PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

ПРОЦЕСС БЕЛЛМАНА—ХАРРИСА С ГИБКИМ ЭКРАНОМ В НУЛЕ

КОСТО В. МИТОВ

Для процесса Беллмана—Харриса с иммиграцией только в нуле доказаны предельные теоремы в докритическом и критическом случае.

1. Введение. До сих пор нет общего описания асимптотических свойств разложимых ветвящихся процессов в зависимости от их структуры, а рассматривались лишь некоторые частные случаи. Особый интерес представляют те разложимые процессы, которые иногда интерпретируются как ветвящиеся процессы с иммиграцией. Впервые такие процессы в марковском случае полностью исследованны Севастьяновым [1]. Jagers [9] обобщил эту схему для процессов, в которых время жизни имеет произвольный закон распределения. Он исследовал асимптотику первых моментов и получил предельную теорему в докритическом случае. В работах Янева [3, 4] модель Севастьянова рассматривается для ветвящихся процессов с превращениями, зависящими от возраста частиц, причем моменты иммиграции образуют соответственно пуассоновый поток и процесс восстановления.

В Foster [8] рассматривается процесс Гальтона—Ватсона с иммиграцией только в нуле. Для этого процесса исследованы асимптотическое поведение вероятности продолжения, первые и вторые факториальные моменты и получена предельная теорема в критическом случае. В Pakes [10] были изучены докритический и надкритический случаи.

В настоящей работе эта модель обобщается для процессов Беллмана—Харриса. Полученны результаты об асимптотике вероятности продолжения, первых и вторых факториальных моментов и доказаны предельные теоремы в докритическом и критическом случае.

2. Описание модели. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ задано множество $Z=\{Z_t^{(n)}, n=1, 2, \ldots\}$ независимых ветвящихся процессов Беллмана—Харриса с одинаковыми конечномерными распределениями, т. е. для каждого процесса $\{Z_t^{(n)}\}_{t\geq 0}$ из Z, $Z_0^{(n)}=1$, распределение потомства одной частицы — это $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}, \sum_k p_k=1$, $h(s)=\sum_k p_k s^k$, а продолжительность жизни Λ одной частицы имеет функцию распределения (ф. р.) $G(t)=\mathsf{P}\{\Lambda\leq t\}$.

Известно [6 теорема 1, с. 139] что если

$$(1)\qquad G(0+)=0,$$

то вероятностная производящая функция (в. п. ф.) $F(t;\, s)=\mathsf{E}\{s^{Z_t^{(n)}}|Z_0^{(n)}=1\}$ процесса $\{Z_t^{(n)}\}_{t\geq 0}$ есть единственное решение нелинейного интегрального уравнения

(2) $$F(t;\ s)=s(1-G(t))+\int_0^t h(F(t-u;\ s))G(du),$$

$$F(0;\ s)=s.$$

Из [6] еще известно, что когда процесс $\{Z_t^{(n)}\}_{t\geq 0}$ критический или докритический ($h'/(1)=1$ или $h'/(1)<1$), то он вырождается с вероятностью 1. В дальнейшем будем предполагать, что $h'/(1)\leqq 1$.

Пусть $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ случайные величины (сл. в.) такие, что

$$\{Z_0^{(n)}=1;\ Z_t^{(n)}>0,\ 0\leqq t<\tau_n;\ Z_{\tau_n}^{(n)}=0\},$$

т. е. τ_n есть время вырождения процесса $\{Z_t^{(n)}\}_{t\geq 0}$. Из вышесказанного очевидно, что $\tau=\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ — независимые и одинаково распределенные сл. в. с ф. р. $F(t)=\mathsf{P}\{\tau_n\leqq t\}=F(t;\ 0)$ и $\mathsf{P}\{\tau_n<\infty\}=F(\infty)=1$. Пусть на $(\Omega,\ \mathfrak{A},\ \mathsf{P})$ задана еще и последовательность независимых и одинаково распределенных сл. в. $\sigma=\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ф. р. $K(t)=(1-e^{-qt})$; $t\geqq 0$, где $0<q<1$. Будем предполагать, что σ не зависит от Z, а, следовательно, и от τ.

Обозначим $\Delta_n=\sigma_n+\tau_n$, $n=1, 2, \ldots$ Ввиду независимости σ_n и τ_n для ф. р. $L(t)=\mathsf{P}\{\Delta_n\leqq t\}$ имеем

(3) $$L(t)=(K*F)(t)=\int_0^t F(t-u)K(du).$$

Последовательность $\Delta=\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяет собственный процесс восстановления $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, где

(4) $$S_0=0,\ S_{n+1}=S_n+\Delta_n,\ n=0, 1, 2, \ldots$$

Обозначим $N(t)=\max\{n;\ S_n\leqq t<S_{n+1}\}+1$ и $H(t)=\mathsf{E}\{N(t)\}$. Известно, что $H(t)$ является единственным решением уравнения восстановления

$$H(t)=I(t)+\int_0^t H(t-u)L(du),$$

где $I(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$, и что $H(t)$ является мерой, сосредоточенной на $[0,\infty)$ с единичным атомом в нуле [5].

Теперь определим процесс $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ следующим образом:

(5) $$Z_0=0,\qquad Z_t=\begin{cases}Z^{(N(t))}_{t-(S_{N(t)-1}+\sigma_{N(t)})}, & t\geqq S_{N(t)-1}+\sigma_{N(t)}\\ 0, & t<S_{N(t)-1}+\sigma_{N(t)}\end{cases}.$$

Этот процесс можно интерпретировать таким образом. Начиная с $Z_0=0$, Z_t остается равным нулю на интервале $[0,\ \sigma_1)$. В момент $t=\sigma_1$ Z_t становится равным 1 и на интервале $[\sigma_1,\ \sigma_1+\tau_1)$, $Z_t=Z_{t-\sigma_1}^{(1)}>0$. В момент $\Delta_1=\sigma_1+\tau_1$, когда процесс $Z_{t-\sigma_1}^{(1)}$ выродится, Z_t снова попадает в нуль, где остается время σ_2. В момент $\Delta_1+\sigma_2=S_1+\sigma_2$ процесс становится снова равным 1 и в интервале $[S_1+\sigma_2,\ S_2)$, $Z_t=Z^{(2)}_{t-(S_1+\sigma_2)}>0$ и т. д. Отсюда нетрудно заметить, что процессы $Z_t=Z_{t-S_0},\ Z_{t-S_1},\ Z_{t-S_2}, \ldots$ стохастически эквивалентны.

3. Уравнения для производящих функций. Введем обозначения:

$$\Phi(t\,;\ s)=\mathsf{E}\{s^{Z_t}\mid Z_0=0\}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)s^k,$$

$$P_k(t)=\mathsf{P}\{Z_t=k\mid Z_0=0\},\ k=0,1,2,\dots,$$

$$R(t\,;\ s)=1-\Phi(t\,;\ s),\ R(t)=R(t\,;\ 0)=1-P_0(t),$$

$$Q(t\,;\ s)=1-F(t\,;\ s),\ Q(t)=Q(t\,;\ 0).$$

Теорема 1. *В. п. ф.* $\Phi(t\,;\ s)$ *удовлетворяет для каждого* $s\in[0,1]$ *следующему уравнению восстановления:*

$$\Phi(t\,;\ s)=\int_0^t\Phi(t-u\,;\ s)L(du)+\int_0^t F(t-u\,;\ s)K(du)+1-K(t)-L(t), \tag{6}$$

или, что то же самое,

$$R(t\,;\ s)=\int_0^t R(t-u\,;\ s)L(du)+\int_0^t Q(t-u\,;\ s)K(du). \tag{7}$$

Доказательство. Для доказательства (6) вычислим в $\mathsf{E}\{s^{Z_t}\}$ сначала условное математическое ожидание $\mathsf{E}\{s^{Z_t}\mid\sigma_1,\tau_1\}$, где σ_1 — момент начала процесса $Z_t^{(1)}$, а $\sigma_1+\tau_1$ — момент его вырождения. Из определения Z_t вытекает, что

а) если $\sigma_1>t$, то $Z_t=0$;

б) если $\sigma_1=u\le t<u+\tau_1$, то $Z_t=Z_{t-u}^{(1)}>0$;

в) если $\sigma_1+\tau_1=\Delta_1=u\leqq t$, то $Z_t=Z_{t-\Delta_1}=Z_{t-u}$.

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\{s^{Z_t}\mid\sigma_1>t\}=1;\\
&\mathsf{E}\{s^{Z_t}\mid\sigma_1=u\leqq t<u+\tau_1\}=\mathsf{E}\{s^{Z_{t-u}^{(1)}}\mid Z_{t-u}^{(1)}>0\}\\
&=[F(t-u\,;\ s)-F(t-u\,;\ 0)]\,/\,Q(t-u);\\
&\mathsf{E}\{s^{Z_t}\mid\Delta_1=u\leqq t\}=\mathsf{E}\{s^{Z_{t-u}}\}=\Phi(t-u\,;\ s).
\end{aligned}\tag{8}$$

Имея в виду, что сл. в. σ_1 и τ_1 независимы, получаем

$$\begin{aligned}
&\Phi[t\,;\ s)=\mathsf{E}\{\mathsf{E}\{s^{Z_t}\mid\sigma_1,\ \tau_1\}\}=1-K(t)\\
&+\int_0^t(F(t-u\,;\ s)-F(t-u\,;\ 0))K(du)+\int_0^t\Phi(t-u\,;\ s)L(du).
\end{aligned}\tag{9}$$

Теперь на (3) и (9) следует (6).

Теорема 2. *Уравнение* (6) *имеет единственное решение в классе в. п. ф., которое можно представить следующим образом:*

$$(10)\qquad \Phi(t;\ s)=1-q\int_0^t P_0(t-u)Q(u;\ s)du,$$

где
$$P_0(t)=(H*(I-K))(t)=\int_0^t e^{-q(t-u)}H(du).$$

Доказательство. Полагая в (7) $s=0$, получаем

$$(11)\qquad R(t)=\int_0^t R(t-u)L(du)+\int_0^t Q(t-u)K(du).$$

Ввиду того, что $\int_0^t Q(t-u)K(du)=K(t)-L(t)$, то $0\leq\int_0^t Q(t-u)K(du)\leq 1$, если $t\geq 0$ и $\int_0^t Q(t-u)K(du)=0$, если $t<0$. Отсюда, в силу Теоремы 1 ([5], 232), функция $R=H*K-H*L$ является единственным решением уравнения (11) в классе функций, равных нулю на $(-\infty, 0)$ и ограниченных на всех конечных подынтервалах из $[0, \infty)$. Замечая, что $H*L=H-I$, получаем уравнение $R=I-H*(I-K)$, которое при $t\geq 0$ имеет вид $R(t)=1-(H*(I-K))(t)$. Отсюда

$$(12)\qquad P_0(t)=(H*(I-K))(t)=\int_0^t e^{-q(t-u)}H(du).$$

Аналогичным образом для каждого фиксированного $s\in(0, 1]$ получаем что уравнение (7) имеет единственное решение

$$(13)\qquad R(t;\ s)=H*\int_0^t Q(t-u;\ s)K(du)=\int_0^t\Big(\int_0^{t-v} Q(t-u-v;\ s)K(du)\Big)H(dv)$$

в классе функций, обращающихся в 0 при $t\in(-\infty, 0)$ и ограниченных на всех конечных t-интервалах из $[0, \infty)$. Осталось показать, что $R^*(t;\ s)=q\int_0^t P_0(t-u)Q(u;\ s)du$, где $P_0(t)$ определяется чрез (12) и совпадает с $R(t;\ s)$, определяемым (13). Пусть $s\in(0, 1]$ фиксированно. Из (12) получаем

$$(14)\qquad R^*(t;\ s)=q\int_0^t\Big(\int_0^{t-u} e^{-q(t-u-v)}H(dv)\Big)Q(u;\ s)du$$
$$=q\int_0^t\Big(\int_v^w e^{-q(w-v)}H(dv)\Big)Q(t-w;\ s)dw$$
$$=q\int_0^t\Big(\int_v^t e^{-q(w-v)}Q(t-w;\ s)dw\Big)H(dv)$$
$$=\int_0^t\Big(\int_0^{t-v} q\,e^{-qu}Q(t-u-v;\ s)du\Big)H(dv),$$

т. е. для каждого фиксированного $s\in[0, 1]$, $R^*(t;\ s)=R(t;\ s)$.

Теорема доказана полностью.

Определение. *Процесс $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ будем называть критическим, если $a=h'(1-)=1$, и докритическим, если $a=h'(1-)<1$.*

4. Вероятности вырождения. Здесь изучим асимптотическое поведение при $t\to\infty$, вероятности вырождения $\mathsf{P}\{Z_t=0\,|\,Z_0=0\}$ в докритическом и критическом случае.

Определим действительное число α как корень уравнения

$$a\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,G(dt)=1. \tag{15}$$

Если $a=1$, то $\alpha=0$. Если $a<1$, то уравнение (15) может не иметь корня, но если такой существует, то он обязательно отрицателен. В дальнейшем будем предполагать, что существует единственный корень уравнения (15).

Теорема 3. *Пусть процесс докритический, $G(t)$ — неарифметическая ф. р. и $\mu_\alpha=a\int_0^\infty t\,e^{-\alpha t}\,G(dt)<\infty$. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty}P_0(t)=P_0=(1+q\int_0^\infty Q(t)dt)^{-1}\in(0,1). \tag{16}$$

Доказательство. Полагая в (6) $s=0$, при $t\geqq 0$ получаем

$$P_0(t)=e^{-qt}+\int_0^t P_0(t-u)L(du). \tag{17}$$

В силу условия теоремы $Q(t)=O(e^{-\alpha t})$при $t\to\infty$ [6, теорема 1, с. 162] Следовательно, $\mathsf{E}\{\tau_n\}=\int_0^\infty Q(t)dt<\infty$. Математическое ожидание $\mathsf{E}\{\sigma_n\}=\int_0^\infty e^{-qt}\,dt=q^{-1}$. Отсюда получаем, что $\mathsf{E}\{\Delta_n\}=\int_0^\infty tL(dt)=\mathsf{E}\{\sigma_n\}+\mathsf{E}\{\tau_n\}<\infty$ Заметим еще, что e^{-qt}, $(t\geqq 0)$ есть непосредственно интегруемая по Риману функция. Применяя теперь к уравнению (17) теорему восстановления (см 5, теорема 2, с. 427]), получаем, что

$$\lim_{t\to\infty}P_0(t)=(\int_0^\infty e^{-qt}\,dt)\,/\,(\int_0^\infty tL(dt)),$$

которое эквивалентно (16).

Теорема 4. *Пусть процесс критический, $0<h''(1-)=b^2<\infty$, $G(t)$ — неарифметическая ф. р., $\lim_{t\to\infty}t^2(1-G(t))=0$, и $0<\mu=\int_0^\infty tG(dt)<\infty$. Тогда при $t\to\infty$*

$$P_0(t)\sim(b^2\,/\,2\mu q)\log^{-1}t. \tag{18}$$

Доказательство. Докажем сначала, что в условиях теоремы при $t\to\infty$

$$1-L(t)\sim(2\mu\,/\,b^2)t^{-1}. \tag{19}$$

Из (3) получаем

$$\begin{aligned}1-L(t)&=\int_0^\infty K(dt)-\int_0^t F(t-u)K(du)\\&=e^{-qt}+\int_0^t Q(t-u)q\,e^{-qu}\,du=I_1+I_2.\end{aligned} \tag{20}$$

Очевидно, что

$$I_1=e^{-qt}=o(t^{-1}),\quad t\to\infty. \tag{21}$$

Представим I_2 как сумму двух слагаемых

$$(22)\qquad I_2=\int\limits_0^{t/\log t} Q(t-u)q\,e^{-qu}\,du+\int\limits_{t/\log t}^{t} Q(t-u)q\,e^{-qu}\,du=I_{21}+I_{22}.$$

Далее имеем

$$(23)\qquad 0\leqq I_{22}\leqq \int\limits_{t/\log t}^{t} d(1-e^{-qu})=e^{-q(t/\log t)}-e^{-qt}\leqq e^{-q(t/\log t)}=o(t^{-1}),\ t\to\infty.$$

Поскольку выполняются условия теоремы 1 ([6], с. 143), то $Q(t)$ монотонно убывает по t, и, следовательно,

$$(24)\qquad Q(t)\int\limits_0^{t/\log t} K(du)\leqq I_{21}\leqq Q(t(1-\log^{-1}t))\,.\int\limits_0^{t/\log t} K(du).$$

Отсюда, ввиду того, что в условии теоремы при $t\to\infty$ $Q(t)\sim(2\mu/b^2)t^{-1}$ (см. [6 , с. 159]) и того, что $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^{t/\log t} K(du)=1$, немедленно получаем, что при $t\to\infty$

$$(25)\qquad I_{21}\sim(2\mu\,/\,b^2)\,t^{-1}.$$

Теперь из (21), (22), (23), (25) вытекает (19). Поскольку $e^{-qt}(t\geqq 0)$ непосредственно интегруемая по Риману функция, из (19) и (21), применяя к уравнению (17) результат Ериксона (см. [7, Теорема 3]), получаем

$$P_0(t)\sim([\Gamma(1)\Gamma(1)]^{-1}\int\limits_0^{\infty} e^{-qu}\,du)\,/\int\limits_0^{t}(1-L(u))du,\ t\to\infty.$$

Отсюда, ввиду того, что $\int_0^\infty e^{-qu}\,du=q^{-1}$ и $\int_0^t(1-L(u)du\sim(2\mu/b^2)\log t$ при $t\to\infty$, получаем (18).

5. Моменты. Введем следующие обозначения для факториальных моментов

$$A(t)=\mathsf{E}\{Z_t^{(n)}\}=\frac{\partial}{\partial s}F(t\,;\,s)|_{s=1},\ B(t)=\mathsf{E}\{Z_t^{(n)}(Z_t^{(n)}-1)\}$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial s^2}F(t\,;\,s)|_{s=1},\ M(t)=\mathsf{E}\{Z_t\}=\frac{\partial}{\partial s}\Phi(t\,;\,s)|_{s=1},$$

$$V(t)=\mathsf{E}\{Z_t(Z_t-1)\}=\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Phi(t\,;\,s)|_{s=1}.$$

Для изучения моментов воспользуемся уравнением (10). Как известно [6 , с. 153], моменты процесса $\{Z_t^{(n)}\}_{t\geqq 0}$ конечны тогда и только тогда, когда конечны соответствующие моменты потомства одной частицы.

Пусть $h'(1)<\infty$, тогда $A(t)<\infty$ для каждого $t\geqq 0$. Дифференцируя (10) по s, для $0\leqq s<1$ получаем

$$(26)\qquad \Phi'(t\,;\,s)=q\int\limits_0^t P_0(t-u)F'(u\,;\,s)du\leqq q\int\limits_0^t A(u)du<\infty.$$

Теперь, ввиду монотонности $\Phi'(t\,;\,s)$ по s следует, что $\Phi'(t\,;\,s)$ сходится к пределу $M(t)$, когда $s\uparrow 1$, а ввиду (25) получаем, что $M(t)\leqq q\int_0^t A(u)du<\infty$ для каждого конечного $t\in[0,\infty)$.

Отсюда следует, что в (26)можно перейти к пределу по $s\uparrow 1$. Получаем

$$M(t)=q\int_0^t P_0(t-u)A(u)du<\infty \tag{27}$$

для каждого конечного $t\in[0,\infty)$.

Аналогичным образом получается, что

$$V(t)=q\int_0^t P_0(t-u)B(u)du \tag{28}$$

для каждого $t\in[0,\infty)$, когда $h''(1-)<\infty$.

Используем теперь уравнения (27) и (28), чтобы получить асимптотику $M(t)$ и $V(t)$ при $t\to\infty$.

Теорема 5. *Пусть процесс докритический, $G(t)$ — неарифметическая ф. р. и $\mu_\alpha=\alpha\int_0^\infty te^{-\alpha t}G(dt)<\infty$. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} M(t)=M_0, \tag{29}$$

где $M_0=(q\int_0^\infty A(u)du)/(1+q\int_0^\infty Q(u)du)$.

Доказательство. Поскольку выполняются условия Теоремы 3В [6, с. 152], то $A(t)\sim me^{\alpha t}_\infty$ при $t\to\infty$. Ввиду того, что $\alpha<0$, то интеграл $\int_0^\infty A(t)dt$ сходится. Кроме того, в условиях теоремы имеет место (16). Отсюда сразу вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty} M(t)=\lim_{t\to\infty} q\int_0^t P_0(t-u)A(u)du=q(\lim_{t\to\infty} P_0(t))\int_0^\infty A(u)du.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть процесс критический, $0<b^2=h''(1-)<\infty$, $G(t)$ — неарифметическая ф. р., $\lim_{t\to\infty}t^2(1-G(t))=0$ и $0<\mu=\int_0^\infty tG(dt)<\infty$. Тогда при $t\to\infty$*

$$M(t)\sim(b^2/2\mu)t\log^{-1}t. \tag{30}$$

Доказательство. Поскольку выполняются условия Теоремы 3А [6, с. 152], то $A(t)\equiv 1$, поэтому уравнение (27) имеет вид

$$M(t)=q\int_0^t P_0(u)du. \tag{31}$$

Так как выполняются условия теоремы 4, то имеет место (18). Используя это и применяя к интегралу в первой части (31) теорему 1 из [5, с. 341], получаем (30).

Теорема 7. *Пусть процесс докритический, $b^2=h''(1-)<\infty$, $G_\alpha(t)=\alpha\int_0^t e^{-\alpha u}G(du)$ — ф. р. абсолютно непрерывного типа и $\mu_\alpha=\int_0^\infty tG_\alpha(dt)<\infty$. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} V(t)=V_0, \tag{32}$$

где $V_0=(q\int_0^\infty B(u)du)/(1+q\int_0^\infty Q(u)(du)$.

Доказательство. Проводится аналогично доказательству теоремы 5, только вместо (27) используется (28), а сходимость интеграла $\int_0^\infty B(u)du$

следует из асимптотики $B(t) \sim ne^{-\alpha t}$, $t \to \infty$, которая имеет место в условиях теоремы (см. [2, теорема 10, с. 288]).

Теорема 8. *Пусть процесс критический* $0 < b^2 = h''(1-) < \infty$, $0 < \mu = \int_0^\infty tG(dt) < \infty$, $\mu_2 = \int_0^\infty t^2 G(dt) < \infty$, $\lim_{t\to\infty} t^2(1-G(t)) = 0$, *и* $G(t)$ — *неарифметическая ф. р. Тогда при* $t \to \infty$,

$$V(t) = (b^2/2\mu)^2 t^2 \log^{-1} t + O(t \log^{-1} t). \tag{33}$$

Доказательство. В условиях теоремы имеет место асимптотическая формула

$$B(t) = (b^2/\mu)t + b^2\mu_2/2\mu - b^2 + \varepsilon_t, \quad t \to \infty, \tag{34}$$

где $\lim_{t\to\infty} \varepsilon_t = 0$ (см. [2, Замечание 2, с. 295]).

Используя (34), представим интеграл в правой части (28) следующим образом:

$$V(t) = q\int_0^t P_0(t-u)(b^2/\mu)u\,du + q\int_0^t P_0(t-u)(b^2\mu_2/2\mu - b^2 + \varepsilon_u)du. \tag{35}$$

Для второго интеграла в правой части (35) имеем

$$|q_0\int_0^t P_0(t-u)(b^2\mu_2/2\mu - b^2 + \varepsilon_u)du| \leq C\int_0^t P_0(u)du = O(t\log^{-1}t), \; t \to \infty. \tag{36}$$

Здесь $0 < C = b^2\mu_2/2\mu - b^2 + \sup_{0\leq u<\infty} |\varepsilon_u| < \infty$, а оценка интеграла была уже получена в теореме 6.

После замены переменных $t-u=v$ в (35), получаем

$$q\int_0^t P_0(v)(b^2/\mu)(t-v)dv = (qb^2/\mu)\left[t\int_0^t P_0(v)dv - \int_0^t vP_0(v)dv\right]. \tag{37}$$

Из теоремы 1 [5, с. 341], ввиду (18), получаем

$$\lim_{t\to\infty} \left[(qb^2/\mu)t\int_0^t P_0(u)du\right] / (qb^2/\mu)t^2P_0(t) = 1,$$

$$\lim_{t\to\infty} \left[(qb^2/\mu)\int_0^t uP_0(u)du\right] / (qb^2/\mu)t^2P_0(t) = \frac{1}{2}.$$

Отсюда и из (37) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \left[(qb^2/\mu)\int_0^t P_0(u)(t-u)du\right] / \left[(qb^2/2\mu)t^2P_0(t)\right] = 1. \tag{38}$$

Теперь из (18), (35)–(37) следует (33). Теорема 7 доказана.

6. Предельные теоремы.

Теорема 9. *Пусть процесс докритический,* $G(t)$ — *неарифметическая ф. р. и* $\mu_\alpha = \int_0^\infty t\,G_\alpha(dt) < \infty$. *Тогда существуют пределы*

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{Z_t = k \mid Z_t > 0\} = d_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{39}$$

и

(40) $$\sum_{k=1}^{\infty} d_k s^k = 1 - [\int_0^{\infty} Q(u;s)du] / [\int_0^{\infty} Q(u)du], \quad 0 \leqq s \leqq 1,$$

(41) $$\sum_{k=1}^{\infty} d_k = 1.$$

Доказательство. Известно, что $\mathsf{E}\{s^{Z_t} | Z_t > 0\} = 1 - R(t;s) / - R(t)$. Перепишем (10) в виде

$$R(t;s) = q \int_0^t P_0(t-u)Q(u;s)du.$$

Из неравенства

(42) $$Q(t;s) \leqq A(t)(1-s),$$

для каждого $t \geqq 0$ и $0 \leqq s \leqq 1$ и из того, что в условиях теоремы $A(t) \sim me^{\alpha t}$ $(\alpha < 0)$ при $t \to \infty$. [6, Теорема 3B, с. 152], следует сходимость интеграла $\int_0^{\infty} Q(u;s)du$, для каждого $s \in [0, 1]$. Поскольку выполняются условия теоремы 3, ввиду (16), для каждого $s \in [0, 1]$ имеем

$$\lim_{t \to \infty} R(t;s)/R(t) = [\lim_{t \to \infty} q \int_0^t P_0(t-u)Q(u;s)du] / [\lim_{t \to \infty} (1 - P_0(t))]$$
$$= [qP_0 \int_0^{\infty} Q(u;s)du] / (1 - P_0).$$

Отсюда следует, что для каждого $s \in [0, 1]$

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{E}\{s^{Z_t} | Z_t > 0\} = 1 - [qP_0 \int_0^{\infty} Q(u;s)du] / (1 - P_0).$$

Этим доказаны (в силу теоремы непрерывности в. п. ф.) (39) и (40). Для доказательства (41) заметим, что ввиду (42) $\int_0^{\infty} Q(u;s)du \leqq (1-s) \int_0^{\infty} A(u)du$. Теперь при $s \uparrow 1$ получаем, что $\lim_{s \uparrow 1} \sum_k d_k s^k = 1$. Отсюда следует (41).

Теорема 10. *Пусть процесс критический* $0 < b^2 = h''(1-) < \infty$, $G(t)$ — *неарифметическая ф. р.,* $0 < \mu = \int_0^{\infty} t\, G(dt) < \infty$ *и* $\lim_{t \to \infty} t^2(1 - G(t)) = 0$. *Тогда*

$$\lim_{t \leftarrow \infty} \mathsf{P}\{(\log Z_t) / \log t \leqq x\} = x, \quad 0 < x < 1.$$

Доказательство. При $0 < x < 1$ рассмотрим преобразование Лапласа—Стильтеса

(43) $$\mathsf{E}\{e^{-(\lambda Z_t)/t^x}\} = 1 - q \int_0^t P_0(t-u)Q(u; e^{-\lambda t^{-x}})du.$$

Полагая $\rho(t) = P_0(t) / [(b^2/2\mu q) \log^{-1} t] - 1$ и $\alpha(t;s) = [(b^2/2\mu)t(1-s) + 1]Q(t;s) \times (1-s)^{-1} - 1$ при $t > 0$ и $s \in [0,$ и $1)$, представим интеграл в правой части (43) следующим образом при $\lambda > 0$ и $0 < x < 1$:

(44) $$q \int_0^t P_0(t-u)Q(u; e^{-\lambda t^{-x}})du = q \int_{t/2}^t P_0(t-u)Q(u; e^{-\lambda t^{-x}})du$$

$$+(b^2/2\mu)\int_0^{t/2}[1+\rho(t-u)][1+\alpha(u;\,e^{-\lambda t^{-x}})]\log^{-1}(t-u)$$

$$\times[(1-e^{-\lambda t^{-x}})^{-1}+(b^2/2\mu)u]^{-1}du$$

$$=(b^2/2\mu)\int_0^{t/2}\log^{-1}(t-u)[1+(b^2/2\mu)u(1-e^{-\lambda t^{-x}})]^{-1}(1-e^{-\lambda t^{-x}})du$$

$$+(b^2/2\mu)\int_0^{t/2}\rho(t-u)\log^{-1}(t-u)\,Q(u;\,e^{-\lambda t^{-x}})du$$

$$+(b^2/2\mu)\int_0^{t/2}\log^{-1}(t-u)\alpha(u;\,e^{-\lambda t^{-x}})[(1-e^{-\lambda t^{-x}})^{-1}+(b^2/2\mu)u]^{-1}du$$

$$+q\int_{t/2}^{t}P_0(t-u).\,Q(u;\,e^{-\lambda t^{-x}})du=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Для I_1 справедливы неравенства

$$I_1\leqq(b^2/2\mu)\log^{-1}(t/2)\int_0^{t/2}(1-e^{-\lambda t^{-x}})[1+(b^2/2\mu)u(1-e^{-\lambda t^{-x}})]^{-1}du,$$

$$I_1\geqq(b^2/2\mu)\log^{-1}t\int_0^{t/2}(1-e^{-\lambda t^{-x}})[1+(b^2/2\mu)u(1-e^{-\lambda t^{-x}})]^{-1}du.$$

После интегрирования эти неравенства принимают вид

$$I_1\leqq(\log^{-1}(t/2))\log(1+(b^2/4\mu)t(1-e^{-\lambda t^{-x}})),$$

$$I_1\geqq(\log^{-1}t).\log(1+(b^2/4\mu)t(1-e^{-\lambda t^{-x}}),$$

или, что то же самое,

$$I_1\leqq(1-x)(\log t)\log^{-1}(t/2)+(\log^{-1}(t/2))$$

$$\times\log(t^{x-1}+(b^2/4\mu)t^x(1-e^{-\lambda t^{-x}})),$$

$$I_1\geqq(1-x)+(\log^{-1}t).\log(t^{x-1}+(b^2/4\mu)t^x(1-e^{-\lambda t^{-x}})).$$

Поскольку $0<x<1$, $\lambda>0$, $b^2>0$ и $1-e^{-y}=y+o(y)$ при $y\downarrow 0$, то, после перехода к пределу по $t\to\infty$, получаем

$$\lim_{t\to\infty} I_1=1-x. \tag{45}$$

В условиях теоремы $\lim\limits_{t\to\infty}(\sup\limits_{0\leqq s<1}|\alpha(u;\,s)|)=0$, (см. [6, теорема 1, с. 158]) и $\lim\limits_{t\to\infty}|\rho(t)|=0$ (см. (19)). Следовательно, при $t\to\infty$

$$|I_2|\leqq C\sup_{t/2\leqq u\leqq t}|\rho(u)|.\,I_1=o\;(1), \tag{46}$$

для каждого $\lambda>0$ и $0<x<1$.

В силу теоремы о представлении медленно меняющихся функций [5, следствие, с. 342], из неравенства

$$|I_3| \leqq C \log^{-1}(t/2) \int_0^{t/2} \sup_{0 \leqq s < 1} |\alpha(u\,;\,s)|\,(1+(b^2/2\mu)\,u)^{-1}\,du$$

следует, что

$$\lim_{t\to\infty} I_3 = 0 \tag{47}$$

для каждого $\lambda > 0$ и $0 < x < 1$.

В силу монотонности $Q(t, s)$ по t и s [6, теорема 1, с. 143], для I_4 получаем $0 \leqq I_4 \leqq Q(t/2) \int_0^{t/2} P_0(u)du$.

Поскольку в условиях теоремы $Q(t) \sim (b^2/2\mu)t^{-1}$ при $t \to \infty$, то из этого неравенства вытекает

$$\lim_{t\to\infty} I_4 = 0 \tag{48}$$

для каждого $\lambda > 0$ и $0 < x < 1$.

Теперь из (43)—(48) следует, что $\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\{e^{-(\lambda Z_t)/t^x}\} = x$ для каждого $\lambda > 0$ и $0 < x < 1$.

Применяя к последнему соотношению теорему о непрерывности, получаем для каждого $y > 0$ и $0 < x < 1$, $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{Z_t/t^x \leqq y\} = x$.

Отсюда утверждение теоремы вытекает очевидным образом.

7. Некоторые замечания. Пусть теперь вместо процессов $\{Z_t^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим процессы $\{\bar{Z}_t^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, которые имеют те же самые характеристики, как и $\{Z_t^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, только вместо $Z_0^{(n)} = 1$ предположим, что $\bar{Z}_0^{(n)} = \nu_n$, где ν_n — независимые одинаково распределенные сл. в., принимающие значения в $\mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$ с распределением $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и в. п. ф. $a(s) = \mathsf{E}\{s^{\nu_n}\} = \sum_k a_k s^k$, $|s| \leqq 1$.

Нетрудно проверить, что в. п. ф. $\bar{F}(t\,;\,s)$ процесса $\{\bar{Z}_t^{(n)}\}_{t\geqq 0}$ выражается через в. п. ф. $F(t\,;\,s)$ процесса $\{Z_t^{(n)}\}_{t\geqq 0}$, следующим способом:

$$\bar{F}(t\,;\,s) = a(F(t\,;\,s)). \tag{49}$$

Отсюда очевидным образом следует, что в докритическом и критичес ком случае процессы $\{\bar{Z}_t^{(n)}\}$ тоже вырождаются с вероятностью 1, и если через $\bar{\tau}_n$ обозначим время вырождения процесса $\{\bar{Z}_t^{(n)}\}_{t\geqq 0}$, то

$$\mathsf{P}\{\bar{\tau}_n \leqq t\} = \bar{F}(t\,;\,0) = a(F(t\,;\,0)).$$

Определим теперь процесс $\bar{Z}_t$ через $\sigma = \{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\bar{\tau} = \{\bar{\tau}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\bar{Z} = \{\bar{Z}_t^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ таким образом, как процесс Z_t в п. 2. Точно так, как это сделано в п. 3, можно показать, что в. п. ф. $\bar{\Phi}(t\,;\,s)$ процесса $\bar{Z}_t$ удовлетворяет уравнению восстановления

$$\bar{\Phi}(t\,;\,s) = 1 - K(t) - \bar{L}(t) + \int_0^t \bar{F}(t-u\,;\,s)K(du) + \int_0^t \bar{\Phi}(t-u\,;\,s)\bar{L}(du),$$

$$\bar{L}(t) = K * \bar{F}(t\,;\,0) = \int_0^t a(F(t-u\,;\,0))K(du).$$

Теперь, имея в виду (49), получаем

$$\bar{\Phi}(t; s) = 1 - K(t) - \bar{L}(t) + \int_0^t a(F(t-u; s)K(du) + \int_0^t \bar{\Phi}(t-u; s)\bar{L}(du).$$

Все результаты работы переносятся с очевидными изменениями на этот более общий случай, если дополнительно предположить, что $a'(1) < \infty$, $a''(1) < \infty$.

Автор весьма признателен Н. М. Яневу за его постоянное внимание и поддержку при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Севастьянов. Предельные теоремы для ветвящихся процессов специального вида. *Теория вероятн. примен.*, **2**, 1957, 339—348.
2. Б. А. Севастьянов. Ветвящиеся процессы. Москва, 1971.
3. Н. М. Янев. Разклоняващи се случайни процеси с имиграция. *Изв. Матем. инст. БАН*, **XV**, 1972, 72—87.
4. Н. М. Янев. Об одном классе разложимых ветвящихся процессов, зависящих от возраста частиц. *Mathem. Balkanica*, **2**, 1972, 58—75.
5. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. Москва, 1967.
6. K. Athrea, P. Ney. Branching Processes. Berlin, 1972.
7. K. B. Erickson. Strong renewal theorems with infinite mean. *Traus. Amer. Math. Soc.* **151**, 1970, 263—291.
8. J. Foster. A limit theorem for a branching process with state-dependent immigration *Ann. Math. Statist.*, **42**, 1971, 1773—1776.
9. P. Jagers. Age-dependent branching processes allowing immigration. *Theory Probab. Appl.*, **13**, 1968, 230—242.
10. A. G. Pakes. A branching process with a state-dependent immigration component. *Adv. Appl. Probab.*, **3**, 1971, 301—314.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 8. 03. 1982