PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ФИЛЬТРАЦИЯ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

ДИМИТР И. ХАДЖИЕВ

В этой работе выводится замкнутая система уравнений для оптимального фильтра и ошибки отслеживания гауссовского марковского процесса в случае, когда наблюдения линейно зависят от этого процесса и образуют с ним гауссовскую систему. Если оцениваемый процесс является решением линейного уравнения, мы получаем обобщение известного фильтра Калмана — Бьюси.

Ряд задач статистически случайных процессов связан с рассмотрением частично наблюдаемых случайных процессов (θ, X), первая компонента θ у которых ненаблюдаема, а вторая компонента X доступна непосредственному наблюдению. Располагая в любой момент времени $t \in R_+=[0, \infty)$ наблюдениями, составленными из траектории $(X_s, 0 \leqq s \leqq t)$, статистику приходится оценивать разные ненаблюдаемые величины, статистически связанные с наблюдаемым процессом X. Центральной в теории оценивания является задача описания оптимального фильтра $\pi_t(\theta)=\mathsf{E}(\theta_t/X_s, 0\leqq s\leqq t)$, являющегося наилучшей в среднеквадратическом смысле оценкой текущего состояния θ_t ненаблюдаемой компоненты θ.

Настоящая работа посвящена выводу (замкнутой) системы стохастических дифференциальных уравнений для оптимального фильтра $\pi(\theta)$ и ошибки оценивания $\gamma_t(\theta)=\mathsf{E}[(\theta_t-\pi_t(\theta))^2]$, $t \in R_+$, в случае, когда:

1) (θ, X) — гауссовский процесс с непрерывными справа и допускающими пределы слева траекториями;

2) ненаблюдаемая компонента θ линейно входит в наблюдаемую и, точнее, наблюдения X допускают представление

$$X_t=X_0+\int_{(0, t]}\theta_{s-}da(s)+M_t, \tag{1}$$

где $\theta_{s-}=\lim_{u\uparrow s}\theta_u$, $a=a(t)$, $t\in R_+$, — неслучайная непрерывная справа функция ограниченной вариации, $M=(M_t)$, $t\in R_+$, — гауссовский мартингал. Подобная схема включает ряд конкретных постановок и, в частности, непрерывный и дискретный варианты фильтра Кальмана — Бьюси (см. [5, 8]). Ради простоты изложения мы ограничиваемся только случаем скалярных процессов θ и X.

Работа составлена из трех частей. В п. 1 вводятся естественные предположения на наблюдаемый процесс X и доказывается теорема о представлении мартингалов. Следующий параграф содержит обобщение фильтра Калмана — Бьюси на случай „ненепрерывных сигналов и шумов". В п. 3 рассмотрена более общая схема фильтрации, в которой ненаблюдаемый процесс θ является общим гауссовским марковским процессом.

Приводимые здесь результаты составляют часть диссертации [9] и частично опубликованы в сообщении автора [10].

1. Представление мартингалов. Мы используем обозначения и результаты работ [11, 12], где собраны и необходимые нам сведения из теории мартингалов.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство с потоком σ-алгебр $\mathfrak{F}=(\mathfrak{F}_t)$, $t\in R_+$, и X_0, θ, M — определенные на нем выше объекты такие, что

(G) (X_0, θ, M) — гауссовская система.

Рассмотрим подробнее гауссовский процесс X, заданный формулой (1). Очевидно, процесс X является полумартингалом с мартингальной частью M и „сносом" $A=(A_t, \mathfrak{F}_t)$, $t\in R_+$, определенным формулой

(2) $$A_t=\int_{(0,t]}\theta_{s-}da(s),$$

и представляющим собой $\mathfrak{F}$-предсказуемый процесс ограниченной вариации. (Процесс A корректно определен, поскольку непрерывный слева процесс $\theta_-=(\theta_{t-})$, $t\in R_+$, локально ограничен и тем самым P-почти все траектории $(A_t, t\in R_+)$ конечны.) Нетрудно убедиться, что A является гауссовским процессом и даже

(G1) (X_0, A, M) — гауссовская система.

Если процесс X доступен наблюдению, то с ним естественно связать систему (пополненных по мере P) σ-алгебр $\mathfrak{F}^X=(\mathfrak{F}_t^X)$, $t\in R_+$, где

(3) $$\mathfrak{F}_t^X=\sigma\{X_s, 0\leqq s\leqq t\}.$$

Семейство $\mathfrak{F}^X$ обычно интерпретируют как „поток наблюдений", однако без дополнительных предположений может оказаться, что это семейство не непрерывно справа $(\mathfrak{F}_t^X\neq\mathfrak{F}_{t+}^X=\bigcap_{u>t}\mathfrak{F}_u^X)$, и тем самым не является потоком в обычном смысле [11]. С другой стороны, семейство $\mathfrak{F}_+^X=(\mathfrak{F}_{t+}^X)$, $t\in R_+$, всегда непрерывно справа. Случайный процесс $\tilde{X}=(X_t, \mathfrak{F}_{t+}^X)$ представляет собой полумартингал с естественным представлением [11]:

(4) $$X_t=X_0+\bar{A}_t+\bar{M}_t,$$

где

(5) $$\bar{A}_t=\int_{(0,t]}\pi_s^-(\theta)da(s),$$

$\pi^-(\theta)=(\pi_t^-(\theta), \mathfrak{F}_{t-}^X)$ — непрерывная слева модификация процесса $\mathsf{E}(\theta_t\,|\,\mathfrak{F}_{t-}^X)$, $\mathfrak{F}_{t-}^X=\sigma(\bigcup_{u<t}\mathfrak{F}_u^X)$, $t\in R_+$, являющаяся $\mathfrak{F}_+^X$-предсказуемой проекцией процесса θ_- (см. [1, гл. 5 T15, T20, T31]) и $\tilde{M}=(\bar{M}_t, \mathfrak{F}_{t+}^X)$ — (гауссовский) мартингал.

Нетрудно заметить, однако, что $\mathfrak{F}_+^X$-предсказуемый процесс $\bar{A}$ оказывается F^X-предсказуемым. Тогда процесс $\bar{M}$ согласован с семейством $\mathfrak{F}^X$ и $\bar{M}=(\bar{M}_t, \mathfrak{F}_t^X)$ — (гауссовский) мартингал. Таким образом, процесс $\bar{X}=(X_t, \mathfrak{F}_t^X)$ оказывается полумартингалом с естественным представлением (4), независимо от того, является ли семейство $\mathfrak{F}^X$ непрерывным справа или нет. При этом выполняется

$(\bar{\mathrm{G}})$ $(X_0, \bar{A}, \bar{M})$ — гауссовская система.

Представление (4) наблюдаемого процесса X мы называем минимальным (естественным для $\bar{X}$) представлением. Оно связано с „потоком наблюдений", и поэтому разумно изучать свойства „потока наблюдений" именно в терминах представления (4).

Пусть $\bar{N}=(\bar{N}_t, \mathfrak{F}^X_{t+}), t \in R_+$ — (гауссовский) мартингал с непрерывными справа и допускающими пределы слева траекториями и такой, что

(G2) $(X_0, \bar{A}, \bar{M}, \bar{N})$ — гауссовская система.

Для задач статистики особенно важно располагать достаточными (и необходимыми) условиями, при которых (любой) мартингал $\bar{N}$ (относительно $\mathfrak{F}^X_+$) представляется в виде стохастического интеграла

$$\bar{N}_t = \int_{(0,t]} f(s) d\bar{M}_s, \quad t \in R_+, \tag{6}$$

(мы обозначаем это равенством $\bar{N}=f * \bar{M}$). Известны общие необходимые и достаточные условия довольно сложного вида [3, 7], чья проверка на практике затруднительна. Поэтому представляет интерес доказываемая ниже теорема 1, дающая простые достаточные условия, при которых из (G2) следует равенство $\bar{N}=f * \bar{M}$.

Заметим прежде всего, что если (гауссовский) мартингал $\bar{N}$ удовлетворяет (G2), то, согласно лемме 1 в [6], функция $\langle\bar{N}, \bar{M}\rangle$ абсолютно непрерывна относительно $\langle\bar{M}\rangle$ и при любом $t \in R_+$ удовлетворяет условие

$$\int_{(0,t]} \left(\frac{d\langle\bar{N}, \bar{M}\rangle_s}{d\langle\bar{M}\rangle_s}\right)^2 d\langle\bar{M}\rangle_s \leq \langle\bar{N}\rangle_t < \infty. \tag{7}$$

Следовательно, если положить

$$f(t) = \frac{d\langle\bar{N}, \bar{M}\rangle_t}{d\langle\bar{M}\rangle_t}, \quad t \in R_+, \tag{8}$$

то стохастический интеграл $f * \bar{M}$ корректно определен и является гауссовским мартингалом [12].

Оказывается, что представление $\bar{N}= f * \bar{M}$ имеет место тогда и только тогда, когда в (7) при всех $t \in R_+$ достигается равенство.

Сформулируем теперь удобное для дальнейшего достаточное условие.

Теорема 1. *Если существует $\mathfrak{F}^X$-предсказуемый процесс $U=(U_t, \mathfrak{F}^X_t)$, $t \in R_+$, такой, что*

$$\bar{A} = U * \langle\bar{M}\rangle, \tag{9}$$

$$U^2 * \langle\bar{M}\rangle_t = \int_{(0,t]} U_s^2 d\langle\bar{M}\rangle_s < \infty, \ \mathsf{P}=п.\ н.,\ t \in R_+, \tag{10}$$

то любой мартингал $\bar{N}$ (относительно $\mathfrak{F}^X_t$) со свойством (G2) *допускает представление $\bar{N}=f * \bar{M}$, где f — неслучайная функция, определенная равенством* (8).

Доказательство. Пусть $\bar{N}$ — произвольный мартингал со свойством (G2) и функция f определена как в (8). Обозначим

$$Z_t = \bar{N}_t - \int_{(0,t]} f(s) d\bar{M}_s, \quad t \in R_+, \tag{11}$$

и для произвольно фиксированного $T \in R_+$ рассмотрим меру Q на $\mathfrak{F}_\infty^X = \sigma(\bigvee_{t \in R_+} \mathfrak{F}_t^X)$, определенную равенством

$$dQ = \exp\left(Z_T - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_T\right) dP \tag{12}$$

(сужение меры P на $\mathfrak{F}_\infty^X$ обозначено той же буквой P). Покажем, что $Q = P$ на $\mathfrak{F}_\infty^X$.

С этой целью обозначим $\mu_X(\Gamma) = P(\hat{X}(\omega) \in \Gamma)$, $\nu_X(\Gamma) = Q(\hat{X}(\omega) \in \Gamma)$, $\mu_{\bar{M}}(\Gamma) = P(\bar{M}(\omega) \in \Gamma)$, $\nu_{\bar{M}}(\Gamma) = Q(\bar{M}(\omega) \in \Gamma)$, где Γ — любое измеримое множество в пространстве непрерывных справа и допускающих пределы слева функций на R_+, $\hat{X} = X - X_0$.

Лемма 1. *По отношению к мере Q процесс $\tilde{M} = (\bar{M}_t, \mathfrak{F}_{t+}^X)$, $t \in R_+$, является гауссовским мартингалом с теми же двумя первыми моментами, что и $\tilde{M}$ относительно меры P. Свойство $(\bar{G})$ имеет место и по отношению к мере Q.*

Доказательство. Пусть M — усреднение по мере Q. Поскольку $E(dQ/dP \mid \mathfrak{F}_{t+}^X) = \exp\left(Z_{t\wedge T} - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_{t\wedge T}\right)$ и $\langle Z, \bar{M}\rangle = 0$ (т. е. Z и $\bar{M}$ независимы по мере P), то

$$M(\bar{M}_t^2) = E(\bar{M}_t^2 \cdot dQ/dP)$$

$$= E\left(\bar{M}_t^2 \cdot \exp\left(Z_{t\wedge T} - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_{t\wedge T}\right)\right) = E(\bar{M}_t^2), \quad t \in R_+.$$

Далее, согласно лемме 6.6 в [8], при любых $0 \leq s < t < \infty$ выполняется

$$M(\bar{M}_t \mid \mathfrak{F}_{s+}^X) = E\{\exp[Z_{t\wedge T} - Z_{s\wedge T} - \frac{1}{2}(\langle Z\rangle_{t\wedge T} - \langle z\rangle_{s\wedge T})]\bar{M}_t / \mathfrak{F}_{s+}^X\}$$

$$= E(\bar{M}_t \mid \mathfrak{F}_{s+}^X) = \bar{M}_s.$$

Наконец, если $\alpha = \alpha(\omega)$ — любая конечная линейная комбинация величин X_0 $\bar{A}_s$, $\bar{M}_s$, $s \leq t$, то характеристическая функция

$$\psi(\lambda) = M\{\exp[i\lambda\alpha(\omega)]\} = E\{\exp[i\lambda\alpha(\omega)]\, E(dQ/dP \mid \mathfrak{F}_{t+}^X)\}$$

$$= E\{\exp[i\lambda\alpha(\omega) + Z_{t\wedge T} - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_{t\wedge T}]\}, \quad t \in R_+.$$

Поскольку $(X_0, \bar{A}, \bar{M}, Z)$ — гауссовская система по отношению к мере P, то $\psi(\lambda)$ — характеристическая функция гауссовского распределения. Лемма доказана.

Как следствие из леммы 1 сразу получаем, что $\mu_{\bar{M}} = \nu_{\bar{M}}$.

Согласно (12), свойства (9) и (10) выполняются и по отношению к мере Q. В силу гауссовости мер μ_X, ν_X и $\mu_{\overline{M}}=\nu_{\overline{M}}$, соотношения (10) и теоремы 17 в [4] имеем $\mu_X\sim\mu_{\overline{M}}$, $\nu_X\sim\nu_{\overline{M}}$ на любом подпространстве функций на $(0, t]$, $t\in R_+$. При этом для сужений μ^t_X, ν^t_X и μ^t_M соответствующих мер на это подпространство выполняются:

$$d\mu^t_X/d\mu^t_{\overline{M}}=\exp\Big(\int\limits_{(0,t]} U_s d\overline{M}_s-\frac{1}{2}\int\limits_{(0,t]} U^2_s d\langle\overline{M}\rangle_s\Big),$$

$$d\nu^t_X/d\mu^t_{\overline{M}}=\exp\Big(\int\limits_{(0,t]} U_s d\overline{M}_s-\frac{1}{2}\int\limits_{(0,t]} U^2_s d\langle\overline{M}\rangle_s\Big).$$

Следовательно, $\dfrac{d\mu^t_X}{d\mu^t_{\overline{M}}}(X)=\dfrac{d\nu^t_X}{d\mu^t_{\overline{M}}}(X)$, P-п. н. Поскольку $\mu^t_X\sim\mu^t_{\overline{M}}$, то имеет место также $\dfrac{d\mu^t_X}{d\mu^t_{\overline{M}}}(\overline{M})=\dfrac{d\nu^t_X}{d\mu^t_{\overline{M}}}(\overline{M})$, P-п. н. Но тогда очевидно для проекции Γ_t множества Γ на подпространство функций на $(0, t]$ имеем

$$\mathsf{Q}(\widehat{X}(\omega)\in\Gamma_t)=\nu^t_X(\Gamma_t)=\int\limits_{\Gamma_t}\frac{d\nu^t_X}{d\mu^t_{\overline{M}}}(x)d\mu^t_{\overline{M}}(x)$$

$$=\int\limits_{\Gamma_t}\frac{d\mu^t_X}{d\mu^t_{\overline{M}}}(x)d\mu^t_{\overline{M}}(x)=\mu^t_X(\Gamma_t)=\mathsf{P}(\widehat{X}(\omega)\in\Gamma_t).$$

Таким образом, $\mathsf{Q}=\mathsf{P}$ на $\mathfrak{F}^X_t$, и по теореме о предложении меры $\mathsf{Q}=\mathsf{P}$ на $\mathfrak{F}^{X'}_{\infty t}$, Но тогда (см. (12)) $Z_T=0$, P-п. н. и в силу произвольности $T\in R_+$ и [1 гл. 3 Т 6], мартингал $Z=0$. Теорема 1 доказана.

Укажем на три важных следствия из этой теоремы.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *имеет место равенство*

$$\mathfrak{F}^X_t=\mathfrak{F}^{X_0,\overline{M}}_t,\quad t\in R_+. \tag{13}$$

Доказательство. При фиксированном $t\in R_+$ рассмотрим мартингал $\overline{N}$, для которого $\overline{N}_s=\mathsf{E}(\overline{A}_t\,|\,\mathfrak{F}^X_{s+})$, $s\in R_+$. Согласно (6), величина $\overline{N}_t=\overline{A}_t$ является $\mathfrak{F}^{X_0,\overline{M}}_t$-измеримой, откуда сразу следует (13).

Следствие 2. *В условиях теоремы* 1 *имеет место равенство*

$$\mathfrak{F}^X_t=\mathfrak{F}^X_{t+},\quad t\in R_+, \tag{14}$$

т. е. семейство $\mathfrak{F}^X$ непрерывно справа.

Доказательство. Так как $\mathfrak{F}^{X_0,\overline{M}}_t=\mathfrak{F}^{X_0,\overline{M}}_{t+}$ (см. [6, § 2, п. 4]), то из следствия 1 получаем

$$\mathfrak{F}^X_{t+}=\bigcap_{u>t}\mathfrak{F}^X_u=\bigcap_{u>t}\mathfrak{F}^{X_0,\overline{M}}_u=\mathfrak{F}^{X_0,\overline{M}}_{t+}=\mathfrak{F}^X_t.$$

Следствие 3. *В условиях теоремы* 1 *имеет место представление*

$$X_t = \mathsf{E}X_t + \operatorname{cov}(X_t, X_0)\operatorname{cov}^{\oplus}(X_0, X_0)(X_0 - \mathsf{E}X_0) + \int_{(0,t]} \frac{d\operatorname{cov}(X_t, \overline{M}_s)}{d\langle\overline{M}\rangle_s}\, d\overline{M}_s, \quad t \in R_+. \tag{15}$$

Доказательство. При фиксированном $t \in R_+$ рассмотрим мартингал $\overline{N}$, для которого $\overline{N}_s = \mathsf{E}(X_t \mid \mathfrak{F}_s^X) = \mathsf{E}(X_t \mid \mathfrak{F}_0^X)$, $s \in R_+$. Очевидно $\langle\overline{N}, \overline{M}\rangle_s = \mathsf{E}\overline{N}_s\overline{M}_s = \operatorname{cov}(X_t, \overline{M}_s)$, $s \in R_+$, а по теореме о нормальной корреляции ([8, следствие 1, с. 500]) получаем

$$\mathsf{E}(X_t \mid \mathfrak{F}_0^X) = \mathsf{E}(X_t \mid X_0) = \mathsf{E}X_t + \operatorname{cov}(X_t, X_0)\operatorname{cov}^{\oplus}(X_0, X_0)(X_0 - \mathsf{E}X_0).$$

Тогда (15) непосредственно следует из (6).

2. Обобщение фильтра Калмана — Бьюси. Пусть частично наблюдаемый процесс (Y, X) является решением системы уравнений

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_{(0,t]} Y_{s-}\,db(s) + N_t, \\ X_t &= X_0 + \int_{(0,t]} Y_{s-}\,da(s) + M_t, \end{aligned} \tag{16}$$

где (Y_0, X_0) — гауссовский вектор, $a = a(t)$ и $b = b(t)$ — непрерывные справа неслучайные функции ограниченной вариации, M и N — (гауссовские) мартингалы относительно исходного потока σ-алгебр $\mathfrak{F}$. Предположим для определенности, что

$$\mathsf{E}\,Y_0 = n, \quad \operatorname{cov}(Y_0, Y_0) = \sigma^2, \quad \mathsf{E}\,X_0 = m, \quad \operatorname{cov}(X_0, X_0) = \delta^2.$$

На протяжении этого параграфа будем предполагать, что выполняется условие

(G3) $\qquad (X_0, M, Y_0, N)$ — гауссовская система.

Согласно 1, полумартингал X допускает минимальное представление

$$X_t = X_0 + \int_{(0,t]} \pi_s^-(Y)\,da(s) + \overline{M}_t, \tag{17}$$

где $\pi^-(Y)$ — непрерывная слева модификация процесса $\mathsf{E}(Y_{t-} \mid \mathfrak{F}_{t-}^X)$.

Пусть, наконец, выполнены условия

$$a = \alpha * \langle\overline{M}\rangle, \tag{18}$$

$$\alpha^2 * \langle\overline{M}\rangle_t = \int_{(0,t]} \alpha^2(s)\,d\langle\overline{M}\rangle_s < \infty, \tag{19}$$

где $\alpha = \alpha(t)$ — некоторая неслучайная (борелевская) функция, $t \in R_+$.

Теорема 2. *В предположениях* (16), (18), (19) *семейство* $\mathfrak{F}^X$ *непрерывно справа. Любой мартингал* $\overline{N}$ (*относительно* $\mathfrak{F}^X$) *со свойством*

(G2) $\qquad (X_0, \overline{A}, \overline{M}, \overline{N})$ — *гауссовская система,*

где $\overline{A}$, $\overline{M}$ — *соответственно „снос“ и мартингальная часть в* (17), *допускает представление* (6), (8).

Доказательство. Покажем, что из (18), (19) вытекают (9), (10).

Действительно, (9) выполняется с $\mathfrak{F}^X$-предсказуемым процессом $U=\pi^-(Y)\alpha$.

Для доказательства (10) обозначим $0=s_0<s_1<\dots<s_k<\dots\leqq\infty$ все точки скачков размера -1 функции $b=b(t)$ и напомним [12], что при $s_k\leqq t<s_{k+1}$, $k\geq 0$, решение Y первого уравнения в (16) имеет вид

$$Y_t=\varphi(t,\ s_k)[Y_{s_k}+\int_{(s_k,\ t]}\varphi^{-1}(s,\ s_k)dN_s],$$

где $\varphi(t,\ s_k)$ и $\varphi^{-1}(t,\ s_k)$, $s_k\leqq t<s_{k+1}\wedge T$ равномерно ограничены при любом $T\in R_+$ (функция $\varphi(t,\ s_k)$ явно определена в [12, формула (18)].

Следовательно, $\mathsf{E}\,Y_t^2=\varphi^2(t,\ s_k)\,[\mathsf{E}\,Y_{s_k}^2+\int_{(s_k,t]}\varphi^{-2}(s,\ s_k)d\langle N\rangle_s]$, и при любом фиксированном $T\in R_+$ величины $\mathsf{E}\,Y_t^2$ равномерно ограничены на $[0,\ T]$. Но тогда из (19) получаем, что

$$\int_{(0,T]}\mathsf{E}\,Y_{t-}^2\,\alpha_t^2\,d\langle\overline{M}\rangle_t<\infty,$$

откуда следует (10).

Утверждения теоремы 2 вытекают из теоремы 1 и следствия 2.

Пусть $\pi(Y)=(\pi_t(Y),\ \mathfrak{F}_t^X)$, $t\in R_+$, — непрерывная справа и допускающая пределы слева модификация процесса $\mathsf{E}\,(Y_t\,|\,\mathfrak{F}_t^X)$, $t\in R_+$. Процесс $\pi(Y)$ существует, поскольку Y — полумартингал и $\mathfrak{F}^X$ — непрерывное справа семейство (см. [11]). В этом случае, разумеется, $\pi_t^-(Y)=\pi_{t-}(Y)$, $t\in R_+$, т. е. $\pi^-(Y)=\pi_-(Y)$ ([1, гл. 3, Т. 6]).

Следующая теорема составляет основной результат фильтрации в схеме (16)—(19).

Теорема 3. *Оптимальный фильтр* $\pi(Y)$ *и ошибка отслеживания* $\gamma(Y)=(\gamma_t(Y),\ \mathfrak{F}_t^X)$, $t\in R_+$, *с* $\gamma_t(Y)=\mathsf{E}[(Y_t-\pi_t(Y))^2\,|\,\mathfrak{F}_t^X]$ *удовлетворяют системе уравнений:*

(20)
$$\pi_t(Y)=\pi_0(Y)+\int_{(0,t]}\pi_{s-}(Y)db(s)$$
$$+\int_{(0,t]}\Big[\frac{d\langle M,\ N\rangle_s}{d\langle\overline{M}\rangle_s}+(1+\Delta b(s))\alpha(s)\gamma_{s-}(Y)\Big]d\overline{M}_s,$$

(21)
$$\gamma_t(Y)=\gamma_0(Y)+\langle N\rangle_t+2\int_{(0,t]}\gamma_s(Y)db(s)+\sum_{s\leqq t}\gamma_{s-}(Y)[\Delta b(s)]^2$$
$$+\int_{(0,t]}\Big[\frac{d\langle M,\ N\rangle_s}{d\langle\overline{M}\rangle_s}+(1+\Delta b(s))\alpha(s)\gamma_{s-}(Y)\Big]^2d\langle\overline{M}\rangle_s,$$

где

(22)
$$\pi_0(Y)=n+\delta^{-2}\,.\operatorname{cov}(Y_0,\ X_0)(X_0-m),$$

(23)
$$\gamma_0(Y)=\sigma^2-\delta^{-2}\,.\operatorname{cov}^2(Y_0,\ X_0).$$

Замечание. Уравнения (20), (21) анонсированы в сообщении [10]. Они сводятся к уже известным уравнениям фильтрации в ситуациях, рассмотренных в [5, 8, 6]. Новизну представляют только члены, содержащие Δb, которые раньше не учитывались из-за (абсолютной) непрерывности сносов в соответствующих постановках.

Доказательство. Для краткости будем писать π, γ вместо $\pi(Y)$ $\gamma(Y)$. Согласно лемме 1 в [11] процесс π допускает представление

$$\pi_t = \pi_0 + \int_{(0,t]} \pi_{s-} db(s) + \bar{N}_t, \tag{24}$$

где $\bar{N}$ — мартингал относительно $\mathfrak{F}^X$. Очевидно $\bar{N}$ удовлетворяет условию (G2) и, согласно теореме 2, выполняются (6), (8).

Пусть $\lambda = \lambda(t)$, $t \in R_+$, — ограниченная борелевская функция и $\bar{z}$ — (гауссовский) мартингал относительно $\mathfrak{F}^X$ с $\bar{Z} = \lambda * \bar{M}$.

С одной стороны, мы сразу получаем

$$\langle \bar{Z}, \bar{N}\rangle_t = \int_{(0,t]} \lambda(s) f(s) d\langle \bar{M}\rangle_s, \quad t \in R_+. \tag{25}$$

С другой стороны, из (24) вытекает, что при любом $t \in R_+$

$$\langle \bar{Z}, \bar{N}\rangle_t = \mathsf{E}\{\bar{Z}_t[\pi_t - \pi_0 \int_{(0,t]} \pi_{s-} db(s)]\} \tag{26}$$

$$= \mathsf{E}\{\bar{Z}_t Y_t - \int_{(0,t]} \bar{Z}_{s-} \pi_{s-} db(s)\} = \mathsf{E}\{\bar{Z}_t Y_t \int_{(0,t]} \tilde{Z}_{s-} Y_{s-} db(s)\}.$$

Используя определение $\bar{Z}$, второе уравнение в (16) и (17), получаем $\bar{Z}_t = \tilde{Z}_t + \int_{(0,t]} \lambda(s)(Y_{s-} - \pi_{s-}) da(s)$, где $\tilde{Z} = \lambda * M$. Последнее вместе с (26) приводит к соотношению

$$\langle \bar{Z}, \bar{N}\rangle_t = \mathsf{E}\{Y_t \tilde{Z}_t - \int_{(0,t]} \tilde{Z}_{s-} Y_{s-} db(s)\} \tag{27}$$

$$+ \mathsf{E}\{Y_t \int_{(0,t]} \lambda(s)(Y_{s-} - \pi_{s-}) da(s) - \int_{(0(t]} Y_{s-} \int_{(0,s]} \lambda(u)(Y_{u-} - \pi_{u-}) da(u) db(s)\}.$$

Далее исследуются оба слагаемые в первой части (27).

Первый член записывается в виде

$$\mathsf{E}\{Y_t \tilde{Z}_t - \int_{(0,t]} \tilde{Z}_{s-} Y_{s-} db(s)\} = \mathsf{E}\{\tilde{Z}(Y_t - \int_{(0,t]} Y_{s-} db(s))\} \tag{28}$$

$$= \mathsf{E}\tilde{Z}_t N_t = \langle \tilde{Z}, N\rangle_t = \int_{(0,t]} \lambda(s) d\langle M, N\rangle_s.$$

Во втором члене участвует слагаемое

$$\mathsf{E}\{Y_t \int_{(0,t)} \lambda(s)(Y_{s-} - \pi_{s-}) da(s)\}$$

$$= \mathsf{E}\{\int_{(0,t]} Y_{s-} db(s) \int_{(0,t]} \lambda(s)(Y_{s-} - \pi_{s-}) da(s) + \int_{(0,t]} \lambda(s)(Y_0 + N_{s-})(Y_{s-} - \pi_{s-}) da(s)\}.$$

Но по обобщенной формуле Ито [2] произведение

$$\int_{(0,t]} Y_{s-} db(s) \int_{(0,t]} \lambda(s)(Y_{s-} - \pi_{s-}) da(s)$$

$$= \int_{(0,t]} Y_{s-} \int_{(0,s]} \lambda(u)(Y_{u-} - \pi_{u-}) da(u) db(s) + \int_{(0,t]} \lambda(s)(Ys_{-} - \pi_{s-}) \int_{(0,s]} Y_{u-} db(u) da(s).$$

Следовательно, второе слагаемое в правой части (27) записывается в виде

$$(29)\qquad \mathsf{E}\{Y_t \int\limits_{(0,t]} \lambda(s)(Y_{s-}-\pi_{s-})da(s) - \int\limits_{(0,t]} Y_{s-} \int\limits_{(0,s)} \lambda(u)(Y_{u-}-\pi_{u-})da(u)db(s)\}$$

$$=\mathsf{E}\{\int\limits_{(0,t]} \lambda(s)(Y_{s-}-\pi_{s-})\int\limits_{(0,s]} Y_{u-}db(u)da(s) + \int\limits_{(0,t]} \lambda(s)(Y_{s-}-\pi_{s-})(Y_0+N_{s-}(da(s))\}$$

$$=\mathsf{E}\{\int\limits_{(0,t]} \lambda(s)(1+\Delta b(s))(Y_{s-}-\pi_{s-})^2 da(s)\} = \int\limits_{(0,s)} \lambda(s)(1+\Delta b(s))\gamma_{s-}da(s).$$

Мы использовали тот факт, что из (G3) вытекает [8, с. 419] детерминированность процесса γ

$$(30)\qquad \gamma_t = \mathsf{E}[(Y_t-\pi_t)^2 \mid \mathfrak{F}_t^X] = \mathsf{E}[(Y_t-\pi_t)^2] = \mathsf{E}Y_t^2 - \mathsf{E}\pi_t^2,\quad t\in R_+.$$

Предположение (18) и равенства (25), (27), (28), (29) показывают, что при любом $t\in R_+$ имеет место

$$\int\limits_{(0,t]} \lambda(s) f(s)\, d\langle \overline{M}\rangle_s = \int\limits_{(0,t]} \lambda(s) d\langle M, N\rangle_s + \int\limits_{(0,t]} \lambda(s)(1+\Delta b(s))\gamma_{s-}da(s).$$

Следовательно (λ — произвольно!), производная $d\langle M, N\rangle/d\langle \overline{M}\rangle$ существует и

$$f(t) = \frac{d\langle M, N\rangle_t}{d\langle \overline{M}\rangle_t} + (1+\Delta b(t))\gamma_{t-}\alpha(t),\quad t\in R_+,$$

что вместе с (24) и (6) доказывает (20).

Равенства (22), (23) вытекают из условия (G3) и теоремы о нормальной корреляции [8, формулы (13.30), (13.31)].

Пусть s_k, $k\geq 0$, — числа, определенные в доказательстве теоремы 2. Из (24) следует, что $\pi_{s_k} = \Delta\overline{N}_{s_k}$, $k\geq 1$. Тогда (13) и формулы (13.36), (13.37) в [8] показывают, что при всех $k\geq 1$

$$(31)\qquad \pi_{s_k} = \Delta\langle M, N\rangle_{s_k}(\Delta\langle \overline{M}\rangle_{s_k})^{\oplus}\Delta\overline{M}_{s_k},$$

$$(32)\qquad \gamma_{s_k} = \Delta\langle N\rangle_{s_k} - (\Delta\langle M, N\rangle_{s_k})^2 (\Delta\langle \overline{M}\rangle_{s_k})^{\oplus}.$$

Пусть $\varphi(t)=\varphi(t, s_k)$, $s_k\leq t<s_{k+1}$, $k\geq 0$ (см. доказательство теоремы 2 и § 3 в [12]).

Лемма 2. *Решение π уравнения* (20) *удовлетворяет на любом полуинтервале* $[s_k, s_{k+1})$, $k\geq 0$, *равенство*

$$(33)\qquad \pi_t = \varphi(t)\{\pi_{s_k} + \int\limits_{(s_k,t]} [\varphi^{-1}(s)\frac{d\langle M, N\rangle_s}{d\langle \overline{M}\rangle_s} + \alpha(s)\varphi^{-1}(s-)\gamma_{s-}]d\overline{M}_s\}.$$

Доказательство сразу вытекает из теоремы 4 в [12], если заметить, что

$$\varphi^{-1}(s)(1+\Delta b(s)) = \varphi^{-1}(s-),\ s_k<s<s_{k+1},\quad k\geq 0.$$

Из той же теоремы, леммы 2 и равенства (30) следует, что при $s_k\leq t<s_{k+1}$, $k\geq 0$, выполняется

$$(34)\qquad \gamma_t = \varphi^2(t)\{\gamma_{s_k} + \int\limits_{(s_k,t]} \varphi^{-2}(s)d\langle N\rangle_s$$

$$-\int_{(s_k,t]}[\varphi^{-1}(s)\frac{d\langle M, N\rangle_s}{d\langle \overline{M}\rangle_s}+\alpha(s)\varphi^{-1}(s-)\gamma_{s-}]^2\, d\langle \overline{M}\rangle_s\}.$$

Пусть $\overline{\gamma}_t=\gamma_t\varphi^{-2}(t)$, $t\in R_+$. По обобщенной формуле Ито [2] получаем $\gamma_t=\gamma_{s_k}+\int_{(s_k,t]}\varphi^2(s)\,d\overline{\gamma}_s+\int_{(s_k,t]}\overline{\gamma}_{s-}d\varphi^2(s)$, где $\varphi^2(t)=1+2\int_{(s_k,t]}\varphi^2(s-)\,db(s)+\Sigma_{s_k<s\leqq t}\ \varphi^2(s-)[\Delta b(s)]^2$, $s_k\leqq t<s_{k+1}$, $k\geqq 0$.

Так как, согласно (34), для $\overline{\gamma}_t$ имеется явное выражение, то из последних соотношений немедленно вытекает (21) на $[s_k, s_{k+1})$, $k\geqq 0$, а, следовательно, и на R_+. Теорема 3 доказана.

Попутно мы видим, что из (33), (34) на $[s_k, s_{k+1})$, $k\geqq 0$, следуют (20), (21) на R_+. Нетрудно убедиться, что верно и обратное. Во-первых, из (20), (21) и определения s_k, $k\geqq 1$, выводятся (31), (32). Во-вторых, с помощью обобщенной формулы Ито и определения $\varphi=\varphi(t)$, $t\in R_+$, [12] легко получить на каждом полуинтервале $[s_k, s_{k+1})$, $k\geqq 0$, уравнения (33), (34).

Коротко это обстоятельство можно выразить следующим утверждением.

Теорема 4. *Система уравнений* (20), (21) *на* R_+ *с начальным условием* (22, (23) *эквивалентна системам уравнений* (33), (34) *на* $[s_k, s_{k+1})$, $k\geqq 0$, *с начальными условиями* (22), (23), (31), (32).

3. Фильтрация гауссовского марковского процесса. Рассмотрим произвольный гауссовский марковский процесс $\theta=(\theta_t, \mathfrak{F}_t)$, $t\in R_+$, с непрерывными справа и допускающими пределы слева траекториями. В этом параграфе изучается общая схема фильтрации, в которой процесс θ считается ненаблюдаемым.

Предположим, что наблюдению подлежит полумартингал X, заданный представлением (1), причем выполняется и условие

(G) $\quad (X_0, \theta, M)$ — гауссовская система.

Полумартингал X допускает минимальное представление

$$X_t=X_0+\int_{(0,t]}\pi_s^-(\theta)da(s)+\overline{M}_t \tag{35}$$

(см. (4), (5)).

Пусть, наконец, выполняются условия (ср. с (18), (19))

$$a=\alpha*\langle\overline{M}\rangle, \tag{36}$$

$$\int_{(0,t]}\mathsf{E}\,\theta_{s-}^2\,.\,\alpha^2(s)d\langle\overline{M}\rangle_s<\infty,\quad t\in R_+, \tag{37}$$

с некоторой неслучайной функцией $\alpha=\alpha(t)$, $t\in R_+$.

Теорема 5. *В этих предположениях представление*

$$\pi_t(\theta)=\mathsf{E}\,\theta_t+G(t, 0)(\pi_0(\theta)-\mathsf{E}\,\theta_0) +\int_{(0,t]}[\frac{d\,\mathrm{cov}\,(\theta_t, M_s)}{d\langle\overline{M}\rangle_s}+\alpha(s)G(t, s-)\gamma_{s-}(\theta)]d\overline{M}_s, \tag{38}$$

$$\gamma_t(\theta)=\mathrm{cov}\,(\theta_t, \theta_t)-G^2(t, 0)\,\mathrm{cov}\,(\theta_0, \theta_0)+G^2(t, 0)\gamma_0(\theta) -\int_{(0,t]}[\frac{d\,\mathrm{cov}\,(\theta_t, M_s)}{d\langle\overline{M}\rangle_s}+\alpha(s)G(t, s-)\gamma_{s-}(\theta)]^2 d\langle\overline{M}\rangle_s,$$

где $G(t, s)=\operatorname{cov}(\theta_t, \theta_s)\operatorname{cov}^{\oplus}(\theta_s, \theta_s)$, $t\geq s$, *и* $h^{\oplus}=h^{-1}$, *если* $h\neq 0$, $h^{\oplus}=0$, *если* $h=0$, *задает некоторую модификацию* $\pi(\theta)$ *процесса* $\mathsf{E}(\theta_t\,|\,\mathfrak{F}_t^X)$, $t\in R_+$, *и ошибку отслеживания* $\gamma_t(\theta)=\mathsf{E}[(\theta_t-\pi_t(\theta))^2\,|\,\mathfrak{F}_t^X]$, $t\in R_+$ (ср. с [6, теорема 2].

Доказательство. Прежде всего для полумартингала X выполняются условия теоремы 1. Поэтому любой мартингал $\bar{N}$ (относительно $\mathfrak{F}^X$) со свойством (G2) имеет представление (6), (8) и выполняется (14).

Зафиксируем $t\in R_+$ и пусть $\bar{Z}_s=\mathsf{E}(\theta_t\,|\,\mathfrak{F}_s^X)$, $s\leq t$, $\bar{N}_s=\bar{Z}_s-\bar{Z}_0$. Ясно, что из-за (G) выполняется (G2) и потому

$$\bar{N}_t=\pi_t(\theta)-\bar{Z}_0=\int_{(0,t]}\frac{d\langle\bar{N},\bar{M}\rangle_s}{d\langle\bar{M}\rangle_s}\,d\bar{M}_s. \tag{39}$$

Из предположения о марковости процесса θ (относительно $\mathfrak{F}$) и теоремы о нормальной корреляции [8, следствие 1, с. 500] следует, что

$$\begin{aligned}\bar{Z}_0&=\mathsf{E}(\theta_t\,|\,X_0)=\mathsf{E}[\mathsf{E}(\theta_t\,|\,\mathfrak{F}_0)/X_0]\\&=\mathsf{E}[\mathsf{E}(\theta_t\,|\,\theta_0)\,|\,X_0]=\mathsf{E}\theta_t+G(t,0)[\pi_0(\theta)-\mathsf{E}\vartheta_0].\end{aligned}\tag{40}$$

Далее, так как

$$\bar{M}_s=X_s-X_0-\int_{(0,s]}\pi_u^-(\theta)da(u)=M_s+\int_{(0,s]}(\theta_{u-}-\pi_u^-(\theta))da(u),$$

то сразу получаем

$$\langle\bar{N},\bar{M}\rangle_s=\operatorname{cov}(\bar{N}_s,\bar{M}_s)=\mathsf{E}\bar{N}_s\bar{M}_s=\mathsf{E}[\theta_tM_s+\theta_t\int_{(0,s]}(\theta_{u-}-\pi_u^-(\theta))da(u)]$$

$$=\operatorname{cov}(\theta_t, M_s)+\mathsf{E}\{\int_{(0,s]}(\theta_{u-}-\pi_u^-(\theta))\mathsf{E}(\theta_t\,|\,\mathfrak{F}_{u-})da(u)\},$$

где у $\mathsf{E}(\theta_t\,|\,\mathfrak{F}_{u-})$, $u\leq t$, выбрана непрерывная слева модификация. Тогда, учитывая, что $\mathsf{E}(\theta_t\,|\,\mathfrak{F}_v)=\mathsf{E}(\theta_t\,|\,\theta_v=\mathsf{E}\theta_t+G(t,v)(\theta_v-\mathsf{E}\theta_v)$, при $v\uparrow u\leq t$ получаем $\mathsf{E}(\theta_t\,|\,\mathfrak{F}_{u-})=\mathsf{E}\theta_t+G(t,u-)(\theta_{u-}-\mathsf{E}\theta_{u-})$.

Теперь, в силу того, что $\mathsf{E}\{\int_{(0,s]}(\theta_{u-}-\pi_u^-(\theta))da(u)\}=0$, находим

$$\langle\bar{N},\bar{M}\rangle_s=\operatorname{cov}(\theta_t, M_s)+\mathsf{E}\{\int_{(0,s]}(\theta_{u-}-\pi_u^-(\theta))^2G(t,u-)da(u)\}$$

$$=\operatorname{cov}(\theta_t, M_s)+\int_{(0,s]}\gamma_{u-}(\theta)G(t,u-)da(u),$$

что вместе с (36) приводит к равенству

$$\frac{d\langle\bar{N},\bar{M}\rangle_s}{d\langle\bar{M}\rangle_s}=\frac{d\operatorname{cov}(\theta_t, M_s)}{d\langle\bar{M}\rangle_s}+\alpha(s)G(t,s-)\gamma_{s-}(\theta). \tag{41}$$

Из (39), (40) и (41) вытекает первое из уравнений (38).

Далее, используя это уравнение и свойства стохастических интегралов, получаем (ср. с (30))

$$\gamma_t(\theta)=\mathsf{E}\theta_t^2-\mathsf{E}\pi_t^2(\theta)$$

$$=\mathsf{E}\theta_t^2-\mathsf{E}\{[\mathsf{E}\theta_t-G(t,0)(\pi_0(\theta)-\mathsf{E}\theta_0)]^2\}-\int_{(0,t]}[\frac{d\operatorname{cov}(\theta_t, M_s)}{d\langle\bar{M}\rangle_s}$$

$$+\alpha(s)G(t,s-)\gamma_{s-}(\theta)]^2d\langle\bar{M}\rangle_s,$$

где $\mathsf{E}[(\pi_0(\theta)-\mathsf{E}\theta_0)^2]=\operatorname{cov}(\theta_0,\theta_0)-\gamma_0(\theta)$, $\mathsf{E}\theta_t^2-[\mathsf{E}\theta_t]^2=\operatorname{cov}(\theta_t,\theta_t)$.

Отсюда второе из уравнений (38) получается непосредственно.

Замечание. Отметим сразу же отличие теоремы (5) от полученной в предыдущем параграфе теоремы 3. Установленный в п. 2 результат (20), (21) относится ко вполне определенной модификации процесса $\mathsf{E}(Y_t \mid \mathfrak{F}_t^X)$, $t \in R_+$, и имеет место с точностью до неотличимости, т. е. как равенство для P-почти всех $\omega \in \Omega$ и всех $t \in R_+$. Наоборот, первое из равенств (38) определяет любую модификацию процесса $\mathsf{E}(\theta_t \mid \mathfrak{F}_t^X)$, $t \in R_+$, и не содержит в себе утверждение о существовании непрерывной справа и допускающей пределы слева модификации. Тем не менее, в условиях п. 2. теоремы 3 и 5 дают одинаковый результат.

Действительно, рассмотрим случай, когда процесс $\theta = Y$ является решением первого из уравнений (16). Процесс Y является гауссовским марковским процессом [12], и согласно доказательству теоремы 2, эта ситуация охватывается теоремой 5.

Пусть для простоты $t < s_1$. Так как $\mathsf{E}Y_t = \varphi(t, 0)\mathsf{E}Y_0$, то при $s \leqq t$ можно подсчитать величину

$$\operatorname{cov}(Y_t, Y_s) = \mathsf{E}[(Y_t - \varphi(t, 0)n)(Y_s - \varphi(s, 0)n)]$$
$$= \mathsf{E}Y_tY_s - \varphi(t, 0)\varphi(s, 0)n^2 = \varphi(t, 0)\varphi(s, 0)[\sigma^2 - n^2 + \int_{(0,s]} \varphi^{-2}(u)d\langle N\rangle_u].$$

Аналогично, $\operatorname{cov}(Y_s, Y_s) = \varphi^2(s, 0)[\sigma^2 - n^2 + \int_{(0,s]} \varphi^{-2}(u)d\langle N\rangle_u]$ и тогда $G(t, s) = \varphi(t, 0)\varphi^{-1}(s, 0)$; $G(t, 0) = \varphi(t, 0)$.

Далее,

$$\operatorname{cov}(Y_t, M_s) = \mathsf{E}[(Y_t - \varphi(t, 0)n)M_s] = \varphi(t, 0) \int_{(0,s]} \varphi^{-1}(u)d\langle M, N\rangle_u$$

и, следовательно, $\dfrac{d \operatorname{cov}(Y_t, M_s)}{d\langle \overline{M}\rangle_s} = \varphi(t, 0)\varphi^{-1}(s, 0)\dfrac{d\langle M, N\rangle_s}{d\langle \overline{M}\rangle_s}$, откуда, учитывая первое из равенства (38), приходим к (33) на полуинтервале $[0, s_1)$.

Аналогичные рассуждения на $[s_k, s_{k+1})$, $k \geqq 1$, но с использованием $\varphi(t, s_k)$ вместо $\varphi(t, 0)$, показывают, что из первого равенства (38) следует (33). Так же из второго равенства (38) вытекает (34), если на $[0, s_1)$ использовать уже указанный вид $\operatorname{cov}(Y_t, Y_t)$, а на $[s_k, s_{k+1})$, $k \geqq 1$, взять начальное условие $Y_{s_k} = \Delta N_{s_k}$. В точках s_k, $k \geqq 0$, представление (38) дает, очевидно, (22), (23), (31), (32).

Эквивалентность результатов теорем 3 и 5 в рассматриваемом случае видна из теоремы 4.

Отметим, наконец, что хотя это и не утверждается в теореме 5, даваемая ею в случае $\theta = Y$ модификация $\pi(Y)$ записывается в виде (33) и, следовательно, непрерывна справа и допускает пределы слева. Это происходит из-за специального вида функции $G = G(t, s)$, которая в силу теоремы 4 в [12] при всех $s_k \leqq s \leq t < s_{k+1}$, $k \geqq 0$, дается формулой $G(t, s) = \varphi(t) \cdot \varphi^{-1}(s)$.

Автор выражает свою признательность Р. Ш. Липцеру за введение в данную проблематику и за ряд полезных бесед.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Деллашери. Емкости и случайные процессы. Москва, 1975.
2. C. Doleans-Dade, P. A. Meyer. Integrales stochastiques par rapport aux martingales locales. *Lectu-e Notes in Mathematics*, **124**, 1970, 77—107.

3. J. Jacod. A general theorem of representation for martingales. *Proc. Symp. Pure Math.*, **31**, Providence, 1977, 37—53.
4. Ю. М. Кабанов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных вероятностных распределений. II. *Матем. сборник*, **108**, 1979, 32—64.
5. Р. Е. Калман, Р. С. Бьюси. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. *Техн. механика*, (сб. переводов), **83**, 1961, с. 123.
6. Р. Ш. Липцер. Гауссовские мартингалы и обобщение фильтра Калмана — Бьюси. *Теория вероятн. примен.*, **20**, 1975, 292—308.
7. Р. Ш. Липцер. О представлении локальных мартингалов, *Теория вероятн. примен.* **21**, 1976, 718—726.
8. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов. Москва, 1974.
9. Д. И. Хаджиев. Мартингальные методы в теории точечных процессов и оптимальное оценивание. Кандидатская диссертация, МГУ, 1977.
10. D. I. Hadžiev, A. Generalization of the Kalman—Bucy filter. *Sixth Balkan Mathematical Congress*, Varna, June 1977, p. 281.
11. Д. И. Хаджиев. О фильтрации полумартингалов в случае наблюдений за точечными процессами. *Теория вероятн. примен.* **23**, 1978, 175—184.
12. Д. И. Хаджиев. О структуре гауссовских мартингалов. *Сердика*, **4**, 1978, 224—231.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 8. 12. 1980