PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

РЕГУЛИРУЕМЫЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ С НЕОДНОРОДНОЙ МИГРАЦИЕЙ

НИКОЛАЙ М. ЯНЕВ, КОСТО В. МИТОВ

Получены предельные теоремы для одного класса неоднородных во времени регулируемых ветвящихся процессов, когда вероятность миграции стремится к нулю.

Пусть I — множество индексов и каждому $i \in \mathrm{I}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P})$ соответствуют

1) множество независимых одинаково распределенных целочисленных неотрицательных случайных величин

$$X_i=\{X_{ij}(t),\ j, t=1,\ 2, \dots\},\quad F_i(s)=\mathrm{E}\{s^{X_{ij}(t)}\},$$

причем множества, соответствующие разным, $i \in \mathrm{I}$, независимы;

2) множество неотрицательных целочисленных случайных величин $\varphi_i=\{\varphi_i(t;\ n),\ t,\ n=0, 1, 2, \dots\}$, причем множества $\varphi=\{\varphi_i,\ i\in \mathrm{I}\}$ и $X=\{X_i,\ i\in \mathrm{I}\}$ независимы.

Тогда Z_t — регулируемый ветвящийся процесс с регулирующим множеством φ, определяется следующим конструктивным образом:

$$Z_{t+1}=\sum_{i\in \mathrm{I}}\ \sum_{j=1}^{\varphi_i(t;\ Z_t)} X_{ij}(t+1),\quad t=0,\ 1,\ 2, \dots \tag{1}$$

Определение (1) описывает довольно широкие классы случайных процессов. Так, если $\mathrm{I}=\{1\}$, $\varphi_1(t;\ n)\equiv n$ п. н., то Z_t — классический процесс Гальтона—Ватсона (см. напр. [1]). При $\mathrm{I}=\{1,\ 2\}$, $\varphi_1(t;\ n)\equiv n$ и $\varphi_2(t;\ n)\equiv 1$ п. н. из (1) следует, что Z_t — ветвящийся процесс с иммиграцией (см., напр., [2]). В [3] для случая $\mathrm{I}=\{1\}$, $\varphi_1(t;\ n)\equiv\varphi(n)$ п. н., где $\varphi(n)$ — неслучайная функция, исследуются вопросы о вырождении либо невырождении процессов. В [4], предполагая $\varphi_i(t;\ n)\equiv\varphi_i(n)$ п. н., где $\varphi_i(n)$ — неслучайные функции, получены, кроме того, и предельные теоремы в докритическом и надкритическом случае. Как отмечено в [4], определение (1) даже в этом более простом варианте охватывает все однородные цепи Маркова. Однако, наиболее интересны, с точки зрения теории ветвящихся процессов, те случаи, когда в некотором смысле $\sum_{i\in \mathrm{I}}\varphi_i(t;\ n)\to\infty$ при $n\to\infty$, что, впрочем, предполагается в работах [3 — 16]. Так, например, в [5] рассматривается случай, когда $\mathrm{I}=\{1\}$, $\varphi_1(t;\ n)\equiv\max(n-1,\ 0)$ п. н., т. е. получается ветвящийся процесс с постоянной эмиграцией одной частицы. В работах [6, 7, 8] исследуются вероятности вырождения, когда $\mathrm{I}=\{1\}$, а $\varphi_t=\{\varphi_1(t;\ 0),\ \varphi_1(t;\ 1),\ \varphi_1(t;\ 2), \dots\}$ $(t=0,\ 1,\ 2, \dots)$ — независимые стохастически эквивалентные процессы. В [7] эти результаты обобщаются для φ-процессов в случайной среде. В работах [9—15] получены более детальные результаты относительно асимптотических свойств некоторых классов ветвящихся процессов со случайным регулирующим множеством φ. Заметим, что в всех этих случаях Z_t является однородным марковским процессом.

В настоящей работе предполагается, что $\mathrm{I}=\{1\}$, а $\varphi_t=\{\varphi_1(t\,;0), \varphi_1(t\,;1), \varphi_1(t\,;2), \dots\}$ $(t=0, 1, 2, \dots)$ — независимые процессы, для которых

$$
(2)\qquad \begin{gathered}
\mathsf{P}\{\varphi_1(t;\, n)=\max(n-1,\ 0)\}=p_t, \quad \mathsf{P}\{\varphi_1(t\,;\, n)=n\}=q_t,\\
\mathsf{P}\{\varphi_1(t\,;\, n)=n+1\}=r_t, \quad p_t+q_t+r_t=1, \quad t=0,\ 1,\ 2, \dots
\end{gathered}
$$

Тогда из (1) и (2) вытекает, что Z_t будет неоднородным марковским процессом. Для этого процесса при $p_t\downarrow 0$, $q_t\uparrow q$, $r_t\uparrow r$, $q+r=1$, в [16] получены предельные теоремы в докритическом и критическом случае. Теперь исследуем случай, когда $\lim_{t\to\infty} q_t=1$, т. е. процесс Z_t стремится к процессу Гальтона — Ватсона, для которого $q_t\equiv 1$. В этом отношении наши результаты близки к некоторым результатам, полученным в [17] для процессов с иммиграцией.

Для удобства в дальнейшем везде будем опускать лишний индекс единицы. Тогда из (1) и (2) следует, что наш процесс может быть представлен следующим образом:

$$
(3)\qquad Z_{t+1}=\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{\max(Z_t-1,\ 0)} X_i(t+1) & \text{с вероятностью } p_t,\\
\sum\limits_{i=1}^{Z_t} X_i(t+1) & \text{с вероятностью } q_t,\\
\sum\limits_{i=1}^{Z_t+1} X_i(t+1) & \text{с вероятностью } r_t,
\end{cases}
$$

$$
p_t+q_t+r_t=1, \quad t=0,\ 1,\ 2, \dots,\ F(s)=\mathsf{E}\{s^{X_i(t)}\}.
$$

Без ограничения общности всюду в дальнейшем будем предполагать, что $Z_0=0$ п. н.

Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $F'(1)=1$, $F''(1)=2b<\infty$, $r_t\backsim r\ln^{-1} t$, $p_t=o(r_t)$, $\theta=r/b>0$. *Тогда*

$$
(4)\qquad \lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{Z_t>0\}=1-e^{-\theta}.
$$

Теорема 2. *Если* $F'(1)=1$, $F''(1)=2b<\infty$, $q_t\to 1$, *так что* $r_t\backsim r\ln^{-1}t$, $p_t=o(r_t)$, $\theta=r/b>0$, *то для всех* $0\leq x\leq 1$

$$
(5)\qquad \lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\ln Z_t/\ln t\leq x\}=e^{-\theta(1-x)},
$$

$$
(6)\qquad \lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{1-\ln Z_t/\ln t\leq x \mid Z_t>0\}=(1-e^{-\theta x})/(1-e^{-\theta}).
$$

Введем обозначения

$$
(7)\qquad \alpha_n(s)=(p_n+q_nF(s)+r_nF^2(s))F^{-1}(s), \quad n\geq 0.
$$

Тогда производящие функции $\Psi(t\,;\,s)=\mathsf{E}\{s^{Z_t}\}$, $t\geqq 0$, $|s|\leqq 1$, удовлетворяют уравнению

(8) $$\Psi(t\,;\,s)=\alpha_{t-1}(s)\Psi(t-1\,;\,F(s))+p_{t-1}\Psi(t-1\,;\,0)\,(1-F^{-1}(s))$$

с начальным условием

(9) $$\Psi(0\,;\,s)=1.$$

Действительно, из (3) нетрудно получить

$$\Psi(t\,;\,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\{Z_t=n\}s^n=\mathsf{E}\{\mathsf{E}(s^{Z_t}\,|\,Z_{t-1})\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\{Z_{t-1}=n\}\,\mathsf{E}\,(s^{Z_t}\,|\,Z_{t-1}=n)$$

$$=\mathsf{P}\{Z_{t-1}=0\}\,(1-r_{t-1}+r_{t-1}F(s)+\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{Z_{t-1}=n\}F^n(s)\alpha_{t-1}(s)$$

$$=\Psi(t-1;0)p_{t-1}(1-F^{-1}(s))+\alpha_{t-1}(s)\Psi(t-1\,;\,F(s)).$$

Пусть $F_t(s)$ обозначает t-тую итерацию функции $F(s)$. Тогда из (8) и (9) сразу вытекает

(10) $$\Psi(t\,;\,s)=\prod_{k=0}^{t-1}\alpha_{t-k-1}(F_k(s))$$

$$+\sum_{k=0}^{t-1}p_{t-k-1}\,\Psi(t-k-1\,;\,0)\,(1-F_{k+1}^{-1}(s))\prod_{j=0}^{k-1}\alpha_{t-j-1}(F_j(s))$$

для любого $t>0$.

Доказательство теоремы 1. Сначала исследуем сумму

(11) $$U_t(s)=\sum_{k=0}^{t-1}(1-F_{k+1}(s))\,F_{k+1}^{-1}(s)\,\Psi(t-k-1\,;\,0)p_{t-k-1}\prod_{j=0}^{k-1}\alpha_{t-j-1}(F_j(s)).$$

Так как $F'(1)=1$, то $F(0)=f_0>0$, откуда, имея в виду, что $p_t=o(r_t)$, следует существование N, $0\leqq N<\infty$ такое, что для всех $k\geqq N$ $f_0\geqq p_k r_k^{-1}$. Теперь из монотонности $F_n(s)$ по $s\in[0,\,1]$ и $n\geqq 1$ вытекают неравенства

$$F_n(s)\geqq p_k r_k^{-1}\quad\text{при}\quad k\geqq N,\ n\geqq 1,\ 0\leqq s\leqq 1.$$

Таким образом, из (7) находим

(12) $$1-\alpha_k(F_n(s))=F_{n+1}^{-1}(s)\,(1-F_{n+1}(s)\,(r_kF_{n+1}-p_k),$$

откуда следует, что $0<\alpha_k(F_n(s))\leqq 1$, когда $s\in[0,\,1]$, $k\geqq N$, $n\geqq 1$.

С другой стороны, $0<\alpha_k(s)\leqq F^{-1}(s)\leqq f_0^{-1}$ при $0\leqq s\leqq 1$, $k\geqq 0$. Следовательно, для всех $0\leqq s\leqq 1$, $0\leqq k\leqq t-1$, $t\geqq 1$, получим оценку

(13) $$\prod_{j=0}^{k-1}\alpha_{t-j-1}(F_j(s))\leqq f_0^{-N}.$$

Теперь из (11) и (13) для всех $s \in [0, 1]$ и $t \geqq 1$ имеем

(14) $$0 \leqq U_t(s) \leqq f_0^{-(N+1)} \sum_{k=1}^{t} (1 - F_k(s))\, p_{t-k}.$$

Так как (см., напр., [1], [2]) при $0 \leqq s \leqq 1$ $1 - F_t(s) \leqq 1 - F_t(0) \backsim (bt)^{-1}$, $t \to \infty$, а по условию $p_t = o(\ln^{-1} t)$, то нетрудно получить оценки

(15) $$\sum_{k=1}^{[t/2]} (1 - F_k(s))\, p_{t-k} = o\Big(\sum_{k=1}^{[t/2]} 1/k \ln (t-1)\Big) = o(1), \quad t \to \infty,$$

(16) $$\sum_{k=[t/2]+1}^{t} (1 - F_k(s)) p_{t-k} \leqq C \sum_{k=[t/2]+1}^{t-2} (1 - F_k(0)) \ln^{-1}(t-k)$$

$$\leqq C(1 - F_{[t/2]+1}(0)) \sum_{k=2}^{[t/2]} \ln^{-1} k \xrightarrow[t \to \infty]{} 0,$$

ввиду того, что $\Sigma_{k=2}^{t} \ln^{-1} k \backsim t \ln^{-1} t$, $t \to \infty$, (см. [20]), и, кроме того, $\lim_{t\to\infty} \Sigma_{k=1}^{[t/2]} k^{-1} \ln^{-1}(t-k) = 1$. Последнее соотношение, например, сразу вытекает из неравенств

$$\ln^{-1}(t-1) \sum_{k=1}^{[t/2]} k^{-1} \leqq \sum_{k=1}^{[t/2[} k^{-1} \ln^{-1}(t-k) \leqq \ln^{-1}(t - [t/2]) \sum_{k=1}^{[t/2]} k^{-1}.$$

Таким образом, из (11), (14), (15) и (16) получаем

(17) $$\lim_{t \to \infty} U_t(s) = 0, \quad s \in [0, 1].$$

Обозначим $A_t = \Pi_{k=0}^{t-1} \alpha_{t-k-1}(F_k)$, где $F_k = F_k(0)$. Теперь исследуем

(18) $$\ln A_t = \sum_{k=0}^{t-1} \ln \{1 - (1 - \alpha_{t-k-1}(F_k))\}.$$

Из представлении (12) и условия теоремы следует, что $1 - \alpha_{t-k-1}(F_k) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $0 \leqq k \leqq t-1$. Тогда из (18) и (12) получаем

$$\ln A_t \backsim - \sum_{k=0}^{t-1} \{1 - \alpha_{t-k-1}(F_k)\}$$

$$\backsim - \sum_{k=0}^{t-1} (1 - F_{k+1})\, (r_{t-k-1} F_{k+1} - p_{t-k-1}) = - \sum_{k=0}^{t-1} (1 - F_{k+1})(r_{t-k-1}$$

$$- p_{t-k-1} - (1 - F_{k+1}) r_{t-k-1}).$$

Как было уже отмечено (см. (15) и (16)),

(19) $$\lim_{t \to \infty} \sum_{k=0}^{t-1} (1 - F_{k+1}) p_{t-k-1} = 0.$$

С другой стороны, из $1 - F_k \backsim b^{-1} k^{-1}$, $k \to \infty$, и условия теоремы по известной теореме о свертках (см., напр., [18, с. 328]) находим

(20) $$\lim_{t \to \infty} \sum_{k=0}^{t-1} (1 - F_{k+1})^2 r_{t-k-1} = 0.$$

Таким образом, при $t\to\infty$ из (18), (19) и (20) вытекает

$$\ln A_t \backsim -\sum_{k=1}^{t}(1-F_k)r_{t-k}. \tag{21}$$

С другой стороны, имея в виду, что $1-F_t\backsim(bt)^{-1}$ и $r_t\backsim r\ln^{-1}t$ при $t\to\infty$, нетрудно показать, что

$$\sum_{k=[t/2]+1}^{t}(1-F_k)r_{t-k}\leqq(1-F_{[t/2]+1})\sum_{j=0}^{t-[t/2]}r_j\to 0,\quad t\to\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{[t/2]}(1-F_k)r_{t-k}=\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{[t/2]}(bk)^{-1}r\ln^{-1}(t-k)=rb^{-1}=\theta.$$

Теперь из (21) следует, что $\ln A_t\to-\theta$, $t\to\infty$, откуда, ввиду (10) и (17), окончательно получаем

$$\lim_{t\to\infty}\Psi(t;\ 0)=\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{Z_t=0\}=e^{-\theta}.$$

Доказательство теоремы 2. Так как $F_t(s)\to 1$ при $t\to\infty$ равномерно в $|s|\leqq 1$, то из (12) и условия теоремы вытекает, что $\lim_{t\to\infty}\alpha_{t-k-1}(F_k(s))=1$ равномерно для всех $0\leqq k\leqq t-1$, $|s|\leqq 1$.
Следовательно,

$$B_t(s)=\ln\sum_{k=0}^{t-1}\alpha_{t-k-1}(F_k(s))=\sum_{k=0}^{t-1}\ln\{1-(1-\alpha_{t-k-1}(F_k(s)))\}$$

$$\backsim-\sum_{k=0}^{t-1}\{1-\alpha_{t-k-1}(F_k(s))\}\backsim-\sum_{k=0}^{t-1}(1-F_{k+1}(s))\,(r_{t-k-1}-p_{t-k-1}$$

$$-(1-F_{k+1}(s))r_{t-k-1}).$$

Заметим, что при $0\leqq s\leqq 1$ из (19) и (20) имеем

$$0\leqq\sum_{k=0}^{t-1}(1-F_{k+1}(s))\,p_{t-k-1}\leqq\sum_{k=0}^{t-1}(1-F_{k+1})\,p_{t-k-1}\xrightarrow[t\to\infty]{}0,$$

(23)

$$0\leqq\sum_{k=1}^{t-1}(1-F_{k+1}(s))^2r_{t-k-1}\leqq\sum_{k=1}^{t-1}(1-F_{k+1})^2r_{t-k-1}\xrightarrow[t\to\infty]{}0.$$

Таким образом, из (22) и (23) вытекает

$$B_t(s)\backsim-\sum_{k=1}^{t}(1-F_k(s))\,r_{t-k},\quad t\to\infty,\quad s\in[0,\ 1]. \tag{24}$$

Как было уже отмечено, из того, что при $0\leqq s\leqq 1$ $0\leqq 1-F_k(s)\leqq 1-F_k\backsim(bk)^{-1}$, $k\to\infty$, получаем

$$0\leqq\sum_{k=[t/2]+1}^{t}(1-F_k(s))r_{t-k}\leqq(1-F_{[t/2]+1})\sum_{k=0}^{t-[t/2]}r_k\xrightarrow[t\to 0]{}0, \tag{25}$$

потому что по условии $r_t\backsim r\ln^{-1}t$ и, следовательно, из [20], $\Sigma_{k=0}^{t-[t/2]}r_k\backsim rt(2\ln t)^{-1}$, $t\to\infty$.

С другой стороны, известно [1, с. 74], что

(26) $$1-F_t(s)=(1-s)\{1+bt(1-s)\}^{-1}(1+\varepsilon(t;\ s)),$$

где $\varepsilon(t;\ s)\to 0$ при $t\to\infty$ равномерно в $0\leq s\leq 1$.

Рассмотрим сумму

(27) $$S_t(\lambda,\ x)=\sum_{k=1}^{[t/2]}(1-e^{-\lambda/t^x})\{1+bk(1-e^{-\lambda/t^x})\}^{-1},$$

где $0\leq x\leq 1$, $\lambda>0$.

Так как

$$J_1\leq S_t(\lambda,\ x)\leq J_2,$$

где

$$J_1=\int_1^{[t/2]}(1-e^{-\lambda/t^x})\{1+by(1-e^{-\lambda/t^x})\}^{-1}dy$$

$$=b^{-1}\ln\{1+b[t/2]\,(1-e^{-\lambda/t^x})\}\,\{1+b(1-e^{-\lambda/t^x}\}^{-1}\backsim\frac{1-x}{b}\ln t,$$

$$J_2=\int_0^{[t/2]}(1-e^{-\lambda/t^x})\,\{1+by(1-e^{-\lambda/t^x})\}^{-1}dy$$

$$=b^{-1}\ln\{1+b[t/2]\,(1-e^{-\lambda/t^x})\}\backsim\frac{1-x}{b}\ln t,$$

то окончательно находим

(28) $$S_t(\lambda,\ x)\backsim b^{-1}(1-x)\ln t,\quad t\to\infty.$$

Таким способом из (24)—(28) для всех $\lambda>0$ и $0\leq x\leq 1$ получаем

(29) $$\lim_{t\to\infty}B_t\,(e^{-\lambda/t^x})=\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{[t/2]}\frac{1-e^{-\lambda/t^x}}{1+bk\,(1-e^{-\lambda/t^x})}\,\frac{r}{\ln\,(t-k)}=-\frac{r}{b}(1-x).$$

Теперь из (10), (11), (17), (22) и (29) при $\lambda>0$ и $x\in[0,\ 1]$ вытекает

(30) $$\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}\{e^{-Z_t/t^x}\}=\lim_{t\to\infty}\Psi(t;\ e^{-\lambda/t^x})=e^{-\theta(1-x)}.$$

Отсюда, согласно теореме непрерывности [19], для всех $y>0$ и $0\leq x\leq 1$ находим

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{Z_t/t^x\leq y\}=e^{-\theta(1-x)},$$

что эквивалентно соотношению (5).

С другой стороны,

$$\mathsf{E}\{e^{-\lambda Z_t/t^x}\,|\,Z_t>0\{=1-(1-\Psi(t;\ e^{-\lambda/t^x}))\ (1-\Psi(t;\ 0))^{-1}.$$

Тогда из (4) и (30) при $\lambda>0$ и $0\leq x\leq 1$ получаем

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}\{e^{-\lambda Z_t/t^x}\,|Z_t>0\}=1-(1-e^{-\theta(1-x)})\,(1-e^{-\theta})^{-1},$$

откуда по теореме непрерывности для всех $y>0$ и $0\leq x\leq 1$ находим

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{Z_t/t^x\leq y\,|\,Z_t>0\}=1-(1-e^{-\theta(1-x)})\,(1-e^{-\theta})^{-1}.$$

Отсюда очевидным образом вытекает утверждение (6) теоремы.

Замечание. Напомним, что для классического процесса Гальтона—Ватсона ($q_t \equiv 1$) известно [1, 2], что

(31) $$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{Z_t/t \leq x \mid Z_t > 0\} = 1 - e^{-x/b}, \quad x \geq 0.$$

Таким образом, предельные соотношения (5) и (6) являются довольно неожиданными. Теперь возникает проблема отыскать условия, когда при $q_t \to 1$ предельное соотношение (31) сохраняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Севастьянов. Ветвящиеся процессы. М., 1971.
2. P. Jagers. Branching Processes with Biological Applications. New York, 1975.
3. Б. А. Севастьянов, А. М. Зубков. Регулируемые ветвящиеся процессы. *Теория вероятн. примен.*, **19**, 1974, 15—25.
4. А. М. Зубков. Аналогия между процессами Гальтона — Ватсона и φ-ветвящимися процессами. *Теория вероятн. примен.*, **19**, 1974, 319—339.
5. В. А. Ватутин. Критический ветвящийся процесс Гальтона—Ватсона с эмиграцией. *Теория вероятн. примен.*, **22**, 1977, 482—497.
6. Н. М. Янев. Условия вырождения φ-ветвящихся процессов со случайным φ. *Теория вероятн. примен.*, **20**, 1975, 433—440.
7. Н. М. Янев. Регулируемые ветвящиеся процессы в случайной среде. *Mathem. Balkanica*, **7**, 1977, 137—156.
8. Н. М. Янев, К. В. Метов. Регулируемые ветвящиеся процессы с бесконечными математическими ожиданиями. — Математика и математическо образование (9 Конф. СМБ). София, 1980, 182—186.
9. N. M. Yanev, K. V. Mitov. Controlled branching processes: the case of random Migration. — In: 12th European Meeting of Statisticians. Abstracts. Varna, September 1979, p. 247.
10. N. M. Yanev, K. V. Mitov. Controlled branching processes: the case of random-Migration. *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.* **33**, 1980, 433—475.
11. Н. М. Янев, К. В. Митов. Периоды жизни критических ветвящихся процессов с случайной миграцией. *Теория вероятн. примен.*, 1983, № 3.
12. Н. М. Янев, К. В. Митов. Критические ветвящиеся миграционные процессы. — В: Математика и математическо образование (10 Конф. СМБ). София, 1981, 321—328.
13. Н. М. Янев, К. В. Митов. Докритические ветвящиеся миграционные процессы. *Плиска*, **7**, 1984, 75—82 .
14. С. В. Нагаев, Л. В. Хан. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона—Ватсона с миграцией. *Теория вероятн. примен.*, **25**, 1980, 523—534.
15. Л. В. Хан. Предельные теоремы для ветвящегося процесса Гальтона — Ватсона с миграцией. *Сибирский мат. ж.*, **21**, 1980, 183—194.
16. Н. М. Янев, К. В. Митов. Предельные теоремы для регулируемых ветвящихся процессов с убывающей эмиграцией. *Плиска*, **7**, 1984, 83—89.
17. И. С. Бадалбаев, И. Рахимов. Критические ветвящиеся процессы с иммиграцией убывающей интенсивности. *Теория вероятн. примен.*, **23**, 1978, 275—283.
18. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. Москва, 1962.
19. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. Москва, 1967.
20. Н. Г. де Брейн. Асимптотические методы в анализе. Москва, 1961.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 8. 6. 1981