PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА С МАЛОЙ ДИФФУЗИЕЙ

ПЕЙКА И. МАЙСТЕР

Ветвящиеся процессы с малой диффузией рассмотрены как малое возмущение диффузионным процессом биологической системы, описываемой ветвящимся процессом. Найдена асимптотика математического ожидания числа частиц при предположении, что с течением времени движение частиц затухает.

1. Описание модели. Пусть имеется ветвящийся процесс с непрерывным временем $\mu(t)$, $t \geqq 0$, где переходные вероятности $P_n(t) = \mathsf{P}\{\mu(t)=n\}$, $\mu(0) = 1$, и $\mathscr{F}(t, s) = \Sigma_{n=0}^{\infty} P_n(t)s^n$ — производящая функция числа частиц в момент времени t. Как обычно, предполагаем, что при $t \to 0$ вероятности $P_n(t)$ представимы в виде $P_1(t) = 1 + p_1 t + o(t)$, $P_n(t) = p_n t + o(t)$, $n \neq 1$. Плотности вероятностей перехода $p_n \geqq 0$ при $n \neq 1$, $p_1 \leqq 0$, а $\Sigma_{n=0}^{\infty} p_n = 0$. Введем производящую функцию $f(s) = \Sigma_{n=0}^{\infty} p_n s^n$. Хорошо известно, что $\mathscr{F}(t, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathscr{F}(t, s)}{\partial t} = f(\mathscr{F}), \quad \mathscr{F}(0,s) = s. \tag{1}$$

Удобнее обозначать $p_1 = -k$, $k \geqq 0$, $h(s) = \Sigma_{n=1}^{\infty} p_n s^n / k$. Тогда $f(s) = k[h(s) - s]$ Можно интерпретировать k как плотность гибели частиц, $h(s)$ — как производящую функцию некоторой случайной величины η, характеризирующей числа частиц потомков, при условии, что произошло превращение. Если после превращения получилась одна частица, то считаем, что превращения не было. Поэтому $\eta \neq 1$. Кроме того, имеется в виду, что все частицы локализованы в некоторой точке $x \in R^d$. Если случайная величина η зависит от точки x, т. е. $\eta = \eta_x$, $\mu(t) = \mu_x(t)$, $p_n = p_n(x)$, то производящая функция $\mathscr{F}_x(t, s) = \mathsf{E}\{[s(x)]^{\mu_x(t)}\}$ числа частиц $\mu_x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = k(x)[h(x, u) - u], \ u(0, x) = s(x). \tag{2}$$

Тепер предположим, что в результате некоторого случайного воздействия частицы начинают двигаться по траекториям диффузионного процесса $(x_t^\varepsilon, \mathsf{P}_x^\varepsilon)$, где $\dot{x}_t^\varepsilon = \varepsilon\sigma(x_t)\dot{w}_t + \varepsilon b(x_t)$. Тогда биологическая система характеризуется целочисленной случайной мерой $\mu_{xt}^\varepsilon(U)$, где для любого борелевского множества U случайная величина $\mu_{xt}^\varepsilon(U)$ равна числу частиц в момент времени t в множестве U, если в начальный момент времени была одна частица, и она находилась в точке x. Производящий функционал этой меры обозначим $F_t^\varepsilon g(x)$, т. е.

$$F_t^\varepsilon g(x) = \mathsf{E}\{\exp[\int_{R^d} \log g(z)\mu_{xt}^\varepsilon(dz)]\}.$$

Легко заметить, что если в момент времени t в точках $x_1, x_2, \ldots, x_r$ имеется соответственно $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ частиц, то

$$\mu_{xt}(U) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j \chi_U(x_j),$$

$$F_t^\varepsilon g(x) = \mathsf{E}\{[g(x_1)]^{\mu_1}[g(x_2)]^{\mu_2} \ldots [g(x_r)]^{\mu_r}\}.$$

Кроме того, вероятность вырождения процесса в множестве U к моменту времени t равна $\mathsf{P}\{\mu_{xt}^\varepsilon(U)=0\} = \lim_{\theta\downarrow 0} F_t^\varepsilon(\theta^{\chi_U})(x)$. Вероятность вырождения ветвящегося процесса — это предел $\lim_{t\to\infty} F_t^\varepsilon \theta(x) = g^\varepsilon(x)$, ε — фиксировано. Известно [1], что в силу марковского свойства диффузионного процесса и независимости эволюции отдельных частиц, $u^\varepsilon(t, x) = F_t^\varepsilon g(x)$ есть минимальное решение уравнения

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \mathscr{L}^\varepsilon u^\varepsilon(t, x) + f(x, u^\varepsilon(t, x)), \; u^\varepsilon(0, x) = g(x),$$

где $\mathscr{L}^\varepsilon$ есть инфинитезимальный оператор диффузионного процесса x_t^ε:

$$\mathscr{L}^\varepsilon u = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \varepsilon \sum_{i=1}^{d} b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad \{a^{ij}(x)\} = \sigma(x)\sigma^*(x).$$

$F_t^\varepsilon g(x)$ является аналитической функцией g внутри единичного шара пространства ограниченных измеримых функций. Ее вариации в $1(x) \equiv 1$ связаны с факториальными моментами меры μ_{xt}^ε.

2. Математическое ожидание меры μ_{xt}^ε. Пусть $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра борелевских подмножеств евклидова пространства $X = R^d$. Для любой случайной меры μ_{xt}^ε на $(X, \mathfrak{B})$ функция множеств $\mathsf{E}\mu_{xt}^\varepsilon(U)$, $U \in \mathfrak{B}$, является мерой на $(X, \mathfrak{B})$. Ее свойства легко изучаются с помощью операторов $M_t^\varepsilon g(x) = \int_X g(z)\mathsf{E}\mu_{xt}^\varepsilon(dz)$, $t > 0$. Семейство операторов M_t^ε, $t \geq 0$, образует полугруппу с инфинитезимальным оператором $\mathscr{M}^\varepsilon = \mathscr{L}^\varepsilon + cI$, где $If(x) = f(x)$, $c(x) = k(x)[a(x) - 1]$, $a(x) = \mathsf{E}\eta_x(X)$, т. е. $\mathrm{w}^\varepsilon(t, x) = M_t^\varepsilon g(x)$ есть решение линейного параболического уравнения

$$\frac{\partial \mathrm{w}^\varepsilon(t,x)}{\partial t} = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 \mathrm{w}^\varepsilon(t, x)}{\partial x^i \partial x^j} + \varepsilon \sum_{i=1}^{d} b^i(x) \frac{\partial \mathrm{w}^\varepsilon(t, x)}{\partial x^i} + c(x)\mathrm{w}^\varepsilon(t, x), \tag{3}$$
$$\mathrm{w}^\varepsilon(0, x) = g(x).$$

Асимптотика $M_t^\varepsilon g(x)$ при $\varepsilon = 1$ и $t \to \infty$ изучена автором в [9] с помощью спектральных свойств инфинитезимального оператора $\mathscr{M}^\varepsilon$, а именно

$$M_t^\varepsilon g(x) = e^{\lambda_0^\varepsilon t} \varphi_0^\varepsilon(x) \varphi_0^{\varepsilon *}(g)[1 + o(e^{\rho t})], \quad \rho < \lambda_0^\varepsilon \text{ при } t \to \infty,$$

где λ_0^ε есть максимальное изолированное собственное значение задачи: $\mathscr{M}^\varepsilon \varphi = \lambda^\varepsilon \varphi$, φ_0^ε — соответствующий ему положительный собственный вектор.

Заметим, что оператор $\mathcal{M}^\varepsilon$ имеет изолированное собственное значение, если рассмотриваем задачу в ограниченной области с классическими граничными условиями. В неограниченной области достаточно предполагать самосопряженность оператора $\mathcal{L}^\varepsilon$, стабилизацию плотности числа частиц потомков $c(x)\to c$ при $|x|\to\infty$ и существование ограниченной подобласти $Q\subset X$, такой, что

$$\sup_u \Big(\int_Q [c(x)-c][u(x)]^2dx-\int_Q \sum_{i,j} a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}\,\frac{\partial u}{\partial x^j}\,dx\Big)>0,\quad \|u\|_{L_2(Q)}=1.$$

Такая пространственная неоднородность коэффициентов оператора $\mathcal{M}^\varepsilon$ означает, что в основном реакция происходит в ограниченной подобласти. Предположение о малости диффузионного движения тоже, в каком-то смысле, локализует задачу.

Здесь рассмотрим поведение математического ожидания $M_t^\varepsilon g(x)$ при $\varepsilon\to 0$ на больших отрезках времени: $t\in[0, T/\varepsilon]$, т. е. $\varepsilon\to 0$, $t\to\infty$, но $\varepsilon t=\tau\leq T<\infty$. Для этого сделаем в уравнении (3) замену переменных $\tau=\varepsilon t$. Пусть $\widetilde{\mathrm{w}}^\varepsilon(\tau, x)=\mathrm{w}^\varepsilon(\tau/\varepsilon, x)=\mathrm{w}^\varepsilon(t, x)$. Тогда

$$\frac{\partial\widetilde{\mathrm{w}}^\varepsilon}{\partial\tau}=\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x)\frac{\partial^2\widetilde{\mathrm{w}}^\varepsilon}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i=1}^{d} b^i(x)\frac{\partial\widetilde{\mathrm{w}}^\varepsilon}{\partial x^i}+\frac{1}{\varepsilon}\,c(x)\widetilde{\mathrm{w}}^\varepsilon, \tag{4}$$

$$\widetilde{\mathrm{w}}^\varepsilon(0, x)=g(x).$$

Пример 1. Если $x_t^\varepsilon=\varepsilon\dot{w}_t$, где w_t — винеровский процесс на R^1, $w_0=x$, $c(x)\equiv c$, то мера $\mathsf{E}\mu_{xt}(U)$ имеет плотность $m^\varepsilon(t, x, y)=\mathsf{E}\mu_{xt}^\varepsilon(dy)/dy$. При этом, $m^\varepsilon(t, x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial m^\varepsilon}{\partial t}=\frac{\varepsilon^2}{2}\,\frac{\partial^2 m^\varepsilon}{\partial x^2}+cm^\varepsilon,$$

$$m^\varepsilon(0, x, y)=\delta(x-y).$$

Очевидно, $m^\varepsilon(t, x, y)=(1/\varepsilon\sqrt{2\pi t})\exp\big(-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon^2 t}+ct\big)$. Если $t\to\infty$, $\varepsilon\to 0$ так, что $t\varepsilon=\tau\leq T$, то

$$m^\varepsilon(t, x, y)=m^\varepsilon(\tau/\varepsilon, x, y)=\widetilde{m}^\varepsilon(\tau, x, y)=(2\pi\varepsilon\tau)^{-1}\exp\Big[-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon\tau}+\frac{c\tau}{\varepsilon}\Big],$$

т. е. $\dfrac{\partial m^\varepsilon}{\partial\tau}=\dfrac{\varepsilon}{2}\,\dfrac{\partial^2\widetilde{m}^\varepsilon}{\partial x^2}+\dfrac{c}{\varepsilon}\,\widetilde{m}^\varepsilon$, $m^\varepsilon(0, x, y)=\delta(x-y)$.

При исследовании $\lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{\mathrm{w}}^\varepsilon(\tau, x)$ будем пользоваться асимптотическими формулами лапласовского типа для диффузионних процессов, см. [6, 10, 11]. Приведем основные определения и обозначения.

Пусть $C(0, T)$ — пространство непрерывных d-мерных вектор-функций $\varphi(s)$ на отрезке $[0, T]$ с метрикой, соответствующей равномерной сходимости. С каждым семейством случайных процессов связан некоторый функционал $S_{0\tau}\colon C[0, T]\to[0, \infty)$ такой, что вероятность пребывания процесса x_s^ε в течение всего времени от 0 до τ в малой окрестности функции $\varphi(s)$, при малых ε, примерно равна $\exp\{-S_{0\tau}(\varphi)/\varepsilon\}$ и, кроме того, вероятность прохождения процесса x_s^ε вдали от множества $\{\varphi(s)\colon S_{0\tau}(\varphi)\leqq\delta\}$ не превосходит

$\exp\{-\delta/\varepsilon\}$. Функционал $S_{0\tau}(\varphi)$ называется нормированным функционалом действия для семейства процессов x_s^ε, см. [4, 10].

Рассмотрим, кроме того, функционал интегрального типа

$$R_{0\tau}(\varphi)=\int_0^\tau c(\varphi_s)ds.$$

Обозначим множество $\{x: g(x)\geqq 0\}$ через G. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что функционал $R-S$ достигает своей верхней грани $\Lambda_G(\tau, x)=\sup\{R_{0\tau}(\varphi)-S_{0\tau}(\varphi): \varphi\in C^1[0, \tau], \varphi(0)=x, \varphi(\tau)\in G\}$ в единственной точке $\widehat{\varphi}(s)$. Тогда, если функции $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $c(x)$, $\nu+2$ раза дифференцируемы по x в окрестности экстремали $\widehat{\varphi}$: $\{x: |x-\widehat{\varphi}(s)|<\delta\}$ и все их производные непрерывны по x, то при $\varepsilon\to 0$*

$$M_\tau^\varepsilon g(x)=\exp[\varepsilon^{-1}\Lambda_G(\tau,x)]g(\widehat{\varphi})\{\Gamma_0+\Gamma_1\sqrt{\varepsilon}+\cdots+\Gamma_\nu(\sqrt{\varepsilon})^\nu+o((\sqrt{\varepsilon})^\nu)\},$$

причем $\Gamma_0=\exp\{-\frac{1}{2}\int_0^\tau \mathrm{tr}\,(V(s)B(s))ds\}$, где $V(s)$ есть решение матричного уравнения Риккати

$$V_s'+(V-A)B(V-A)^*=C-c_{xx}''(\widehat{\varphi}(s)),\qquad V(0)=0. \tag{5}$$

Коэффициенты этого уравнения $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ выражаются через производные преобразования Лежандра от кумулянта диффузионного процесса $\widetilde{x}_\tau^\varepsilon$.

Доказательство. В силу формулы Каца, решение уравнения (4) представимо в виде

$$\mathrm{w}^\varepsilon(\tau, x)=\mathsf{E}_x\{g(\widetilde{x}_\tau^\varepsilon)\exp[\varepsilon^{-1}\int_0^\tau c(\widetilde{x}_s^\varepsilon)ds]\}. \tag{6}$$

Кумулянт диффузионного процесса x_τ^ε имеет вид

$$G^\varepsilon(x, z)=\frac{\varepsilon}{2}\langle z, a(x)z\rangle+\langle b(x), z\rangle,$$

где $\langle\cdot, \cdot\rangle$ означает скалярное произведение в R^d. Напомним, что $a(x)=\{a^{ij}(x)\}$ есть измеримая $d\times d$ матричная функция, причем, для всех x она симметрична и неотрицательно определена, $b(x)$ есть d-значная измеримая функция. Кумулянта $G^\varepsilon(x, z)$ связана с диффузионным процессом $\widetilde{x}_\tau^\varepsilon$ следующим образом: если применить инфинитезимальный оператор $\widetilde{\mathscr{L}}^\varepsilon=\varepsilon^{-1}\mathscr{L}^\varepsilon$ процесса $\widetilde{x}_\tau^\varepsilon$ к функции $e^{\langle z,x\rangle}$, то получится $G^\varepsilon(x, z)e^{\langle z,x\rangle}$. Преобразование Лежандра [5], функции $G(x, z)$ по z имеет вид

$$H(x, u)=\sup_z[\langle u, z\rangle-G(x, z)]=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)[u^i-b^i(x)][u^j-b^j(x)],$$

где $a_{ij}(x)=[a^{ij}(x)]^{-1}$. Нормированный функционал действия определим (для абсолютно непрерывных функций $\varphi(s)$, $0\leqq s\leqq\tau$) как

$$S_{0\tau}(\varphi)=\frac{1}{2}\int_0^\tau H(\varphi(s),\ \dot\varphi(s))ds,$$

т. е. $S_{0\tau}(\varphi)=\frac{1}{2}\int_0^\tau \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)[\dot\varphi^i(s)-b^i(\varphi(s))]\,[\dot\varphi^j(s)-b^j(\varphi(s))]ds$

(для остальных функций φ полагаем $S_{0\tau}(\varphi)=\infty$, [4]). Очевидно, $G^\varepsilon(x,\ z)=\varepsilon^{-1}G(x,\ z\varepsilon)$, где $G(x,\ z)=G^1(x,\ z)$. Следовательно, нормирующий коэффициент для функционала действия равен ε^{-1}.

Логарифмическая асимптотика выражения $M^\varepsilon_\tau g(x)$ получается в результате применения теоремы Varadhan [10]. Для этого достаточно предполагать ограниченность и измеримость коэффициентов $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$. Имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\,\mathsf{E}\mu^\varepsilon_{x\tau}(U)=\sup\{R(\varphi)-S(\varphi):\ \varphi\in\mathbf{C}^1[0,\ \tau],\ \varphi_0=x,\ \varphi_\tau\in U\}.$$

Приведем схему вычисления $\Lambda_G(\tau,\ x)$ в одномерном случае, (коэффициенты уравнения (4) не зависят от s). Тогда

$$R_{0\tau}(\varphi)-S_{0\tau}(\varphi)-\int_0^\tau\{c(\varphi(s))\ -\ [\dot\varphi(s)-b(\varphi(s))]^2/2a(\varphi(s))]ds.$$

Обозначим подынтегральную функцию через $J(\varphi,\ \dot\varphi)$. Экстремаль вычисляется с помощью уравнения Эйлера [3]

$$\frac{dJ}{d\varphi}-\frac{d}{ds}\ \frac{dJ}{d\dot\varphi}=0.$$

Так как в нашем случае $J(\varphi,\ \dot\varphi)$ не зависит явно от s, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл $J-\dot\varphi J'_{\dot\varphi}=\mathrm{const}$. Таким образом получается уравнение

$$c(\varphi(x))-\frac{[\dot\varphi-b(\varphi)]^2}{2a(\varphi)}-\ \dot\varphi(s)\ \frac{[\dot\varphi-b(\varphi)]}{u(\varphi)}=k_1,$$

т. е.

$$\int\frac{d\varphi}{[[b(\varphi)]^2+2a(\varphi)[k_1-c(\varphi)]]^{1/2}}=S+k_2.$$

Обе константы интегрирования определяются из условий $\varphi_0=x$, $\varphi_\tau=y$. Тогда

$$\Lambda(\tau,\ x,\ y)=\sup\{R(\varphi)-S(\varphi):\ \varphi_0=x,\ \varphi_\tau=y\}=R(\widehat\varphi)-\ S(\widehat\varphi),$$

$$\Lambda_G(x,\ y)=\sup_{y\in G}\Lambda(\tau,\ x,\ y).$$

Заметим, что экстремум $\Lambda(\tau,\ x,\ y)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\tau}=\ \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\Lambda}{\partial y}\Big)^2-b(\ y)\frac{\partial\Lambda}{\partial y}\ +c(\ y),$$

$$\Lambda(0,\ x,\ x)=0.$$

Точная асимптотика $M^\varepsilon_\tau g(x)$ есть результат применения теоремы Дубровского [6] об асимптотике локально безгранично делимых марковских процессов. Приведем здесь вычисление коэффициентов уравнения Риккати для нашего случая:

$$B(s)=[H''_{kk}(\widehat{\varphi}_s,\ \widehat{\dot\varphi}_s)]^{-1},\quad A(s)=H''_{ux}(\widehat{\varphi}_s,\ \widehat{\dot\varphi}_s),\quad C(s)=H''_{xx}(\widehat{\varphi}_s,\ \widehat{\dot\varphi}_s).$$

Так как преобразование Лежандра $H(x, u)$ зависит от квадрата функции u, то матрица $B(s)$ равна матрице диффузии. Остальные коэффициенты имеют более громоздкий вид:

$$B(s)=\{B_{ij}(s)\}=\{a^{ij}(\widehat{\varphi}(s))\},$$

$$A_{ij}(s)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\{\frac{\partial a_{ik}(\widehat{\varphi})}{\partial x^j}[\widehat{\dot\varphi}^k-b^k(\widehat{\varphi})]-a_{ik}(\widehat{\varphi})\frac{\partial b^k(\widehat{\varphi})}{\partial x^k}\},$$

$$C_{kl}(s)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{d}{dx^l}\{\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}[\widehat{\dot\varphi}^i-b^i(\widehat{\varphi})]\,[\widehat{\dot\varphi}^j-b^j(\widehat{\varphi})]$$

$$-a_{ij}(\widehat{\varphi})[\frac{\partial b^i}{\partial x^k}(\widehat{\dot\varphi}^j-b^j)+\frac{\partial b^j}{\partial x^k}(\widehat{\dot\varphi}^i-b^i)]\}.$$

Пример 2. Пусть плотность числа частиц потомков $c(x)=-x^2$, коэффициент диффузии $a(x)=1$, снос $b(x)=0$. Тогда плотность меры $\mathsf{E}\mu_{xt}(U)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial m^\varepsilon}{\partial t}=\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 m^\varepsilon}{\partial x^2}-x^2m^\varepsilon, \tag{7}$$

$$m^\varepsilon(0,\ x,\ y)=\delta(x-y).$$

Его фундаментальное решение имеет вид

$$m^\varepsilon(t,\ x,\ y)=(\sqrt{2}\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(\varepsilon t\sqrt{2}))^{-1/2}\exp\{-(\varepsilon\sqrt{2})^{-1}\,\mathrm{cth}\,(\varepsilon t\sqrt{2})[x^2+y^2-2xy\,\mathrm{ch}(\varepsilon t\sqrt{2})]\}$$

Замена переменных $\tau=\varepsilon t$, $\widetilde{m}^\varepsilon(\tau,\ x,\ y)=m^\varepsilon(\tau/\varepsilon,\ x,\ y)$ приводит (7) к

$$\frac{\partial m^\varepsilon}{\partial \tau}=\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{m}^\varepsilon}{\partial x^2}-\frac{x^2}{\varepsilon}\widetilde{m}^\varepsilon, \tag{8}$$

$$\widetilde{m}^\varepsilon(0,\ x,\ y)=\delta(x-y),$$

$$\widetilde{m}^\varepsilon(\tau,\ x,\ y)=(\sqrt{2}\varepsilon\pi\,\mathrm{sh}\,\tau\sqrt{2})^{-1/2}\exp\{-(\varepsilon\sqrt{2})^{-1}\,\mathrm{cth}\,\tau\sqrt{2}[x^2+y^2-2xy/\mathrm{ch}\,\tau\sqrt{2}]\}.$$

Вычислим математическое ожидание числа частиц во всей области $X=R^1$

$$\mathsf{E}\mu^\varepsilon_{x\tau}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{m}^\varepsilon(\tau,\ x,\ y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sqrt{2}\varepsilon\pi\,\mathrm{sh}\,\tau\sqrt{2})^{-1/2}\exp\{-[y\sqrt{\frac{\mathrm{cth}\,\tau\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{2}}}-x\sqrt{\frac{\mathrm{cth}\,\tau\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{2}}}]^2-\frac{x^2}{\varepsilon\sqrt{2}}\,\mathrm{th}\,\tau\sqrt{2}\}dy$$

$$=(\mathrm{ch}\,\tau\sqrt{2})^{-1/2}\exp\{-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,\tau\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{2}}\}.$$

Задача на собственные значения

$$\frac{\varepsilon^2}{2} X^{\varepsilon\prime\prime}(x) - x^2 X^{\varepsilon}(x) = \lambda^{\varepsilon} X^{\varepsilon}(x), \quad x \in R^1,$$

имеет следующее решение:

собственные значения $\lambda_n^{\varepsilon} = -\varepsilon\sqrt{2}(n+1/2)$,

собственные функции $X_n^{\varepsilon}(x) = \exp[-x^2/\varepsilon\sqrt{2}]H_n(x\sqrt[4]{2/\varepsilon^2})$,

где $H_n(z)$ — полиномы Эрмита $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} d^n e^{-z^2}/dz^n$; $H_0(z) \equiv 1$. Решение уравнения (7) представимо в виде равномерно сходящегося ряда

$$m^{\varepsilon}(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon t\sqrt{2}(n+1/2)} H_n(x\sqrt[4]{2/\varepsilon^2}) H_n(y\sqrt[4]{2/\varepsilon^2}).$$

Следовательно, если ε фиксировано и $t \to \infty$, то

$$m_{\varepsilon}(t, x, y) = \exp\left[-\frac{\varepsilon t}{\sqrt{2}} - \frac{x^2+y^2}{\varepsilon\sqrt{2}}\right] \cdot (1 + o(\mathrm{e}^{-\varepsilon t/\sqrt{2}})).$$

Для определения асимптотики математического ожидания $M_{\tau}^{\varepsilon} g(x)$ при $\varepsilon \to 0$, $t \to \infty$, но $\varepsilon t = \tau \leq T < \infty$ приложим теорему 1. Уравнение Эйлера для экстремали функционала

$$R_{0\tau}(\varphi) - S_{0\tau}(\varphi) = \int_0^{\tau} [-\varphi^2(s) - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(s)]\, ds$$

имеет вид $\frac{d}{ds}(-\dot{\varphi}) + 2\varphi = 0$, а его первый интеграл — $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \varphi^2 = k_1$. Следовательно,

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2(k_1+\varphi^2)}} = s + \ln k_2, \quad \text{т. е.} \quad |\varphi(s) + \sqrt{k_1 + \varphi^2(s)}| = k_2 e^{\sqrt{2}s}.$$

Константы интегрирования k_1, k_2 определим из условий $\varphi_0 = x$, $\varphi_{\tau} = y$. Таким образом сразу находим $k_2 = |x + \sqrt{k_1 + x^2}|$. Для определения k_1 нужно решить иррациональное уравнение

$$|y + \sqrt{k_1 + y^2}| = e^{\sqrt{2}\tau} |x + \sqrt{k_1 + x^2}|.$$

Двукратным возведением в квадрат находим $k_1 = (x^2 - 2xy \operatorname{ch}\sqrt{2}\tau + y^2)/\operatorname{sh}^2 \tau\sqrt{2}$. Аналогичным образом получаем и экстремаль

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{1}{2} |(x + \sqrt{k_1 + x^2})e^{s\sqrt{2}} - k_1(x + \sqrt{k_1 + x^2})^{-1} e^{-\sqrt{2}s}|$$

как решение уравнения $|\varphi(s) + \sqrt{k_1 + \varphi^2}| = |x + \sqrt{k_1 + x^2}| e^{s\sqrt{2}}$. При этом заметим, что

$$k_1 + 2\hat{\varphi}^2(s) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{k_1 + x^2})^2 e^{2\sqrt{2}s} + \frac{1}{2} k_1 (x + \sqrt{k_1 + x^2})^{-2} e^{-2\sqrt{2}s}.$$

Значение экстремума находим простым интегрированием

$$\Lambda(\tau,\ x,\ y)=\int_0^\tau\{-\widehat{\varphi}^2(s)-\frac{1}{2}\widehat{\dot{\varphi}}^2(s)\}=-\int_0^\tau(2\widehat{\varphi}^2(s)+k_1)ds$$

$$=-\frac{1}{2}(x+\sqrt{k_1+x^2})^2\int_0^\tau e^{2\sqrt{2}s}ds-\frac{1}{2}k_1^2(x+\sqrt{k_1+x^2})^{-2}\int_0^\tau e^{-2\sqrt{2}s}ds$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\frac{(y+\sqrt{k_1+y^2})^4-k_1^2}{(y+\sqrt{k_1+y^2})^2}+\frac{k_1^2-(x+\sqrt{k_1+x^2})^4}{(x+\sqrt{k_1+x^2})^2}\right]=-\frac{1}{\sqrt{2}}[y\sqrt{k_1+y^2}-x\sqrt{k_1+x^2}].$$

Подставляя значение для k_1 и учитывая, что $\Lambda(0,\ x,\ x)=0$, получаем

$$\Lambda(\tau,\ x,\ y)=[-(x^2+y^2)\operatorname{ch}\tau\sqrt{2}+2xy]/\sqrt{2}\operatorname{sh}\tau\sqrt{2}.$$

Кроме того, $\sup\{\Lambda(\tau,\ x,\ y):\ y\in R^1\}$ достигается в точке $y=x/\operatorname{ch}\tau\sqrt{2}$. Следовательно, $\Lambda_{R^1}(\tau,\ x)=-x^2\operatorname{th}\tau\sqrt{2}/\sqrt{2}$. Таким образом, в силу теоремы 1

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\widetilde{m}^\varepsilon(\tau,\ x,\ y)=\Lambda(\tau,\ x,\ y)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{(x^2+y^2)\operatorname{sh}\tau\sqrt{2}-2xy}{\operatorname{sh}\tau\sqrt{2}},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\mathsf{E}\mu^\varepsilon_{xt}(R^1)=\Lambda_{R^1}(\tau,\ s)=-\frac{x^2\operatorname{th}\sqrt{2}\tau}{\sqrt{2}},$$

что и подтверждается точным решением уравнения (8). Теперь, вычислим первый член асимптотического разложения теоремы 1. Имеем

$$A(s)=0,\ B(s)=1,\ C(s)=0,\ c''_{xx}=-2.$$

Уравнение Риккати имеет вид $V'_s+V^2=2$. Его решение есть $V(s)=\sqrt{2}\operatorname{th}\sqrt{2}\,s$. Следовательно,

$$\Gamma_0=\exp\{-\frac{1}{2}\int_0^\tau V(s)ds\}=\exp\{-\frac{1}{2}\ln\operatorname{ch}\tau\sqrt{2}\}=(\operatorname{ch}\tau\sqrt{2})^{-1/2}.$$

Очевидно, это тоже согласуется с точным решением.

Замечание. Также легко вычисляются примеры, когда $a(x)=1$, $b(x)=x$, $c(x)\equiv c$. Если $c(x)=\sin x$, $a=1$, $b=0$, или $c(x)=e^{-x^2}$, $a=1$, $b=0$, или $c(x)=1/(1+x^2)$, $a=1$, $b=0$, то первый интеграл уравнения Эйлера сводится к эллиптическим интегралам. В частном случае, когда диффузионный процесс $\widetilde{x}^\varepsilon_\tau$ имеет переходную плотность $\widetilde{p}^\varepsilon(\tau,\ x,\ y)$ и $c(x)\equiv c$, можно применить результаты Кифера [7] и Молчанова [8] для получения асимптотического разложения плотности меры $\mu^\varepsilon_{xt}(U)$, $U\in\mathfrak{B}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Севастьянов. Ветвящиеся процессы. Москва, 1971.
2. К. Ито, Г. Маккин. Диффузионные процессы и их траектории. Москва, 1968.
3. И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. Вариационное исчисление. Москва, 1961.
4. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. Москва, 1979.
5. Р. Рокафеллар. Выпуклый анализ. Москва, 1973.

6. В. Н. Дубровский. Точные асимптотические формулы лапласовского типа для марковских процессов. *Доклады АН СССР*, **226**, 1976, 1001—1004.
7. Ю. И. Кифер. Об асимптотике переходных плотностей процессов с малой диффузией. *Теория вероятн. примен.*, **21**, 1976, 527—536.
8. С. А. Молчанов. Диффузионные процессы и риманова геометрия. *Успехи матем. наук*, **30**, 1975, 3—59.
9. П. И. Майстер. Ветвящиеся диффузионные процессы в неограниченной области. *Матем. сб.*, **114**, 1984, 406—424.
10. S. R. Varadhan. Asymptotic probabilities and differential equations. *Comm. Pure Appl., Math.*, **19**, 1966, 261—286.
11. M. Schilder. Some asymptotic formulas for Wiener integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.* **125**, 1966, 63—85.

Институт иностранных студентов
1111 София

Поступила 4. 9. 1981