие f нерегулярно.

Пусть $D(f)$ — группа скольжения накрытия f и $N(H_i)$ — нормализатор группы H_i в $\pi_1(B, y_0)$. Тогда $D(f)$ изоморфна $N(H_i)/H_i$, $i=0, \dots, t$.

Пусть $\Delta(y_0)$ — симплекс с вершинами $\{x_0, \dots, x_t\}$. Так как множество $f^{-1}(y_0)$ есть $\pi_1(B, y_0)$-множество, то $\Delta^*(\Delta(y_0), K)$ есть $\pi_1(B, y_0)$-модуль. В действительности $\Delta(y_0)$ есть $G(f)$-множество и тем самым $\Delta^*(\Delta(y_0), K)$ есть $G(f)$-модуль.

Рассмотрим пучок $\mathscr{D}^*(f, \Delta^*, K)$ (это резольвента Зарелуа пучка $\mathbf{K}=Y \times K$). Так как f — конечнолистное накрытие, то этот пучок локально-постоянен. Если U — отмеченное подмножество в пространстве Y и $y_0 \in U$, то $\mathscr{D}^*(f, \Delta^*, K) | U = U \times \Delta^*(\Delta(y_0), K)$. Локально-постоянному пучку $\mathscr{D}^*(f, \Delta^*, K)$ соответствует $\pi_1(B, y_0)$-модуль. Найдем этот модуль.

Так как пространство B паракомпактно, то $\mathscr{D}^*(f, \Delta^*, K)$ — локально-тривиальное расслоение с дискретным слоем и проекция $\pi: \mathscr{D}^*(f, \Delta^*, K) \to B$ этого расслоения, единственным образом удовлетворяет аксиому о поднятия пути.

Пусть $g \in G$ и γ — путь с началом y_0 в B и лежащий в g. Пусть $l \in \mathscr{D}^p(f, \Delta^*, K)_{y_0}$ и $\tilde{\gamma}$ — путь в $\mathscr{D}^p(f, \Delta^*, K)$ с началом l и лежащий над γ. Положим $g^l=\tilde{\gamma}(1)$. Так определяется $\pi_1(B, y_0)$-модуль $\mathscr{D}^p(f, \Delta^*, K)_{y_0}$. Рассмотрим его более подробно. Имеем $\mathscr{D}^p(f, \Delta^*, K)_{y_0}=\Delta^p(\Delta(y_0), K)$. Пусть γ_i — путь в E с началом x_i, лежащий над γ (такой путь существует, так как f — накрытие).

Обозначим через $y(u)$ точку $y(u)=f\gamma_i(u)$, $0 \leq u \leq 1$, $i=0, \dots, t$. Пусть $\Delta(y(u))$ — симплекс с вершинами $\gamma_0(u), \dots, \gamma_t(u)$. Если $l \in \Delta^p(\Delta(v_0)), K)$, то через $l(u)$ обозначим тот элемент в $\Delta^p(\Delta(y(u)), K)$, чтобы $l(u)[\gamma_{i_0}(u), \dots, \gamma_{i_s}(u)]=l[x_{i_0}, \dots, x_{i_s}]$ для любого симплекса $[\gamma_{i_0}(u), \dots, \gamma_{i_s}(u)]$ в $\Delta(y(u))$.

Наконец, $\tilde{\gamma}(1)=l(1) \in \Delta^p(\Delta(y_0), K)$.

Для x_i через $\gamma_i^{-1}(0)$ обозначим ту точку из $f^{-1}(y_0)$, что поднимая путь γ с началом в этой точке, получим путь с концом в x_i. Тогда $l(1)[x_{i_0}, \dots, x_{i_p}] = l[\gamma_{i_0}^{-1}(0), \dots, \gamma_{i_p}^{-1}(0)]$. Пусть $g \in H=\cap\{H_i: i=0, \dots, t\}$ и γ — такой, как раньше. Тогда для любого x_i, $i=0, \dots, t$, имеем $\tilde{\gamma}_i(1)=x_i$. Тем самым

$\tilde{\gamma}(1)=l$ или $gl=l$ для любого $l\in\mathscr{D}^p(f,\ \Delta^*,\ K)_{y_0}$. Таким образом определено действие группы монодромии $G(f)$ в $\mathscr{D}^p(f,\ \Delta^*,\ K)_{y_0}$.

Из сказаного получаем:

Лемма 12.1. *$G(f)$-модули $\mathscr{D}^*(f,\ \Delta^*,\ K)_{y_0}$ и $\Delta^*(\Delta(y_0),\ K)$ изоморфны.*

Используя обозначения п. 3, можем записать $m(\mathscr{D}^*(f,\ \Delta^*,\ K))=\Delta^*(\Delta(y_0),\ K)$. Так как $\lambda\mu=l$ (лемма 4.2), получаем

Лемма 12. 2. $l(\mathscr{D}^*(f,\ \Delta^*,\ K))=\lambda(\Delta^*(\Delta(y_0),\ K))$.

Предложение 12.3. *Пусть $f: E\to B$ — конечно-листное накрытие паракомпактного, линейно-связного и локально-стягиваемого пространства B. Тогда для первого члена спектральной последовательности Зарелуа отображения f имеем*

$$E_1^{p,q}(f,\ \Delta^*,\ K)=H^p(B,\ \lambda(\Delta^q(\Delta(y_0),\ K)),$$

причем дифференциал индуцирован дифференциалом в $\lambda(\Delta^*(\Delta(y_0),\ K))$.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим универсальное накрытие $\tilde{f}: \tilde{E}\to B$. Группа $\pi=\pi_1(B,\ y_0)$ действует свободно в пространстве $\tilde{E}$. Следовательно, если через $S_*(\tilde{E})$ обозначим коцепной комплекс сингулярных цепей с целыми коэффициенатами, то $S_*(\tilde{E})$ есть свободный λ-модуль.

Теперь непосредственно можно убедиться, что спектральная последовательность Зарелуа отображения f порождается дифференциальным бикомплексом $\mathrm{Hom}_\pi(S_*(\tilde{E}),\ \Delta^*(\Delta(y_0),K))$. Отсюда и получаем предложение 12.3.

13. Спектральная последовательность Снаппера транзитивного G-множества и спектральная последовательность Зарелуа. Пусть G—данная конечная группа и H ее подгруппа. Если H — нормальный делитель, то известна хорошая связь между когомологиями групп G, H и G/H — это дается спектральной последовательностью Зарелуа отображения $p(G,\ H): B(H)\to B(G)$. Здесь $p(G): E(G)\to B(G)$ — универсиальное G-расслоение и $p(H): E(G)\to E(G)/H=B(H)$. Тогда $p(G,\ H)$ — естественная проекция. Отображение $p(G,\ H)$ есть регулярное накрытие с группой скольжения G/H.

Какова связь между когомологиями G и H в случае, когда H не является нормальным делителем G? Ответ на этот вопрос известен. Adamson [21], Hochshild [26], Snapper [28] построили когомологии действия конечной группы G в конечном множестве. Точнее, пусть X — конечное множество и группа G действует в X слева. По аналогии с определением комологии группы G определяются когомологии G-множества X — $H^*(G,\ X,\ A)$ для любого G-модуля A. Эти когомологии были впервые определены Adamson [21] в случае, когда G действует транзитивно на X; Hochshild [26] рассмотрел эти когомологии с точки зрения относительной гомологической алгебры, а Snapper [28] рассмотрел общий случай и нашел спектральную последовательность G-множества X. Будем называть эту спектральную последователность спектральной последовательностью Снаппера. При этом Snapper [29] утверждал, что эта спектральная последовательность другой природы по сравнению со спектральной последовательностью, связывающей когомологии G и H в случае, когда H — нормальный делитель G (спектральная последовательность Хоишильда — Серра [9]. Здесь мы покажем, что это не так. Проверим, что если H — подгруппа G, то спектральная последовательность Снаппера G-пространства G/H изоморфна спектральной последовательности Зарелуа отображения $p(G, H)$: $B(H) \to B(G)$. В этом случае $p(G, H)$ является нерегулярным накрытием. Напомним, что когда H — нормальный делитель G, то спектральная последовательность Зарелуа $p(G, H)$ изоморфна спектральной последовательности Картана регулярного накрытия $p(G, H)$, а последняя изоморфна спектральной последовательности Хохшильда — Серра.

Для этого коротко напомним определение Snapper [28]: Пусть G — конечная группа и $X = \{x_0, \ldots, x_t\}$ — конечное множество, на котором действует G слева; пусть $\Delta(X)$ — симплекс с вершинами $x_0, \ldots, x_t$. Тогда $\Delta(X)$ является G-пространством. Предположим, что Z — группа целых чисел — есть тривиальный G-модуль.

Рассмотрим $\Delta_*(\Delta(X), Z)$ и коцепной комплекс $C^*(G, X, A) = \mathrm{Hom}_G(\Delta_*(\Delta(X), Z), A))$, где A — данный G-модуль.

Когомологии $C^*(G, X, A)$ по определению называются когомологиями G-множества X и обозначаются через $H^*(G, X, A)$. Очевидно, в случае, когда G действует свободно на множестве X, то $H^*(G, X, A)$ изоморфны $H^*(G, A)$.

Спектральная последовательность Снаппера определяются следующим образом. Пусть $B^* = \{B^q\}$ есть ациклическая G-резольвента тривиального G-модуля Z. Спектральная последовательность Снаппера G-множества X порождается дифференциальным бикомплексом $\mathrm{Hom}_G(\Delta_*(\Delta(X), Z), B^*)$. Эта спектральная последовательность сходится к $H^*(G, Z)$, а ее второй член $E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{Ext}_G^q(\Delta_*(\Delta(X), Z), Z))$ при этом $E_2^{p,0} = H^p(G, X, Z), p \geqq 0$. Здесь и дальше будем рассматривать коэффициенты, которые являются тривиальными G-модулями (это из-за того, чтобы не загружать текст лишними техническими деталями).

Пусть $\Delta^p(\Delta(X), Z) = \mathrm{Hom}(\Delta_p(\Delta(X), Z), Z)$ и $P_* = \{P_q\}$ — свободная G-резольвента тривиального G-модуля Z. Имеем

$$\mathrm{Hom}_G(P_q, \Delta^p(\Delta(X), Z)) = \mathrm{Hom}(P_q \underset{G}{\otimes} \Delta_p(\Delta(X), Z), Z)$$

$$= \mathrm{Hom}_G(\Delta_p(\Delta(X), Z), \mathrm{Hom}(P_q, Z)).$$

Отметим, что $\mathrm{Hom}(P_*, Z)$ есть Z-расщепляющаяся последовательность и есть точная последовательность G-модулей. При этом модуль $\mathrm{Hom}(P_q, Z)$ — ациклический, т.е. $\mathrm{Ext}_G^r(Z, \mathrm{Hom}(P_q, Z)) = 0$, $r > 0$. Тогда мы можем взять $B^q = \mathrm{Hom}(P_q, Z)$. Следовательно, спектральная последовательность Снаппера G-множества X порождается бикомплексом $\mathrm{Hom}_G(\Delta_*(\Delta(X), Z), \mathrm{Hom}(P_*, Z))$. Пусть теперь G действует транзитивно на множестве X. Положив $H = H_{x_0} = \{g \in G\colon gx_0 = x_0\}$, можем отождествить X с фактор-множеством G/H, а действие G в X с левыми сдвигами G в G/H.

Рассмотрим спектральную последовательность Снаппера G-множества G/H. Напомним, что спектральная последовательность Зарелуа накрытия $p(G, H)$ порождается бикомплексом $\mathrm{Hom}_G(S_*(E(G)), \Delta^*(\Delta(y_0)))$, где $y_0 \in B(G)$, а $\Delta(y_0)$ — симплекс с вершинами элементов множества $p(G, H)^{-1}(y_0)$.

Имеем

$$\mathrm{Hom}_G(S_q(E(G)), \Delta^p(\Delta(y_0)))$$
$$= \mathrm{Hom}(S_q(E(G)) \underset{G}{\otimes} \Delta_p(\Delta(y_0)), Z) = \mathrm{Hom}_G(\Delta_p(\Delta(y_0)), \mathrm{Hom}(S_q(E(G)), Z)).$$

Тем самым, спектральная последовательность Зарелуа отображения $p(G, H)$ порождается бикомплексом $\mathrm{Hom}_G(\Delta_*(\Delta(y_0)), \mathrm{Hom}(S_*(E(G)), Z))$.

Рассмотрим симплекс $\Delta(y_0)$. Его вершины — суть элементы множества $p(G, H)^{-1}(y_0)$. Это множество можем отождествить с G/H, при этом как G-множества они тоже изоморфны, т. е. G-пространства $\Delta(y_0)$ и $\Delta(G/H)$ изоморфны.

Рассмотрим цепной комплекс $S^*(E(G))$. Так как пространство $E(G)$ есть свободное G-пространство, то модули $S_q(E(G))$ — свободные G-модули. Из-за того, что $E(G)$ — гомотопически тривиально, то цепной комплекс $S_*(E(G))$ ациклический, т. е. является свободной G-резольвентой тривиального G-модуля Z. Тем самым, мы можем вычислить спектральную последовательность Снаппера G-множества G/H, положив $P_q = S_q(E(G))$. Следовательно, спектральная последовательность Снаппера G-множества G/H порождается бикомплексом $\mathrm{Hom}_G(\Delta_*(\Delta(y_0)), \mathrm{Hom}(S_*(E(G)), Z))$. Тем самым доказано.

Предложение 13.1. *Пусть G — конечная группа и H — ее подгруппа. Спектральная последовательность Снаппера G-множества G/H изоморфна спектральной последовательности Зарелуа отображения $p(G, H)$: $B(H) \to B(G)$ ($p(G, H)$ — естественная проекция унирерсальных пространств).*

Замечания. 1. В [28] определен гомоморфизм ограничения для когомологии G-множеств. Рассмотрим этот гомоморфизм в следующей ситуации: для G-множества G/H. Тогда имеем гомоморфизм ограничения $\mathrm{Res}^*(G/H, G, H)$. С другой стороны, имеем также и гомоморфизм ограничения в спектральной последовательности Зарелуа $p(G, H)$ — $\mathrm{Res}_2^{p,0}$. Тогда, использовов рассуждения из п. 7, получаем $\mathrm{Res}_2^{p,0} = \mathrm{Res}^p(G/H, G, H)$.

2. Snapper [31] определил также и гомоморфизм инфляции. Для транзитивных G-пространств он тоже совпадает с гомоморфизмом инфляции резольвент Зарелуа (см. п. 8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Борисович, Я. Израилевич, Т. Щелкова. Метод спектральной последовательности А. Бореля в теории эквивариантных отображений. *Успехи мат. наук*, **32**, 1977, 161 — 162.
2. Р. Годеман. Алгебраическая топология и теория пучков. Москва, 1968.
3. А. Гротендик. О некоторых вопросах гомологической алгебры. Москва, 1961.
4. А. Зарелуа. Конечнократные отображения топологических пространств и когомологических многообразий. *Сиб. мат. ж.*, **10**, 1969, 64—92.
5. А. Зарелуа. Когомологическая структура конечнократных отображений. *Труды Тбилисского мат. и-та* **41**, 1972, 100—127.
6. А. Зарелуа. О резольвентах непрерывного отображения и спектральной последовательности, связанной с ней. *Труды Тбилисского мат. и-та*, 1977.
7. А. Зарелуа. Об одной спектральной последовательности, связанной с непрерывным отображением. *Мат. заметки*, **23**, 1978, 435—446.
8. Дж. Келли. Общая топология. Москва, 1968.
9. С. Мак-Лейни. Гомология. Москва, 1960.
10. У. Масси, Дж. Столингс. Алгебраическая топология. Москва, 1977.
11. Л. Понтрягин. Непрерывные группы. Москва, 1968.
12. Г. Скордев. О резольвентах непрерывного отображения. *Мат. сб.*, **82**, 1970, 532—550.
13. Скордев. О резольвентах, отвечающих замкнутому отображению. *Мат. сб.*, **86**, 1971, 234—247.
14. Г. Скордев. Конечнолистные накрытия и резольвента замкнутого отображения. *Доклады БАН*, **26**, 1973, 733—734.
15. Г. Скордев. О резольвентах замкнутого отображения. *Годишник. Соф. унив., Фак. мат. мех.*, 1977/78 (под печат).

16. Г. Скордев. Резольвенты Зарелуа. *Успехи мат. наук,* **35**, 1980, 221—224.
17. Стинрод. Топология косых произведений. Москва, 1953.
18. Ху Сы Цзянь. Теория гомотопии. Москва, 1960.
19. Д. Хьюзмоллер. Расслоенные пространства. Москва 1970.
20. Т. Щелокова. К задаче вычисления степени эквивалентного отображения. *Сиб. мат. ж.*, **19**, 1978, 426—435.
21. I. Adamson. Cohomology theory for non-normal subgroups and non-normal fields. *Proc. Glasgow Math. Ass.*, **2**, 1954, 66-76.
22. A. Borel. Seminar on transformation group. *Ann. Math. Studies*, **46**, Prinston, 1960.
23. G. Bredon. Sheaf theory. New York, 1967.
24. R. Dyckhoff. Perfect light maps and inverse limits. *Quart. J. Math., Oxford*, **25**, 1974, 441-449.
25. R. Dyckhoff. Categorical methods in dimension theory. *Lecture Notes Math.*, **540**, 1976, 220-242.
26. G. Hochshild. Relative homological algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82**, 1956 246-269.
27. H. Seifert, W. Threlfal. Topologie. Berlin, 1937.
28. E. Snopper. Cohomology of permutation representations. *J. Math. Mech.*, **13**, 1964, 133-161, 1057-1064.
29. E. Snapper. Spectral sequences and Frobenius groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114**, 1965, 133-160.
30. E. Snapper. Duality in the cohomology ring of transitive permutation representations. *J. Math. Mech.*, **14**, 1964, 323-336.
31. E. Snapper. Inflation and deflation for all dimensions. *Pacif. J. Math.*, 1964.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 12. 1. 1982